

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São
Paulo - Campus São Paulo

**Estabilidade local dos pontos de equilíbrio
em sistemas planares e hiperbólicos de
EDO's de primeira ordem**

IFSP
São Paulo
2016

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São
Paulo - Campus São Paulo

**Estabilidade local dos pontos de equilíbrio em
sistemas planares e hiperbólicos de EDO's de
primeira ordem**

Leonardo Barduzzi Mattiuzzo

Orientador: Prof. Me. Luciano Aparecido Magrini

Coorientador: Prof. Dr. Ânderson da Silva Vieira

IFSP
São Paulo
2016

MATTIUZZO, Leonardo B.

Estabilidade local dos pontos de equilíbrio em sistemas planares e hiperbólicos de EDO's de primeira ordem / Leonardo Barduzzi Mattiuzzo - São Paulo: IFSP, 2016.

78f.

Trabalho de Conclusão do Curso Superior de Licenciatura em Matemática - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo

Orientador: Prof. Me. Luciano Aparecido Magrini Coorientador: Prof. Dr. Anderson da Silva Vieira

1. Equações Diferenciais Ordinárias. 2. Estabilidade Local. 3. Linearização. 4. Sistemas Planares. 5. Modelo Presa-Predador.

Leonardo Barduzzi Mattiuzzo

Sobre a estabilidade local dos pontos de equilíbrio em sistemas planares e hiperbólicos de EDO's de primeira ordem

Monografia apresentada ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia, em cumprimento ao requisito exigido para a obtenção do grau acadêmico Licenciado em Matemática.

APROVADA EM: ___ / ___ / ___

CONCEITO: _____

Prof^a. Me. Anna Karina Fontes Gomes
ETEP Faculdades
Membro da Banca

Prof. Dr. Ânderson da Silva Vieira
Instituto Federal de Educação, Ciência e
Tecnologia
Membro da Banca

Prof. Me. Luciano Aparecido Magrini
Instituto Federal de Educação, Ciência e
Tecnologia
Orientador

Aluno: Leonardo Barduzzi Mattiuzzo

"Todos quantos têm meditado na arte de governar o gênero humano acabam por se convencer de que a sorte dos impérios depende da educação da mocidade".
Aristóteles (384-322 a.C.)

Aos familiares mais próximos: meus pais, Marlene e Hécio, ao meu irmão Lucas, minha avó Catharina e à minha querida esposa Ellen.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Jesus, o Divino Mestre da humanidade, que nos ama em nossa pequenez, compreende a nossa imaturidade espiritual, mas confia no nosso progresso. Disse o Cristo: “*Não fostes vós que me escolhestes; pelo contrário, fui Eu que vos escolhi e vos designei para que vades e deis bons frutos (...)*” (João, 15:16). Espero que este trabalho seja um fruto bom para tantos quanto dele fizerem uso.

Agradeço a todos os professores do IFSP, em especial ao Luciano, e ao Anderson, respectivos orientador e coorientador deste trabalho, e ao Prof. Henrique Marins, coordenador do curso de Licenciatura em Matemática, que me aguentaram esse tempo todo, ‘puxando’ merecidamente a minha orelha.

Agradeço à minha querida esposa Ellen, que amo muito e que sabe me compreender e me amar em todos os momentos da vida, principalmente nas vésperas de finalizar este trabalho.

Agradeço ainda aos meus familiares na pessoa de minha mãe, Marlene, que sempre me aconselha a tomar as melhores decisões; ao meu pai, Hércio, que me ensina a ponderação e a simplicidade; ao meu irmão Lucas (guitarrista), que me presenteava com solfejos intermináveis noite a dentro, enquanto eu estudava para as disciplinas do IFSP; à minha avó materna, Catharina, que sempre foi e será minha segunda mãe; à minha avó paterna, Duzolina, que me enche de brilho nos olhos com sua simplicidade e força; aos meus avôs: Carlos (*in memoriam*), que não tive a honra de conhecer, mas sempre soube ser um homem honrado, e Paulo (*in memoriam*), que me ensinou, em longas conversações, a respeitar a vida e ao próximo.

Por fim, agradeço meus amigos do IFSP, que me ouviam falar deste trabalho com entusiasmo nos corredores e de amigos outros que direta ou indiretamente me apoiaram e apoiam na concretização dos meus sonhos.

Resumo

Este trabalho tem como objetivo principal apresentar de forma introdutória, a teoria qualitativa de sistemas de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem da forma

$$\begin{cases} x' = F(x, y), \\ y' = G(x, y), \end{cases}$$

onde $'$ indica a derivada da função em relação ao tempo; ou seja $' = \frac{d}{dt}$ e as funções F e G são contínuas, com derivadas parciais contínuas em algum domínio D do plano xy , estudando, especificamente, a estabilidade local dos pontos de equilíbrio em sistemas planares e hiperbólicos via autovalores e aplicando esta técnica à análise do clássico modelo biológico presa-predador e a uma variação deste modelo.

Palavras-chave: Equações Diferenciais Ordinárias, Estabilidade Local, Linearização, Sistemas Planares, Modelo Presa-Predador.

Abstract

The aim of this work is to present an introductory study of the qualitative theory of the 1st order ordinary differential equations of the form

$$\begin{cases} x' = F(x, y), \\ y' = G(x, y), \end{cases}$$

where $'$ indicates the derivative of the function in relation to time; that is $' = \frac{d}{dt}$ and F and G are continuous functions, with continuous partial derivatives in some domain D , such that $D \subset \mathbb{R}^2$, studying specifically the local stability of equilibrium points in planar and hyperbolic systems by eigenvalues, applying this technique to the analysis of predator-prey biological classic model and a variation of this model.

Keywords: Ordinary Differential Equations, Local Stability, Linearization, Planar Systems, Predator-Prey Model.

Lista de Figuras

Figura 1 – Ponto (x, y)	19
Figura 2 – Vetor (x, y)	19
Figura 3 – Se $\{v_1, v_2\}$ são LD	22
Figura 4 – Se $\{v_1, v_2\}$ são LI	22
Figura 5 – Família de soluções de (1.8)	28
Figura 6 – Campo de direções de (1.6)	29
Figura 7 – Gráfico de $y = \text{sen}(x) + 1$, no intervalo $[-6, 6]$	35
Figura 8 – Plano traço-determinante com a geometria Sela	45
Figura 9 – Plano traço-determinante com a geometria Sorvedouro	45
Figura 10 – Plano traço-determinante com a geometria Fonte	46
Figura 11 – Plano traço-determinante com a geometria Nó Impróprio Assintoticamente Estável	48
Figura 12 – Plano traço-determinante com a geometria Nó Impróprio Instável	48
Figura 13 – Geometrias de soluções via autovalores no plano traço-determinante.	49
Figura 14 – Nó instável do sistema (3.9)	58
Figura 15 – Nó estável do sistema (3.11)	58
Figura 16 – Campo de direções	62
Figura 17 – Retrato de fase	62
Figura 18 – Gráficos das populações de coelhos e lobos em função do tempo	62
Figura 19 – Gráficos das populações de coelhos e lobos em função do tempo	62

Lista de Tabelas

Tabela 1 – Retrato de fase a partir do determinante e do traço	50
Tabela 2 – Estabilidade a partir dos autovalores	50

Sumário

Lista de Figuras	10
Lista de Tabelas	11
Introdução	15
1 Preliminares	19
1.1 Fundamentos de Álgebra Linear	19
1.1.1 Introdução	19
1.1.2 Espaços e Subespaços Vetoriais	20
1.1.3 Combinação Linear, Dependência e Independência Linear	21
1.1.4 Base e Dimensão	22
1.1.5 Transformações Lineares	23
1.1.6 Matriz de uma Transformação Linear	23
1.1.7 Autovalores e Autovetores	25
1.2 Equações Diferenciais Ordinárias	27
1.2.1 Existência e unicidade de soluções	29
2 Sistemas de EDOs Lineares de Primeira Ordem - no plano	37
2.1 Soluções dos sistemas lineares por autovalores	37
2.2 Autovalores Distintos	39
2.3 Autovalores Complexos	39
2.4 Autovalores repetidos (com multiplicidade 2)	41
2.5 Retratos de Fase em Sistemas Lineares Hiperbólicos no Plano	43
2.5.1 Plano Traço-Determinante	43
2.5.2 Classificação dos Sistemas Lineares no Plano	44
3 Estabilidade	51
3.1 Sistemas Autônomos	51
3.2 Sistemas Quase Lineares	52
3.3 Retrato de Fase em sistemas não-lineares linearizados	56
4 Aplicação	59
4.1 Modelo presa-predador (Lotka-Volterra)	59
4.2 Uma variação do modelo presa-predador: Modelo de Schoener	63
4.3 Controle de pragas da broca da cana-de-açúcar	66
4.4 Modelo de Malthus: uma proposta para o ensino médio	67
Considerações Finais	71
Índice Remissivo	73
Referências	75

Introdução

Objetos de estudos fundamentais dentro do cálculo e da análise, as equações diferenciais escrevem um capítulo singular na matemática. São pouco mais de três séculos, desde que Pierre de Fermat (1661-1665), Isaac Newton (1643-1727), Gottfried Leibniz (1646-1716), e tantas outras mentes brilhantes, descobriram e fundamentaram o cálculo, desenvolvendo conceitos fundamentais ao entendimento dessas equações como importante ferramenta para investigar e explicar de forma satisfatória fenômenos naturais, quais sejam físicos, químicos, biológicos e até sociais.

Viajando juntos nesta breve história, veremos grandes pensadores que contribuíram proficuamente para o desenvolvimento teórico das equações diferenciais, bem como sua aplicação em diversos campos do conhecimento humano, dando luz à evolução científica e tecnológica, no entendimento da natureza e de seu funcionamento.

Há mais 300 anos, quando o cálculo diferencial já apresentava técnicas sofisticadas, alguns matemáticos perceberam que as soluções de determinadas equações não eram simples de se encontrar por meio dessas técnicas, exigindo melhores métodos algébricos e numéricos. Com isso, Jacob Bernoulli (1655-1705) e Leibniz somaram esforços ao criar o método de separação de variáveis, aplicando a integral (ou antiderivada) na resolução de casos especiais, legando um desenvolvimento técnico e teórico mais generalizado. Jacob Bernoulli, aplicando essa ferramenta na astronomia, estudou cuidadosamente e escreveu equações diferenciais para o movimento planetário, usando princípios de gravitação e momento angular desenvolvidos por Newton. Mais tarde, Edmond Halley (1656-1742) usou os mesmos princípios para analisar a trajetória do cometa que hoje carrega seu nome.

Leonhard Euler (1707-1783) foi o primeiro a entender as propriedades e a importância das funções exponenciais, logarítmicas, trigonométricas e muitas outras funções elementares. Desenvolveu assim, o método de variação de parâmetros e incluiu o uso de aproximações com métodos numéricos para chegar a soluções aproximadas em quase todas as equações diferenciais.

Em 1728, Daniel Bernoulli (1700-1782) usou os métodos de Euler no estudo de oscilações e equações diferenciais que apresentam esse comportamento. Jean D'Alembert (1717-1783) e Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) também seguiram os mesmos passos, o primeiro em física matemática envolvendo equações diferenciais parciais e o segundo desenvolvendo maior aporte teórico e ampliando resultados da mecânica, especialmente equações de movimento envolvendo três corpos e energia potencial, introduzindo em 1788 equações gerais de movimento para sistemas dinâmicos, conhecidas hoje como equações de Lagrange.

Já Laplace (1749-1827), estudou a estabilidade do sistema solar, avançando em técnicas numéricas de integração, introduzindo o conceito do laplaciano de uma função. Legendre (1752-1833), motivado pelo estudo do movimento de projéteis, incluiu pela primeira vez em suas equações, variáveis como resistência do ar e velocidades iniciais. Fourier (1768-1830) contribuiu com cálculos de difusão de calor e para solução de equações diferenciais com resultados importantes para o estudo de oscilações.

No século 19, a teoria e o conceito de função de variáveis complexas se desenvolveram com Carl Friedrich Gauss (1777-1855) e Augustin Cauchy (1789-1857). Gauss aplicou equações diferenciais para melhorar o estudo de órbitas planetárias e gravitação; estabeleceu a teoria do potencial e reconheceu que a teoria das funções de uma variável complexa era a chave para entender muitos dos resultados necessários em equações diferenciais aplicadas. Cauchy aplicou equações diferenciais para modelar a propagação de ondas sobre a superfície de um líquido; inventou o método das características, que é importante na análise e na solução de várias equações diferenciais parciais; definiu completamente as ideias de convergência e convergência absoluta de séries infinitas e foi o primeiro a desenvolver uma teoria sistemática para números complexos e a desenvolver a transformada de Fourier para prover soluções algébricas de equações diferenciais.

Carl Gustav Jacobi (1804-1851), em meados do século 19, desenvolveu a teoria de determinantes e transformações para a solução de integrais múltiplas e equações diferenciais. Arthur Cayley (1821-1895) também trabalhou com determinantes e criou uma teoria para operações com matrizes, tendo publicado mais de 900 artigos em várias áreas da matemática, da física e das astronomia.

Em 1876, Rudolf Lipschitz (1832-1903) desenvolveu teoremas de existência para soluções de equações diferenciais de primeira ordem. As famosas funções Lipschitz contínuas eram um caso particular das funções Hölder, desenvolvidas por Otto Hölder (1859-1937).

Charles Hermite (1822-1901) desenvolveu a teoria de funções e soluções, mostrando que a equação de quinta ordem poderia ser resolvida por funções elípticas que, posteriormente mostraram-se muito úteis para resolver a equação de onda de Schrödinger e outras equações diferenciais. O próximo a construir fundamento teórico foi Bernhard Riemann (1826-1866), orientado por Gauss, em teoria de variáveis complexas, cujo trabalho em equações diferenciais contribuiu para resultados em dinâmica e física.

Uma importante contribuinte teórica foi Sonja Kowalewski (1850-1891), considerada a maior matemática antes do século 20, com um trabalho sobre a teoria das equações diferenciais parciais e um resultado central sobre a existência de soluções que ainda carrega o seu nome. E com métodos mais robustos de resolução numérica em problemas de valor inicial, Carl Runge (1856-1927), resolveu equações diferenciais que surgiam em seus estudos do espectro atômico, contribuindo grandemente para a física da espectroscopia.

Posteriormente, um grande obstáculo ainda precisava ser vencido sobre equações

diferencias não lineares. Henry Poincaré (1854-1912), considerado o maior matemático de sua geração, produziu nada menos que 30 livros técnicos de física matemática e mecânica celeste. Sobre este último assunto, trabalhou com resultados do astrônomo americano George Hill (1838-1914), investigando a estabilidade das órbitas planetárias e iniciou a teoria qualitativa de equações diferenciais não lineares. Poincaré contribuiu em quatro áreas principais da matemática: análise, álgebra, geométrica e teoria de números. Ele tinha um domínio criativo de toda a matemática de seu tempo.

No século 20, George Birkhoff (1884-1944) usou as ideias de Poincaré para analisar sistemas dinâmicos em alta dimensão e estabelecer uma teoria para a análise das propriedades das soluções dessas equações. Na década de 80, a teoria do caos usou os princípios desenvolvidos por Poincaré e seus seguidores.

O estudo das Equações Diferenciais Ordinárias (EDO's) constitui hoje um vasto campo a ser explorado dentro da matemática, tanto por seu interesse teórico quanto pelas excelentes ferramentas que oferece às ciências aplicadas.

Motivado, pois, por esse estudo durante o curso de graduação no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo (IFSP), foi elaborado este trabalho, após ampla pesquisa bibliográfica com o intuito de compreender esta importante área da matemática que se dedica a explicar fenômenos físicos, químicos, biológicos, sociais, que variam com o tempo, modelando-os matematicamente. Focamos assim, no estudo qualitativo da estabilidade local dos pontos de equilíbrio de sistemas de EDO's de primeira ordem, mais especificamente aos sistemas planares (bidimensionais) e hiperbólicos, fazendo uso de importantes ferramentas da Álgebra Linear.

O Capítulo 1 é dividido em duas seções a fim de fornecer ao leitor tópicos iniciais importantes. Na seção 1.1, traz-se de forma objetiva tópicos essenciais da Álgebra Linear, principalmente da teoria de autovalores, essencial para este trabalho. E a seção 1.2, trata-se das ideias centrais acerca das equações diferenciais ordinárias, sua fundamentação teórica e o anúncio e demonstração do importante Teorema 1.2.2; tal demonstração é construtiva, uma vez que fornece um método para encontrar a solução de quaisquer EDO's.

No processo de modelagem matemática, alguns comportamentos observados na natureza exigem interações de duas ou mais equações. Apresentamos no Capítulo 2 os sistemas planares de equações diferenciais e uma introdução aos métodos qualitativos que permitem entender o comportamento das soluções de tais sistemas. Faremos ainda uma classificação desses sistemas lineares no plano.

No Capítulo 3, nos concentramos na classificação dos pontos de equilíbrio quanto a estabilidade, abordando inclusive o caso de sistemas não-lineares e hiperbólicos. Por fim, no Capítulo 4, a teoria estudada é aplicada em modelos biológicos.

1 Preliminares

O tratamento moderno de equações diferenciais requer a linguagem básica da Álgebra Linear; portanto, por completude, apresentamos neste capítulo um pouco dos fundamentos desta área. Traremos também a definição e alguns exemplos de Equação Diferencial Ordinária (EDO) e a demonstração do Teorema de Existência e Unicidade de soluções de equações de primeira ordem, cuja prova é construtiva.

1.1 Fundamentos de Álgebra Linear

Algumas noções e conceitos estudados em Álgebra Linear são importantes para o desenvolvimento de grande parte das etapas desse trabalho, uma vez que a técnica aplicada para o estudo da estabilidade local dos pontos de equilíbrio em sistemas planares e hiperbólicos de EDO's de primeira ordem faz-se via autovalores e autovetores. Destacaremos nesta seção, de forma objetiva, tópicos essenciais para a continuidade desse trabalho. O leitor entretanto, pode ver a teoria completa em (STEINBRUCH; WINTERLE, 2008).

1.1.1 Introdução

Sabe-se que o conjunto

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\},$$

é geometricamente interpretado como sendo o plano cartesiano. Um par (x, y) pode ser um ponto (Figura 1), onde x e y são coordenadas, ou pode ser um vetor (Figura 2) onde x e y são componentes.

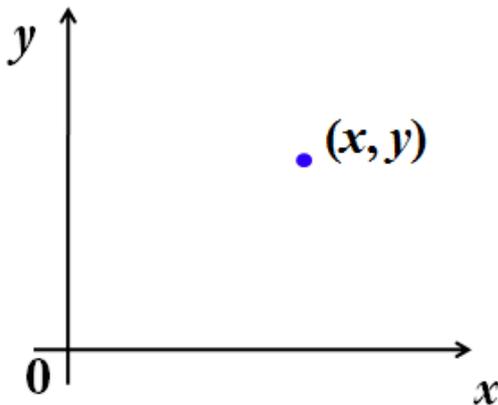


Figura 1 – Ponto (x, y)

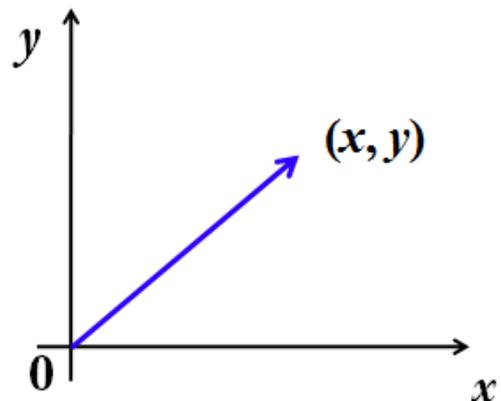


Figura 2 – Vetor (x, y)

Com relação ao plano, a ideia estende-se para o espaço tridimensional; ou seja, o conjunto \mathbb{R}^3 . A parte algébrica estende-se ainda para espaços $\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^5, \dots, \mathbb{R}^n$, porém, para dimensões acima de 3, não temos a representação geométrica. Assim, o espaço de dimensão n (ou espaço n -dimensional) é formado pelo conjunto das n -uplas ordenadas, representado por \mathbb{R}^n

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_i \in \mathbb{R}\},$$

sendo $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ e $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ vetores do \mathbb{R}^n e α um escalar, defini-se

- a) $u = v \Leftrightarrow u_1 = v_1, u_2 = v_2, \dots, u_n = v_n$;
- b) $u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n)$;
- c) $\alpha \cdot u = (\alpha u_1, \alpha u_2, \dots, \alpha u_n)$;
- d) $u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n$ (produto escalar);
- e) $\|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2}$ (norma euclidiana do vetor u).

O vetor $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ também pode ser escrito de forma matricial (matriz-coluna $n \times 1$)

$$[u] = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}.$$

1.1.2 Espaços e Subespaços Vetoriais

Definição 1.1.1. *Seja V um conjunto não vazio e, sobre ele, definidas as operações de adição e multiplicação por escalar, isto é, para quaisquer $u, v \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$,*

- i) $u + v \in V$,
- ii) $\alpha u \in V$.

*O conjunto V com essas duas operações é chamado de **espaço vetorial real** (ou espaço vetorial sobre \mathbb{R}), se os oito axiomas a seguir forem satisfeitos para quaisquer $u, v, w \in V$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.*

Com relação à adição:

- A1) $(u + v) + w = u + (v + w)$ (associativa);
- A2) $u + v = v + u$ (comutativa);
- A3) existe $0 \in V$, tal que $u + 0 = u$ (elemento neutro da adição);
- A4) existe $-u \in V$, tal que $u + (-u) = 0$ (elemento simétrico ou oposto).

Com relação à multiplicação:

- M1) $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$ (associativa com escalar);

M2) $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$ (distributiva com vetor);

M3) $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$ (distributiva com escalar);

M4) $1u = u$ (elemento neutro da multiplicação).

Definição 1.1.2. *Sejam V um espaço vetorial e S um subconjunto não-vazio de V . O subconjunto S é um **subespaço vetorial** de V , se S é um espaço vetorial em relação à adição e à multiplicação por escalar definidas em V . Equivalentemente, S é subespaço vetorial de V se, e somente se, para todo $u, v \in S$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, tem-se*

i) S é não vazio

ii) $u + v \in S$,

iii) $\alpha u \in S$.

Observações 1.1.1.

1. Para mostrar que um subconjunto S é um subespaço vetorial, não precisaremos verificar os oito axiomas anteriormente definidos, uma vez que S é uma parte de V que já se sabe ser um espaço vetorial.
2. Os elementos do espaço vetorial V serão sempre chamados de vetores, sejam eles constituídos de polinômios, matrizes, números reais ou complexos. Isso porque as operações de adição e multiplicação por escalar sobre eles se comportam de forma idêntica às operações com vetores no \mathbb{R}^n .
3. Todo espaço vetorial V admite pelo menos dois subespaços: o conjunto $\{0\}$, chamado subespaço zero ou nulo e o próprio espaço vetorial V . Esses dois conjuntos são chamados **subespaços triviais** de V e os demais subespaços são denominados **subespaços próprios** de V .

1.1.3 Combinação Linear, Dependência e Independência Linear

Sejam os vetores v_1, v_2, \dots, v_n do espaço vetorial V e os escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Qualquer vetor $v \in V$, escrito da forma

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n,$$

é uma **combinação linear** dos vetores v_1, v_2, \dots, v_n .

Um conjunto de n vetores v_1, v_2, \dots, v_n é dito **linearmente dependente (LD)**, se existe um conjunto de números $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, nem todos nulos, tal que

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0. \quad (1.1)$$

Caso contrário, se o conjunto $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, que satisfaz a equação (1.1), assumir unicamente valores nulos, dito de outra forma, admitindo apenas a solução trivial; ou seja,

$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$, então v_1, v_2, \dots, v_n são ditos **linearmente independentes (LI)**.

Considere um conjunto n de vetores, cada um deles com n componentes; a saber,

$$v_i = (v_{1i}, v_{2i}, \dots, v_{ni}),$$

com $i = 1, \dots, n$. Podemos construir um sistema de equações lineares onde $A = [v_{ij}]$, com $i, j = 1, 2, \dots, n$ e escrever a equação (1.1) na forma

$$\begin{cases} v_{11}\alpha_1 + \dots + v_{1n}\alpha_n = 0 \\ \vdots \\ v_{n1}\alpha_1 + \dots + v_{nn}\alpha_n = 0. \end{cases} \quad (1.2)$$

Se $\det A \neq 0$, então a única solução do sistema (1.2) é $\alpha = 0$, mas se o $\det A = 0$, existem soluções não-nulas. Logo, o conjunto de vetores v_1, v_2, \dots, v_n é linearmente dependente se, e somente se, $\det A \neq 0$.

Podemos ver nos gráficos a seguir uma interpretação geométrica da dependência e independência linear de dois vetores $\{v_1, v_2\} \in \mathbb{R}^2$ representados no \mathbb{R}^3 .

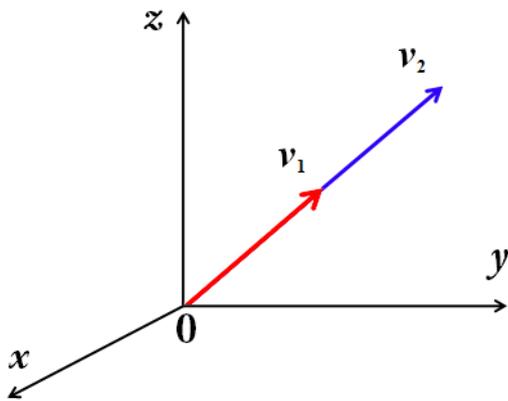


Figura 3 – Se $\{v_1, v_2\}$ são LD

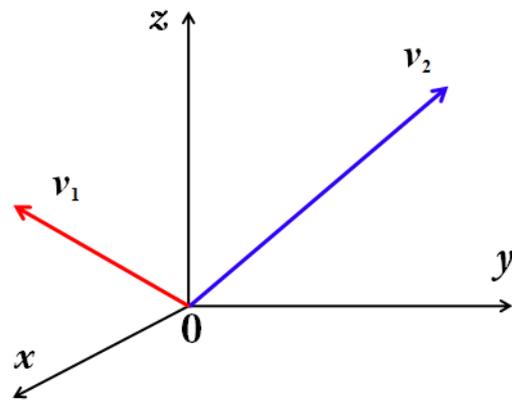


Figura 4 – Se $\{v_1, v_2\}$ são LI

1.1.4 Base e Dimensão

Definição 1.1.3. *Seja V um espaço vetorial. Dizemos que o conjunto $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$ é uma base do espaço vetorial V , se*

- i) B é LI,
- ii) todo elemento de V é combinação linear dos elementos de B .

Neste caso, diremos que $\dim V = n$.

Observações 1.1.2.

1. Se V não possui base, $\dim V = 0$.
2. Se $\dim V = n$, então qualquer subconjunto de V com mais de n vetores é LD.
3. Se V tem uma base com infinitos vetores, então a dimensão de V é infinita e denota-se $\dim V = \infty$.
4. Seja $\varepsilon_n = \{(1, 0, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1)\}$, dizemos que ε_n é a **base canônica** de \mathbb{R}^n , também representada por $\varepsilon_n = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$.

1.1.5 Transformações Lineares

Definição 1.1.4. Sejam V e W espaços vetoriais. Uma aplicação $T : V \rightarrow W$ é chamada transformação linear de V em W se

$$\text{i) } T(u + v) = T(u) + T(v)$$

$$\text{ii) } T(\alpha u) = \alpha T(u)$$

para todo $u, v \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

Observações 1.1.3.

1. Uma transformação linear de V em V é chamada **operador linear** sobre V .
2. Em toda transformação linear $T : V \rightarrow W$ a imagem do vetor nulo de V é o vetor zero de W ; isto é, $T(0_V) = 0_W$.

1.1.6 Matriz de uma Transformação Linear

Seja $T : V \rightarrow W$ uma transformação linear. Vamos considerar, sem perda de generalidade, o caso em que $\dim V = 2$ e $\dim W = 3$. Consideremos também $A = \{v_1, v_2\}$ uma base de V e $B = \{w_1, w_2, w_3\}$ uma base W . Assim, um vetor $v \in V$, pode ser expresso por

$$v = x_1 v_1 + x_2 v_2, \tag{1.3}$$

ou $[v]_A = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ e a imagem $T(v)$ por

$$T(v) = y_1 w_1 + y_2 w_2 + y_3 w_3, \tag{1.4}$$

ou $[T(v)]_B = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$. Por outro lado, temos que

$$T(v) = T(x_1v_1 + x_2v_2) = x_1T(v_1) + x_2T(v_2). \quad (1.5)$$

Sendo $T(v_1)$ e $T(v_2)$ vetores de W , então tais vetores são combinação linear dos vetores de B ; isto é,

$$T(v_1) = a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + a_{31}w_3$$

$$T(v_2) = a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + a_{32}w_3,$$

substituindo-os na equação (1.5) e agrupando os termos semelhantes, obtemos

$$T(v) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2)w_1 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2)w_2 + (a_{31}x_1 + a_{32}x_2)w_3.$$

Comparando essa igualdade com a equação (1.4), conclui-se que

$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2$$

$$y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2$$

$$y_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2,$$

que podemos escrever de forma matricial como

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

ou de forma simbólica

$$[T(v)]_B = [T]_B^A \cdot [v]_A,$$

sendo a matriz $[T]_B^A$ denominada **matriz de T em relação às bases A e B** .

Podemos definir que, de modo geral, para $T : V \rightarrow W$ linear, se $A = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ e $B = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ são as bases de V e W , respectivamente, então $[T]_B^A$ é uma matriz de ordem $m \times n$, onde cada coluna é formada pelas componentes das imagens dos vetores de A em relação à base B

$$[T]_B^A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

em que a 1ª coluna é $[T(v_1)]_B$, a 2ª coluna é $[T(v_2)]_B$, até a n -ésima coluna, sendo $[T(v_n)]_B$.

Note que a matriz $[T]_B^A$ depende das bases A e B consideradas; ou seja, para cada dupla de bases há uma matriz particular correspondente, visto que uma transformação linear pode ter uma infinidade de matrizes para representá-la, mas, fixadas as bases, a matriz formada por elas é única.

Observações 1.1.4.

1. Sendo A e B bases canônicas de V e W , respectivamente, denotamos a matriz de T em relação às bases A e B por $[T]$, chamada de **matriz canônica** de T e representada por $[T] = [[T(e_1)] \quad [T(e_2)] \quad \cdots \quad [T(e_n)]]$.
2. Para um operador linear sobre V , $T : V \rightarrow V$, a matriz de T em relação à base A é representada simplesmente por $[T]_A$.

1.1.7 Autovalores e Autovetores

Definição 1.1.5. Seja $T : V \rightarrow V$, um operador linear. Um vetor $v \in V$, $v \neq 0$ é **autovetor** do operador T , se existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$T(v) = \lambda v.$$

O número real λ é denominado **autovalor** de T e a ele é associado o autovetor v .

Vamos então determinar os autovalores e os autovetores de uma matriz canônica A . Por simplicidade de notação, exemplificaremos o cálculo para o \mathbb{R}^2 , que é o foco desse trabalho.

1. Determinando os autovalores: Seja o operador linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e a matriz canônica A de T

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = [T].$$

Se v e λ são respectivamente autovetor e autovalor do operador T , então

$$Av = \lambda v \Rightarrow Av - \lambda v = 0,$$

onde v é a matriz coluna 2×1 dos vetores v_1 e v_2 ; isto é $[v] = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$.

Considerando que $v = Iv$ (I é a matriz identidade), podemos escrevemos

$$Av - \lambda Iv = 0 \Rightarrow (A - \lambda I)v = 0.$$

Para que esse sistema homogêneo admita soluções não-nulas; ou seja, para que

$$[v] = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

tem-se

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\det \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) = 0 \implies \det \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{bmatrix} = 0.$$

A equação $\det(A - \lambda I) = 0$ é denominada **equação característica** do operador T ou da matriz A e suas raízes os autovalores de T ou da matriz A . O determinante $\det(A - \lambda I)$ é um polinômio $P(\lambda)$ denominado **polinômio característico**.

2. Determinando os autovetores: Substituindo os autovalores encontrados λ na equação $\det(A - \lambda I) = 0$ e resolvendo o sistema de equações lineares homogêneas, podemos encontrar facilmente os autovetores associados aos λ 's.

Vejamos a seguir um exemplo desse procedimento.

Exemplo 1.1.1. *Considere a matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Pretendendo encontrar seus autovalores e autovetores, façamos

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & -4 \\ -2 & 3 - \lambda \end{pmatrix}.$$

Logo

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & -4 \\ -2 & 3 - \lambda \end{pmatrix} = 0 \implies \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0 \implies (\lambda + 1)(\lambda - 5) = 0.$$

Portanto, as raízes do polinômio característico são os autovalores $\lambda = -1$ e $\lambda = 5$.

Encontremos os autovetores. Para isso basta resolver a equação $(A - \lambda I)v = 0$, substituindo λ pelos autovalores encontrados acima; ou seja,

i) *para $\lambda = -1$*

$$[A - (-1)I] \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} 2x - 4y = 0 \\ -2x + 4y = 0. \end{cases}$$

Assim, qualquer vetor na forma $(2y, y) = y(2, 1)$, com $y \neq 0$, é um autovetor associado ao autovalor $\lambda = -1$;

ii) *para $\lambda = 5$*

$$[A - 5I] \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} -4x - 4y = 0 \\ -2x - 2y = 0. \end{cases}$$

com isso, qualquer vetor na forma $(y, -y) = y(1, -1)$, com $y \neq 0$, é um autovetor associado ao autovalor $\lambda = 5$.

Esse procedimento é análogo para matrizes de ordem 3×3 em diante; no entanto, conforme a dimensão aumenta, os esforços para encontrar os autovalores (raízes do polinômio característico) tornam-se mais difíceis, em alguns casos é necessário o uso de computadores para calculá-los.

Para o prosseguimento deste trabalho, trataremos o caso planar, cujas matrizes são 2×2 .

1.2 Equações Diferenciais Ordinárias

Nesta seção traremos ideias centrais a cerca das equações diferenciais ordinárias, sua fundamentação teórica e um importante teorema de existência e unicidade de soluções, o qual demonstraremos usando técnicas do cálculo e da análise e veremos que essa demonstração é construtiva, uma vez que estabelece um método para encontrar a solução de uma EDO por meio de iterações sucessivas.

Definição 1.2.1. *Uma equação diferencial ordinária é uma equação da forma*

$$x^{(s)} = F(t, x, x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(s-1)})$$

onde $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua definida em um aberto U de \mathbb{R}^{1+s} , com $t \in \mathbb{R}$, $x^{(j)}$ é a j -ésima derivada da função x de uma variável real t , com $j \in \{1, 2, \dots, s\}$, e s a ordem da equação diferencial.

Por abuso de notação usaremos $x^{(j)} = x^{(j)}(t)$. Também encontramos na literatura a notação $x^{(1)} = x'$, $x^{(2)} = x''$, $x^{(3)} = x'''$, $x^{(4)} = x^{(4)}$

Se F não depender de t explicitamente, a EDO é dita **autônoma**, caso contrário é **não-autônoma**.

Exemplo 1.2.1. *Considere a equação diferencial de primeira ordem*

$$x'(t) = t^2, \tag{1.6}$$

e uma solução

$$x(t) = \frac{t^3}{3} + 2. \tag{1.7}$$

De fato,

$$x(t) = \frac{t^3}{3} + 2 \implies x'(t) = \left(\frac{t^3}{3} + 2 \right)' \implies x'(t) = \frac{3t^2}{3} \implies x'(t) = t^2$$

A solução (1.7) é um caso particular dentro de uma família de soluções da forma

$$x(t) = \frac{t^3}{3} + k, \quad \forall k \in \mathbb{R} \tag{1.8}$$

Variando-se a constante k , obtemos infinitas curvas da equação (1.8), como vemos no gráfico a seguir, com $k = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$.

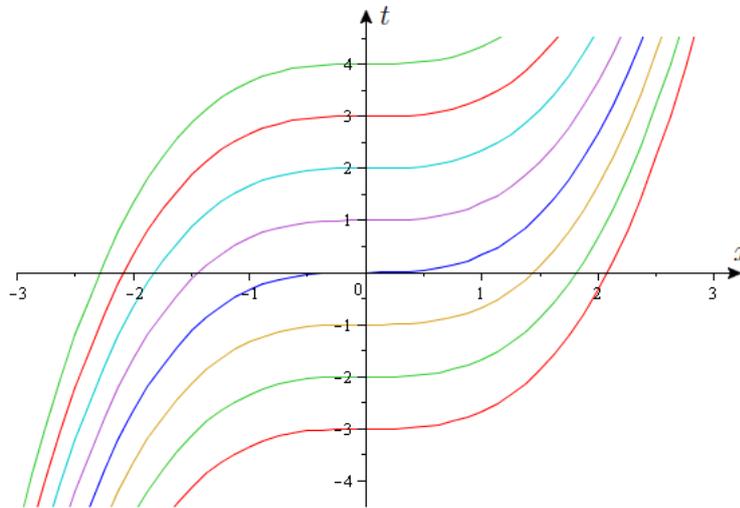


Figura 5 – Família de soluções de (1.8)

Definição 1.2.2. Uma solução da equação $x^{(s)} = F(t, x, x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(s-1)})$ é uma curva $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^s$ de classe C^s tal que:

- i) o intervalo I é um aberto de \mathbb{R} ;
- ii) o vetor $\left(t, \gamma(t), \frac{d\gamma}{dt}(t), \dots, \frac{d^{s-1}\gamma}{dt^{s-1}}(t)\right)$ pertence a U , para todo $t \in I$;
- iii) para todo $t \in I$, tem-se $F\left(t, \gamma(t), \frac{d\gamma}{dt}(t), \dots, \frac{d^{s-1}\gamma}{dt^{s-1}}(t)\right) = \frac{d^s\gamma}{dt^s}(t)$.

Além disso, podemos fazer deduções qualitativas do comportamento das soluções antes de solucionar algebricamente a equação, uma vez que nem sempre é possível solucioná-la de forma algébrica. Do ponto de vista geométrico, a cada ponto (t, x) das soluções da equação $x' = F(t, x)$, associa-se uma reta tangente à curva integral x e que tem coeficiente angular $m = F(t, x)$. O que nos sugere traçar um segmento de reta em cada ponto (t, x) com coeficiente angular $F(t, x)$. Procedendo-se assim diversas vezes obteremos o **campo de direções** (conjunto desses segmentos de reta, no plano cartesiano).

Da equação $x'(t) = t^2$, podemos, com a ajuda do *Maple* (software gratuito), visualizarmos o campo de direções. Note, como o comportamento das soluções e do campo de direções são semelhantes.

Ainda do ponto de vista qualitativo, tem-se, por definição, que os valores de \bar{t} , tal que $x'(\bar{t}) = 0$ são chamados de **pontos de equilíbrio** que, nesse caso é único ($\bar{t} = 0$). Assim, nesse ponto, a solução de $x(\bar{t})$ assume o valor constante 0. Nos demais pontos as funções $x(t)$ são contínuas e crescentes (para $t_1 > t_2 \Rightarrow x(t_1) > x(t_2)$); ou seja, os pontos nos intervalos $(-\infty, 0)$ e $(0, +\infty)$, assumem nesse caso valores positivos.

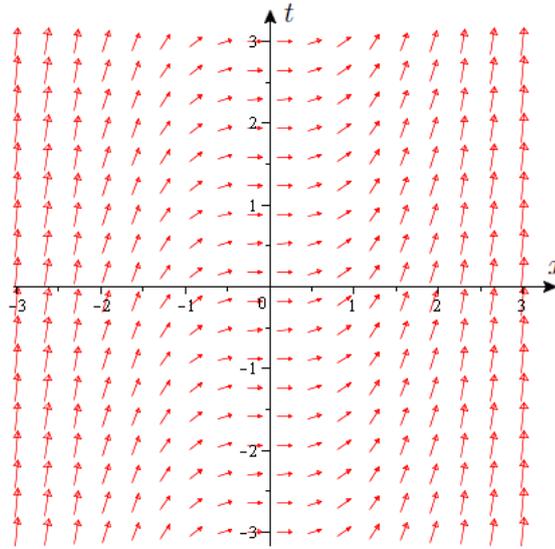


Figura 6 – Campo de direções de (1.6)

1.2.1 Existência e unicidade de soluções

Posteriormente veremos o Teorema de Existência e Unicidade de equações diferenciais, desta forma, antes tratemos de um importante resultado que contribuirá fortemente para a demonstração da existência de soluções, que é o Teorema do Ponto Fixo de Banach.

Definição 1.2.3. *Sejam $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ uma aplicação e $x^* \in \mathbb{X}$. Dizemos que x^* é um **ponto fixo** de f se*

$$f(x^*) = x^*.$$

Definição 1.2.4. *Uma aplicação $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ é dita uma **contração uniforme**, se existir a constante $0 \leq \beta < 1$ tal que*

$$d(f(x), f(y)) \leq \beta d(x, y), \quad \forall x, y \in \mathbb{X}.$$

Teorema 1.2.1 (Teorema do Ponto Fixo de Banach). *Sejam $\mathbb{X} = (\mathbb{X}, d)$ um **espaço métrico completo**, não vazio e $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ uma contração em \mathbb{X} . Então, f tem um único ponto fixo $x^* \in \mathbb{X}$.*

Demonstração: Começemos provando a existência. Considere um ponto qualquer $x_0 \in \mathbb{X}$ e a sequência

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad \forall n \geq 1.$$

Provaremos que a sequência (x_n) é uma sequência de Cauchy para qualquer x_0 . Da desigualdade triangular, temos

$$d(x_{n+k}, x_n) \leq \sum_{j=0}^{k-1} d(x_{n+j}, x_{n+j-1}).$$

Para cada j , usando a definição de contração, temos a seguinte relação

$$d(x_{n+j}, x_{n+j-1}) \leq \beta^{n+j-1} d(x_1, x_0),$$

$$d(x_{n+k}, x_n) \leq \sum_{j=0}^{k-1} \beta^{n+j-1} d(x_1, x_0) \leq d(x_1, x_0) \beta^{n-1} \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j.$$

Então,

$$d(x_{n+k}, x_n) \leq d(x_1, x_0) \frac{\beta^{n-1}}{1-\beta} \longrightarrow 0, \quad n \longrightarrow \infty,$$

portanto, a sequência (x_n) é de Cauchy e converge para algum ponto $x^* \in \mathbb{X}$. Verifiquemos então se, de fato, x^* é um ponto fixo. Observe que

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

e como f é uniformemente contínua (pela própria definição de contração), aplicando o limite, concluímos

$$f(x^*) = f(\lim(x_n)) = \lim f(x_n) = \lim x_{n+1} = x^*,$$

provando então, a existência do ponto fixo.

Agora, provaremos a unicidade. Para isso, considere x e y pontos fixos de f , então

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq \beta d(x, y),$$

o que implica $d(x, y) = 0$ e, portanto, $x = y$. ■

Para o seguinte teorema, seguem as definições.

Definição 1.2.5. *Sejam $r > 0$ e $a \in \mathbb{R}^s$. Definimos a*

i) ***bola fechada de raio r centrada em a , para ser o conjunto***

$$\overline{B_r(a)} = \{x \in \mathbb{R}^s : \|x - a\| \leq r\},$$

ii) ***bola aberta de raio r centrada em a , para ser o conjunto***

$$\overline{B_r(a)} = \{x \in \mathbb{R}^s : \|x - a\| < r\},$$

onde $\|\cdot\|$ é a norma euclidiana.

Definição 1.2.6. *Uma aplicação $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^s$ chama-se **Lipschitziana em Ω relativamente à segunda variável**, se existe uma constante $K > 0$ tal que*

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq K \|x - y\|$$

para todos $(t, x), (t, y) \in \Omega$. Uma K nestas condições chama-se constante de Lipschitz de f .

A aplicação f diz-se **localmente Lipschitziana** em Ω , se cada $(t_0, x_0) \in \Omega$ tem uma bola aberta $B = \overline{B_r(a)}$, tal que $f : B \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^s$ é Lipschitziana em B relativamente à segunda variável.

Teorema 1.2.2 (Existência e Unicidade de Soluções). *Seja $F : U \rightarrow \mathbb{R}^s$, onde U é um aberto de $\mathbb{R}^{1+s} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^s$, contínua e localmente Lipschitziana na segunda variável. Então*

1. para todo $(t_0, x_0) \in U$, existe $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^s$, solução de $x' = F(t, x)$ com $\gamma_0(t_0) = x_0$;
2. se $\gamma_1 : I_1 \rightarrow \mathbb{R}^s$ e $\gamma_2 : I_2 \rightarrow \mathbb{R}^s$ são soluções de $x' = F(t, x)$ e existe $t_0 \in I_1 \cap I_2$ tal que $\gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0)$, então $\gamma_1(t) = \gamma_2(t)$ para todo $t \in I_1 \cap I_2$.

Demonstração: Seja $\delta > 0$. Suponhamos que existe $C = C_\delta > 0$ tal que

$$\|F(t, x_1) - F(t, x_2)\| \leq C\|x_1 - x_2\|, \quad \forall (t, x_1), (t, x_2) \in \overline{B_\delta(t_0)} \times \overline{B_\delta(x_0)} \subset U,$$

onde C é a constante de Lipschitz. Além disso, sejam

$$M_\delta = \sup \left\{ \|F(t, x)\|, (t, x) \in \overline{B_\delta(t_0)} \times \overline{B_\delta(x_0)} \right\}$$

e $\epsilon > 0$ tais que

$$\epsilon \leq \delta, \epsilon < \frac{1}{C}, \epsilon < \frac{\delta}{M_\delta} \quad (1.9)$$

Definimos χ como o conjunto de todas as curvas contínuas no intervalo $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$ com valores em \mathbb{R}^s cujas imagens pertencem ao compacto $\overline{B_\delta(x_0)}$ com a distância $d(\gamma_1, \gamma_2) = \sup\{\|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)\| : t \in (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)\}$, também chamada de distância da convergência uniforme. Portanto,

$$(\chi, d) = \{\gamma(t) \in \overline{B_\delta(x_0)} : (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^s \text{ é contínua, com } \gamma(t_0) = x_0\}.$$

O conjunto (χ, d) é um espaço métrico completo. Em (χ, d) , vamos definir um operador \mathcal{F} tal que

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \chi &\longrightarrow \chi \\ \gamma &\longmapsto \mathcal{F}(\gamma), \end{aligned}$$

cujas curvas γ associa uma nova curva $\mathcal{F}(\gamma)$, onde

$$\mathcal{F}(\gamma)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t \mathcal{F}(s, \gamma(s)) ds \quad (1.10)$$

O integrando está bem definido, uma vez que a função (1.10), por hipótese, é contínua e limitada por $M = M_\delta$, garantindo a existência dessa integral. Além disso, o operador \mathcal{F} está bem definido, ou seja, para todo $\gamma \in \chi$, segue que $\mathcal{F}(\gamma) \in \chi$, donde

- i) o operador $\mathcal{F}(\gamma(t))$ é contínuo em $t \in (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$;
- ii) $\mathcal{F}(\gamma(t_0)) = x_0$, uma vez que $\mathcal{F}(\gamma)(t_0) = x_0 + \int_{t_0}^{t_0} \mathcal{F}(s, \gamma(s)) ds = x_0 + 0 = x_0$ e
- iii) $\mathcal{F}(\gamma(t_0)) \in \overline{B_\delta(x_0)}$, pois

$$\|\mathcal{F}(\gamma)(t_0) - x_0\| = \left\| \int_{t_0}^{t_0} \mathcal{F}(s, \gamma(s)) ds \right\| \leq M_\delta |t - t_0| < M_\delta \epsilon < \delta.$$

O operador \mathcal{F} é uma contração; ou seja, existe $0 < \lambda < 1$ tal que

$$d(\mathcal{F}(\gamma_1), \mathcal{F}(\gamma_2)) \leq \lambda d(\gamma_1, \gamma_2), \quad (1.11)$$

para todo $\gamma_1, \gamma_2 \in \chi$. De fato,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}(\gamma_1(t)) - \mathcal{F}(\gamma_2(t))\| &= \left\| \int_{t_0}^t [\mathcal{F}(s, \gamma_1(s)) - \mathcal{F}(s, \gamma_2(s))] ds \right\| \leq \int_{t_0}^t C \|\gamma_1(s) - \gamma_2(s)\| ds \\ &\leq C |t - t_0| d(\gamma_1, \gamma_2) \leq C \epsilon d(\gamma_1, \gamma_2) \end{aligned}$$

e basta tomar $\lambda = C\epsilon$, pois $C\epsilon < 1$ pela equação (1.11)

Assim, se $\mathcal{F} : \chi \rightarrow \chi$ é uma contração num espaço métrico completo, então, pelo Teorema do Ponto Fixo, existe um único ponto $\bar{Z} \in \chi$ tal que $\mathcal{F}(\bar{Z}) = \bar{Z}$. Além disso, precisamos garantir que \mathcal{F}^n é um contração. De fato, segue da demonstração em (SOTOMAYOR, 2011, Teorema de Picard), para todo $\gamma_1, \gamma_2 \in \chi$ e $n \geq 0$

$$\|\mathcal{F}^n(\gamma_1(t)) - \mathcal{F}^n(\gamma_2(t))\| \leq \frac{C^n |t - t_0|^n}{n!} d(\gamma_1, \gamma_2) \leq \frac{C\epsilon^n}{n!} d(\gamma_1, \gamma_2),$$

portanto,

$$\bar{Z} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}^n(\bar{Z}).$$

Aplicando o teorema, conclui-se que existe uma única curva $\bar{\gamma} : (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^s$, com $\bar{\gamma}(t_0) = x_0$ e $\bar{\gamma}(t) \in \overline{B_\delta(x_0)}$ para todo $t \in (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$, tal que $\mathcal{F}(\bar{\gamma}) = \bar{\gamma}$, ponto fixo do operador; isto é

$$\bar{\gamma}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t \mathcal{F}(s, \bar{\gamma}(s)) ds, \quad (1.12)$$

para todo $t \in (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$; ou seja, como o operador \mathcal{F} foi definido de forma que o ponto fixo de \mathcal{F} seja equivalente a ser solução da equação diferencial, a equação (1.12) é diferenciável pelo Teorema Fundamental do Cálculo. Portanto,

$$(\bar{\gamma})'(t) = \mathcal{F}(t, \bar{\gamma}(t)), \forall t \in (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon),$$

o que conclui a demonstração do item 1, da existência de soluções.

Provemos agora o item 2; ou seja, a unicidade de soluções. Sejam $\gamma_1 : I_1 \rightarrow \mathbb{R}^d$ e $\gamma_2 : I_2 \rightarrow \mathbb{R}^d$, soluções de $x' = F(t, x)$ e $t_0 \in I_1 \cap I_2$ com $\gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0) = x_0$.

Para provar que todo ponto coincide em toda intersecção do domínio, usaremos um argumento de conexidade. Definindo

$$J = \{t \in I_1 \cap I_2 : \gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0)\},$$

vemos que

- i)* J é não vazio, pois $t_0 \in J$;
- ii)* J é fechado, já que conjunto de todos os pontos onde duas funções contínuas coincidem é fechado, lembrando que $\gamma_1(t_0)$ e $\gamma_2(t_0)$ são contínuas;
- iii)* J é aberto.

Finalizaremos provando o item *iii)*. Tomemos $s_0 \in J$ qualquer e $y_0 = \gamma_1(s_0) = \gamma_2(s_0)$. Para (s_0, y_0) , repetindo o argumento usado na prova do item 1 deste teorema, vemos que $\epsilon > 0$ tal que $\mathcal{F} : \chi \rightarrow \chi$ é um contração e possui um único ponto fixo, de onde $\gamma_1(t) = \gamma_2(t)$ para todo $t \in (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$ e, portanto, $(s_0 - \epsilon, s_0 + \epsilon) \in J$.

Portanto, pelos itens *i*, *ii* e *iii*, $J = I_1 \cap I_2$, provando a unicidade. ■

A demonstração do **Teorema 1.2.2** é construtiva, uma vez que relaciona a solução $\gamma(t)$ da EDO $x' = F(t, x)$, dada a condição inicial $\gamma(t_0) = x_0$, a um ponto fixo do operador \mathcal{F} , que pode ser obtido por meio de sucessivas iterações. Vejamos no exemplo a seguir:

Exemplo 1.2.2. *Considere a equação diferencial de primeira ordem*

$$x' = ktx,$$

com $k \in \mathbb{R}$, sob a condição inicial $x_0 = 1$.

Inicialmente, definimos o operador \mathcal{F} para esta equação; ou seja

$$\mathcal{F}(\gamma(t)) = 1 + \int_0^t ks\gamma(s)ds$$

Escolhendo uma curva qualquer $\gamma(t)$ tal que $\gamma(0) = 1$, como primeira aproximação, garantimos a convergência do operador \mathcal{F} para a solução da equação diferencial. Então, tomando a curva constante $\gamma_0(t) \equiv 1$, por ser mais simples, temos iterando sucessivamente

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \mathcal{F}(\gamma_0(t)) = 1 + \int_0^t ksds = 1 + (k)\frac{t^2}{2}, \\ \gamma_2 &= \mathcal{F}(\gamma_1(t)) = 1 + \int_0^t ks \left(1 + (k)\frac{s^2}{2}\right) ds = 1 + (k)\frac{t^2}{2} + (k^2)\frac{t^4}{8}, \\ \gamma_3 &= \mathcal{F}(\gamma_2(t)) = 1 + \int_0^t ks \left(1 + (k)\frac{s^2}{2} + (k^2)\frac{s^4}{8}\right) ds = 1 + (k)\frac{t^2}{2} + (k^2)\frac{t^4}{8} + (k^3)\frac{t^6}{48} \end{aligned}$$

e por indução, obtemos

$$\gamma_n(t) = 1 + (k)\frac{t^2}{2} + (k^2)\frac{t^4}{8} + (k^3)\frac{t^6}{48} + \cdots + (k^n)\frac{t^{2n}}{2^n n!} + \cdots$$

Note que o termo geral $(k^n)\frac{t^{2n}}{2^n n!}$ pode ser escrito como $\frac{1}{n!}\left(\frac{kt^2}{2}\right)^n$, logo é uma série de Taylor que converge para $e^{\left(\frac{kt^2}{2}\right)}$, quando $n \rightarrow \infty$. Portanto,

$$\gamma(t) = e^{\left(\frac{kt^2}{2}\right)}$$

é solução de $x' = ktx$ com a condição inicial $x_0 = 1$. O que é fácil verificar, derivando $\gamma(t)$

$$\gamma'(t) = \frac{k}{2} 2te^{\left(\frac{kt^2}{2}\right)},$$

concluindo-se, assim

$$\gamma'(t) = kte^{\left(\frac{kt^2}{2}\right)} \implies \gamma'(t) = kt\gamma(t).$$

Aplicar, porém, o teorema para a resolução de uma EDO simples, como do exemplo, seria demasiadamente exaustivo e desnecessário. Por isso, visamos aqui mostrar apenas a força deste teorema e o seu lado construtivo, que pode ser usado na resolução de EDOs não triviais. Há, contudo, métodos muito mais simplificados para resolver uma EDO simples como o da separação de variáveis. Vejamos um exemplo.

Exemplo 1.2.3. *Seja a equação diferencial de primeira ordem com problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \cos x \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

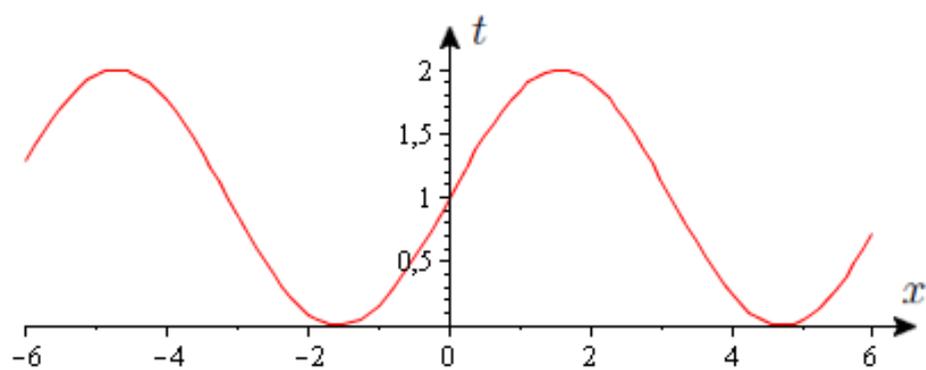
Podemos obter a solução geral separando as variáveis e integrando ambos os lados da equação:

$$\frac{dy}{dx} = \cos x \implies dy = \cos x dx \implies y(x) = \int \cos x dx \implies y(x) = \text{sen } x + c.$$

Usando a condição inicial:

$$y(0) = 1 \implies \text{sen } 0 + c = 1 \implies c = 1,$$

e assim, a solução particular que passa pelo ponto $(0,1)$ é $y = \text{sen}(x) + 1$. Como podemos ver no próximo gráfico

Figura 7 – Gráfico de $y = \sin(x) + 1$, no intervalo $[-6, 6]$

2 Sistemas de EDOs Lineares de Primeira Ordem - no plano

Nem sempre as equações diferenciais apresentam-se da forma em que tratamos no primeiro capítulo; elas podem aparecer como um sistema de equações.

$$\begin{cases} x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ x'_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n. \end{cases} \quad (2.1)$$

Neste trabalho, em particular, restringiremos o nosso estudo ao caso planar, ou seja, aos sistemas de duas equações, da forma

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy, \end{cases} \quad (2.2)$$

onde $x = x(t)$, $y = y(t)$ e a, b, c, d coeficientes constantes. Esse sistema é chamado **sistema autônomo**, pois a variável independente t não aparece explicitamente no lado direito das equações.

Podemos reescrever o sistema (2.2) da forma matricial, em que a matriz A é formada pelos coeficientes, e a matriz X pelas variáveis,

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

assim, o sistema pode ser representado como

$$X' = AX. \quad (2.3)$$

2.1 Soluções dos sistemas lineares por autovalores

Nesta seção, veremos como encontrar a solução geral do sistema (2.3). A ferramenta que é usada vem da Álgebra Linear; isto é, os autovalores e os autovetores da matriz A do sistema, como descrito na seção 1.1.7.

Teorema 2.1.1. *Seja V o autovetor da matriz A associado ao autovalor λ . A função $X(t) = kVe^{\lambda t}$, com k constante, é solução do sistema $X' = AX$.*

Demonstração: Como λ é um autovalor e V seu autovetor associado, vale a igualdade $AV = \lambda V$. Assim, derivando ambos os lados de $X(t)$:

$$X'(t) = (ke^{\lambda t}V)' = k\lambda e^{\lambda t}V = ke^{\lambda t}(\lambda V) = ke^{\lambda t}(AV) = A(ke^{\lambda t}V) = AX(t)$$

■

Tratando-se de um sistema bidimensional, obteremos dois autovalores que podem ser encontrados pela solução da equação

$$\det(A - \lambda I) = 0, \quad (2.4)$$

vista na seção preliminar deste trabalho. Esses autovalores podem ser

- i) distintos, $\lambda_1 \neq \lambda_2$;
- ii) complexos, $\lambda = p \pm iq$ ou
- iii) repetidos (com multiplicidade 2), $\lambda_1 = \lambda_2$

Posteriormente faremos o estudo de cada caso. Vale ressaltar antes que, associados a esses autovalores temos autovetores V_1 e V_2 , que formam a solução geral do sistema $X' = AX$, sendo

$$X(t) = c_1 V_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 V_2 e^{\lambda_2 t}, \quad (2.5)$$

ou seja, a combinação linear das soluções particulares. É facilmente verificável pelo princípio da linearidade, que a combinação linear das soluções particulares é a solução geral e única do sistema $X' = AX$, e a existência e unicidade é garantida pelo Teorema 1.2.2.

Teorema 2.1.2. *Dado $X' = AX$ um sistema planar. Suponhamos que X_1 e X_2 sejam soluções particulares desse sistema, então $X = \alpha X_1 + \beta X_2$ é a única solução do sistema.*

Demonstração: Sendo X_1 e X_2 soluções particulares, então

$$X_1' = AX_1 \quad \text{e} \quad X_2' = AX_2,$$

tomemos α e β constantes e multipliquemos uma em cada expressão de modo que

$$\alpha X_1' = \alpha AX_1 \quad \text{e} \quad \beta X_2' = \beta AX_2,$$

somando ambas as equações, obtemos

$$(\alpha X_1 + \beta X_2)' = \alpha AX_1 + \beta AX_2 \iff (\alpha X_1 + \beta X_2)' = A(\alpha X_1 + \beta X_2),$$

portanto, a combinação linear $\alpha X_1 + \beta X_2$ é a solução geral e única do sistema $X' = AX$.

■

Assim, estaremos interessados sempre em duas soluções particulares X_1 e X_2 que serão obtidas encontrando os autovalores e seus autovetores associados, para escrevermos a solução geral do sistema $X' = AX$, sendo

$$X(t) = c_1 X_1 + c_2 X_2.$$

2.2 Autovalores Distintos

Veremos a seguir um exemplo do primeiro caso: isto é, quando os autovalores são distintos, $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Exemplo 2.2.1. *Dado o sistema*

$$\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 2x + y \end{cases}$$

Com autovalores distintos $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -1$, e associados a eles respectivamente os vetores

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ e } V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Assim, são soluções particulares

$$X_1 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} \text{ e } X_2 = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t},$$

e a solução geral $X(t)$ é dada por:

$$X(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}.$$

2.3 Autovalores Complexos

Se λ é complexo, então ele é escrito da forma $\lambda = p \pm iq$. De igual modo, o autovetor associado a λ , determinado pela relação $(A - \lambda I)V = 0$, pode ser escrito como $V = A \pm iB$. Então,

$$V e^{\lambda t} = (A \pm iB) e^{(p \pm iq)t},$$

pela fórmula de Euler, temos que

$$(A \pm iB) e^{(p \pm iq)t} = (A \pm iB) e^{pt} (\cos qt \pm i \operatorname{sen} qt),$$

aplicando a distributiva, separamos a parte real da parte imaginária

$$(Ae^{pt} \cos qt - Be^{pt} \operatorname{sen} qt) \pm i(Be^{pt} \cos qt + Ae^{pt} \operatorname{sen} qt).$$

Assim, a solução geral do sistema $X' = AX$, com λ complexo é

$$X(t) = c_1(X_{\Re}) \pm c_2(X_{\Im}),$$

onde X_{\Re} representa a parte real e X_{\Im} a parte imaginária.

Exemplo 2.3.1. *Considere o sistema*

$$\begin{cases} x' = 2x - 5y \\ y' = 4x - 2y \end{cases}$$

Resolvendo $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$, obtemos $\lambda = \pm 4i$. Tomando $\lambda = 4i$, teremos

$$(A - 4iI)V = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 - 4i & -5 \\ 4 & -2 - 4i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Como uma linha é múltipla da outra, basta tomar uma:

$$(2 - 4i)v_1 - 5v_2 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 - 4i \end{pmatrix}$$

e usando a relação de Euler, obtemos:

$$Ve^{\lambda t} = \left[\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} \right] [\cos 4t + i \operatorname{sen} 4t].$$

Assim, separando a parte real da parte imaginária, temos a solução geral:

$$X(t) = c_1 \left[\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \cos 4t - \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} \operatorname{sen} 4t \right] + c_2 \left[\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} \cos 4t + \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \operatorname{sen} 4t \right].$$

2.4 Autovalores repetidos (com multiplicidade 2)

Nos sistemas em que os autovalores gerados por $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$ são repetidos, ou seja, $\lambda_1 = \lambda_2$, podemos ter dois casos:

- i)* λ é completo, se $(A - \lambda I)V = 0$ produz 2 autovetores linearmente independentes.
- ii)* λ é incompleto (ou deficiente), se $(A - \lambda I)V = 0$ produz 1 autovetor linearmente independente.

Em sistemas em que A é 3×3 , é possível obter λ , caso os autovalores sejam repetidos. Mas, quando A é 2×2 , objeto desse estudo, λ é sempre deficiente, pois com $(A - \lambda I)V = 0$ não conseguimos produzir 2 vetores linearmente independentes. Vejamos um exemplo.

Exemplo 2.4.1. *Dado o sistema*

$$\begin{cases} x' = -2x + y \\ y' = -x - 4y \end{cases}$$

Calculando os autovalores temos que $\lambda = -3$ (de multiplicidade 2) e o autovetor associado a ele é $V = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Assim,

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-3t}.$$

Note que esta solução está incompleta, precisamos de outra solução particular X_2 para obter a solução geral desse sistema. Porém com $(A - \lambda I)V = 0$, não é possível encontrar outro autovetor, portanto, esse autovalor λ tem uma deficiência. Para encontrarmos X_2 , vamos recorrer à própria teoria de equações diferenciais, no caso das equações lineares homogêneas, quando as raízes do polinômio característico eram repetidas. Então, temos uma equação diferencial linear homogênea de segunda ordem

$$ay'' + by' + cy = 0,$$

cuja raiz r do polinômio característico $ar^2 + br + c = 0$ são de multiplicidade 2 com a solução geral da forma

$$y(t) = (c_0 + c_1 t)e^{rt}.$$

Aplicando um raciocínio semelhante aos sistemas planares cujos autovalores λ são repetidos, temos que $X_1 = Ve^{\lambda t}$ e podemos supor X_2 da forma

$$X_2 = (V_1 t + V_2)e^{\lambda t}. \quad (2.6)$$

Para verificarmos isso, basta derivarmos ambos os lados de (2.6), obtendo

$$X_2' = V_1(e^{\lambda t} + \lambda t e^{\lambda t}) + V_2 \lambda e^{\lambda t}. \quad (2.7)$$

Agora, (2.7) deve ser equivalente à combinação linear $AV_1 t e^{\lambda t} + AV_2 e^{\lambda t}$ como se os autovalores fossem distintos, ou seja

$$V_1(e^{\lambda t} + \lambda t e^{\lambda t}) + V_2 \lambda e^{\lambda t} = AV_1 t e^{\lambda t} + AV_2 e^{\lambda t}. \quad (2.8)$$

Olhando os termos semelhantes nos dois lados de (2.8) temos que

$$\lambda V_1 = AV_1 \Rightarrow (A - \lambda I)V_1 = 0,$$

satisfazendo imediatamente, então podemos cancelar na equação acima, sobrando apenas $V_1 + \lambda V_2 = AV_2$, mas isso é a mesma coisa que

$$(A - \lambda I)V_2 = V_1. \quad (2.9)$$

Esta é a segunda equação para determina V_2 , chamado de **autovetor generalizado**.

Voltando ao **Exemplo 2.4.1** podemos agora encontrar V_2 usando (2.9). Então, sendo $\lambda = -3$ (multiplicidade 2), temos que

$$(A - 3I)V_2 = V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Escolhendo uma das equações, qualquer que seja, temos que

$$v_1 = 1 \text{ e } v_2 = 0$$

e pela relação (2.6), obtemos

$$X_2 = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] e^{-3t}.$$

Portanto, a solução geral é

$$X(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-3t} + c_2 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] e^{-3t}.$$

Sabendo como resolver todos os três casos dos sistemas planares, via autovalores, veremos, no próximo capítulo, o comportamento das funções soluções desses sistemas e outros que tomaremos como exemplo no plano cartesiano, no que chamamos de **retrato de fase**, e o que cada particular geometria nos diz sobre o aspecto qualitativo dessas EDO's.

2.5 Retratos de Fase em Sistemas Lineares Hiperbólicos no Plano

O **retrato de fase** é um gráfico que contém um conjunto de curvas $(x(t), y(t))$ solução do sistema $X' = AX$ no \mathbb{R} , também chamado de **plano de fase**. As curvas $(x(t), y(t))$ são chamadas **trajetórias** e por elas é possível compreender o comportamento do fenômeno físico estudado.

2.5.1 Plano Traço-Determinante

Antes de mostrarmos como se apresentam as soluções dos sistemas lineares no plano de fase, é importante trazermos uma relação entre os autovalores da matriz A entre o determinante e o traço dessa matriz (BOYCE; DIPRIMA, 2005).

Como vimos anteriormente, dado o sistema $X' = AX$, podemos calcular os autovalores λ_1, λ_2 da matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ com a equação

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Calculando esse determinante encontramos o polinômio característico

$$p(\lambda) = \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc).$$

Note que $\text{tr}(A) = a + d$ e que o $\det(A) = ad - bc$, com isso podemos reescrever o polinômio característico como sendo

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A),$$

mais que isso, como λ_1, λ_2 são raízes desse polinômio, então

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2.$$

Se tomarmos os termos semelhantes nas igualdades, temos que

$$\text{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2,$$

$$\det(A) = \lambda_1\lambda_2.$$

Seja A uma matriz quadrada 2×2 e denote o **discriminante** Δ da matriz A por

$$\Delta = [\text{tr}(A)]^2 - 4\det(A).$$

Assim, existem três possibilidades que podem ser descritas acerca dos autovalores da matriz A , em termos do discriminante:

- i)* Se $\Delta > 0$, então os autovalores são reais e distintos.
- ii)* Se $\Delta < 0$, então os autovalores são um par de complexos conjugados.
- iii)* Se $\Delta = 0$, então os autovalores são reais iguais (ou de multiplicidade 2).

2.5.2 Classificação dos Sistemas Lineares no Plano

Considerando um caso particular da Definição 3.1.2, dado o sistema $X' = AX$, os pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ para os quais $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ são chamados de **pontos de equilíbrio** do sistema.

Admitindo que $\det(A) \neq 0$, então A é inversível. Logo $X = (0, 0)$ é o único ponto de equilíbrio do sistema $X' = AX$.

Definição 2.5.1. *O sistema $X' = AX$ de equações diferenciais se diz **hiperbólico**, se todos os autovalores de A têm parte real não nula.*

Sendo $X' = AX$, olharemos para os autovalores a fim de classificar os sistemas lineares hiperbólicos no plano, nas vizinhanças do ponto de origem. Com a ajuda de uma plataforma simples e gratuita disponível na internet no site mathlets.org, plotamos esses gráficos variando os coeficientes da matriz A . Vejamos como será a geometria das soluções em cada caso.

Autovalores Reais Distintos

(a) Se $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$; ou seja, um autovalor é positivo e outro negativo, a geometria das soluções apresenta-se com uma configuração denominada **Sela**. Como vemos no gráfico a seguir, relativo ao sistema $X' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X$, do **Exemplo 2.2.1**, cujos autovalores são $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 3$.

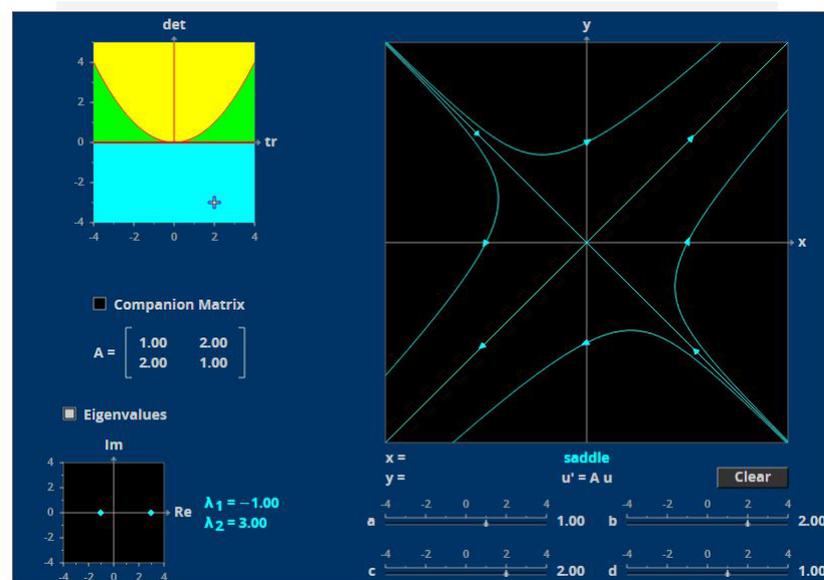


Figura 8 – Plano traço-determinante com a geometria **Sela**.

(b) Se $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, autovalores reais negativos, temos uma representação geométrica denominada **Sorvedouro** ou **Poço**. Como vemos no sistema $X' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} X$, que produz autovalores $\lambda_1 = -3$ e $\lambda_2 = -1$.

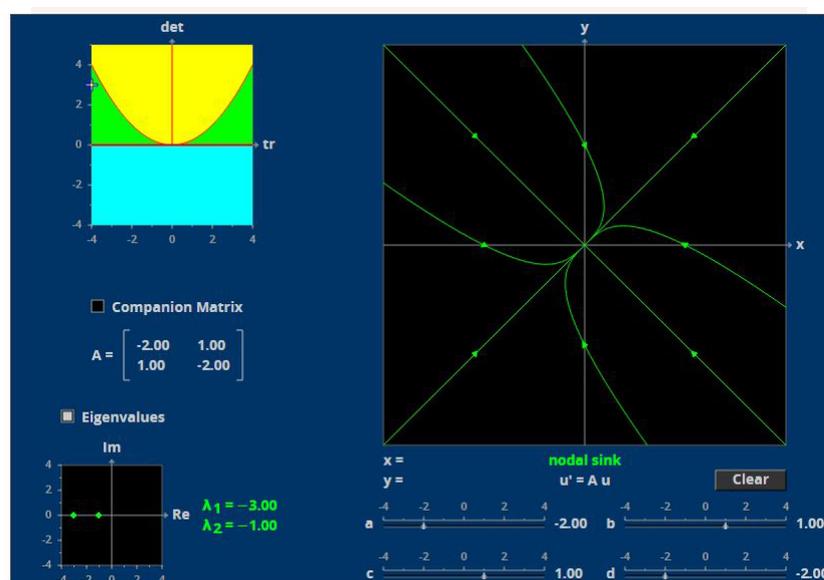


Figura 9 – Plano traço-determinante com a geometria **Sorvedouro**.

(c) Se $0 < \lambda_1 < \lambda_2$, autovalores reais positivos, temos a representação de uma **Fonte**. Como vemos no gráfico abaixo que plota o sistema $X' = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} X$, cujos autovalores são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 4$.

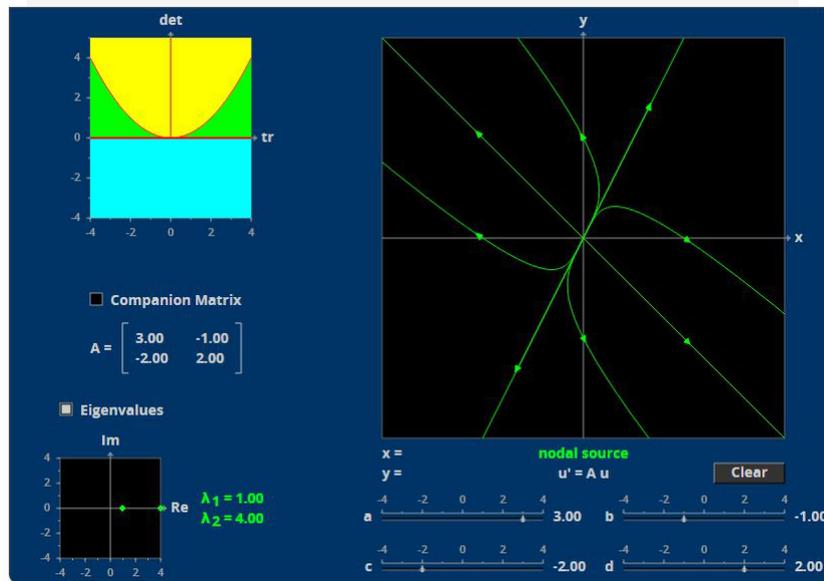


Figura 10 – Plano traço-determinante com a geometria **Fonte**.

Autovalores Complexos

Uma discussão completa sobre autovalores complexos pode ser encontrada em (HIRSCH; SMALE; DEVANEY, 2003).

(a) Se $\lambda = \alpha \pm \beta i$ com $\alpha = 0$ (autovalores imaginários puros), temos uma geometria denominada **Centro**, porém esse sistema é não hiperbólico, o que não interessa ao nosso trabalho. É importante destacar, pois, que o sistema da forma

$$X' = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix} X$$

tem naturalmente autovalores imaginários puros que produzirá em seu retrato de fase círculos concêntricos e o sentido do movimento será horário se $\beta > 0$ e anti-horário se $\beta < 0$. Uma volta completa será feita no intervalo de tempo de comprimento $\frac{2\pi}{\beta}$ e desta forma, todas as soluções são periódicas, com período $\frac{2\pi}{\beta}$.

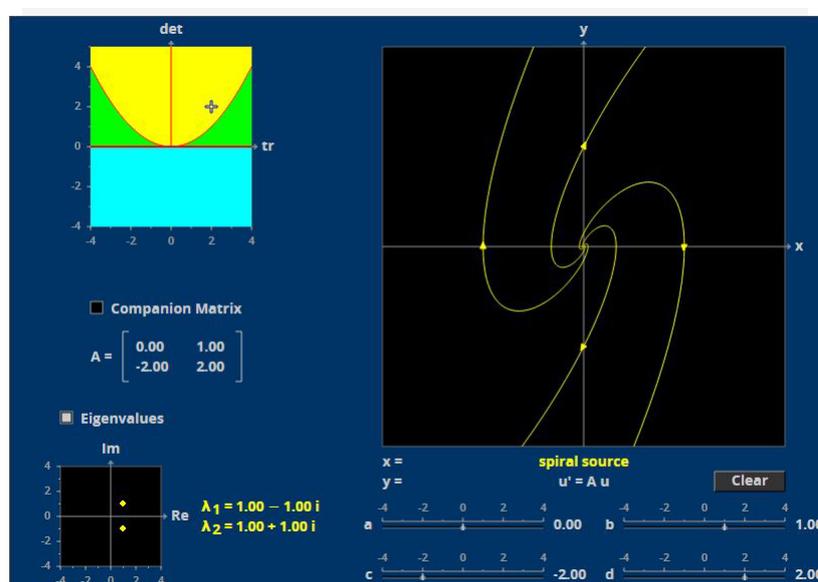
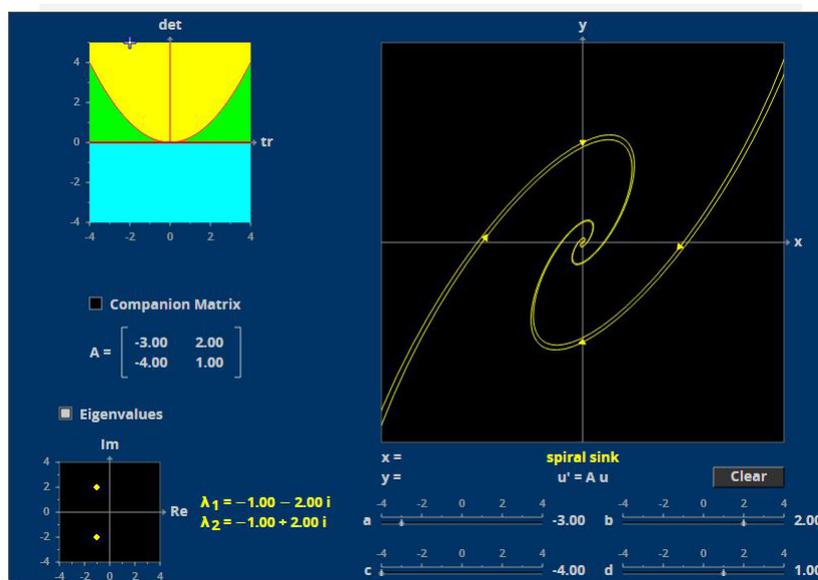
(b) Sendo $\lambda = \alpha \pm \beta i$, podemos ter ainda

i) $\alpha < 0$, teremos graficamente um **Sorvedouro Espiral** ou **Foco Atrator**, como ocorre no sistema $X' = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} X$, cujo autovalor é $\lambda = -1 \pm 2i$.

ii) $\alpha > 0$, uma **Fonte Espiral** ou **Foco Instável**, originário, por exemplo do sistema

$$X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} X, \text{ que produz autovalor } \lambda = 1 \pm i.$$

Temos, a seguir, respectivamente os gráficos de i) e ii):



Autovalores Repetidos

(a) Se $\lambda < 0$, temos graficamente um **Nó Impróprio Assintoticamente Estável**. Como vemos do **Exemplo 2.4.1** cujo sistema $X' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} X$, que produz autovalor de multiplicidade 2, $\lambda = -3$. Seu gráfico é

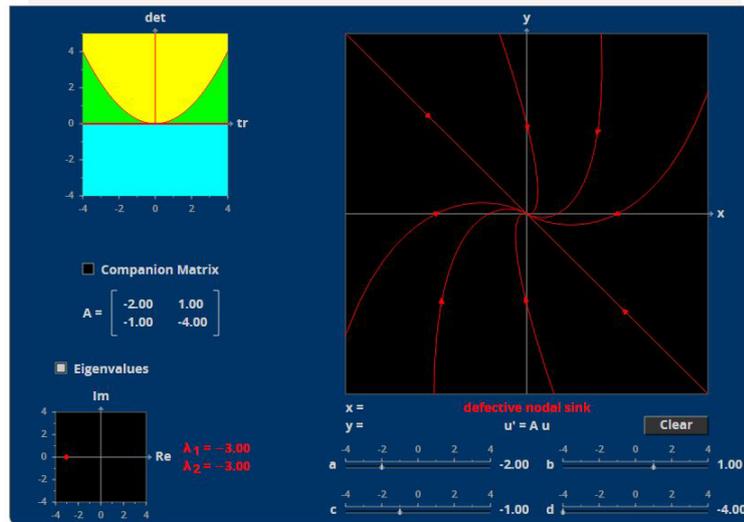


Figura 11 – Plano traço-determinante com a geometria **Nó Impróprio Assintoticamente Estável**.

(b) No caso em que $\lambda > 0$, temos um **Nó Impróprio Instável**. Como vemos no sistema $X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} X$, cujo autovalor repetido $\lambda = 2$ é positivo:

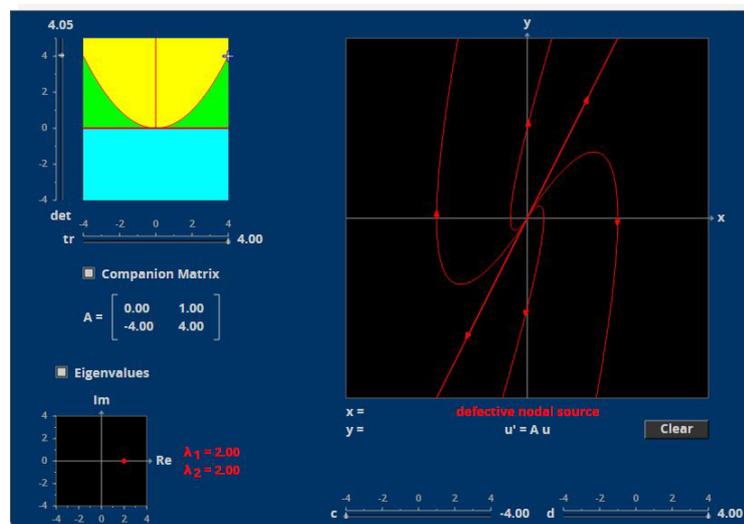


Figura 12 – Plano traço-determinante com a geometria **Nó Impróprio Instável**.

Esses diferentes comportamentos gráficos das soluções dos sistemas lineares podem ser vistos no plano **traço-determinante** a seguir, facilitando a compreensão desse estudo, conforme (GALDINO, 2012):

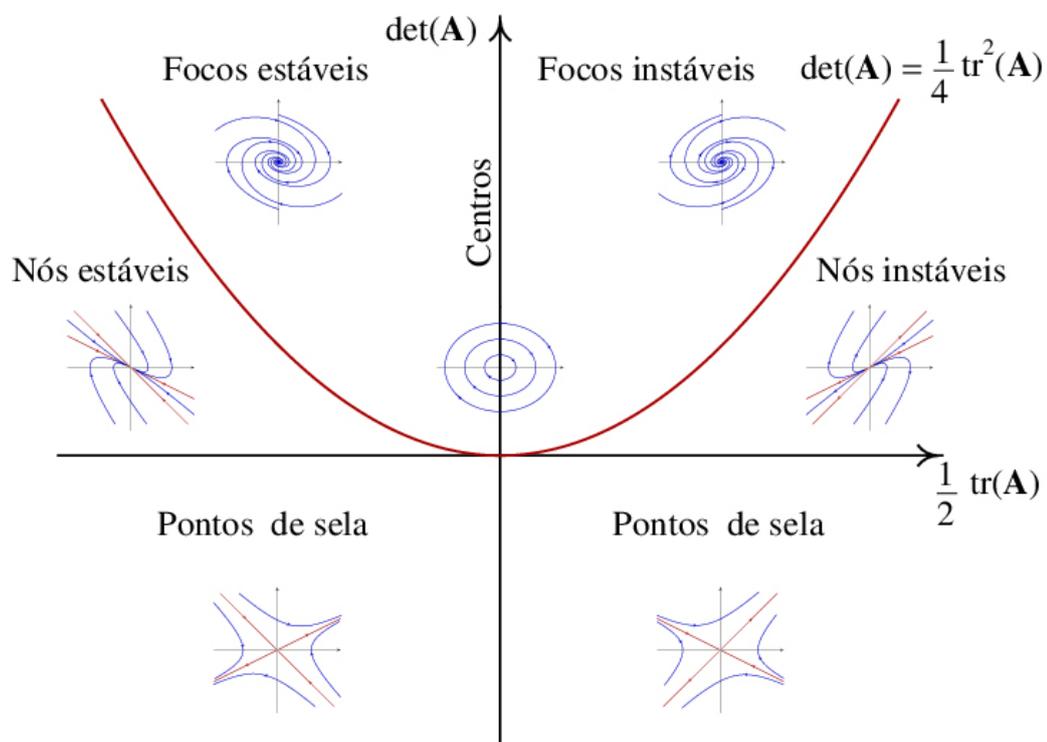


Figura 13 – Geometrias de soluções via autovalores no plano traço-determinante.

Apresentamos a seguir um quadro contendo os resultados de forma resumida e facilitada para compreender a classificação dos sistemas lineares a partir do resultado do determinante e do traço.

Determinante	Traço	Discriminante	Autovalores	Retrato de Fase
$\det(A) = 0$	-	-	-	Sistema não hiperbólico
$\det(A) < 0$	-	-	$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$	Ponto de sela
$\det(A) > 0$	$\text{tr}(A) = 0$	-	$\lambda = \pm\beta i$ $\alpha = 0$	Sistema não hiperbólico
	$\text{tr}(A) < 0$	$\Delta = 0$ A é múltipla da identidade	$\lambda = \alpha \pm \beta i$ $\alpha < 0$	Foco estável
		$\Delta = 0$ A não é múltipla da identidade		Nó impróprio estável
		$\Delta > 0$		Espiral estável
		$\Delta < 0$		Nó estável
	$\text{tr}(A) > 0$	$\Delta = 0$ A é múltipla da identidade	$\lambda = \alpha \pm \beta i$ $\alpha > 0$	Foco instável
		$\Delta = 0$ A não é múltipla da identidade		Nó impróprio instável
		$\Delta > 0$		Espiral instável
		$\Delta < 0$		Nó instável

Tabela 1 – Retrato de fase a partir do determinante e do traço

Podemos ainda construir uma outra tabela olhando apenas para os autovalores do sistema e, de forma mais resumida, estudarmos o retrato de fase.

Autovalores	Tipos de Ponto Crítico	Estabilidade
$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$	Nó	Instável
$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$		Assintoticamente Estável
$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$	Ponto de sela	Instável
$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$	Nó próprio ou impróprio	Instável
$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$		Assintoticamente Estável
$\lambda_1, \lambda_2 = \alpha \pm \beta i$	Ponto espiral	
$\alpha > 0$		Instável
$\alpha < 0$		Assintoticamente Estável
$\lambda_1 = \beta i, \lambda_2 = -\beta i$	Centro	Estável

Tabela 2 – Estabilidade a partir dos autovalores

3 Estabilidade

Como abordado anteriormente, o interesse neste trabalho é olhar o comportamento de um sistema de EDO's bidimensional das soluções nos *pontos de equilíbrio*, também chamados *pontos críticos* ou *pontos estacionários*.

3.1 Sistemas Autônomos

Um sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem da forma

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.1)$$

denomina-se *sistema dinâmico* ou *autônomo*, pois as funções f_i não dependem explicitamente do tempo t . As variáveis x_1, x_2, \dots, x_n são ditas *variáveis de estado* do sistema. Podemos reescrever (3.1) de forma resumida

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad (3.2)$$

onde $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$.

Definição 3.1.1. Um ponto $c \in \mathbb{R}$ é chamado *ponto crítico* do sistema autônomo (3.2) se $f(c) = 0$.

Definição 3.1.2. Seja c um ponto crítico do sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x) \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Dizemos que c é

- i) *estável*, se dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que, para todo $t \geq 0$, $\|x(t) - c\| < \varepsilon$, sempre que $\|x_0 - c\| < \delta$;
- ii) *isolado*, se existe, $\varepsilon > 0$ tal que, a região $R = \{\|x - c\| \leq \varepsilon \mid x \in \mathbb{R}^n\}$ não possua outros pontos de equilíbrio diferentes de c ;
- iii) *assintoticamente estável*, se c é estável e existe $\eta > 0$ tal que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - c\| = 0,$$

sempre que $\|x_0 - c\| < \eta$;

iv) *instável*, se c não é estável, isto é, existe $\zeta > 0$ tal que, para qualquer $\delta > 0$, existe $t_* > 0$ tal que $\|x(t_*) - c\| \geq \zeta$ sempre que $\|x_0 - c\| < \delta$.

Considere um sistema com duas equações diferenciais da forma

$$\begin{cases} x' = F(x, y) \\ y' = G(x, y), \end{cases}$$

onde as funções F e G são contínuas com derivadas parciais contínuas em algum domínio D do plano xy . Se (x_0, y_0) é um ponto nesse domínio, então existe uma única solução $x = \phi(t), y = \psi(t)$ do sistema com condições iniciais

$$\begin{cases} x' = F(x, y) \\ y' = G(x, y) \\ (x(t_0), y(t_0)) = (x_0, y_0) \end{cases} \quad (3.3)$$

A solução de (3.3) está definida num intervalo de tempo I que contém o ponto t_0 .

Em particular, o sistema autônomo tem um campo de direções associado que independe do tempo t , pois

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x'}{y'} = \frac{F}{G}.$$

Em consequência, existe apenas uma trajetória passando por cada ponto (x_0, y_0) no plano de fase, ou seja, todas as soluções que satisfazem o sistema 3.3 percorrem a mesma trajetória, independente do instante t_0 no qual elas estão em (x_0, y_0) . Assim, no caso de um sistema linear com coeficientes constantes, um único retrato de fase mostra, simultaneamente, uma informação qualitativa importante sobre toda família de soluções do sistema.

3.2 Sistemas Quase Lineares

Vimos no capítulo anterior algumas propriedades de estabilidades de sistema linear bidimensional

$$x' = Ax \Rightarrow x' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} x,$$

com $\det(A) \neq 0$. Desta forma, $x = 0$ é o único ponto de equilíbrio do sistema.

Enunciaremos agora os conceitos de estabilidade assintótica, estabilidade e instabilidade no teorema a seguir, que não iremos demonstrar.

Teorema 3.2.1. *O ponto crítico $x = 0$ do sistema linear $x' = Ax$ é:*

- i) *assintoticamente estável, se os autovalores λ_1 e λ_2 são reais e negativos ou têm parte real negativa;*
- ii) *estável, mas não assintoticamente estável, se λ_1 e λ_2 são imaginários puros;*
- iii) *instável, se λ_1 e λ_2 são reais e um deles é positivo, ou se ambos têm parte real positiva.*

Vemos por meio desse teorema que os autovalores λ_1, λ_2 da matriz de coeficientes A determinam o comportamento do ponto crítico em $x = 0$. Por sua vez, os valores de λ_1 e λ_2 dependem dos coeficientes no sistema. Tais coeficientes, tratando-se de medidas físicas no campo das aplicações, podem conter pequenos erros de medição, ocasionando perturbações que podem afetar a estabilidade ou a instabilidade de um ponto crítico ou a própria trajetória.

A situação mais delicada acerca dessas perturbações ocorre quando $\lambda_1 = i\beta$ e $\lambda_2 = -i\beta$, isto é, quando o ponto crítico é um centro e as trajetórias são curvas fechadas em volta dele. Uma pequena alteração nos coeficientes pode gerar autovalores do tipo $\lambda'_1 = \alpha' + i\beta'$ e $\lambda'_2 = \alpha' - i\beta'$, onde α' por menor que seja, sendo $\alpha' \neq 0$ as trajetórias do sistema perturbado serão espirais em vez de curvas fechadas. No caso de um centro também, pequenas perturbações nos coeficientes podem tornar um sistema estável em instável, mudando $\alpha' < 0$ para $\alpha' > 0$.

Outro caso ocorre quando os autovalores λ_1 e λ_2 são iguais, ou seja, de multiplicidade 2, cujo ponto de equilíbrio é um nó. Uma perturbação suficientemente pequena nos coeficientes faz com que as raízes se tornem distintas. Se ficarem reais, então o ponto crítico permanece um nó, mas, se separadas, são raízes complexas conjugadas, então o ponto crítico torna-se um ponto espiral.

Nos demais casos, esse tipo de perturbação não altera a estabilidade ou instabilidade do sistema, nem o tipo de ponto crítico. Por exemplo, se λ_1 e λ_2 são reais, negativos e distintos, uma pequena mudança não alterará os sinais, nem vai torná-los iguais, então o ponto de equilíbrio permanecerá um nó assintoticamente estável.

Isso é importante porque no processo de aproximar um sistema não-linear de um sistema linear apropriado, cujas trajetórias sejam mais simples de descrever, não ocasionemos tais perturbações.

Consideremos agora um sistema autônomo bidimensional não-linear

$$\begin{cases} x' = F(x, y) \\ y' = G(x, y). \end{cases} \quad (3.4)$$

O objetivo principal é investigar o comportamento das trajetórias desse sistema em uma vizinhança do ponto crítico (x_0, y_0) . Podemos, sem perda de generalidade, escolher o ponto crítico como sendo a origem, já que, se $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$, pode-se sempre fazer a substituição $u = x - x_0$ e $v = y - y_0$ na equação 3.4. Então u e v satisfazem um sistema autônomo com um ponto de equilíbrio na origem.

Para entendermos o significado de um sistema não-linear (3.4) estar ‘próximo’ de um sistema linear $x' = Ax$, suponhamos que

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1(x, y) \\ g_2(x, y) \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

onde $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ é a matriz dos coeficientes e que $(x, y) = (0, 0)$ é um ponto crítico isolado do sistema (3.5). Isso quer dizer que existe alguma vizinhança em torno da origem do qual não existem outros pontos críticos no seu interior. Além disso, vamos supor que $\det A \neq 0$, de modo que $(x, y) = (0, 0)$ também é um ponto crítico isolado do sistema linear $x' = Ax$, onde temos que supor que $g_1(x, y)$ e $g_2(x, y)$ sejam suficientemente pequenos em uma vizinhança de $(0, 0)$. Mais precisamente, supomos que g_1 e g_2 têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas e que satisfazem a condição

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\|g_i(x, y)\|}{\|(x, y)\|} = 0, \quad i = 1, 2;$$

isto é, $\|g_i\|$ é pequeno em comparação com $\|(x, y)\|$ próximo à origem. Tal sistema é chamado de **sistema quase linear** na vizinhança do ponto de equilíbrio $(x, y) = (0, 0)$.

Veremos que o sistema (3.4) vai ser quase linear em uma vizinhança de um ponto crítico (x_0, y_0) sempre que as funções F e G tiverem derivadas parciais contínuas até a segunda ordem. Para mostrar isso, usemos a expansão de Taylor em torno do ponto (x_0, y_0) para escrever $F(x, y)$ e $G(x, y)$ na forma

$$F(x, y) = F(x_0, y_0) + F_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \eta_1(x, y),$$

$$G(x, y) = G(x_0, y_0) + G_x(x_0, y_0)(x - x_0) + G_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \eta_2(x, y),$$

onde

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{\|\eta_i(x, y)\|}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0, \quad i = 1, 2.$$

Note que $F(x_0, y_0) = G(x_0, y_0) = 0$ e que

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d(x - x_0)}{dt}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{d(y - y_0)}{dt}.$$

Então o sistema se reduz a

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta_1(x, y) \\ \eta_2(x, y) \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

em que

$$J = \begin{pmatrix} F_x(x_0, y_0) & F_y(x_0, y_0) \\ G_x(x_0, y_0) & G_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

é chamada a **Jacobiana** da função $f(x, y) = (F, G)$.

Esse resultado tem duas consequências. A primeira é que se as funções F e G forem duas vezes diferenciáveis, então o sistema (3.4) é quase linear e não é necessário aplicar o limite. A segunda é que o sistema linear que aproxima o sistema não-linear (3.4) próximo ao ponto crítico (x_0, y_0) é dado pela parte linear da equação (3.6), a saber:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x(x_0, y_0) & F_y(x_0, y_0) \\ G_x(x_0, y_0) & G_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

onde $u = x - x_0$ e $v = y - y_0$. Essa equação fornece um método simples e geral para encontrar o comportamento da solução de um sistema não linear na vizinhança de um ponto de equilíbrio a partir do sistema linear (3.7). Este método é chamado **linearização** em torno do ponto crítico (x_0, y_0) .

Resumidamente, na vizinhança do ponto de equilíbrio (x_0, y_0) , a linearização do sistema (3.4) é

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial x} u + \frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y} v \\ \frac{dv}{dt} = \frac{\partial G(x_0, y_0)}{\partial x} u + \frac{\partial G(x_0, y_0)}{\partial y} v, \end{cases}$$

ou na forma matricial

$$X_1' = AX_1,$$

onde

$$X_1 = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad A = J(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial x} & \frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y} \\ \frac{\partial G(x_0, y_0)}{\partial x} & \frac{\partial G(x_0, y_0)}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Vejamos um exemplo.

Exemplo 3.2.1. *Vamos encontrar o sistema linear correspondente às equações do pêndulo em vizinhanças da origem e do ponto crítico $(\pi, 0)$.*

$$\begin{cases} F(x, y) = y \\ G(x, y) = -\omega^2 \sin x + \rho y \end{cases}$$

Como essas equações são diferenciáveis quanto necessário, esse sistema é quase linear em uma vizinhança de cada ponto crítico. As derivadas parciais de F e G são:

$$F_x = 0, \quad F_y = 1, \quad G_x = -\omega^2 \cos x, \quad G_y = \rho.$$

Então, o sistema linear correspondente próximo à origem é

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & \rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

analogamente, calculando as derivadas parciais dadas em $(\pi, 0)$, obtemos

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2 & \rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

onde $u = x - \pi$, $v = y$. Esse é o sistema linear correspondente às equações do pêndulo em uma vizinhança do ponto $(\pi, 0)$.

3.3 Retrato de Fase em sistemas não-lineares linearizados

Veremos a seguir um procedimento geral para esboçar, do ponto de vista qualitativo, as trajetórias de um sistema não-linear autônomo num retrato de fase.

1. Encontramos os pontos de equilíbrio resolvendo o sistema

$$\begin{cases} F(x, y) = 0 \\ G(x, y) = 0 \end{cases}$$

2. Para cada ponto de equilíbrio (x_0, y_0) , aplica-se a matriz jacobiana no ponto (x_0, y_0) , ou seja, verifica-se a parte linear do sistema.

$$A = J(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F(x, y)}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial F(x, y)}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial G(x, y)}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial G(x, y)}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

3. Determinamos o tipo geométrico de cada ponto crítico do sistema linearizado via autovalores e autovetores.
4. No plano xy , marque os pontos de equilíbrio e desenhe as trajetórias nas proximidades nas vizinhanças do ponto de equilíbrio (x_0, y_0) , incluindo a direção do movimento.

Exemplo 3.3.1. *Considere o sistema quase linear*

$$\begin{cases} x' = x - xy \\ y' = 2y - y^2 \end{cases} \quad (3.8)$$

Vamos determinar a natureza dos pontos críticos desse sistema, aplicando o procedimento descrito no começo dessa seção para encontrar os sistemas linearizados correspondentes a (3.8). Primeiramente encontramos os pontos (x_0, y_0) de equilíbrio, igualando (3.8) a zero:

$$\begin{cases} x - xy = x(1 - y) = 0 \\ 2y - y^2 = y(2 - y) = 0 \end{cases}$$

São pontos de equilíbrio os pares $(0, 0)$ e $(0, 2)$. Agora, derivando cada função de (3.8) em relação às variáveis x e y , obtemos a matriz jacobiana

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} 1 - y & -x \\ 0 & 2 - 2y \end{pmatrix}.$$

Aplicando em cada ponto de equilíbrio a jacobiana, podemos encontrar os autovalores em cada sistema linearizado:

1. Para o ponto de equilíbrio $(0, 0)$, temos o sistema linearizado

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = 2y \end{cases} \quad (3.9)$$

cujos autovalores $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 2$ do polinômio característico, tem como ponto crítico um **nó instável** (Figura 14).

2. Para o ponto de equilíbrio $(0, 2)$, façamos a mudança das variáveis $x = u$ e $y = 2 + v$ e substituimos no sistema (3.8)

$$\begin{cases} u' = u - u(2 + v) \\ v' = 2(2 + v) - (2 + v)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = -u - uv \\ v' = -2v - v^2 \end{cases} \quad (3.10)$$

note que (3.10) também é um sistema quase linear. Vamos analisar, pois, o ponto crítico $(0, 0)$ desse sistema que corresponderá ao ponto crítico $(0, 2)$ do sistema inicial (3.8). Assim, temos o sistema linearizado correspondente a (3.10)

$$\begin{cases} u' = -u \\ v' = -2v \end{cases} \quad (3.11)$$

cujos autovalores são $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = -2$ e, portanto, o ponto de equilíbrio será um **nó assintoticamente estável** (Figura 15).

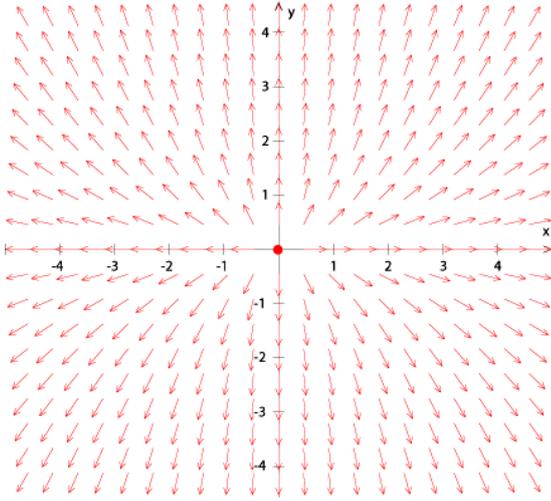


Figura 14 – Nó instável do sistema (3.9)

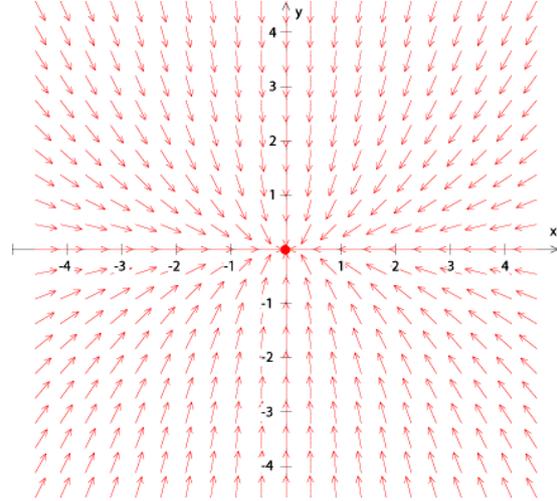
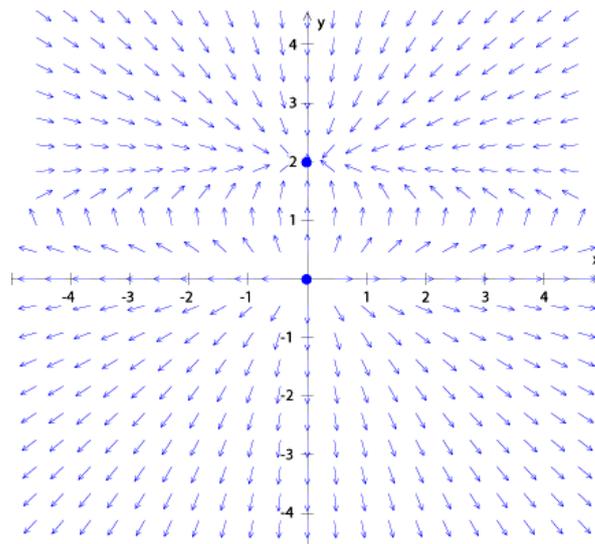


Figura 15 – Nó estável do sistema (3.11)

As figuras acima nos mostram a natureza dos pontos críticos. Como as órbitas não se cruzam, permanecendo em seu quadrante, elas não são fechadas, assim, quando $t \rightarrow \infty$, as órbitas para $y > 1$ convergem para o ponto crítico $(0, 2)$.

Podemos ter uma visão geral das trajetórias pelo plano de fase do sistema (3.8) na figura abaixo.



4 Aplicação

Munidos da teoria que abordamos nos capítulos anteriores, vamos aplicá-la no clássico modelo presa-predador generalizado e em uma sua variação proposta por Schoener, analisando a estabilidade dos pontos de equilíbrio desses sistemas.

4.1 Modelo presa-predador (Lotka-Volterra)

O modelo que estuda a interação de duas populações foi primeiramente desenvolvido por dois matemáticos na década de 1920, o americano Alfred Lotka (1880-1949) e o italiano Vito Volterra (1860-1940), sendo assim também chamado na literatura de **Modelo Lotka-Volterra**.

Volterra propunha um modelo para explicar matematicamente as variações de tubarões e peixes no Mar Adriático, durante a Primeira Guerra Mundial, simultaneamente Lotka desenvolvia um modelo para reações químicas, cujas concentrações de compostos químicos tinham comportamento oscilatório, processo semelhante ao que ocorre com populações em competição.

Este modelo, todavia, não descreve as complexas interações entre duas ou mais espécies observadas na natureza, mas auxilia de forma simples a compreensão de fenômenos mais complicados entre elas.

Pensemos em duas espécies de forma genérica interagindo, onde uma delas dispõe de alimentos em abundância (presa) e a segunda espécie alimenta-se da primeira (predador). Denotaremos a população de presas por x e a dos predadores por y . Ambas as espécies variam com o tempo t e seus crescimentos dependem das suas respectivas taxas de natalidade e mortalidade.

Não havendo predadores, $y(t) = 0$ a população de presas aumentará a uma taxa proporcional à população já existente; ou seja

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x \Rightarrow x' = \alpha x,$$

onde α a taxa de crescimento efetiva das presas. Entretanto, se considerarmos a ausência de presas, $x(t) = 0$, a população de predadores pode ser extinta com o tempo, decrescendo proporcionalmente

$$\frac{dy}{dt} = -\beta y \Rightarrow y' = -\beta y.$$

onde β é a taxa de mortalidade da população de predadores.

Existindo as duas espécies em questão num mesmo território, o número de encontros entre elas será proporcional ao produto das populações xy . Tais encontros tendem a

favorecer os predadores, fazendo com que a população de presas decresça a uma taxa proporcional $-\gamma xy$ e a de predadores aumente a uma taxa δxy . Relacionando essas expressões obtemos o sistema

$$\begin{cases} x' = \alpha x - \gamma xy \\ y' = -\beta y + \delta xy \end{cases} \quad (4.1)$$

onde γ e δ são as taxas de interação entre as duas espécies.

Queremos saber o que acontecerá no futuro com as populações de presas e predadores, quando seus tamanhos iniciais são conhecidos. O objetivo aqui é analisar o comportamento qualitativo das soluções do sistema (4.1) para valores iniciais quaisquer positivos de x e y . Para mais detalhes, ver (BASSANEZI, 1988).

Note que o sistema (4.1) é quase linear, portanto o estudo qualitativo de suas soluções é feito analisando as soluções do sistema linearizado correspondente. Observamos, inicialmente, que há dois pontos de equilíbrio do sistema (4.1) dados pelas equações algébricas

$$\begin{cases} x(\alpha - \gamma y) = 0 \\ y(-\beta + \delta x) = 0, \end{cases} \quad (4.2)$$

cujos pontos críticos são $P_1 = (0, 0)$ e $P_2 = \left(\frac{\beta}{\delta}, \frac{\alpha}{\gamma}\right)$.

Vamos então aplicar a matriz jacobiana em cada um desses pontos críticos. Fazendo as derivadas parciais do sistema (4.1), encontramos a jacobiana

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} \alpha - \gamma y & -\gamma x \\ \delta y & -\beta + \delta x \end{pmatrix}.$$

i) Para a vizinhança do ponto $P_1 = (0, 0)$, temos o sistema linear correspondente

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

que tem autovalores distintos $\lambda_1 = \alpha > 0$ e $\lambda_2 = -\beta < 0$. Neste caso temos que a origem é um ponto de **sela** para ambos os sistemas, o linear (4.3) e o quase linear (4.1), portanto é instável para qualquer parâmetro de α e β .

ii) Para analisar o ponto crítico $P_2 = \left(\frac{\beta}{\delta}, \frac{\alpha}{\gamma}\right)$, fazemos as mudanças de variáveis $x = \frac{\beta}{\delta} + u$ e $y = \frac{\alpha}{\gamma} + v$ e substituímos em (4.1), obtendo o sistema linearizado

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\beta\frac{\gamma}{\delta} \\ \alpha\frac{\delta}{\gamma} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

cujos autovalores são imaginários puros da forma $\lambda = \pm i\sqrt{\alpha\beta}$. Neste caso, o ponto crítico é um **centro estável** para o sistema (4.4).

Isto não garante que esse ponto crítico no sistema quase linear (4.1) seja um centro, sua estabilidade é indeterminada, podendo ser um centro ou uma espiral. Entretanto, nesse modelo em específico, esta indeterminação pode ser resolvida, uma vez que a equação do plano de fase

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x(\alpha - \gamma y)}{y(-\beta + \delta x)}, \quad (4.5)$$

é separável. As curvas soluções de (4.5) são dadas implicitamente por

$$\beta \ln x - \delta x + \alpha \ln y - \gamma y = k, \quad (4.6)$$

onde $k > 0$ é uma constante de integração. É possível mostrar que o gráfico da função que satisfaz a equação (4.6) é uma curva fechada e portanto, o ponto crítico $P_2 = \left(\frac{\beta}{\delta}, \frac{\alpha}{\gamma}\right)$ também é um **centro estável** para o sistema quase linear (4.1). Nas vizinhanças de P_2 o tamanho das populações varia periodicamente, independente das condições iniciais.

Para melhor exemplificarmos esses conceitos do ponto de vista biológico, recorramos ao (STEWART, 2013), que supõe valores numéricos para uma população de coelhos (presas) e lobos (predadores) às constantes positivas do modelo clássico, onde $\alpha = 0,08$, $\beta = 0,02$, $\gamma = 0,001$ e $\delta = 0,00002$. Considere também a notação C para coelhos e L para lobos. Assim, o sistema (4.1), assumiria a forma

$$\begin{cases} \frac{dC}{dt} = 0,08C - 0,001CL \\ \frac{dL}{dt} = -0,02L + 0,00002CL. \end{cases} \quad (4.7)$$

O ponto de equilíbrio trivial $(0,0)$ desse sistema, ou seja, quando $C = 0$ e $L = 0$, faz sentido, uma vez que não havendo coelhos e nem lobos, as populações jamais vão aumentar. Já o ponto

$$C = \frac{0,02}{0,00002} = 1000 \quad L = \frac{0,08}{0,001} = 80,$$

significa que as populações em equilíbrio consistem em 1.000 coelhos e 80 lobos. Ou seja, 1.000 coelhos são o suficiente para suportar uma população constante de 80 lobos.

Podemos então desenhar o campo de direções (Figura 16) e o retrato de fase (Figura 17) do sistema (4.7). Note que as curvas são fechadas, como vimos em (4.6) e centradas no ponto $(1000, 80)$ de equilíbrio, descrevendo o caráter cíclico do modelo.

Percorrendo-se qualquer uma das trajetórias no sentido anti-horário, vê-se que quando a população de coelhos aumenta em relação ao tempo, aumenta-se também a população de lobos a um certo nível, favorecendo a caça de mais coelhos, diminuindo-os por sua vez. Tal diminuição, acarretará na morte de uma certa quantidade de lobos, levando à proliferação de coelhos, recomeçando o ciclo.

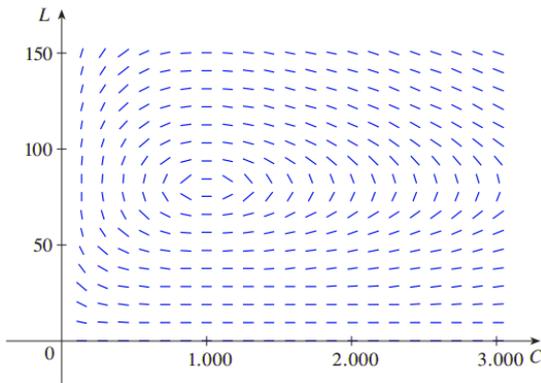


Figura 16 – Campo de direções

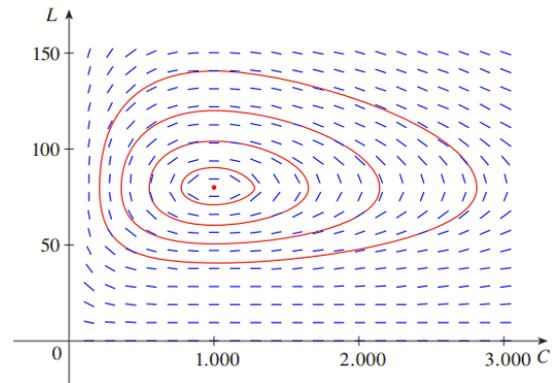


Figura 17 – Retrato de fase

Um jeito mais fácil de visualizar esse fenômeno cíclico é esboçar os gráficos $C(t)$ e $L(t)$ em relação ao tempo considerando t_1, t_2, t_3 quaisquer:

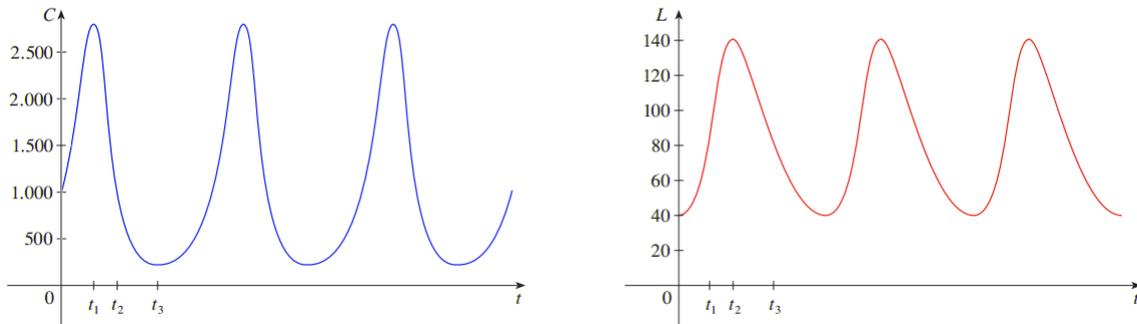


Figura 18 – Gráficos das populações de coelhos e lobos em função do tempo

Para vias de comparação, podemos agrupar estes gráficos em um só (Figura 19), respeitando as diferentes escalas para C e L .

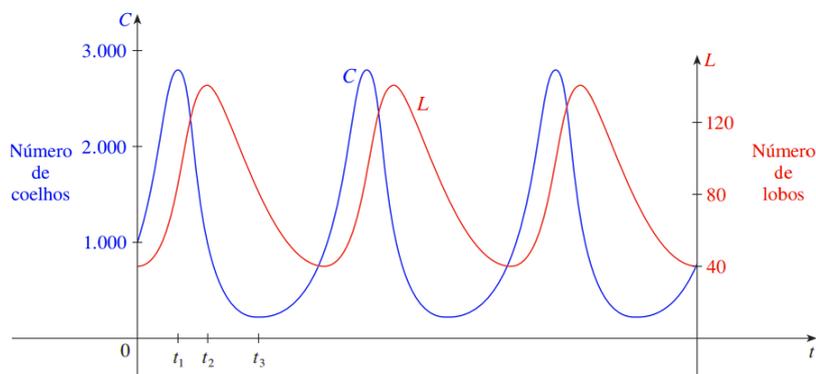


Figura 19 – Gráficos das populações de coelhos e lobos em função do tempo

Nota-se entre as populações uma defasagem ao atingirem os picos (ponto de máximo) e os vales (ponto de mínimo), dada pela relação de coexistência entre essas espécies. É possível realizar um estudo mais analítico do modelo de Lotka-Volterra generalizado, descrevendo-se o período dessa defasagem com relação à mudança de parâmetros dos coeficientes do sistema (4.1). Em (BASSANEZI, 1988) é possível ver essa análise.

4.2 Uma variação do modelo presa-predador: Modelo de Schoener

O clássico modelo de Lotka-Volterra é bem satisfatório para estudos e aplicação de técnicas de estabilidade abordadas neste trabalho, entretanto, do ponto de vista biológico é muito criticado, uma vez que tal modelo considera um crescimento ilimitado para a população de presas na ausência de predadores. O que se propõe muitas vezes para melhorar essa hipótese, é substituir a taxa de crescimento das presas por uma expressão limitadora do seu crescimento ao longo do tempo.

Em (BESSA, 2011), a autora traz uma variação proposta em 1973 pelo ecologista norte-americano Thomas W. Schoener, no periódico *Theoretical Population Biology*, em que ele insere uma limitação ao crescimento das presas, que no modelo de Lotka-Volterra era uma taxa constante α , por uma função f do tipo

$$f(x) = r \left(\frac{k}{x} - 1 \right) \quad (4.8)$$

onde r é uma constante real positiva e k é a capacidade suporte do meio onde se encontram as populações. Com isso, o sistema de equações que descreve o modelo presa-predador ficaria na forma

$$\begin{cases} x' = r \left(\frac{k}{x} - 1 \right) x - \gamma xy \\ y' = -\beta y + \delta xy, \end{cases} \quad (4.9)$$

com as derivadas parciais nas variáveis x e y em (4.9), obtemos a matriz jacobiana

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} -r - \gamma y & -\gamma x \\ \delta y & -\beta + \delta x \end{pmatrix}. \quad (4.10)$$

Para determinarmos os pontos de equilíbrio resolvemos o sistema

$$\begin{cases} r \left(\frac{k}{x} - 1 \right) x - \gamma xy = 0 \\ -\beta y + \delta xy = 0, \end{cases}$$

donde, desse sistema, temos agora três pontos críticos, dos quais $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (k, 0)$ e $P_3 = \left(\frac{\beta}{\delta}, \frac{\delta rk}{\gamma\beta} - \frac{r}{\gamma} \right)$.

Vamos então estudar a estabilidade em cada ponto de equilíbrio, aplicando a jacobiana em cada um

i) Para $P_1 = (0, 0)$ temos

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} -r & 0 \\ 0 & -\beta \end{pmatrix},$$

cujos autovalores são $\lambda_1 = -r < 0$ e $\lambda_2 = -\beta < 0$. Logo o ponto crítico $P_1 = (0, 0)$ é **assintoticamente estável**. Do ponto de vista biológico isso significa que para condições iniciais das populações nas vizinhanças da origem, ambas espécies entram em extinção.

ii) Para $P_2 = (k, 0)$ temos

$$J(k, 0) = \begin{pmatrix} -r & -\gamma k \\ 0 & -\beta + \delta k \end{pmatrix},$$

cujos autovalores são $\lambda_1 = -r < 0$ e $\lambda_2 = -\beta + \delta k$. Logo, se $k \geq \frac{\beta}{\delta}$, então o ponto crítico $P_2 = (k, 0)$ é um ponto de **sela** e, portanto, instável. Já se $k < \frac{\beta}{\delta}$, então o ponto crítico $P_2 = (k, 0)$ é um ponto **assintoticamente estável**.

iii) Para $P_3 = \left(\frac{\beta}{\delta}, \frac{\delta r k}{\gamma \beta} - \frac{r}{\gamma}\right)$ temos

$$J\left(\frac{\beta}{\delta}, \frac{\delta r k}{\gamma \beta} - \frac{r}{\gamma}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{\delta r k}{\beta} & -\frac{\beta \gamma}{\delta} k \\ \frac{\delta r}{\gamma} \left(\frac{\delta r k}{\beta \gamma} - 1\right) & 0 \end{pmatrix},$$

e do polinômio característico dado por $\det(J - \lambda I) = 0$, tem-se

$$\lambda^2 + \frac{\delta r k}{\beta} \lambda + (\delta r k - \beta r) = 0,$$

cujos autovalores (raízes desse polinômio), são

$$\lambda = \frac{-\frac{\delta r k}{\beta} \pm \sqrt{\Delta}}{2} \quad (4.11)$$

com o discriminante $\Delta = \left(\frac{\delta r k}{\beta}\right)^2 - 4(\delta r k - \beta r)$.

Podemos, dessa forma, ter duas situações:

- Se $\delta k - \beta > 0 \Rightarrow k > \frac{\beta}{\delta}$, o discriminante Δ é positivo e menor que o primeiro termo da expressão (4.11) ou um número complexo. Logo, os autovalores possuem parte real negativa e, portanto, o ponto de equilíbrio $P_3 = \left(\frac{\beta}{\delta}, \frac{\delta r k}{\gamma \beta} - \frac{r}{\gamma}\right)$ é **assintoticamente estável**;

- Se $\delta k - \beta < 0 \Rightarrow k < \frac{\beta}{\delta}$, o discriminante Δ é positivo e maior que o termo $\frac{\delta rk}{\beta}$. Logo, os autovalores possuem sinais contrários e, portanto, o ponto de equilíbrio $P_3 = \left(\frac{\beta}{\delta}, \frac{\delta rk}{\gamma\beta} - \frac{r}{\gamma} \right)$ é um ponto de **sela**, instável.

Em suma, temos que no modelo clássico o ponto de equilíbrio trivial $P_1 = (0, 0)$ é do tipo **sela** e o ponto $P_2 = \left(\frac{\beta}{\delta}, \frac{\alpha}{\gamma} \right)$ é um **centro** estável, que indica a possibilidade da coexistência das duas populações.

Já no modelo de Schoener, que acrescenta uma limitação, ao crescimento das presas, tem três pontos críticos, sendo que o ponto trivial $P_1 = (0, 0)$ passa a ser um ponto de equilíbrio **assintoticamente estável**. Os pontos $P_2 = (k, 0)$ e $P_3 = \left(\frac{\beta}{\delta}, \frac{\delta rk}{\gamma\beta} - \frac{r}{\gamma} \right)$, onde k é a capacidade suporte do meio, e r uma constante, a estabilidade depende de parâmetros do modelo, que podem variar de acordo com as populações observadas na natureza e o ambiente em que vivem. Além disso, o ponto de equilíbrio que descrevia a coexistência das duas populações não é mais um centro, como no modelo clássico, podendo ser instável ou assintoticamente estável, dependendo dos parâmetros coletados.

Assim, o estudo do modelo presa-predador, com essa variação, mostra que a mudança na hipótese de crescimento das presas gera alterações significativas, tanto no número de pontos de equilíbrio quanto na estabilidade dos mesmos.

Vale destacar aqui que o modelo presa-predador pode-se estender teoricamente para n populações de predadores. Em meados de 1980, Farkas trabalhou, (FARKAS, 1984), com o seguinte sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \gamma S(1 - S/K) - \frac{m_1 x_1 S}{a_1 + S} + \frac{m_2 x_2 S}{a_2 + S} \\ \frac{dx_1}{dt} = \frac{m_1 x_1 S}{a_1 + S} - d_1 x_1 \\ \frac{dx_2}{dt} = \frac{m_2 x_2 S}{a_2 + S} - d_2 x_2 \end{cases} \quad (4.12)$$

onde

- x_1, x_2 e S são o tamanho da população de duas espécies de predadores e a única espécie de presas, respectivamente;
- a taxa para que o predador x_i captura a presa S , é representada pelo termo $\frac{m_i x_i S}{a_i + S}$;
- $\gamma > 0$ é a taxa intrínseca de crescimento da presa;
- $K > 0$ é a capacidade ambiental de sustentação em relação a presa;

- $m_i > 0$ é a taxa máxima de natalidade;
- $d_i > 0$ é a taxa de morte;
- $a_i > 0$ é a “constante semissaturada”;

respectivamente do i -ésimo predador ($i = 1, 2$).

Resumidamente, o objetivo desse trabalho foi mostrar em qual situação o sistema deixa de ser **instável** e se torna **estável**; e K foi o principal parâmetro para dizer onde muda-se sua instabilidade.

No ano de 2007, (FERREIRA; OLIVEIRA, 2009), generalizou o caso de Farkas para uma situação com n predadores.

4.3 Controle de pragas da broca da cana-de-açúcar

Em artigo científico intitulado *Estudo de estabilidade de equações diferenciais ordinárias autônomas e aplicação*, (MAGRINI; GADOTTI, 2015) analisam a estabilidade dos pontos de equilíbrio num modelo biológico de interação entre a broca da cana-de-açúcar e seu parasitóide *Trichogramnia galloi* proposto por (RAFIKOV; LIMEIRA, 2012), cujo sistema (não linear) de equações diferenciais que modela esse fenômeno é

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \beta(1 - \frac{x_1}{K})x_1 - m_1x_1 - n_1x_1 - \alpha x_1x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = \alpha x_1x_2 - m_2x_2 - n_2x_2, \\ \frac{dx_3}{dt} = n_1x_1 - x_3. \end{cases} \quad (4.13)$$

em que,

- x_1 é a população de ovos existentes no instante t ;
- x_2 é a população de ovos parasitados no instante t ;
- x_3 é a população de larvas no instante t ;
- K é a capacidade de suporte, supondo um crescimento logístico com taxa de reprodução β ;
- m_1 é a taxa de mortalidade dos ovos;
- m_2 é a taxa de mortalidade dos ovos parasitados;
- m_3 é a taxa de mortalidade das larvas;
- n_1 é a fração de ovos que emergem no tempo t ;

- n_2 é a fração de ovos parasitados que emergem no tempo t ;
- n_3 é a fração da população que atinge o estado de pupa;

Este modelo tem uma hipótese adicional que modifica ligeiramente o modelo original proposto por (RAFIKOV; LIMEIRA, 2012). Ele admite que a infestação do parasita pela broca da cana-de-açúcar é mais resistente, supondo que a taxa de mortalidade m_3 da broca no estágio larval em uma infestação específica é na prática desprezível, de modo que todos os ovos atinjam o estágio larval. Com isso, tem-se que $m_3 = 0$ e $n_3 = 1$.

Não faremos neste trabalho a análise desse modelo, mas o trazemos aqui como uma motivação para futuros estudos sobre o assunto e, claramente, para a apreciação do leitor.

4.4 Modelo de Malthus: uma proposta para o ensino médio

O modelo de crescimento populacional do economista inglês Thomas Malthus, apresentado em 1798, pressupõe que a taxa de crescimento de uma população P isolada numa região e sem a ação de outras espécies (presas ou predadores de P), cresce proporcionalmente à população total em um determinado instante t . Matematicamente falando, temos o modelo contínuo

$$\frac{dP}{dt} = kP, \quad (4.14)$$

onde $k > 0$ é uma constante de proporcionalidade. A solução de (4.14), com a condição inicial $P(0) = P_0$ é dada por

$$P(t) = P_0 e^{kt}.$$

Como o modelo malthusiano não considera muitos fatores que podem incorrer tanto na limitação desse crescimento, como no seu próprio declínio, a exemplo de um surto epidêmico fatal, ele é pouco indicado em projeções de crescimento populacional por órgãos oficiais que precisam dessa informação para elaborar suas estimativas. Mas, se mostra adequado para determinar o crescimento de uma população num pequeno instante de tempo ou mesmo para abordá-lo na educação básica como um rico recurso para o professor de matemática usá-lo no ensino de exponenciais e logaritmos, por exemplo.

Em (MAGRINI, 2013), o modelo de Malthus, em sua versão discreta, é proposto para ser aplicado no ensino médio com o objetivo de investigar a estabilidade desse modelo, analisando-o graficamente.

A opção pelo modelo discreto é para não se tratar, num primeiro momento, do cálculo diferencial com os alunos, que pode sair da realidade do aprendizado matemático na fase escolar que ele se encontra. Assim, sendo o modelo discreto de Malthus

$$P(t + 1) - P(t) = \alpha P(t), \quad (4.15)$$

se tomarmos $P(0) = P_0$, obtemos

$$P(t) = (1 + \alpha)^t P_0. \quad (4.16)$$

Naturalmente, pode-se deduzir (4.16) com os alunos, uma vez que para $t = 1$

$$P_1 = (1 + \alpha)P_0,$$

para $t = 2$, $t = 3$ e $t = 4$

$$P_2 = (1 + \alpha)P_1 \Rightarrow P_2 = (1 + \alpha)^2 P_0$$

$$P_3 = (1 + \alpha)P_2 \Rightarrow P_3 = (1 + \alpha)^3 P_0$$

$$P_4 = (1 + \alpha)P_3 \Rightarrow P_4 = (1 + \alpha)^4 P_0$$

e, indutivamente, para $t = n$

$$P_n = (1 + \alpha)P_{n-1} \Rightarrow P_n = (1 + \alpha)^n P_0.$$

onde α é a diferença entre a taxa de natalidade e de mortalidade.

A construção desse raciocínio é importante ser feita com os alunos para que eles percebam a regularidade das funções, e a progressão delas conforme o tempo cresce.

Após encontrar essa relação, apresentar a eles uma tabela contendo dados oficiais de órgãos como o IBGE que trazem informações mais precisas sobre a quantidade das populações de municípios, cidades e estados brasileiros. Escolhe-se então um município qualquer e os anos (evidentemente antes de 2016).

Assim, se o período escolhido, for de 2005 a 2010, por exemplo, tome $t = 0$ no ano de 2005, com a população $P_0 = a$ relativa a esse ano, sucessivamente até $t = 5$ (ano 2010) com $P_5 = e$, sendo a, b, \dots, e valores que variam de acordo com a região escolhida. Depois, estima-se o valor de alfa entre os anos de 2005 a 2006, substituindo os dados em (4.16)

$$P(1) = (1 + \alpha_1)P_0 \Rightarrow b = (1 + \alpha_1)a \Rightarrow \alpha_1 = \frac{b}{a} - 1,$$

de 2006 a 2007:

$$P(2) = (1 + \alpha_2)^2 P_1 \Rightarrow c = (1 + \alpha_2)^2 b \Rightarrow \alpha_2 = \sqrt{\frac{c}{b}} - 1,$$

de 2007 a 2008:

$$P(3) = (1 + \alpha_3)^3 P_2 \Rightarrow d = (1 + \alpha_3)^3 c \Rightarrow \alpha_3 = \sqrt[3]{\frac{d}{c}} - 1,$$

e assim sucessivamente até 2010, de modo que o valor de α seja a média aritmética dos cinco alfas encontrados; ou seja,

$$\alpha = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5}{5} \quad (4.17)$$

o valor numérico encontrado para α em (4.17) representa a taxa de crescimento dessa população nos anos de 2005 a 2010 e pode ser substituído em (4.16).

Posteriormente pede-se aos alunos que construam uma tabela no computador, projetando as populações nos anos de 2011 a 2015 usando a taxa α encontrada e a fórmula (4.16), comparando os valores com os dados oficiais. Essa comparação pode ser feita encontrando o erro percentual ϵ por meio de

$$\epsilon = \left[\frac{D_t}{P_t} - 1 \right] \times 100,$$

onde D_t é o dado oficial da população num determinado tempo e P_t é a população encontrada naquele tempo usando o modelo malthusiano.

Neste momento é importante trazer algumas questões à tona como se os dados projetados se adequam à realidade; sobre o fato de o erro percentual começar a aumentar conforme t aumenta, entre outras questões que podem surgir e que o professor deve debatê-las, inclusive retomando conteúdos como estimativa de médias, porcentagem, entre outros.

Por fim, é importante estimular os alunos a pensar quanto a estabilidade desse modelo, auxiliando-os a construir gráficos (eles verão que parecerá uma exponencial) com os valores colocados na tabela e variando o sinal de α ; ou seja comparando o comportamento gráfico da função (4.16) nos casos em que $\alpha > 0$ (instável) e quando $\alpha < 0$ (estável). E, a partir disso, abordar com eles as falhas do modelo de Malthus e que, por isso, outros modelos foram criados para corrigir o crescimento exponencial de P_n , quando n cresce indefinidamente; ou seja, quando $\alpha > 0$, que não condiz com a realidade.

Lembrando que as aplicações e discussões sobre esse modelo não são possíveis de serem desenvolvidos numa única aula, ainda que o professor peça que o aluno faça em casa uma ou outra etapa aqui proposta. É importante construir esses conceitos com os alunos e de preferência usando alguns softwares para simplificar o processo braçal dos cálculos que surgirão na aplicação deste modelo.

Considerações Finais

Neste trabalho apresentamos alguns fundamentos da teoria dos sistemas de equações diferenciais lineares ordinárias de primeira ordem no plano. Para tornar o texto autossuficiente incluímos alguns resultados de Álgebra Linear usados na análise e classificação da estabilidade dos chamados pontos de equilíbrio nestes sistemas.

Os resultados puderam, sob certas condições, ser extrapolados para os casos não lineares e quase lineares e foram aplicados na análise de modelos biológicos que descrevem a interação entre duas ou mais espécies na natureza e deixamos como proposta de trabalho na educação básica uma sequência de atividade baseado num modelo de dinâmica populacional.

Esperamos que este trabalho sirva de fonte de pesquisa a todos aqueles que desejam aprofundar-se na teoria das equações diferenciais ordinárias e na importância desta teoria para a modelagem dos mais variados fenômenos.

Índice Remissivo

- Atrator, 47
- Autovalores, 17, 19, 25–27, 37–39, 41–46,
51, 55, 59, 60, 63, 66, 67
- Complexos, 38, 40, 44, 46
- Distintos, 38, 39, 42, 44, 55, 62
- Repetidos, 38, 41, 48
- Base, 22–25
- Bola
- Aberta, 30
- Fechada, 30
- Centro, 46, 55, 63, 67
- Dimensão, 17, 20, 23, 27
- Espaço Métrico, 29, 31, 32
- Espaço Vetorial, 20–23
- Espiral, 47, 55, 63
- Estabilidade, 16, 17, 19, 53–55, 61, 63,
65–69, 71, 73
- Foco, 47
- Fonte, 46, 47
- Hiperbólico, 17, 19, 43, 44, 46
- Instabilidade, 54, 55, 68
- Jacobiana, 57–59, 62, 65, 66
- Linearização, 57, 59, 62
- Linearmente Dependente, 21, 22
- Linearmente Independente, 22, 41
- Localmente Lipschitziana, 30, 31
- Matriz, 20, 21, 23–27, 37, 43, 44, 55, 56,
58, 59, 62, 65
- Canônica, 25
- Identidade, 25
- Modelo, 17, 61, 63, 65, 67–69, 71, 73
- Nó Impróprio, 48, 49, 55, 59, 60
- Norma Euclidiana, 20, 30
- Planar, 17, 19, 27, 37, 38, 41, 42
- Plano Traço-Determinante, 43, 45, 46, 48–
51
- Polinômio Característico, 26, 27, 41, 43,
59, 66
- Ponto
- Crítico, 53, 55–60, 62, 63, 65–67
- de Equilíbrio, 17, 19, 28, 44, 53–63,
65–68, 73
- Fixo, 29, 30, 32, 33
- Presa-Predador, 61, 65, 67
- Retrato de Fase, 42, 43, 46, 51, 54, 58, 63
- Sistema, 37, 54–63, 65, 67, 68, 73
- Autônomo, 37, 53–56, 58
- Linear, 54–58, 62
- Não-linear, 55–58, 68, 73
- Quase Linear, 54, 56–59, 62, 63, 73
- Sistema de Equações Diferenciais, 22, 26,
37, 53
- Sorvedouro, 45, 47
- Transformações Lineares, 23

Referências

- BASSANEZI, C. R. *Equações Diferenciais com aplicações*. 1ª. ed. São Paulo: HARBRA Ltda., 1988. 561 p.
- BESSA, G. R. *Teoria de estabilidade de equações diferenciais ordinárias e aplicações: modelos presa-predador e competição entre espécies*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2011.
- BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. 8ª edição. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 2005.
- FARKAS, M. ZIP bifurcation in a competition model. *Nonlinear Anal., Theory Methods Appl.*, Elsevier Science Ltd. (Pergamon), Oxford, v. 8, p. 1295–1309, 1984. ISSN 0362-546X.
- FERREIRA, J. D.; OLIVEIRA, L. A. F. D. Zip bifurcation in a competitive system with diffusion. *Differ. Equ. Dyn. Syst.*, Springer India, New Delhi, Delhi, India, v. 17, n. 1-2, p. 37–53, 2009. ISSN 0971-3514; 0974-6870/e.
- GALDINO, A. L. Sistema de equações diferenciais ordinárias. Notas de Aula - Universidade Federal de Goiás, p. 21, 2012.
- HIRSCH, M. W.; SMALE, S.; DEVANEY, R. L. *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos*. 3ª. ed. [S.l.]: Elsevier, 2003.
- MAGRINI, L. A. *Modelos matemáticos e aplicações ao ensino médio*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2013.
- MAGRINI, L. A.; GADOTTI, M. C. Estudo de estabilidade de equações diferenciais ordinárias autônomas e aplicação. *Revista Ciência e Natura*, Santa Maria, p. 474–480, 2015.
- RAFIKOV, M.; LIMEIRA, E. H. Mathematical modelling of the biological pest control of sugarcane borer. *International Journal of Computer Mathematics*, v. 89, p. 390–401, 2012.
- SOTOMAYOR, J. *Equações Diferenciais Ordinárias*. São Paulo: Livraria da Física, 2011.
- STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. *Álgebra Linear*. 2ª. ed. São Paulo: Makron Books, 2008.
- STEWART, J. *Cálculo*. 7ª. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

