INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA

GOVERNO FEDERAL BRASIL PAÍS RICO É PAÍS SEM POBREZA

GEOMETRIA E DEMONSTRAÇÃO: CONTRIBUINDO PARA A FORMAÇÃO DO PROFESSOR NAS SÉRIES FINAIS DA EDUCAÇÃO BÁSICA

Laura Cristina dos Santos

Trabalho de Conclusão do Curso Superior de Licenciatura em Matemática, orientada pela Profa. Me. Elisabete Teresinha Guerato

IFSP
São Paulo
2014

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Santos, Laura Cristina dos.
Geometria e Demonstração: Contribuindo para a Formação do Professor nas Séries Finais da Educação Básica / Laura Cristina dos Santos - São Paulo: IFSP, 2014.
76f

Trabalho de Conclusão do Curso Superior de Licenciatura em Matemática - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo.
Orientadora: Elisabete Teresinha Guerato.

1. Geometria. 2. Demonstração. 3. Educação Básica. 4. Formação de Professores. 5. Ensino de Matemática. I. Geometria e Demonstração: Contribuindo para a Formação do Professor nas Séries Finais da Educação Básica.

FOLHA DE APROVAÇÃO

CONFECCIONADA PELA COORDENAÇÃO.

"Não existe uma estrada real para a Geometria"

Euclides (300 a. C)

Aos meus pais e irmão

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por ter me dado forças e coragem desde o primeiro momento.

Aos meus pais, Marta e Aristides, e ao meu irmão, Guilherme, por me auxiliarem e compreenderem os momentos difíceis. Por toda a força que me deram desde o início da minha graduação, incentivando-me a nunca desistir e persistir nos meus objetivos.

Agradeço à Professora Mestre Elisabete Teresinha Guerato pelo carinho, orientação e dedicação na conclusão do trabalho. Aos professores da Licenciatura em Matemática que fizeram parte da minha formação e aprendizado.

Agradeço aos professores Henrique e Cristina Lopomo pela contribuição durante a confecção deste trabalho.

Agradeço, ainda, aos meus colegas da Graduação Marcos Afonso (Marcão), Anderson Oliveira, Bruna Rodrigues, Thais Cezaro, Thalita, Rafael Corradini, Misael, Leandro, Orlando, Daniella Paula, Anselmo, Cideni, Fabrício, Eligio, Pavan, Filipe, Wilian Oliveira e tantos outros por todos os momentos que compartilhamos.

RESUMO

O trabalho intitulado de *Geometria e Demonstração: Contribuindo para a Formação do Professor nas Séries Finais da Educação Básica* tem como objeto de pesquisa mostrar a importância da Geometria. Os pressupostos teóricos e metodológicos tiveram como principais teóricos Euclides (325 a.C. - 285 a.C.), Van Hiele e De Villiers (1956 -) que influenciaram o estudo geométrico e suas aplicações. A partir de pesquisas qualitativas, destaca-se a importância dos estudos geométricos que foram gradativamente sendo reformulados desde o Brasil Colônia até os documentos oficiais divulgados por meio da LDB e PCN. Apresentamos uma Sequência Didática que vem ao encontro do tema de demonstrações geométricas, estruturada nos modelos teóricos apresentados e suas aplicações. Este trabalho visa a uma relevante contribuição que o Ensino da Geometria tem a dar à Educação, principalmente no que se refere à Educação Básica.

Palavras-chave: Geometria, Demonstração, Educação Básica, Formação de Professores, Ensino de Matemática.

Geometry and Demonstration: Contributing to Teacher Training in the Final Grades of Basic Education

ABSTRACT

The paper entitled *Geometry and Demonstration: Contributing to Teacher Training in the Final Grades of Basic Education* has as objective of research show the importance of the geometry. The theoretical and methodological assumptions were mainly theoretical Euclid (325 a.C. – 285 a.C.), Van Hiele and De Villiers (1956 -) who influenced the study and its geometric applications. From qualitative research highlights the importance of geometric studies that were gradually being reformulated since colonial Brazil until the official documents released by the LDB and PCN. We present a didactic sequence that meets the theme of geometric statements, structured in theoretical presented and its applications. This work aims at a relevant contribution to the Teaching of Geometry has to be given to education, especially with regard to Basic Education.

Keywords: Geometry, Demonstration, Basic Education, Teacher Training, Mathematics Teaching.

LISTA DE FIGURAS

Pág.

SUMÁRIO

Pág.

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho visa mostrar a importância da Geometria na Educação Básica. Tem como objeto de estudo estabelecer inter-relações entre o ensino de Matemática e o ensino da Geometria tendo como suporte a “demonstração”, investindo em metodologias que tornem a aprendizagem mais significativa na abordagem desse conteúdo. Corroborar em estudos educacionais e como fonte de pesquisa para concepções sobre o ensino e a aprendizagem da Geometria com “demonstração” é nosso objetivo principal.

Foi por meio da graduação que passei a interessar-me pela Geometria mais intensamente e aprender a demonstrar teoremas significou mais que admitir a(s) hipótese(s) como verdadeira(s) e concluir que a tese também é verdadeira, sem ambiguidades. Paralelamente, a escolha do tema se deve à importância de enfatizar o ensino da Geometria na Educação Básica, ampliando e lapidando novos conceitos matemáticos por meio das demonstrações, sempre considerando o nível de aprendizagem que está envolvido. O ensino de Matemática tem de ter como intuito ampliar e permitir que o aluno acesse os instrumentos que lhe ofereçam condições de interpretar, analisar, investigar e, a partir da própria experiência, demonstrar uma Matemática não apenas voltada para a Álgebra e Aritmética e sim para a Geometria. Realizar uma Matemática que estabeleça relações entre as três áreas proporcionando uma aprendizagem mais significativa, sem a memorização de fórmulas e exercícios repetitivos, que infelizmente ainda permanecem em muitas salas de aula.

O tema contribuiu para posicionar-me diante de uma Matemática com mais criticidade, permitindo-me interpretar e investigar que tão ou mais importante que transmitir conteúdos e demonstrá-los, é subsidiar meus alunos sobre o porquê da teoria, levando-os a construir os conceitos envolvidos e auxiliá-los na construção do conhecimento.

Este tema também promoverá elementos que serão essenciais para dar continuidade aos estudos posteriores em nível de pós-graduação.

O trabalho se estrutura da seguinte forma:

No capítulo II, traçamos um pequeno histórico da Geometria Euclidiana até chegar às Geometrias não Euclidianas. Em seguida, relatamos sobre a Geometria através do tempo, da Geometria Subconsciente até uma visão moderna da Geometria.

No capítulo III, discorremos fatos sobre a Educação no Brasil. Mostramos o Ensino da Matemática no Brasil, Matemática Atual na Educação Básica, em que apresentamos os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN/97), em relação ao que se espera que seja ensinado nas escolas. E por fim, mostramos o Ensino da Geometria na Atualidade, apresentando o documento oficial, Lei de Diretrizes e Bases (LDB 9394/96).

No capítulo IV, na Revisão Bibliográfica, abordamos artigos que tratam sobre o tema demonstração em Geometria.

No capítulo V, mostramos a mais importante obra de Geometria escrita por Euclides (325 a.C. - 285 a.C.), *Os Elementos.* Apresentamos, ainda, como as teorias dos Van Hiele e do De Villiers (1956 -) influenciaram o ensino da Geometria.

No capítulo VI, descrevemos a metodologia adotada neste trabalho e explicamos o objetivo da Sequência Didática.

No capítulo VII, apresentamos a sugestão detalhada de uma Sequência Didática para um tópico em Geometria.

Nas Considerações finais, apresentamos uma conclusão sobre o tema de pesquisa trabalhado e, também, possibilidades de trabalhos futuros. Por fim, apresentamos uma Conclusão Final onde exponho como o trabalho influenciou minha formação acadêmica e futura formação profissional.

2 A HISTORICIDADE DA GEOMETRIA

2.1. História da Geometria

Segundo Eves (1994), a Geometria tem origem provável em tempos remotos da antiguidade, a partir de origens modestas, de acordo com o historiador grego Heródoto (séc. V a.C.). As civilizações antigas já possuíam conhecimentos geométricos que se estenderam da Babilônia à China, passando pelas civilizações hindu, egípcia, grega e o islã.

O termo "geometria" deriva do grego *geometrein*, que significa medição da terra (*geo*=terra, *metrein*=medição).

Em tempos remotos, a geometria era uma ciência empírica que se utilizava de recursos práticos como medições de terrenos para obter resultados aproximados. Com esses conhecimentos rudimentares eles construíram as famosas pirâmides e templos babilônicos e egípcios. Seus conhecimentos tornaram a Geometria uma aliada na realização dos grandes feitos da época.

O conhecimento geométrico como conhecemos hoje nem sempre foi assim. A geometria surgiu de forma intuitiva, da necessidade do homem ter mais conhecimento e da observação humana. O início se deu de forma natural por meio da observação do homem à natureza. Ao arremessar uma pedra num lago, por exemplo, observou-se que ao haver contato dela com a água, formavam-se circunferências concêntricas.

Conhecimentos geométricos também foram necessários aos sacerdotes, pois estes eram encarregados da demarcação das terras que eram devastadas pelas enchentes do Rio Nilo. A divisão da terra era feita de forma diretamente proporcional aos impostos pagos. Assim nasceu o cálculo de área.

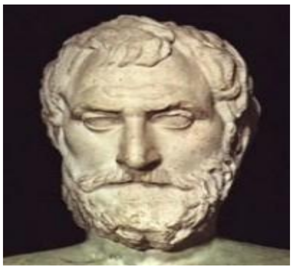


Figura 1 - Tales de Mileto
Fonte: www.tvhumana.com

Mas é, sem dúvida, com os geômetras gregos, começando com Tales de Mileto (624 a. C – 547 a.C.), que a geometria foi estabelecida como teoria dedutiva. O trabalho de sistematização em geometria iniciado por Tales foi continuado nos séculos posteriores, nomeadamente pelos pitagóricos.

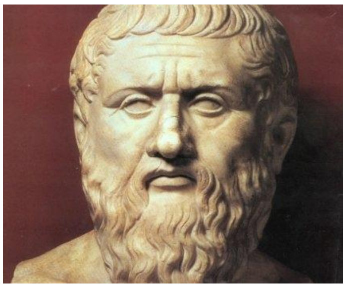


Figura 2 – Platão
Fonte: www.benitopepe.com.br

Não existem documentos matemáticos de produção pitagórica, nem é possível saber exatamente a quem atribuir as descobertas matemáticas dos pitagóricos na aritmética e na geometria.

Mais tarde, Platão (428 a. C. – 348 a. C.) interessa-se muito pela Matemática, em especial pela geometria, evidenciando, ao longo do ensino, a necessidade de demonstrações rigorosas dedutivas, e não a validação pela verificação experimental.

Essa concepção foi exemplarmente desenvolvida pelo discípulo da escola platônica Euclides de Alexandria (325 a.C. - 285 a.C.)[1], no tratado *Elementos* publicado por volta de 300 a.C., em treze volumes ou livros, assim surge a Geometria de Euclides.

[1] Essas datas são aproximadas. Não há documentos que precisem ao certo anos de nascimento e morte de Euclides.

O Livro *Os Elementos* foi a principal obra de Euclides e o principal estudo da Geometria da época. Euclides escreveu-o, baseando-se nos seus antecessores da Grécia antiga.

O Quinto postulado é o mais famoso dos postulados de Euclides e que gerou muita controvérsia entre os matemáticos da época. Durante um longo período tentaram provar o Quinto Postulado de Euclides, por ser mais complexo e por não possuir o mesmo grau de "evidência" que os restantes.

A fim de provar se era mesmo um postulado tentaram demonstrá-lo a partir dos outros. Os resultados sempre chegavam a uma equivalência do que se pretendia provar. Entre os resultados destacamos:

- A soma dos ângulos internos de um triângulo é 180 graus (Legendre)
- Duas retas que se interceptam não podem ser paralelas a uma mesma reta (Playfair).

O Quinto Postulado é: *"Se uma linha reta cortar duas outras retas de modo que a soma dos dois ângulos internos de um mesmo lado seja menor do que dois retos, então essas duas retas, quando suficientemente prolongadas, cruzam-se do mesmo lado em que estão esses dois ângulos."*

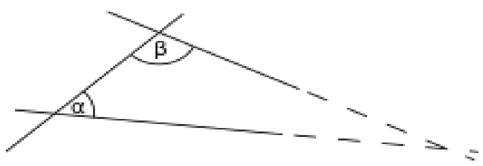


Figura 3 - Quinto Postulado de Euclides
Fonte: www.pt.wikipedia.org

Somente em 1795, John Playfair (1748 - 1819), propôs um axioma, equivalente ao Quinto Postulado, que conhecemos como Postulado das Paralelas: *"Por um ponto fora de uma reta pode-se traçar uma única paralela à reta dada"* e a partir de então passou a substituí-lo na construção axiomática da Geometria Euclidiana.

Durante mais de vinte séculos, o chamado método axiomático[2], que inspirou e inspira a humanidade, ao longo dos tempos e em muitos outros campos do saber passa a ser usado pelos estudiosos dessa ciência.

Hoje *Os Elementos* de Euclides trazem contribuições significativas para os estudos na área da matemática.

De acordo com Pombo (s.d), no início do século XIX houve uma nova forma de conceber a Geometria que diferisse da Euclidiana, em particular no que diz respeito ao quinto postulado de Euclides. Essa nova forma de encarar a Geometria é chamada de Geometrias Não-euclidianas.

A descoberta das *Geometrias Não Euclidianas* libertou os matemáticos dos esquemas rígidos anteriores promovendo o aparecimento de inúmeras Geometrias. As ideias principais foram concebidas por três grandes matemáticos: János Bolyai (1802 - 1860), Nikolai Lobachevsky (1792 - 1856) e Johann Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855).

Em 1829, o matemático Lobachevsky negou o quinto postulado de Euclides, afirmando que *por um ponto fora de uma reta passam pelo menos duas retas paralelas.* Passou a ser considerado o fundador das Geometrias não-Euclidianas. Essa Geometria foi denominada de **Geometria Hiperbólica**.

Figura 4 – Riemann
Fonte: www.pt.wikipedia.org

[2] O método axiomático consiste em escolher um conjunto de axiomas como fundamentais e, a partir deles, deduzir proposições chamadas teoremas, que podem ser demonstradas.

Georg Riemann (1826 - 1866), em 1854, nega o Quinto Postulado de Euclides, legitimando, não só os vários tipos de *Geometrias Não Euclidianas*, mas também as chamadas *Geometrias Reimannianas*. Após a morte de Reimann foi que as *Geometrias Não Euclidianas* foram aceitas. Riemann admitiu que *por um ponto fora de uma reta não se pode conduzir uma reta paralela à reta dada*. Essa Geometria passou a ser chamada de **Geometria Esférica.**

O Postulado das Paralelas difere na Geometria Euclidiana e nas Geometrias não-Euclidianas, segue exemplos:

Geometria Euclidiana

*Dados um ponto **P** e uma reta **r**, existe uma única reta **s** que passa pelo ponto **P** e é paralela a **r**.*

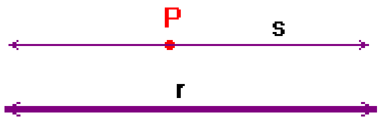


Figura 5 - Geometria Euclidiana
Fonte:
www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/

Geometrias Não-Euclidianas

*"Por um ponto **P** fora de uma reta **r** passa mais de uma reta **s** paralela à reta **r**"*

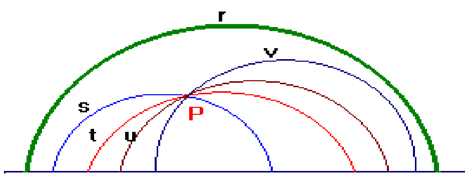


Figura 6 - Geometria Hiperbólica
Fonte:
www.diaadiaeducacao.pr.gov.br

"Quaisquer duas retas em um plano tem um ponto de encontro"

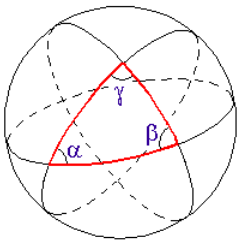


Figura 7 - Geometria Esférica
Fonte:
www.diaadiaeducacao.pr.gov.br

Estudos realizados sobre a Geometria nas civilizações antigas foram de grande importância para a humanidade e seus sucessores.

A relevante contribuição de Pitágoras, Platão, Tales de Mileto e outros por meio de questões, trouxeram à Geometria de Euclides novos elementos por meio de definições, axiomas e demonstrações.

2.2. A Geometria através do tempo

Esta seção está embasada no livro de Howard Eves (1994), que mostra como a Geometria foi abordada através do tempo.

Os estudos nos campos matemáticos trouxeram luz a novas possibilidades de aprendizagem numa abordagem da matemática geométrica em um espiral crescente trazendo novas teorias de grandes matemáticos aos dias de hoje.

2.2.1. Geometria Subconsciente

A Geometria surgiu antigamente a partir de observações feitas pelo homem na natureza e em situações do seu cotidiano.

Ao resolver problemas relativos à divisão de terra, o homem começou a visualizar as figuras geométricas e, inclusive, já começou a ter noções de retas paralelas e perpendiculares. Observando elementos da natureza passou a ter conhecimento de figuras geométricas mais complexas como, por exemplo, parábolas, catenárias e sólidos de revolução.

As delimitações de espaço e contorno de figuras simples pertencentes ao seu cotidiano fizeram com que o homem primitivo elaborasse as suas considerações mais simples que tornaram objetos de seu dia a dia elementos de uma Geometria Subconsciente, ou seja, uma referência do mundo, espaço e forma na qual ele vivia.

Analogicamente, é o estudo que hoje podemos observar com as crianças que passam a demonstrar seu universo por meio de desenhos que são manifestações subconscientes do seu mundo imaginário e muitas vezes até do início de sua aprendizagem formal ou informal.

2.2.2. Geometria Científica

Antigamente, o homem considerava apenas problemas geométricos concretos. Com o passar do tempo, o homem foi capaz de, através de observações do dia a dia, perceber algumas propriedades baseadas em suas observações. Gerando assim problemas geométricos práticos.

O nível mais elevado da natureza da Geometria pode ser chamado de "Geometria Científica". Seus instrumentos eram indução, ensaio, erro e procedimentos empíricos.

Não se sabe ao certo quanto tempo se passou para a Geometria ser vista como ciência, mas pesquisadores dizem que o local em que a Geometria passou de Subconsciente para Científica foi no Vale do Rio Nilo no Egito Antigo.

A Geometria Científica surgiu bem antes de nossa era, para suprir nossas necessidades práticas.

2.2.3. Geometria Pré-Helênica

Antigos registros datados por volta do ano 3000 a.C. eram tábuas de argila que ressaltavam assuntos sobre a Geometria que foram descritos pelo homem na Mesopotâmia.

As fontes de informação sobre a Geometria egípcia antiga são os Papiros Moscou e Rhind. Esses papiros possuem 110 problemas, dos quais 26 são de Geometria. A maioria deles são para calcular áreas e volumes.

Segundo Eves (1994), estudos em Geometria também ocorreram na Índia e na China antigas, contudo não há indícios de veracidade a respeito.

2.2.4. Geometria Demonstrativa

A Geometria Demonstrativa recebeu por parte dos gregos uma concepção dedutiva, o que diferiu dos seus antecessores.

Essas concepções dedutivas atribuídas pelos gregos são fontes que são encontradas no *Sumário eudemiano de Proclus*[3] que são comentários dos trabalhos de Euclides no seu Livro I. Os seus trabalhos originais se perderam com o tempo.

De acordo com os manuscritos do *Sumário eudemiano de Próclus*, a Geometria teve início com os estudos de Tales de Mileto. Seus estudos deram início a Geometria Demonstrativa.

Os gregos insistiram que os fatos geométricos não poderiam ser estabelecidos por suas próprias observações, mas sim por suas deduções. Já as verdades geométricas deveriam ser estabelecidas por estudos e não por experimentação.

Transformando assim a Geometria Científica em Geometria Demonstrativa.

2.2.5. Geometria grega primitiva

Outro geômetra grego mencionado no *Sumário eudemiano de Próclus* é Pitágoras, sendo considerado o continuador da Geometria Demonstrativa de Tales de Mileto. Pitágoras foi o fundador da famosa Escola Pitagórica.

A Escola Pitagórica iniciou a descoberta das propriedades de retas paralelas, contribuiu para a álgebra grega e também a teoria das proporções completas. Os pitagóricos conheciam, também, três dos poliedros regulares.

Os gregos desenvolveram o material que foi organizado por Euclides nos *Elementos*, noções relativas a infinitésimos, limites e processos somatórios. Desenvolveram, também, a Geometria de curvas.

A contribuição mais importante dos antigos gregos à matemática foi a criação do modelo axiomático e a organização da Geometria neste modelo.

[3] O *Sumário eudemiano de Próclus* constitui-se de um breve esboço do desenvolvimento da Geometria grega desde os tempos mais primitivos até Euclides. O *Sumário eudemiano* é assim chamado porque, basicamente, baseia-se nesse trabalho mais antigo.

2.2.6. Geometria grega posterior

Os geômetras mais importantes foram Euclides (325 a.C 285 a.C.), Arquimedes (278 a. C - 212 a.C.) e Apolônio (262 a.C. - 190 a.C.).

Eles foram escritores. Euclides escreveu sua mais famosa obra, *Os Elementos*, porém escreveu outras obras de Geometria das quais temos conhecimento de algumas.

- *Divisões de Superfícies*;
- *Data* (continha aplicações da álgebra à geometria numa linguagem estritamente geométrica);
- *Pseudaria*;
- *Tratado sobre Harmonia*;
- *A Divisão (*continha muito provavelmente 36 proposições relativas à divisão de configurações planas);
- *Os Dados* (formavam um manual de tabelas, servindo como guia de resolução de problemas, com relação entre medidas lineares e angulares num círculo dado);
- *Óptica* (seria um estudo da perspectiva e desenvolveria uma teoria contrária à de Aristóteles, segundo a qual é o olho que envia os raios que vão até ao objeto que vemos e não o inverso);
- *Os Fenômenos* (pensa-se que Euclides escrevia sobre Geometria esférica para utilização dos astrônomos);
- *Porismos* (um dos mais lamentáveis desaparecimentos, este livro poderia conter aproximações à Geometria Analítica).

Figura 8 – Arquimedes
Fonte: www.historiapensante.blogspot.com

Sobreviveram 10 trabalhos de Arquimedes, sendo 5 trabalhos de Geometria; 3 de Geometria Plana e 2 de Geometria Sólida.

A principal obra de Apolônio que deu-lhe fama foi Secções Cônicas, um estudo sobre as curvas obtidas a partir de secções plana de cones .

Após a morte de Apolônio, a Geometria Grega chegou ao fim. Os geômetras que surgiram após sua morte e que merecem destaque são: Heron de Alexandria (10 d.C. - 70 d.C), Menelau (70 d.C. - 140 d. C.), Cláudio Ptolomeu (100 a.C. - 170 a.C.) e Papus (290 d.C.- 350 d.C).

2.2.7. O desvio através da Índia e da Arábia

No período final dos tempos antigos o mundo civilizado foi dominado por Roma, e com os efeitos desastrosos, a ciência e a matemática foram reduzidas a um segundo plano.

Neste período o ensino quase desapareceu e a sabedoria transmitida pelos gregos por pouco não sumiu. Os maiores depositários da Matemática neste período foram os povos do Oriente (hindus e árabes).

Os trabalhos de matemáticos árabes para a Geometria foram feitos por Abu'l Wefa (940-998) com compassos de abertura fixa; Omar Khayyam (1044-1123) com a solução geométrica da equação cúbica e as pesquisas de Nasir Eddin (1250) sobre o Postulado das Paralelas de Euclides.

2.2.8. A volta da geometria à Europa Ocidental

A ciência e a matemática voltaram à Europa só no final do século XI, através de traduções latinas feitas por cristãos.

No século XIII vieram universidades para o desenvolvimento da Matemática. No século XIV a matemática não teve avanço, sendo o século da Peste, doença que dizimou uma boa parte da população da Europa.

No século XV os clássicos dos gregos, traduzidos pelos árabes, podiam ser estudados dos originais. Nesse século, a Matemática era vista apenas nas cidades italianas e na Europa Central.

No século XVI houve o desenvolvimento da aritmética, da álgebra e a descoberta da solução algébrica das equações cúbicas e quárticas. Houve a tradução de vários trabalhos de Geometria, destacando-se: "Comentário sobre Euclides", Livro I, de Proclus; "Secções cônicas", Livros I-IV, de Apolônio; entre outros.

2.2.9. Geometria projetiva

Foi publicado em 1639 o trabalho original sobre Secções Cônicas com a ideia de projeção por Desargues. Sendo ignorado pelos matemáticos da época; apenas em 1845 o geômetra Michel Chasles deu-lhe o devido crédito.

A Geometria Descritiva foi criada pelo geômetra Gaspard Monge no final do século XVIII, que representava objetos tridimensionais através de projeções.

A Geometria Projetiva ressurgiu através de Poncelet que publicou sua grande obra em 1822, inaugurando o grande período da Geometria Projetiva.

2.2.10. Geometria analítica

A Geometria analítica foi descoberta por René Descartes (1596-1650) e Pierre de Fermat (1601-1665). A Geometria projetiva é um <u>ramo</u> da Geometria e a Geometria analítica é um <u>método</u> da Geometria.

Figura 9 – Fermat
Fonte:
www.pt.wikipedia.org

A Geometria analítica é descrita como a "estrada real" para a Geometria, pela álgebra ser considerada mais fácil para os alunos do que a Geometria.

Em uma citação de Proclus (EVES, 1994) ele relata que Ptolomeu indagou a Euclides se haveria uma outra forma de conhecer a Geometria se não fosse pelos estudos dos *Elementos.* Eis que Euclides sabiamente o responde "não existe uma estrada real para a Geometria". Com isso Euclides mostra que os *Elementos* era a inspiração, contudo o caminho estaria nos estudos que direcionam ao interesse e as aplicações geométricas.

Não existe consenso entre os historiadores sobre quem inventou a Geometria Analítica, devido não saberem exatamente do que a constitui.

A invenção da Geometria analítica foi creditada aos gregos, em especial a Apolônio, por usar tanto as coordenadas quanto a interpretação geométrica. Porém, outros atribuíram a Nicole Oresme a invenção da Geometria Analítica por representar leis de gráficos confrontando a variável dependente com a independente.

A Geometria analítica sólida foi elaborada primeiramente por Antoine Parent em 1700; mas Alexis Claude Clairaunt em 1731 escreveu primeiro sobre as curvas não planas e Leonhard Euler avançou nesse campo.

Provém do nosso uso de coordenadas cartesianas a classificação das curvas em lineares, quadráticas, cúbicas, e assim por diante.

O desenvolvimento das coordenadas foi em 1899 por Julius Plucker, levando-o ao conceito de dimensão.

2.2.11. Geometria diferencial

A principal invenção do século XVII foi o cálculo, por Isaac Newton (1642 - 1727) e Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646 - 1716).

Geometria Diferencial é a parte da Geometria que estuda as propriedades das curvas e superfícies do cálculo.

A Geometria diferencial começou no início do século XVIII com aplicações do Cálculo e da Geometria Analítica. O pai da Geometria Diferencial é Gaspard Monge (1746 - 1818).

O segundo período da Geometria Diferencial foi inaugurado por Carl Friedrich Gauss (1777-1855), introduzindo as curvas e superfícies por representações paramétricas. O terceiro período da Geometria Diferencial começou com Bernhard Riemann (1826 - 1866), aperfeiçoando assim a notação.

2.2.12. Uma visão moderna da Geometria

Chamamos de Geometria subconsciente às noções subconscientes de espaço físico e formas. Chamando, então, de Geometria Científica as noções primitivas em um conjunto de leis ou regras gerais.

A Geometria demonstrativa surgiu por volta do ano 600 a.C, com a dedução na Geometria. Tornando-se um estudo axiomático do espaço, de formas e tamanhos.

Com o surgimento da Geometria Analítica o espaço foi considerado uma coleção de pontos, com um estudo de suas propriedades.

Foi formulado, por Hilbert e outros, o conceito de axiomática que desenvolveram uma nova ideia do ramo da matemática[4]. Foi inaugurado por Frechet o estudo dos espaços abstratos, em 1906.

A melhor maneira de se descrever a Geometria, segundo alguns matemáticos, é a maneira de cada um observar o assunto colocando o seu ponto de vista.

---

[4] Um corpo abstrato de teoremas deduzidos de um conjunto de postulados.

O próximo capítulo será relatado sobre o surgimento do ensino de Matemática no Brasil e alguns pontos da educação brasileira.

3 FATOS SOBRE A EDUCAÇÃO NO BRASIL

3.1. O Ensino da Matemática no Brasil

Esta seção está embasada no artigo de Maria das Dores Costa Brito (2007), que trata sobre como foi o ensino de Matemática no Brasil desde o descobrimento até o século XX.

A História da Matemática no Brasil iniciou-se no Brasil Colônia com os jesuítas. Nesta época o objetivo principal da Coroa Portuguesa não era ensinar Matemática, mas a colonização indígena, e segundo os historiadores as primeiras escolas primárias foram fundadas por volta de 1550.

Os primeiros cursos de Licenciaturas e Bacharelados foram criados em 1572 e neles se estudavam disciplinas de Matemática, entre outras. Nessa fase o ensino de Matemática começou a ter destaque, principalmente com o novo Colégio de Salvador com o curso de graduação em Matemática.

Todavia a metrópole portuguesa não reconhecia os estudos acadêmicos aqui no Brasil e eles eram obrigados a concluir novamente seus estudos em Coimbra. De acordo com esse artigo, a educação brasileira e no que diz respeito à Matemática, percorreu um longo caminho até receber sua valorização.

Neste período houve a criação da Academia Real Militar do Rio de Janeiro, em 1808, que foi um referencial de estudos.

> A institucionalização do Ensino de Matemática Superior no Brasil começou em 1810 e a Academia Real Militar teve por parte dos seus organizadores a preocupação quanto à qualidade e padrões culturais e científicos. Após a Independência do Brasil em 1822, a Academia Real Militar recebeu outros nomes e hoje é conhecida como Escola Politécnica do Rio de Janeiro. (BRITO, 2007, p. 6/7)

Em 1934 foi fundada a Universidade de São Paulo (USP) e a partir desse advento o ensino de Matemática passou a ter ênfase no país sendo criado o primeiro curso de graduação em Matemática, elevando dessa forma os estudos matemáticos no país.

O principal objetivo da USP era estimular o aluno à pesquisa ligada ao ensino de graduação. A partir da década de 1940, em São Paulo, os estudos de Matemática expandiram-se tanto em qualidade quanto em quantidade.

Em 1960 as universidades do Rio de Janeiro e de São Paulo iniciaram seus cursos de pós-graduação em Matemática e o primeiro curso de mestrado foi criado no Instituto Tecnológico da Aeronáutica – ITA. No início de 1970 houve um incentivo do Governo com um programa de recurso financeiro para os alunos de pós-graduação.

No Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo (IFSP) foi implementado entre os anos 2000 e 2008 dentre vários cursos, entre esses cursos alguns são de licenciatura, o curso de Licenciatura em Matemática iniciou-se no ano de 2008 visa formação do professor, capacitando-o para compreender a Matemática dentro da realidade educacional brasileira nos contextos social, cultural, econômico e político.

As breves considerações desse capítulo sobre a História da Matemática no Brasil tiveram como objetivo explanar sobre fatos relevantes da educação brasileira no que se refere à Matemática.

No tópico seguinte será relatado como o ensino de Matemática vem sendo desenvolvido na Educação Básica e citaremos como referenciais os PCN.

3.2. Matemática Atual Na Educação Básica

3.2.1. Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN/97)

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997) foram elaborados como referencial de educação para a prática pedagógica e de auxílio ao professor na sua jornada cotidiana.

Sua elaboração veio ao encontro das necessidades da modernização do ensino e das reformas do currículo de Matemática.

No que se refere à Matemática e áreas afins, os PCN (1997) trazem características específicas e estruturadas. Características estas que levam o educando a compreender que as estruturas teóricas e demonstrativas da Matemática permeiam a construção de novas estruturas e conceitos que permitam o estabelecimento de novos diálogos matemáticos.

O ensino da Geometria propõe que o aluno possa desenvolver outras formas de compreensão em relação ao ambiente que está inserido, fazendo relações do concreto com o abstrato e compreender com mais clareza a Matemática do conhecimento dedutivo ao específico.

> Uma das possibilidades mais fascinantes do ensino da Geometria consiste em levar o aluno a perceber e valorizar sua presença em elementos da natureza e em criações do homem. Isso pode ocorrer por meio de atividades em que ele possa explorar formas como as de flores, elementos marinhos, casa de abelha, teias de aranha, ou formas em obras de arte, esculturas, pinturas, arquitetura, ou ainda em desenhos feitos em tecidos, vasos, papeis decorativos, mosaicos, pisos, etc. (PCN, 1997, p. 128).

O ensino da Geometria traz ao aluno outras possibilidades de aprendizado a partir do concreto, realizando a interdisciplinaridade, observando assim elementos do seu cotidiano e do mundo em que vive.

Os PCN (1997) foram elaborados como proposta educacional para corroborar de forma qualitativa em todas as esferas da educação básica.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997),

> o desenvolvimento da Geometria e o aparecimento da Álgebra marcaram uma ruptura com os aspectos puramente pragmáticos da Matemática e impulsionaram a sistematização dos conhecimentos matemáticos, gerando novos campos: Geometria Analítica, Geometria Projetiva, Álgebra Linear, entre outros. O estudo das grandezas variáveis deu origem ao conceito de função e fez surgir, em decorrência, um novo ramo: a Análise Matemática. (PCN, 1997, p.24)

De acordo com os PCN (1997) a Geometria traz novos campos de aprendizado ao aluno, aprofundando seus estudos e descentralizando apenas conceitos aritméticos.

Não se pode desconsiderar o relevante documento oficial PCN (1997) que foi elaborado como base para docentes e estudiosos impulsionarem a educação brasileira.

O próximo tópico retrata o Ensino de Geometria na atualidade tendo como referência a LDB (9394/96) e cita alguns artigos que tratam do assunto.

3.3. O Ensino Da Geometria Na Atualidade

De acordo com o artigo de Rogenski e Pedroso (s.d), as ideias geométricas estão presentes no nosso dia a dia, seja na natureza, nas artes, na arquitetura ou em outras áreas do conhecimento. A geometria é considerada a ciência do espaço, pois trabalha com formas e medições.

A Geometria, segundo Ferreira é

> "ciência que investiga as formas e as dimensões dos seres matemáticos" ou ainda "um ramo da matemática que estuda as formas, plana e espacial, com as suas propriedades", ou ainda, "ramo da matemática que estuda a extensão e as propriedades das figuras (geometria Plana) e dos sólidos (geometria no espaço)". (FERREIRA, 1999, p. 983)

De acordo com o artigo de Chieregato e Rodrigues (s.d), em meados da década de 70, o Brasil sofreu uma forte queda no ensino de Geometria, tanto no Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio. O Ensino de Geometria foi deixado de lado por vários motivos, o primeiro é pela Geometria não ser considerada importante por parte dos professores; o segundo diz respeito às dificuldades que os professores possuem para desenvolver um raciocínio-lógico nas crianças; e o terceiro se refere a muitos professores não possuírem os conhecimentos necessários para ensinar Geometria.

Segundo Oliveira e Velasco (2007) estudos comprovam que uma boa parte dos alunos que ingressam em um curso superior tem uma base insuficiente sobre a Geometria, devido uma defasagem na Educação Básica.

Ensinar Geometria é um dos conteúdos que requer maior sensibilidade do professor, pois trabalha a união das formas visuais com os conceitos e propriedades. A expressão gráfica é um bom exemplo do ramo da Geometria, pois utiliza como estratégia o desenho para o desenvolvimento do raciocínio e da aptidão espacial.

As habilidades dos alunos com relação à Geometria tem sido questionada nas escolas, devido à pouca atenção dada a esta disciplina nas salas de aula. Ficando sempre em "segundo plano". Embora estes questionamentos venham sendo realizados, pouco se vem fazendo para mudar este quadro.

Permanece ainda, a pouca validade da importância geométrica nos estudos dos alunos, e sendo que estes apenas recebem a disciplina como memorização.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais,

> os conceitos geométricos constituem parte importante do currículo de Matemática, porque, por meio deles, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive (BRASIL, 1997, p.55).

Cabe ressaltar que os conceitos geométricos auxiliam o desenvolvimento de investigação do aluno permitindo um olhar mais crítico do mundo que o cerca.

3.3.1. Lei de Diretrizes e Bases (LDB 9394/96)

Fundamentada nos princípios da Confederação Federativa do Brasil, a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB 9394/96) define e regulariza o Sistema Educacional.

De acordo com a LDB 9394/96,

> Art. 26. Os currículos da educação infantil, do ensino fundamental e do ensino médio devem ter base nacional comum, a ser complementada, em cada sistema de ensino e em cada estabelecimento escolar, por uma parte diversificada, exigida pelas características regionais e locais da sociedade, da cultura, da economia e da clientela. (BRASIL, 1996, p. 11)
>
> § 1º Os currículos a que se refere o *caput* devem abranger, obrigatoriamente, o estudo da língua portuguesa e da matemática, o conhecimento do mundo físico e natural e da realidade social e política, especialmente do Brasil. (BRASIL, 1996, p. 11)[5]

[5] De acordo com o § 1º os currículos devem ser unânimes quanto às disciplinas citadas e indispensáveis na educação brasileira.

Segundo a LDB (9394/96), em todos os níveis que abrange a Educação Básica, o currículo não deve deixar de compor suas especificidades, contudo deve estar adaptado à realidade educacional e regional em que está inserido.

O capítulo seguinte trata da revisão bibliográfica, na qual foram utilizados artigos que relacionam com o ensino e a Geometria.

4 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Segundo Lorenzato (1993) a Geometria, no Brasil, está quase que totalmente ausente nas salas de aula. Uma das causas dessa ausência é pelo fato dos professores não possuírem um conhecimento aprofundado no assunto.

Antes da chegada da Matemática Moderna[6], o ensino da Geometria era caracterizado por suas demonstrações; hoje o modelo anterior foi eliminado e suas lacunas ainda persistem.

O estudo da Geometria é necessário para o desenvolvimento do educando, pois permite um desenvolvimento do pensar geométrico e a leitura interpretativa do mundo.

Segundo Santos (2013) numa pesquisa realizada em Itabaiana (SE) no Curso de Licenciatura da Universidade Federal de Sergipe (UFSE) sobre como concebem o ensino da Geometria no 6º e 7º anos do Ensino Fundamental II verifica que as dificuldades enfrentadas pelos alunos são semelhantes. A memorização de fórmulas prontas não é o necessário para sanar as dificuldades na aprendizagem, não assimilando assim o conteúdo proposto.

Segundo Almouloud *et al* (2004) alguns aspectos provocam dificuldades no ensino e na aprendizagem de Geometria. São:

- O professor ao escolher quais conteúdos julga importante para a formação de seus alunos, faz com que a Geometria seja frequentemente esquecida;

- no que condiz A Geometria é pouco explorada na graduação, havendo uma precariedade da formação dos professores;

- as situações geométricas apresentadas nos livros didáticos privilegiam soluções algébricas e exigem pouca demonstração.

[6] Nas décadas de 60/70, o ensino de Matemática, em diferentes países, foi influenciado por um movimento que ficou conhecido como Matemática Moderna. A Matemática Moderna nasceu como um movimento educacional inscrito numa política de modernização econômica e foi posta na linha de frente por se considerar que, juntamente com a área de Ciências Naturais, ela se constituía via de acesso privilegiada para o pensamento científico e tecnológico. (PCN - Matemática, 1997)

Quatro habilidades que são desenvolvidas obtendo os conhecimentos geométricos, segundo Lorenzato (1995):

- o pensamento geométrico;
- a compreensão e resolução de situações;
- a visão matemática e
- a comunicação das ideias.

Os resultados apresentados nos questionários da pesquisa em Itabaiana (SE), revelaram uma defasagem no conteúdo de Geometria. Muitos afirmaram não possuir conhecimento suficiente, mesmo sabendo que a Geometria está no cotidiano do aluno.

O capítulo seguinte faz referência a teóricos que foram e que são importantes para a Geometria até hoje. Por meio de seus estudos, estes teóricos trouxeram contribuições relevantes a Matemática.

5 REFERENCIAL TEÓRICO

A Geometria é estudada pelo homem desde a antiguidade. A principal obra de Geometria foi escrita por Euclides de Alexandria (325 a.C. - 285 a.C.), denominada *Os Elementos*.

Figura 10 – Euclides
Fonte:
www.pt.wikipedia.org

Euclides foi o professor, escritor grego e matemático platônico, que criou a Geometria Euclidiana, ficando famoso com a sua obra *Os Elementos*.

A obra de Euclides é apresentada num conjunto de 13 volumes, que são seus estudos somados aos trabalhos de matemáticos anteriores a ele. Composta de fundamentos axiomáticos que levam à solução de problemas mais aprofundados, ou seja, específicos.

Ao longo do tempo, novos teóricos contribuíram para os estudos na área de Geometria que merecem destaque. Van Hiele e Michael De Villiers são dois matemáticos que estudaram o ensino e a aprendizagem da Geometria e, a seguir, serão observadas suas teorias.

5.1. Van Hiele

Dina van Hiele-Geldof e Pierre Marie Van Hiele, casados e professores de Geometria na Holanda desenvolveram uma teoria baseada no doutorado de ambos que ficou conhecida pelo sobrenome do casal, Teoria de Van Hiele, na Universidade de Utrecht, em 1957. Após a conclusão da tese, Dina faleceu, e Pierre foi quem publicou, desenvolvendo assim a Teoria de Van Hiele, que tem influenciado o estudo de muitos países até hoje.

Figura 11 - Pierre Van Hiele
Fonte: www.wikispaces.com

A teoria de Van Hiele diz que a aprendizagem da Geometria segue uma progressão em cinco níveis. Em cada nível o professor sugere tarefas adequadas para os alunos avançarem, tanto de nível quanto de pensamento.

A tese de Pierre explica porque os alunos possuíam dificuldade em aprender Geometria; já a tese de Dina, com relação à ordem dos conteúdos de Geometria, abrange um experimento educacional.

O quadro, a seguir, mostra os níveis de aprendizagem da Geometria delimitados por Van Hiele.

Nível de Van Hiele	Características	Exemplos de Atividades
Nível 1: *Reconhecimento*	Identificação, comparação e nomenclatura de figuras geométricas, com base em sua aparência global.	Classificação de quadriláteros em grupos de quadrados, retângulos, paralelogramos, losangos e trapézios.
Nível 2: *Análise*	Análise das figuras em termos de seus componentes, reconhecimento de suas propriedades e uso delas para resolver problemas.	Descrição de um quadrado por meio de suas propriedades: 4 lados, 4 ângulos retos, lados iguais, lados opostos paralelos.
Nível 3: *Síntese*	Percepção da necessidade de uma definição precisa, e de que uma propriedade pode decorrer da outra, argumentação lógica informal e ordenação de classes de figuras geométricas.	Descrição do quadrado pelas propriedades mínimas: 4 lados iguais e 4 ângulos retos. O retângulo é um paralelogramo, pois também possui os lados opostos paralelos.
Nível 4: *Dedução*	Domínio do processo dedutivo e demonstrações, reconhecimento de condições necessárias e suficientes.	Demonstração de propriedades dos triângulos e quadriláteros usando a congruência de triângulos.
Nível 5: *Rigor*	Estabelecimento de teoremas em diversos sistemas e comparação dos mesmos.	Estabelecimento e demonstração de teoremas em Geometria finita.

Fonte: Retirada da apostila do PEC 2001-2002

Esta teoria sugere que o pensamento geométrico avança de forma crescente em todos os níveis. Iniciando com conhecimentos do espaço geométrico e das relações básicas entre as propriedades, até alcançar o último nível em que se trabalham teoremas e suas demonstrações.

Segundo Usiskin (1982, *apud* de DE VILLIERS, 2010), a teoria de Van Hiele possui quatro características:

- ordem fixa: a ordem que os alunos avançam de nível não se altera;
- adjacência: em cada nível o que era essencial no nível anterior, não é mais essencial no nível atual;
- distinção: cada nível possui sua linguagem matemática;
- separação: pessoas em níveis diferentes não entendem umas à outras.

Os quatro primeiros níveis da Teoria de Van Hiele são considerados os mais importantes para a Geometria ensinada no Ensino Médio.

Dizemos que a Teoria de Van Hiele possui duas partes: a primeira explica a evolução do raciocínio geométrico dos alunos através dos níveis; a segunda indica ao professor como ajudar seus alunos a alcançar níveis superiores.

As cinco fases de aprendizagem são passos para o professor seguir e auxiliar seus alunos a avançar de nível. São eles:

Fases de aprendizagem	Características
Fase 1: Informação	Os alunos têm um primeiro contato com um determinado assunto. Em que o professor mostra materiais e apresenta informações indispensáveis.
Fase 2: Orientação guiada	Os alunos realizam tarefas simples, explorando as relações dos elementos trabalhados. Essas tarefas serão orientadas pelos professores.
Fase 3: Explicação	Os alunos devem expressar suas descobertas e participar de debates expondo as ideias, estimulados por seus professores.
Fase 4: Orientação livre	Os alunos realizam tarefas mais complexas, usando todo o conhecimento adquirido até aqui.
Fase 5: Integração	Nesta fase, todo o conhecimento e habilidades adquiridas pelos alunos, o professor deve estimulá-los a relacionar todas as informações.

Fonte: Ressignificando a Geometria Plana no Ensino Médio, com o auxílio de Van Hiele

De acordo com Bruner (1966, *apud* de DE VILLIERS, 2010), para o aluno passar no Nível 1 para o Nível 2 se faz necessário reconhecer novos conceitos e renovar os já existentes.

> A rede de relações no Nível 3 só pode ser estabelecida de maneira significativa quando a rede de relações no Nível 2 for estabelecida adequadamente. Quando a segunda rede de relações está presente de forma adequada tal que sua estrutura se torna aparente e alguém pode falar sobre ela com outras pessoas, é então que os elementos constituintes do Nível 3 estarão prontos. (Van Hiele, 1973:94)

O Nível 2 é uma associação de propriedades de figuras, enquanto o Nível 3 aborda as relações lógicas das propriedades.

Ilustração das fases de aprendizagem segundo Van Hiele para o conceito de retângulo

Fases de aprendizagem	Exemplo de tarefa
Fase 1: *Informação*	O professor mostra aos alunos diversos quadriláteros e pergunta-lhes se são ou não retângulos[7]. Os alunos são capazes de dizer se uma dada figura é ou não retângulo, mas as razões apresentadas serão apenas de percepção visual.
Fase 2: *Orientação guiada*	Realizam-se outras atividades sobre retângulos. Por exemplo, dobrar um retângulo segundo os seus eixos de simetria; desenhar um retângulo no geoplano; utilizar as peças do Tangram para confeccionar modelos geométricos.
Fase 3: *Explicação*	A partir da atividade anterior, agora o professor pede para seus alunos identificarem as características do retângulo nos modelos geométricos construídos com o auxílio do Tangram.
Fase 4: *Orientação livre*	O professor vai ensinar seus alunos a construir retângulos com as informações dadas. Pode ser utilizado por meio do software GeoGebra[8].
Fase 5: *Integração*	Os alunos reveem e resumem o que aprenderam. O professor constrói demonstrações sobre as propriedades de um retângulo.

Fonte: Adaptado do Programa de Formação em Matemática para professores do 1º ciclo

A teoria de Van Hiele tem sido utilizada com o intuito de compreender mais facilmente os conteúdos de Geometria, progredindo dessa forma o ensino e a aprendizagem da mesma.

---

[7] Utilizaremos a definição de retângulo: "Um quadrilátero plano convexo é um retângulo se, e somente se, possui os quatro ângulos congruentes", retirado de Fundamentos de Matemática Elementar - Geometria Plana, volume 9 de Osvaldo Dolce e José Nicolau Pompeo.

[8] Criado por Markus Hohenwarter, o GeoGebra é um software gratuito de matemática dinâmica desenvolvido para o ensino e aprendizagem da matemática nos vários níveis de ensino (do básico ao universitário). Extraído do Instituto GeoGebra no Rio de Janeiro, disponível em www.geogebra.im-uff.mat.br/

5.2. Michael De Villiers (1956 -)

Michael De Villiers, natural da África do Sul, iniciou como docente de Matemática em escolas secundárias, posteriormente foi professor de Educação Matemática e investigador em Geometria. Publicou sete livros e mais de cem artigos, muitos em revistas internacionais.

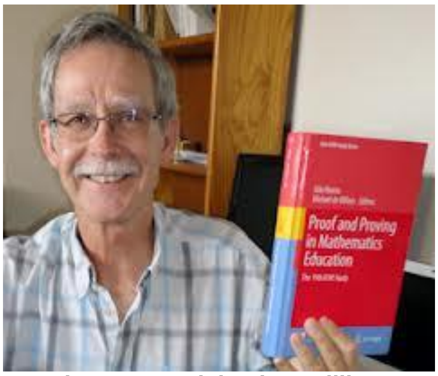


Figura 12 - Michael De Villiers
Fonte: www.enewsletter.ukzn.ac.za

Entre seus livros publicados estão *Mathematical modelling in action in some situations* (Modelagem Matemática em ação em algumas situações), *The mathematics of voting* (A Matemática da votação)*, Some adventures in Euclidean geometry* (Algumas aventuras na Geometria Euclidiana) *e Rethinking Proof with Sketchpad* (Repensando prova com Sketchpad[9])*.*

Seus estudos contribuíram para a área da Matemática no que se refere às demonstrações. De Villiers trabalha com a Geometria Dinâmica, principalmente com o software Sketchpad.

5.2.1. Teoria de Michael De Villiers

O artigo de De Villiers (2002) incide nos estudos realizados por matemáticos sobre a forma de prova. A importância da demonstração não apenas como conjectura, mas no objeto final colocado como catalisador fundamental, um estímulo ao desenvolvimento de novas teorias.

[9] Sketchpad é um software de Geometria Dinâmica com uma grande variedade de ferramentas e opções. Desenvolvido por Ivan Sutherland, no MIT (Instituto de Tecnologia de Massachusetts), em 1963.

O texto ressalta que a descoberta de novos métodos de demonstração sobre a teoria parte de estímulos de outras possibilidades de interação proporcionando novas descobertas, outras conexões e resultados.

Segundo o matemático investigador Gian-Carlo Rota (1997:190, *apud* DE VILLIERS, 2002)

> "O Valor real do que Wiles e os seus colaboradores fizeram é muito maior do que a mera demonstração de uma conjectura excêntrica. A importância da demonstração do último teorema de Fermat reside na abertura de novas possibilidades para a matemática. ... O valor da demonstração de Wiles não está naquilo que demonstra, mas naquilo que torna acessível, no que possibilita."

Esta citação reforça não apenas a importância do Último Teorema de Fermat em que não existe nenhum conjunto de inteiros positivos com n maior que 2 que satisfaça a equação $x^n + y^n = z^n$, e sim as possibilidades que a demonstração traz ao realizar outras demonstrações a partir de novas possibilidades que se tornam acessíveis.

O artigo traz uma referência sobre o matemático Paul Halmos (1916, *apud* DE VILLIERS, 2002) sobre a demonstração da conjectura das quatro cores realizada por Appel e Hakem (1976, *apud* DE VILLIERS, 2002).

Por mais de um século, muitos métodos foram desenvolvidos para provar a teoria das quatro cores[10]. Tentaram provar como seria possível a utilização de apenas números cromáticos[11] para diferenciar países e ou divisas.

Somente em 1976 foi apresentada a demonstração dessa teoria com o auxílio de um computador. Na época o entusiasmo dos matemáticos foi imensa, mas logo observaram que seriam necessárias muitas horas conectados a um computador para demonstrar essa teoria. Isso gerou polêmica no meio acadêmico, pois não era possível verificar com exatidão detalhes preciosos da teoria.

Atualmente a provas mais simplificadas da teoria das quatro cores, ainda assim requer o uso do computador.

[10] A Teoria das quatro cores trata da determinação do número mínimo de cores necessárias para colorir um mapa, de países reais ou imaginários, de forma que países com fronteira comum tenham cores diferentes.
[11] Número cromático é o número mínimo de cores necessárias para colorir qualquer superfície.

Paul Halmos considerou como aceita a teoria das quatro cores, sustentando que um dia, ou em alguns anos, alguém reescreverá essa demonstração de forma que resultará todos os méritos dessa teoria à matemática em que contará com os créditos da compreensão.

Como faz notar, a demonstração como já aqui argumentado são partes importantes do processo de compreensão matemática, cabendo ressaltar que são mais importantes como novas buscas de aprendizado que conduzam a significados e desafios que contribuam ao processo de sistematização.

É interessante verificar que a demonstração particularmente tem sido considerada como meio de verificação de correções a proposições matemáticas no ensino das mesmas.

Segundo Kline (1973:151, *apud* DE VILLIERS, 2002): *"uma demonstração só se faz sentido quando responde às* ***dúvidas*** *dos alunos, quando prova aquilo que não é óbvio."*

É oportuno lembrar que o propósito maior não significa o tirar dúvida, mas a **explicação**, a **descoberta**, realizando a compreensão das proposições e atribuindo **significados**.

5.2.1.1. A Demonstração como processo de verificação

A maioria dos professores de Matemática acreditam que a demonstração é a única forma de verificar uma conjectura.

Muitas vezes quando fazemos uma investigação matemática, o convencimento de que um teorema é válido depende da intuição, da verificação e de uma demonstração. Os matemáticos ao fazerem a investigação não recorrem apenas à demonstração, procuram, também, alguns contraexemplos para revelar possíveis contradições.

A verificação como forma de demonstração não deve ser menosprezada. Cabe salientar que o grau de compreensão do aluno nesta etapa precisa estar mais desenvolvido, a fim de que detalhes significativos não passem desapercebidos e a verificação não se torne certeza absoluta.

5.2.1.2. A Demonstração como processo de explicação

Através das verificações dos teoremas pode-se provar sua veracidade, no entanto elas não nos fornecem uma explicação de sua validade.

Os resultados descobertos intuitivamente ou empiricamente não possuem como função a verificação, mas sim a função de explicação. Para os matemáticos a explicação tem mais importância do que a verificação.

É significativo que alguns professores de matemática assumam particular relevância na demonstração como pré-requisito para a convicção e explicação das proposições matemáticas. Entretanto nos dias atuais o pré-requisito para validar a demonstração matemática é a explicação como prática de ensino.

Doug Hofstadter (1997: 10, *apud* DE VILLIERS, 2002) enfatiza em um contexto da Geometria Dinâmica; como a convicção pode proceder e motivar a demonstração:

> "No fundo, as demonstrações são ingredientes críticos do conhecimento matemático, e eu gosto tanto delas como qualquer outra pessoa. Apenas não sou um dos que acredita que a certeza **só** adquire com a demonstração."

A este respeito cabe argumentar que a certeza não se afirma com demonstrações, mas em desafiar o intelectual, proporcionando a compreensão sobre o porquê que é verdade.

5.2.1.3. A Demonstração como processo de descoberta

Muitos teoremas passam a ser descobertos por procedimentos intuitivos sem chegarem ao processo de demonstração, na visão de alguns críticos de abordagem dedutiva. Há alguns procedimentos que foram dados como resultados dedutivos.

A questão é que a descoberta para os matemáticos não está alinhada na verificação de tais resultados, mas na capacidade de atrelar tais descobertas como uma forma de explorar sempre novos resultados de forma mais ampla - a demonstração.

5.2.1.4. A Demonstração como processo de sistematização

A demonstração é indispensável para transformar o sistema dedutivo em resultados conhecidos.

Sistematizar é um instrumento de eficácia, no que tange à demonstração, fornecendo ao aluno definições já contribuídas que o estimulem a novas indagações e descobertas no processo educacional.

Segundo De Villiers (1986, *apud* de DE VILLIERS, 2001), existem algumas funções importantes da sistematização:

- Identifica hipóteses "escondidas";
- Simplifica e une as teorias matemáticas;
- Propicia a perspectiva do todo, mostrando a estrutura dos axiomas;
- Ajuda nas aplicações dentro e fora da Matemática;
- Auxilia sistemas alternativos com novas perspectivas.

O principal objetivo é organizar afirmações e não apenas verificar a veracidade.

5.2.1.5. A Demonstração como processo de comunicação

A importância da função como comunicação da Geometria tem sido abordada por vários autores. Como exemplo citamos Volmink (1990, p. 8, *apud* de DE VILLIERS, 2001) que diz que a demonstração é um meio de comunicação, uma forma de discurso.

Um dos meios mais importantes da demonstração se encontra na comunicação. Por meio desta é possível argumentar, contrapor, partilhar expressando definições e aceitando ou recusando um contraexemplo.

A demonstração tem como função fazer a comunicação entre a teoria e a prática; atribuída de significados e descobertas.

5.2.1.6. A Demonstração como desafio intelectual

Para os matemáticos a demonstração é um desafio intelectual. Há outras pessoas que podem considerar como apenas um entretenimento.

Partindo de um análogo, desafios comuns como quebra-cabeças, palavras cruzadas são no senso comum desafios intelectuais cotidianos. Para célebres como Pitágoras, a descoberta das demonstrações também são desafios intelectuais, partindo evidentemente de estudos da ciência.

O exemplo acima é apenas para ilustrar que situações que exigem concentração ou satisfação em atingir uma meta. São partes do processo no qual o ser humano é dotado - a inteligência.

5.2.1.7. Geometria Dinâmica

Segundo Néri (s.d.), a Geometria Dinâmica é um termo usado para indicar um método interativo para o ensino e a aprendizagem de Geometria através da tecnologia.

A palavra "dinâmica" refere-se à ideia de movimento, assim após construções usando softwares, os alunos poderão visualizar de formas diferentes, "arrastando" suas construções e transformando-as, mantendo as relações geométricas. Assim os alunos irão perceber a associação entre os objetos trabalhados, ao invés de se preocupar com as construções feitas "a mão", facilitando a compreensão.

Os primeiros softwares da Geometria Dinâmica trabalhados foram *Geometer's Sketchpad* (1989) e *Cabri Géomètre* (1988). Hoje, temos outros softwares com as mesmas funções. Alguns desses softwares:

- *Sketchpad*: Foi desenvolvido por Ivan Sutherland em sua tese, no MIT (Instituto de Tecnologia de Massachusetts), em 1963. Faz modernos desenhos auxiliado pelo computador. Sendo considerado um grande avanço no desenvolvimento da computação gráfica. A beleza do Sketchpad está em que ele permite que uma pessoa descubra de forma instantânea se uma conjectura está certa ou errada.

- GeoGebra: Foi criado por Markus Hohenwater, em 2001, com base na sua tese. É um software gratuito de matemática dinâmica desenvolvido para o ensino e aprendizagem da matemática do ensino básico ao universitário. Reunindo, além de geometria, recursos como álgebra, gráficos, estatística, entre outros. Possibilita novas estratégias na aprendizagem, possibilitando alunos e professores a explorar todos os seus recursos;

- Cabri Géomètre: É um software de construção em Geometria desenvolvido pelo Instituto de Informática e de Matemática Aplicada em Grenoble (França), com a colaboração de cientistas da Informática. Apresenta uma interface bem dinâmica, interativa e muitas representações (tanto geométrica quanto analítica);

- iGeom: Um projeto que começou a ser desenvolvido no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo (IME-USP) em 2000, pelo professor Leônidas de Oliveira Brandão com o objetivo de ser gratuito e poder ser utilizado via WEB. A escolha da linguagem **Java** foi para que o software funcionasse como aplicativo e *applet*. Sendo que a primeira versão com autoria e validação foi disponibilizada em Março de 2004. Permite realizar todas as operações básicas de Geometria Dinâmica, como criar objetos geométricos, opções de edição, opções de gravação/recuperação de arquivos e outros recursos.

A preferência pelo uso do software GeoGebra; neste trabalho, deve-se pelo fato do mesmo ser um software de fácil compreensão, atrativo e utilizado durante os estudos acadêmicos da autora. No que se refere ao campo didático ele proporciona ao aluno uma linguagem mais acessível para compreensão, tornando-se um facilitador para a faixa etária da educação básica, estabelecendo também uma conexão mais propícia para atividades escolares.

Com o uso cada vez mais frequente da tecnologia tão explorada nos dias de hoje, esse software proporciona atividades diferenciadas que facilitarão a compreensão da geometria por meio da Geometria Dinâmica na qual se pode explorar os níveis da Teoria de Van Hiele.

Segundo Bongiovani (s.d) por meio da Geometria Dinâmica podemos perceber as diferenças entre dois conceitos **Desenhar** e **Construir**.

Desenhar é partir de uma representação mental que possuímos de um conhecimento adquirido da Geometria. Ao movimentar os vértices do objeto geométrico desenhado, suas propriedades não serão preservadas.

Construir é obter a representação dos objetos geométricos por meio de suas propriedades. Ao movimentar os vértices do objeto construído, suas propriedades serão preservadas.

Com o auxílio de softwares da Geometria Dinâmica é possível realizar as construções geométricas que facilitarão a compreensão da parte teórica e resolução de atividades.

5.3. Considerações sobre Van Hiele e Michael De Villiers

Este trabalho analisa, principalmente, as demonstrações geométricas e destaca dois estudiosos desta área - Van Hiele e Michael De Villiers.

Van Hiele iniciou sua tese juntamente com a sua esposa sobre Geometria. Durante os estudos da tese, os dois iniciaram o aprofundamento no que se refere ao aprendizado do aluno em Geometria. Concluíram que a deficiência estava do currículo da Geometria. Diante desta fundamentação em suas teses formularam a ordenação do currículo, partindo de que os alunos não compreendiam, pois a ordenação partia do nível mais alto ao nível mais baixo.

Diante de tal constatação reorganizaram em níveis de 1 a 5, nas quais os alunos pudessem compreender com mais especificidade.

De Villiers parte seus estudos matemáticos baseados na tese do casal Van Hiele. Sua contribuição se estende até os dias de hoje na área de matemática, particularmente em Geometria e demonstrações.

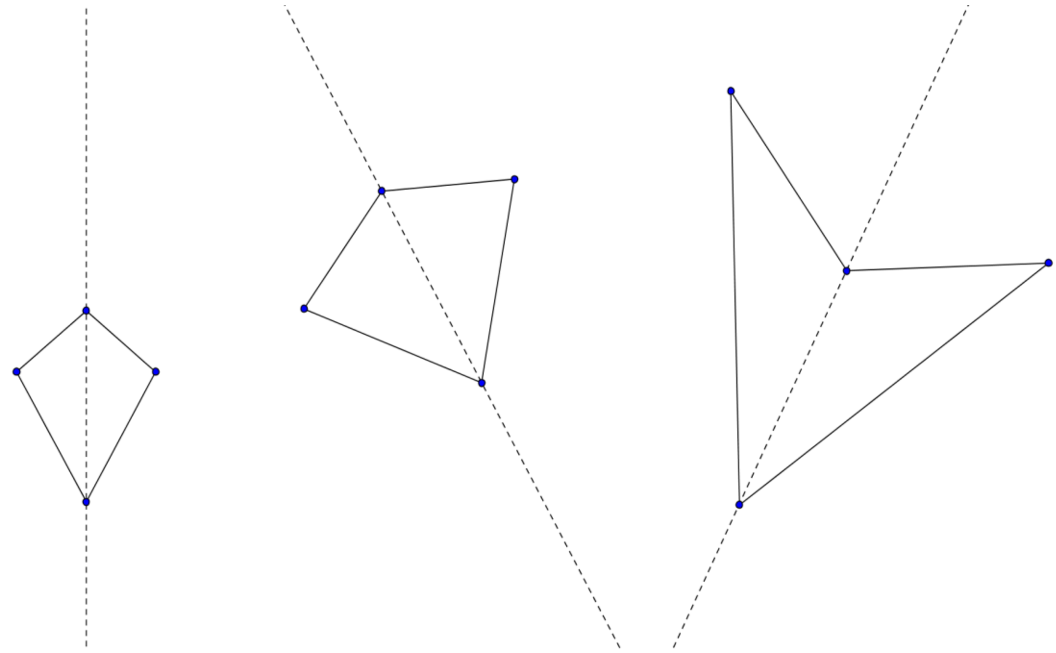
De Villiers destaca que a demonstração não se resume no ato de verificar, mas completa que demonstrar são parte de algo mais significativo que envolve as funções de explicação, descoberta, sistematização, comunicação e desafio intelectual.

Dessa forma, torna-se relevante referirmos que os matemáticos Van Hiele e De Villiers, contribuíram e contribuem para os estudos matemáticos respectivamente.

O modelo de Van Hiele analisa a demonstração, principalmente, como meio de verificação e De Villiers ressalta a importância da demonstração matemática não apenas como meio de verificação, mas através das funções elaboradas em seus estudos que complementam a verificação.

Baseado nesta concepção em seguida será apresentado um exemplo de quadriláteros que mostram os estudos realizados por esses dois matemáticos.

Atividade: Exploração das propriedades de uma pipa[12].



Fonte: Algumas reflexões sobre a Teoria de Van Hiele. (Criado pela autora no GeoGebra)

[12] Pipa é um quadrilátero que tem dois pares de lados consecutivos congruentes, mas os seus lados opostos não são congruentes, disponível em www.pessoal.sercomtel.com.br.

Os alunos usam o GeoGebra para construir uma pipa usando reflexão e explorar as propriedades (ângulos, lados, diagonais, ...). Ao movimentar os vértices dos quadriláteros através do software de Geometria Dinâmica, o GeoGebra, os alunos exploram casos especiais (losango, quadrado).

- envolve o Nível 1 (visualização) e Nível 2 (análise de propriedades) da Teoria de Van Hiele.

- as propriedades da pipa são *explicadas* (comprovadas) em termos de simetria reflexiva de acordo com a Teoria de Michael De Villiers.

Desde o tempo de Euclides que a geometria é composta por teorias matemáticas com estruturas lógicas — axiomas, noções primitivas, definições, teoremas e demonstrações. É importante que, ao longo da vida escolar, os alunos se familiarizem com a formalização, com os processos dedutivos e demonstrativos tão próprios da Geometria, para que fique mais completo o seu conhecimento acerca deste patrimônio cultural que é a Matemática. É de acordo com estas considerações que devemos pensar na organização de um currículo.

No próximo capítulo estão relatados os procedimentos adotados para a elaboração deste trabalho de Conclusão de Curso.

6 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Este trabalho foi realizado por meio da pesquisa de artigos científicos, bibliográficos e sugestão de uma Sequência Didática para o ensino de um tópico da Geometria.

Foram analisados os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental e Médio (PCN/97) sobre o Ensino da Matemática, com foco no ensino da Geometria, tendo como referência artigos citados que corroboraram para uma análise do Ensino de Geometria no campo educacional. Foi analisada a Lei de Diretrizes e Bases da Educação (LDB 9394/96) a respeito do que essa lei fala sobre o ensino da Matemática. Ao final, propusemos o uso de uma Sequência Didática para o Ensino de Geometria. Essa Sequência Didática tem como objetivo auxiliar os alunos na aprendizagem geométrica, com o intuito de aprimorar seus conhecimentos.

Por fim, espera-se que, com o andamento da Sequência didática, as demonstrações possam dar subsídios aos alunos, favorecendo dessa forma a aprendizagem qualitativa no que se refere ao ensino da Geometria.

Finaliza-se por meio da proposta da Sequência Didática para corroborar com o ensino, utilizando as demonstrações e suas especificidades.

7 SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Segundo Amaral (2013), Sequência Didática é uma forma de ensino em que o conteúdo que se pretende abordar é focado por passos ou etapas, tornando assim mais eficiente a aprendizagem.

Ela auxilia o trabalho docente na organização e planejamento de suas aulas de forma que parte do conhecimento do aluno para chegar ao nível que se espera que o aluno alcance.

A Sequência Didática que foi utilizada para essa pesquisa teve por objetivo colaborar com o trabalho docente aplicando conceitos que auxiliem o ensino da Geometria Plana por meio das demonstrações. No que se refere ao discente, o objetivo é promover uma aprendizagem efetiva utilizando uma abordagem significativa, nas quais formam elencados os temas de: noções e proposições primitivas, axiomas, postulados, ângulos opostos pelo vértice e congruência. Esta atividade poderá ser aplicada a alunos do 8º e 9º ano do Ensino Fundamental.

As etapas da Sequência Didática que se seguem fazem parte de uma proposta de atividade para ser aplicada a estes alunos. A proposta é mapear o conhecimento prévio dos alunos, desenvolver e aplicar a atividade, explorando de forma pontual e com clareza. Ao completar o processo de ensino e aprendizagem se faz necessário sanar as possíveis dúvidas com os alunos, registrando as aplicações realizadas. Por fim, avaliar o desempenho e a aprendizagem de cada um.

Os materiais necessários são:

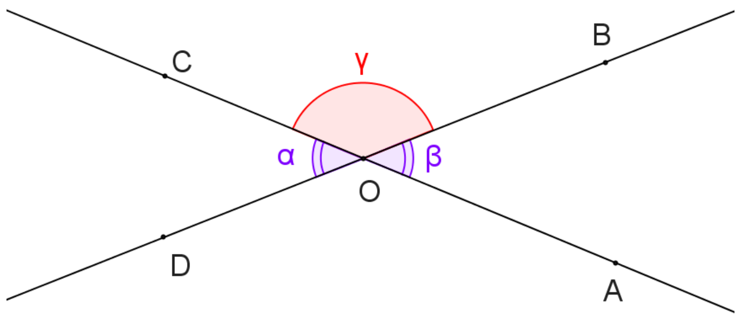
- Folha de Sulfite, lápis, borracha e régua.

Atividade Sugerida:

Demonstrar a seguinte afirmação:

"Se dois ângulos são opostos pelo vértice, então eles são congruentes"

Considerando AÔB de medida β e CÔD de medida α opostos pelo vértice (opv) e o ângulo BÔC de medida γ



Fonte Própria: Geogebra

Responda:

1. De acordo com o teorema acima, identifique a Hipótese e a Tese.

2. O que você pode dizer sobre os ângulos AÔB e BÔC? Dê o valor da soma entre eles.

3. O que você pode dizer sobre os ângulos CÔD e BÔC? Dê o valor da soma entre eles.

4. Colocando em um sistema e subtraindo as respostas das questões 2 e 3, qual a nova informação que se obtém?

5. A partir da informação obtida na questão 4, qual axioma corresponde à resposta?

a) Axioma 1: Duas coisas iguais a uma terceira, são iguais entre si.

b) Axioma 2: Se parcelas iguais forem adicionadas a quantias iguais, os resultados continuarão sendo iguais.

c) Axioma 3: Se quantias iguais forem subtraídas das mesmas quantias, os restos serão iguais.

d) Axioma 4: O todo é maior que a parte.

6. Após responder todas as questões, o que você pode concluir sobre os ângulos opostos pelo vértice?

A atividade será avaliada por meio de atividades e/ou outros instrumentos que possibilitem avaliar o conteúdo proposto.

Espera-se que o aluno, resolva a atividade e conclua que os ângulos opostos pelo vértice são congruentes e saiba demonstrar que isso é verdade.

A proposta da atividade está alicerçada no nível cognitivo de compreensão pelos alunos das ideias matemáticas, em que possam desenvolver progressivamente e raciocinando dedutivamente a demonstração até tornarem-se aptos a dominar os axiomas envolvidos.

7.1. Análise da Sequência Didática

Questões:

1. De acordo com o teorema acima, identifique a Hipótese e a Tese.

O aluno deve identificar o que é uma hipótese e uma tese, usando a seguinte justificativa: a hipótese é uma teoria provável e a tese é uma proposição para ser comprovada.

Esta questão relaciona-se a função de sistematização de De Villiers porque fornece ao aluno definições que o estimula a novas indagações, ou seja, identifica hipóteses e teses "escondidas". No nível 2 de Van Hiele o aluno inicia o processo de analisar as figuras geométricas e identificar suas propriedades.

2. O que você pode dizer sobre os ângulos AÔB e BÔC? Dê o valor da soma entre eles.

Na questão 2, o aluno tem o objetivo de explicar que os ângulos AÔB e BÔC são suplementares, ou seja, sua soma mede 180°.

Relaciona-se ao nível 3 de Van Hiele. Nesta fase o aluno inicia a percepção da necessidade de uma definição mais precisa e argumentativa. No que tange a De

Villiers na função de explicação, espera-se que o aluno passe a explicitar sobre os ângulos da figura.

3. O que você pode dizer sobre os ângulos CÔD e BÔC? Dê o valor da soma entre eles.

Na questão 3, o aluno tem o objetivo de explicar que os ângulos CÔD e BÔC são suplementares, ou seja, medem 180°.

Relaciona-se ao nível 3 de Van Hiele. Nesta fase o aluno inicia a percepção da necessidade de uma definição mais precisa e argumentativa. No que tange a De Villiers na função de explicação, espera-se que o aluno passe a explicitar sobre os ângulos da figura.

4. Colocando em um sistema e subtraindo as respostas das questões 2 e 3, qual a nova informação que se obtém?

Nesta questão, o aluno deve utilizar de respostas anteriores para descobrir uma nova informação, ou seja, que $\beta - \alpha = 0 \Rightarrow \beta = \alpha$

Relaciona-se ao nível 3 de Van Hiele. Nesta fase o aluno inicia a percepção de que propriedades podem decorrer de outras. No que diz respeito às funções de descoberta e sistematização de De Villiers, o aluno descobre novas informações partindo das já conhecidas e organiza afirmações, respectivamente.

5. A partir da informação obtida na questão 4, qual axioma corresponde à resposta?

> **a) Axioma 1: Duas coisas iguais a uma terceira, são iguais entre si.**
>
> **b) Axioma 2: Se parcelas iguais forem adicionadas a quantias iguais, os resultados continuarão sendo iguais.**
>
> **c) Axioma 3: Se quantias iguais forem subtraídas das mesmas quantias, os restos serão iguais.**
>
> **d) Axioma 4: O todo é maior que a parte.**

O aluno deve identificar qual axioma corresponde à questão anterior.

Relaciona-se ao nível 4 de Van Hiele. O aluno inicia o domínio do processo dedutivo. As funções de sistematização e descoberta de De Villiers mostra ao aluno a estrutura dos axiomas e a descoberta de uma nova informação, respectivamente.

6. Após responder todas as questões, o que você pode concluir sobre os ângulos opostos pelo vértice?

Nesta questão, espera-se que o aluno una todas as informações obtidas para concluir e descobrir o que são os ângulos opostos pelo vértice.

Relaciona-se ao nível 5 de Van Hiele. O aluno já consegue estabelecer e demonstrar teoremas. As funções de descoberta e sistematização de De Villiers onde o aluno passa a descobrir novas afirmações e organizar informações já conhecidas, respectivamente.

O objetivo da atividade está na importância da investigação do professor em analisar as dificuldades apresentadas e permitir tarefas e ações que poderão potencializar o desenvolvimento e desta forma aferir a qualidade da aprendizagem e o raciocínio potencializado pelos alunos nas demonstrações.

A Sequência Didática proposta fica como sugestão para pesquisadores na qual possam fazer uso da aplicação ou análise e como parte dos estudos subsequentes desta aluna concluinte do curso de graduação em Licenciatura em Matemática.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O trabalho apresentado como “Geometria e Demonstração: Contribuindo para a Formação do Professor nas Séries Finais da Educação Básica” é um aporte para análise de como se aborda a Geometria nessa modalidade de ensino e sugerindo uma metodologia para que isso possa ser feito. A história da Geometria foi analisada desde a antiguidade até os tempos atuais passando pelo histórico de seu ensino no Brasil. Primeiramente a geometria era uma ferramenta usada pelos homens para cálculos ligados ao seu dia a dia até o momento em que se chegou à conclusão que era necessário se demonstrar os conceitos e suas propriedades para que esses tivessem validade e a partir daí novos conceitos e suas propriedades foram aceitas apenas após suas demonstrações serem apresentadas. As fórmulas surgiram a partir dessas demonstrações. Dessa forma, a metodologia sugerida por esse trabalho foi baseada nas demonstrações em detrimento do uso único e exclusivo de fórmulas.

Esse trabalho quis mostrar que o aprendizado da Geometria é mais efetivo quando o aluno conhece a demonstração dos conceitos envolvidos no conteúdo que está estudando não utilizando apenas as fórmulas prontas. Ao conhecer o caminho que os estudiosos seguiram até chegar ao conhecimento em si, o aluno terá uma aprendizagem melhor dos conceitos envolvidos no seu contato com a Geometria.

A Sequência didática, proposta no capítulo 7, é uma atividade que visa mostrar como a teoria e a prática podem estar aliadas em pró da aprendizagem da Geometria. O objetivo dessa Sequência Didática é mostrar que os conceitos estudados em Geometria não são fórmulas que chegaram prontas, mas que podem e devem ser construídas a partir de demonstrações coesas.

Espera-se que este trabalho colabore para que os educadores possam repensar sobre a importância da geometria no currículo escolar da Educação Básica e que as demonstrações possam fazer parte da prática escolar e como ferramenta no desenvolvimento do educando.

Fica aqui a sugestão para que se elaborem novas Sequências Didáticas, aperfeiçoando assim o ensino de Geometria; podendo incluí-las em atividades geométricas para que o assunto possa ser abordado de maneira mais ampla contribuindo para o ensino da Geometria nas aulas de Matemática.

CONCLUSÃO FINAL

A elaboração deste trabalho contribuiu para que eu me posicionasse diante da importância de se enfatizar o estudo da Geometria, permitindo-me interpretar e investigar com mais consistência o uso das demonstrações nas aulas destinadas a esse tópico tão significativo na disciplina de Matemática que muitas vezes é deixado de lado tanto pelos autores dos livros didáticos quanto pelos professores nas salas de aula da Educação Básica.

O estudo da Geometria a partir das demonstrações é um caminho para que o aluno compreenda que os conceitos matemáticos, não só na Geometria, foram construídos por estudiosos da área no decorrer dos tempos e não foram simplesmente inventados ou sugeridos sem fundamentação teórica.

Esse trabalho me mostrou caminhos interessantes para o uso das demonstrações nas aulas que ministrarei após a graduação e deixou aberto um caminho para que eu possa seguir meus estudos em cursos de pós graduação.

REFERÊNCIAS

ALEXANDRIA, Euclides de. Tradução e introdução de Irineu Bicudo. **Os Elementos.** São Paulo: Editora UNESP, 2009.

ALMOULOUD, Saddo Ag; MELLO, Elizabeth Gervazoni Silva de. **Iniciação à Demonstração Aprendendo Conceitos Geométricos**. Disponível em www.ufrrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_23/iniciacao.pdf, consultado em 20 de Fevereiro de 2014.

AMARAL, Heloísa. **Sequência Didática e ensino de gêneros textuais.** Disponível em www.escrevendoofuturo.org.br, consultado em 20 de Fevereiro de 2014.

BARRETO, Marina Menna; GRAVINA, Maria Alice. **Cabry-Geometry.** Disponível em www.penta.ufrgs.br, consultado em 06 de Outubro de 2014.

BASTOS, Rita. **Geometria no currículo e pensamento matemático.** Disponível em www.apm.pt/apm/revista/educ52/educ52_2.htm, consultado em 21 de Fevereiro de 2014.

BONGIOVANI, Vincenzo. **Desenhar e Construir.** Notas de aula.

____________. **As geometrias não euclidianas.** Notas de aula.

BRASIL. Ministério de Educação e Cultura. **LDB - Lei nº 9394/96**, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da Educação Nacional. Brasília: MEC, 1996.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática, V. 2. Brasília: MEC / SEF, 1997.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN)**. Disponível em www.portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro01.pdf, consultado em 08 de Outubro de 2012.

BRITO, Maria das Dores Costa. **A História da Matemática no Brasil.** Curso de Matemática, Universidade Católica de Brasília. 2007.

CHIEREGATO, Sócrates Eduardo; RODRIGUES, Sílvia R. Viel. **FRANCA: O Ensino de Geometria Hoje.** Disponível em www.legacy.unifacef.com.br, consultado em 10 de Fevereiro de 2014.

CONHECER, Dicionário Enciclopédico. **História da Geometria.** Disponível em www.somatematica.com.br/geometria, consultado em 08 de Agosto de 2012.

CROWLEY, Mary L. **O modelo Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico**. In: LINDQUIST, Mary & SHULTE, Albert P. (organizadores), Aprendendo e Ensinando Geometria. São Paulo: Atual, 1994.

CRUZ, Donizete Gonçalves da; SANTOS, Carlos Henrique dos. **Algumas diferenças entre a Geometria Euclidiana e as Geometrias não Euclidianas –**

Hiperbólica e Elíptica a serem abordados nas séries do Ensino Médio. Disponível em www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/1734-8.pdf, consultado em 13 de Outubro de 2014.

EVES, Howard. Tradução: Hygino H. Domingues. **Introdução à História da Matemática.** 5ª ed - Campinas, São Paulo: Editora da Unicamp, 2011.

____________. Tradução: Hygino H. Domingues. **Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula - Geometria.** Vol. 3 - São Paulo: Atual Editora, 1994.

FERREIRA, Fernanda Aparecida; MIRANDA, Dimas Felipe de. **Demonstração em Geometria Euclidiana: uma sequência didática como recurso metodológico para o seu ensino**. Belo Horizonte: FUMAR/PUC-MG, 2008.

GUERATO, Elisabete Teresinha. **Dificuldades e possibilidades no ensino da geometria na EJA**. Disponível em www.cefetsp.br/edu/eja/ensinogeometria.pdf, consultado em 03 de Novembro de 2012.

HAMAZAKI, Adriana Clara. **O Ensino da Geometria Sob a Ótica dos Van Hiele.** Disponível em www.sbem.com.br/files/viii/pdf/07/2PO13912905851.pdf, consultado em 27 de Agosto de 2012.

HIELE, Van. **Teoria de Van Hiele: Desenvolvimento do Raciocínio em Geometria.** Disponível em www.mat.ufmg.br, consultado em 10 de Agosto de 2012.

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE SÃO PAULO. **Histórico**. Campus São Paulo: mais de um século de história. Disponível em www.spo.ifsp.edu.br, consultado em 07 de Outubro de 2014.

ISOTANI, Seiji. **O Programa iGeom.** Disponível em www.ei.sanken.osaka-u.ac.jp/~isotani/mestrado/html/node22.html, consultado em 07 de Outubro de 2014.

LOPES, Jéssica Gonçalves. **Geometria e Teoria de Van Hiele: O Ensino de Geometria por intermédio do uso de um software de Geometria Dinâmica.** Orientador: Lucélio Ferreira Simão. Unidade Universitária de Dourados (UEMS). Matemática. 2011/2012.

LORENZATO, Sergio. **Por que não Ensinar Geometria?** A Educação Matemática em Revista - SBEM. Nº 4, 1º semestre, 1995.

NÉRI, Izaias Cordeiro. **O que é Geometria Dinâmica?** Disponível em www.geometriadinamica.com.br, consultado em 14 de Julho de 2014.

OLIVEIRA, Liliane Lelis de; VELASCO, Ângela Dias. **O Ensino de Geometria nas Escolas de Nível Médio da Rede Pública da Cidade de Guaratinguetá.** 2007. Disponível em www.degraf.ufpr.br/artigos_graphica/OENSINO.pdf, consultado em 14 de Abril de 2014.

OLIVEIRA, Mariângela de Castro e. **Ressignificando a Geometria Plana no Ensino Médio, com o auxílio de Van Hiele.** Orientadora: Profª. Drª. Eliane Scheid Gazire. Belo Horizonte, 2012.

POMBO, Olga. **Geometria Não Euclidiana**. Disponível em www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/alice/geometria_ne.htm, consultado em 11 de Fevereiro de 2014.

PONTE, João Pedro da; SERRAZINA, Maria de Lurdes. **Didática da Matemática do 1º Ciclo.** Editor: Universidade Aberta, 2000. p. 260.

ROGENSKI, Maria Lucia Cordeiro; PEDROSO, Sandra Mara Dias. **O Ensino da Geometria na Educação Básica: Realidade e Possibilidades.** Disponível em www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/44-4.pdf, consultado em 08 de Abril de 2014.

SANTOS, Cristiane de Oliveira. **A importância da visualização no ensino da Geometria.** Disponível em www.cdn.ueg.br, consultado em 20 de Julho de 2014.

SANTOS, Ernani Martins dos. **Geometria: História e Ensino**. Disponível em www.webartigos.com/artigos/geometria-historia-e-ensino/21366, consultado em 20 de Agosto de 2012.

SANTOS, Ricardo de Jesus; MENEZES, Valter Mendonça de; ETCHEVERRIA, Teresa Cristina. **O que Pensam os Professores das Escolas da Rede Pública de Itabaiana sobre o Ensino de Geometria**. Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática. 2013.

SÁ, Robison. **Geometria Plana: conceitos históricos e cálculo de áreas.** Disponível em www.infoescola.com/matematica/geometria-plana-conceitos-historicos-e-calculo-de-areas, consultado em 30 de Dezembro de 2013.

SOUSA, Lurdes. **O Teorema das Quatro Cores.** Departamento de Matemática, Escola Superior de Tecnologia de Viseu. Disponível em www.ipv.pt/millenium/Millenium24/12.pdf, consultado em 14 de Outubro de 2014.

UFRGS, Grupo de Pesquisa em Matemática. **A Matemática no Mundo Atual.** Disponível em www.mat.ufrgs.br/~ppgmat/grupo/matematica.html, consultado em 08 de Abril de 2014.

UNIVERSITY, Princeton. **Sketchpad.** Disponível em www.princeton.edu, consultado em 06 de Outubro de 2014.

USP, UNESP e PUC-SP, PEC- Formação de professores, apostila de matemática, 2001-2002. Disponíveis em www.pec.sp.gov.br, consultado em 04 de Setembro de 2013.

VILLIERS, Michael de. **Mike de Villiers: Dynamic Math Learning**. Disponível em www.mzone.mweb.co.za/residents/profmd/homepage.html, consultado em 01 de Setembro de 2013.

_____________. **Para uma Compreensão dos Diferentes Papeis da Demonstração em Geometria Dinâmica**. Trad.: Rita Bastos. Prof Mat 2002. Do original em inglês: Dynamic Math Learning.

_____________. **Algumas Reflexões sobre a Teoria de Van Hiele**. Trad.: Celina A. A. P. Abar. Do original em inglês: Some reflections on the Van Hiele Theory. Educação Matemática. Pesquisa. São Paulo, v.12, n.3, pp. 400-431, 2010.

____________. **Papel e funções da demonstração no trabalho com o Sketchpad.** Educação e Matemática, n.62, Março/Abril de 2001.

_____________. **O papel e a função de uma classificação hierárquica de quadriláteros.** Apresentado na PME 17, Universidade de Tsukuba, Japão, 18-23 de Julho de 1993.

VISEU, Escola Superior de Educação. **Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores do 1º ciclo**, disponível em www.esev.ipv.pt/mat1ciclo/tarefas/Teoria%20de%20van%20Hiele.pdf, consultado em 27 de Agosto de 2012.

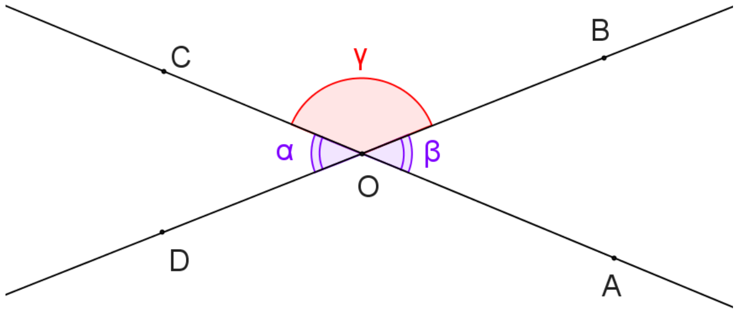
APÊNDICE

Atividade Sugerida:

Demonstrar a seguinte afirmação:

"Se dois ângulos são opostos pelo vértice, então eles são congruentes"

Considerando AÔB de medida β e CÔD de medida α opostos pelo vértice (opv) e o ângulo BÔC de medida γ



Fonte Própria: Geogebra

Responda:

1. De acordo com o teorema acima, identifique a Hipótese e a Tese.
2. O que você pode dizer sobre os ângulos AÔB e BÔC? Dê o valor da soma entre eles.
3. O que você pode dizer sobre os ângulos CÔD e BÔC? Dê o valor da soma entre eles.
4. Colocando em um sistema e subtraindo as respostas das questões 2 e 3, qual a nova informação que se obtém?
5. A partir da informação obtida na questão 4, qual axioma corresponde a resposta?

   a) Axioma 1: Duas coisas iguais a uma terceira, são iguais entre si.

   b) Axioma 2: Se parcelas iguais forem adicionadas a quantias iguais, os resultados continuarão sendo iguais.

c) Axioma 3: Se quantias iguais forem subtraídas das mesmas quantias, os restos serão iguais.

d) Axioma 4: O todo é maior que a parte.

6. Após responder todas as questões, o que você pode concluir sobre os ângulos opostos pelo vértice?

A resolução da Sequência Didática é:

1. Hipótese: AÔB e CÔD são opostos pelo vértice
   Tese: AÔB congruente a CÔD
2. Os ângulos AÔB e BÔC são suplementares e sua soma é 180º.
3. Os ângulos CÔD e BÔC são suplementares e sua soma é 180º.
4. $\begin{cases} \beta + \gamma = 180^{\circ} \\ \alpha + \gamma = 180^{\circ} \end{cases}$ -

$$\beta - \alpha = 0 \Rightarrow \beta = \alpha$$

5. a) Axioma 1: Duas coisas iguais a uma terceira, são iguais entre si.

6. Como $\alpha = \beta$, concluímos que AÔB congruente a CÔD.