INSTITUTO FEDERAL
DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
São Paulo

MODELAGEM MATEMÁTICA E A ARTE DA FABRICAÇÃO DE PÃES ARTESANAIS

Michele Cristiane Fagundes Boeno

Trabalho de Conclusão do Curso Superior de Licenciatura em Matemática, orientado pelo Prof. Dr. Marco Aurélio Granero Santos

IFSP
São Paulo
2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Boeno, Michele Cristiane Fagundes.
Modelagem matemática e a arte da fabricação de pães artesanais / Michele Cristiane Fagundes Boeno – São Paulo: IFSP, 2018.
72f

Trabalho de Conclusão do Curso Superior de Licenciatura em Matemática - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo
Orientador: Marco Aurélio Granero Santos

1. Modelagem matemática. 2. Modelo exponencial assintótico. 3. Modelo logístico. 4. Fabricação de pães I. Modelagem matemática e a arte de fabricação de pães artesanais.

MICHELE CRISTIANE FAGUNDES BOENO

MODELAGEM MATEMÁTICA E A ARTE DA FABRICAÇÃO DE PÃES ARTESANAIS

Monografia apresentada ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, em cumprimento ao requisito exigido para a obtenção do grau acadêmico de Licenciado em Matemática.

APROVADO EM 02/03/2018 **CONCEITO:** 9,0

Me. Luciano Aparecido Magrini
Membro da Banca

Ms. Mônica Helena Ribeiro Luiz
Membro da Banca

Dra. Iracema Hiroko Iramina Arashiro
Membro da Banca

Prof. Dr. Marco Aurélio Granero Santos
Orientador

Aluna: Michele Cristiane Fagundes Boeno

O feminismo é a sua voz. Através dele, as mulheres que vieram antes de você conquistaram todos os direitos e liberdade que hoje você desfruta. Muitas sofreram e tiveram que enfrentar o preconceito de uma sociedade machista para conquistarem o direto de estudar, trabalhar e até mesmo de serem respeitadas como pessoas.

Universo feminino

Dedico Este Trabalho aos Meus Filhos
É por Eles, Foi por Eles.

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus filhos Agatha e Ryan por estarem sempre ao meu lado incentivando, acreditando, por compreenderem que nem sempre foi possível contar histórias para dormir ou saber quem era o Goku Black. Desculpem-me por todas as vezes que tiveram como refeição macarrão instantâneo. Obrigada pelo carinho e pela cumplicidade. Vocês são as “pessoinhas” que me inspiram a viver. Vocês são os “serezinhos” que afagam o meu coração. Eu deveria ensinar muito a vocês, mas, na verdade, eu aprendo todos os dias com vocês a ser mais amorosa, ter mais paciência; aprendo a ter fé, a ter confiança あなたたちあなたたちは私の日差しです.

À minha mãe, agradeço por sempre mostrar, com seu exemplo, que devemos dar o nosso melhor em qualquer coisa às quais nos prestamos a fazer. Agradeço à minha querida avó, que aos 99 anos ainda mostra que ser mulher não significa fragilidade. Aos meus irmãos Clara e Marcelo, obrigada pelo amor de vocês. À minha cunhada Priscila, que sempre me ouviu, por horas e horas: se não fosse assim, eu teria enlouquecido, agradeço por todo o carinho a mim dado, e me desculpe por todas as vezes que dormi durante as ligações. Ao meu marido Massatossi, por aguentar o meu mau humor, muito obrigada.

Aos meus professores, toda minha gratidão. Levarei um pouco de vocês na etapa seguinte da vida, e desculpem-me qualquer choro, não foi por mal.

Ao meu orientador Marco Aurélio, muito obrigada por ter aceitado me orientar, auxiliando no que foi necessário, por todo o esforço e tempo que dedicou para que este trabalho fosse realizado, por ser paciente comigo em quase todas as horas, nem todas mereci. EDO foi a disciplina mais linda do curso.

Aos professores Grazi, Vania (mãe), Valéria, Samuel, Tiago, Henrique, agradeço pelo incentivo, pelo apoio e estímulo que me deram para enfrentar os desafios que viriam no decorrer do curso, por serem prestativos, por acreditarem. Sou muito grata a vocês por toda ajuda e carinho que recebi em horários malucos em que eu tirava dúvidas e por se mostrarem preocupados com os alunos. Vocês são incríveis.

Aos professores Iracema, Luciano e Monica, grata por comporem a banca mais perfeita do IFSP. À professora Iracema, minha gratidão eterna, por me ouvir e

incentivar, por ser uma pessoa maravilhosa e uma professora incrível. Terminei o curso, mas o seu incentivo fez muita diferença para dar continuidade e chegar até aqui. Nem consigo expressar minha gratidão a você. Ao professor Luciano, obrigado por entender as situações delicadas pelas quais os alunos passam, por mostrar que a docência vai além da sala de aula, que acima de tudo somos seres humanos. Você é feito de bondade. À professora Monica, obrigada por ser tão generosa e paciente e por prestar ajuda mesmo sendo às sextas-feiras, depois das 22h. A proposta deste trabalho foi dada por você nas aulas de laboratório: obrigada por isso também. Sua gentileza é doce.

À professora Mariana, o meu eterno obrigado. Sou grata pelo carinho, pela amizade, pelos conselhos, por todo o auxílio que me deste, pelas madrugadas e horários loucos, por ouvir, dar força, pois afinal “você é uma mulher ou um saco de batatas?”. Obrigada por sempre ter um tempinho para me responder. Admiro você como pessoa e profissional. Obrigada Gael.

Aos meus amigos Anyele, Augusto, Cibele, Ivo, Jaqueline, Hugo, Leticia, Natãna, Renata e Vinicius, um OBRIGADO bem grande: vocês são maravilhosos e a sua amizade foi essencial para eu encerrar este ciclo. Foi bom rir com vocês, chorar com vocês, sentir a alegria de receber notas boas, comer para aliviar um dia de prova, comemorar o fim de um semestre para nos renovarmos para o próximo que viria. Saibam que são momentos como esses que estão guardados no meu coração.

(...)

Oh I get by with a little help from my friends

Hm Gonna try with a little help from my friends

Oh I get high with a little help from my friends

Yes I get by with a little help from my friends

With a little help from my friends.

Beatles

Agradeço à Sheila e ao professor Wellington por terem sido generosos, por disponibilizarem tempo e boa vontade no início deste trabalho.

Agradeço à Monica, Gislene por terem sido tão compreensivas. O carinho e o respeito de vocês foram essenciais.

Aos meus colegas da Escola Santa Marina, obrigado por serem pessoas maravilhosas, um presente em meio ao caos.

Por fim agradeço a Deus, pois nada disso seria possível sem ele.

A todos, o meu muito obrigado.

RESUMO

A modelagem matemática é a interação de um problema do “mundo real” e a matemática. O objetivo deste trabalho é analisar quais dos modelos de crescimento, que possuem um regime assintótico, validam o modelo que descreve o crescimento de pães artesanais. Os modelos considerados são o Exponencial Assintótico e Logístico. Para validar esta hipótese o crescimento de quatro pães foi acompanhado durante uma hora. Esses dados foram utilizados para a obtenção do modelo ajustado. Após a avaliação dos resultados concluímos que o modelo para este conjunto de dados e que descreve o crescimento de pães artesanais é o modelo logístico.

Palavras-chaves: Modelagem matemática, modelo exponencial assintótico, modelo logístico, fabricação de pães.

MATHEMATICAL MODELLING AND THE ART OF MANUFACTURING ARTISAN BREADS

ABSTRACT

The Mathematical Modeling is the interaction of a real world's problem with math. The objective of this work is to analyze which growth models, that have an asymptotic character, validate a model that describe the growth of handmade bread. The considered models are asymptotic exponential model and logistic models. To validate this hypothesis the growth of four breads were accompanied during one hour. These data were used to obtain the adjusted model. After evaluation of results we have concluded that the model for this data that describe the growth of handmade bread is the logistic model.

Keywords: Mathematical Modeling, asymptotic exponential model, logistic model, bread production.

LISTA DE EQUAÇÕES

Pág.

LISTA DE FIGURAS

Pág.

Lista de Gráficos

LISTA DE QUADROS

<u>Pág.</u>

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Ao longo de sua história, o ser humano tem procurado compreender o universo que o cerca buscando explicações para os diferentes fenômenos e atribuindo significados a estes. Essa busca tem sido realizada sob diferentes abordagens e estratégias, dentre as quais a modelagem matemática.

No Brasil, a modelagem matemática tem como expoente os trabalhos de Rodney Carlos Bassanezi, segundo o qual a modelagem é o processo de criação de modelos em que estão definidas as estratégias de ação do indivíduo sobre a realidade, mais especificamente sobre sua realidade, carregada de interpretações e subjetividades próprias de cada modelador (BASSANEZI, 2015, p. 15).

Ainda segundo Bassanezi (2006, p. 24), a modelagem matemática é um processo dinâmico, utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos. É uma forma de abstração e generalização com a finalidade de previsão de tendências, constituindo-se, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual.

Em vista de tais considerações, este trabalho tem como foco o estudo do processo de fabricação artesanal de pães enquanto situação problema, por meio da modelagem matemática.

Na fabricação de pães, dois modelos, a saber, exponencial assintótico e logístico, serão testados para modelarem o processo de crescimento destes pães artesanais.

A questão central de pesquisa consiste em verificar qual dos modelos matemáticos em estudo descreve melhor o processo de crescimento que ocorre por meio da fermentação durante a fabricação de pães artesanais, segundo as condições colocadas nesse trabalho.

Para melhor entendimento, o presente estudo está estruturado de modo que, no capítulo 2, são apresentados os conceitos e as etapas envolvidas no processo de modelagem matemática, bem como um relato sobre seu surgimento e sua história no Brasil.

O capítulo 3 descreve os principais modelos utilizados, destacando o problema da fermentação de pães artesanais, a preparação dos experimentos, bem como o processo de coleta e tratamento dos dados experimentais. Esse capítulo também apresenta o referencial teórico dos modelos matemáticos estudados.

No capítulo 4, são apresentados os resultados obtidos e a discussão sobre os mesmos.

Finalmente, no capítulo 5, têm-se as considerações sobre a temática em pauta e perspectivas futuras.

2 MODELAGEM MATEMÁTICA

Este capítulo aborda o conceito de modelagem matemática, seus significados, noções e problemas adjacentes, bem como a história e aplicação desta no Brasil.

Segundo Biembengut e Hein (2003, p. 12), a modelagem é um meio de interagir a matemática com a realidade. Deste modo, os autores apresentam um esquema, Figura 1, que faz compreender o evento no qual se pode inserir a mesma hoje.

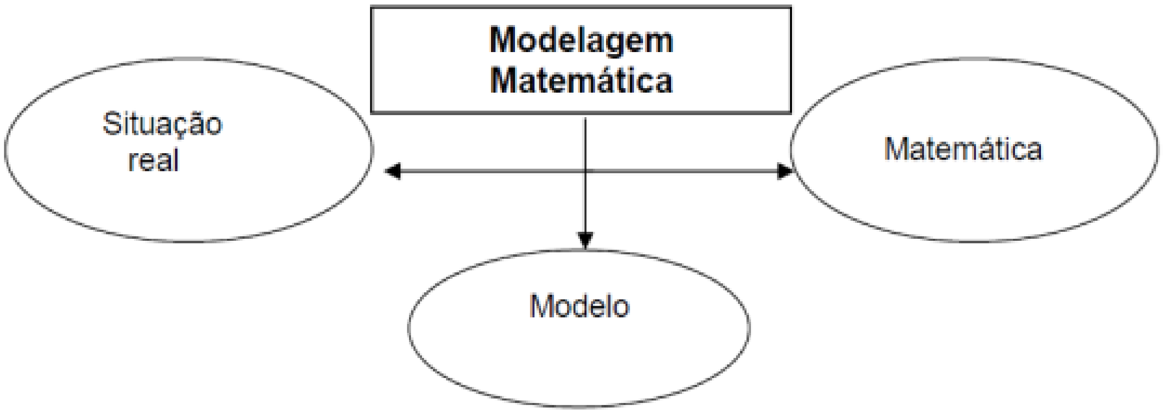

Figura 1 - Esquema do processo de modelagem matemática.
Fonte: Extraído de Biembengut e Hein (2003, p. 13).

A Figura 1 apresenta um esquema no qual a modelagem matemática é um encontro da realidade com a matemática, resultando em um modelo para descrever esta realidade, como uma espécie de intermediador dessa relação.

Estabelecendo os alicerces iniciais do que seria a modelagem matemática, podemos começar a compreendê-la melhor enquanto técnica ou artifício de uma ciência exata para entender a realidade de maneira prática e tornando a própria matemática acessível, ainda consoante com Bassanezi (2011, p. 18):

> O objetivo fundamental do uso de matemática é de fato extrair a parte essencial da situação-problema e formalizá-la em um contexto abstrato onde o pensamento possa ser absorvido com uma extraordinária economia de linguagem. Desta forma, a matemática pode ser vista como um instrumento intelectual capaz de sintetizar ideias concebidas em situações empíricas que estão quase sempre camufladas num emaranhado de variáveis de menor importância.

2.1. O surgimento da modelagem matemática

O ser humano tem por necessidade tentar compreender o universo que o cerca, buscando explicações e, a partir de diferentes abordagens e estratégias, atribuir significados para os diferentes fenômenos ao seu redor.

Nesse contexto, a modelagem matemática surge como uma forma de representar problemas e processos reais. Por isso, é importantíssimo que se tenha em vista um modelo de "ensino em relação à eficiência da aplicação desse modelo como técnica situacional da matemática dentro da realidade" (BASSANEZI, 2006, p. 31), emergindo também como alternativa e aprimoramento da relação "mundo-Ciência exata, contribuindo em processos industriais, etc, resolvendo problemas reais" (BASSANEZI, 2006, pg. 34).

Como diz Ubiratan D'Ambrósio (Prefácio - BASSANEZI, 2006), a modelagem matemática é a matemática por excelência e propõe a simplificação por meio do entendimento de situações reais.

A modelagem matemática vem sendo utilizada para diversos fins, como fizeram Pitágoras e Platão, utilizando-a como modelo para construção de modos de vida e resolução de problemas. Outro exemplo é a obra magna de Platão, *A República*, na qual ele se baseia na organização de uma matemática do Cosmos para imaginar a "cidade justa" (PLATÃO, 1993).

Noutro exemplo, temos a experiência de Thomas Malthus[1], reconhecido na História e na Sociologia por ter traçado um cálculo para planejar matematicamente um modelo de bem estar na Terra, a partir da relação de controle entre produção alimentícia e taxa de natalidade. Segundo ele:

> A população, quando não obstaculizada, aumenta a uma razão geométrica. Os meios de subsistência aumentam apenas a uma razão aritmética. Uma ligeira familiaridade com números mostrará a imensidade da primeira capacidade comparativamente à segunda (MALTHUS, 1982, p. 56).

---

[1] Thomas Robert Malthus foi um economista britânico considerado o pai da demografia por sua teoria para o controle do aumento populacional conhecida como malthusianismo. (MALTHUS, Thomas Robert. **Ensaio sobre a população**. LeBooks. 2017)

A história da humanidade proporcionou diversos momentos nos quais as ciências exatas, atuando como modelagem matemática, foram utilizadas para compor um panorama político-social, não só em Pitágoras, Platão ou Malthus, como também na indústria atual, em grande ou pequena escala.

2.2. Noções de modelagem matemática

Estabelecer métodos, gráficos ou não, de solução de problemas e aplicação dos mesmos à realidade é comum. No entanto, há que se tomar cuidado com a maneira como se procura solucionar tais problemas, haja vista o fato de que, se o desenvolvimento de um problema envolve todos os processos mentais do homem, é preciso então compreender esses processos, de modo que a resolução e a modelação matemática não se tornem reféns de uma construção paradoxal ou de uma "forma de resolver problemas que incorra em falácias ou desenvolvimentos e conduções errôneas do pensamento" (BIEMBENGUT e HEIN, 2003, p.70).

A modelagem matemática se apresenta em etapas. Bassanezi (2006, p. 27) apresenta um esquema, Figura 2, para a relação entre uma situação real e a modelagem, no qual define as etapas envolvidas no processo de modelagem de uma situação-problema, isto é, são problemas reais desvinculados da matemática, mas que podem ser descritos por uma "matematização" em forma de modelos válidos.

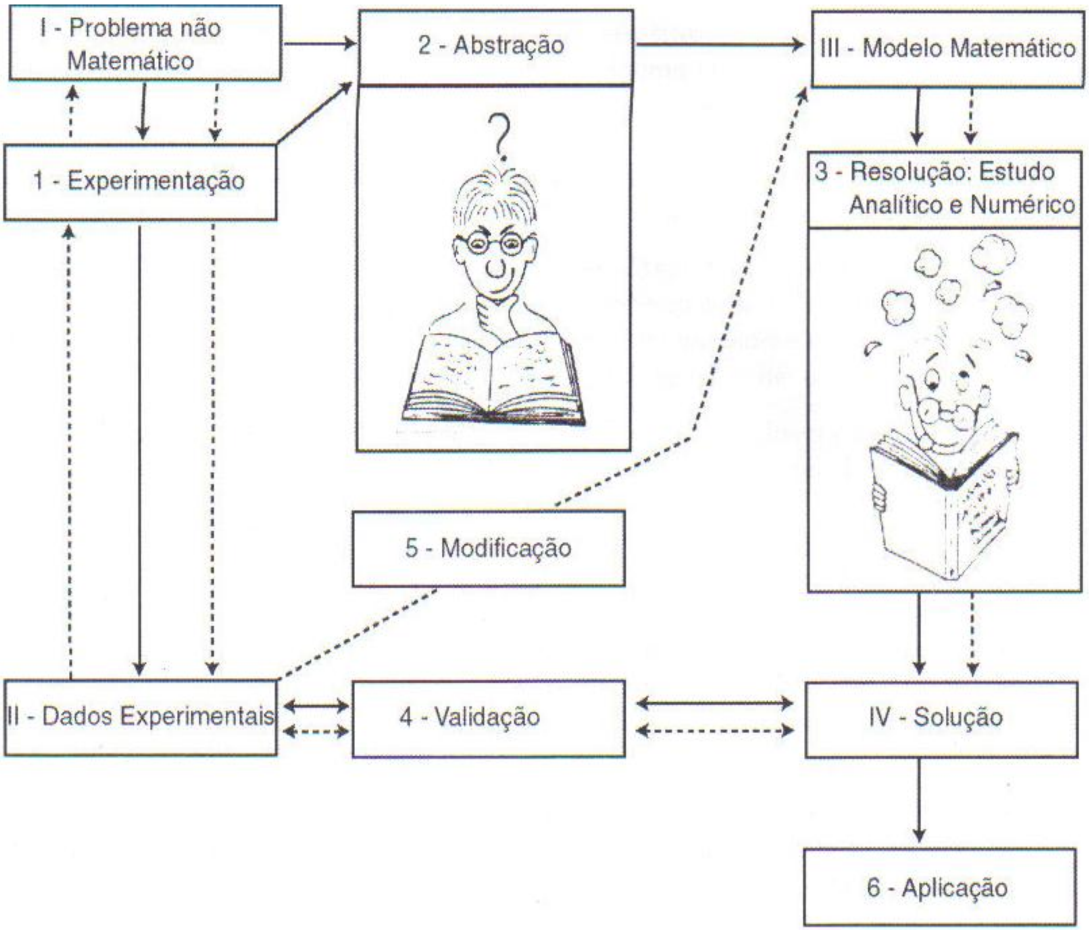

Figura 2 - Esquemas de uma modelagem de um problema.
Fonte: Extraída de Bassanezi (2006, p. 27).

Estas etapas definem como realizar o trabalho de modelagem em uma situação problema e são caracterizadas por:

Etapa 1: Experimentação

Nesta fase, realiza-se a coleta e análise de dados do objeto de pesquisa com o auxílio de um supervisor matemático (um especialista na situação-problema) a fim de direcionar o objetivo da pesquisa. Adotar técnicas e métodos estatísticos na pesquisa pode dar um alto grau de confiabilidade dos resultados.

Etapa 2: Abstração

O processo de abstração consiste em alguns itens para a formulação dos modelos matemáticos, que podem ser organizados segundo o Quadro 1.

Quadro 1 - "Matematização" do problema.

Seleção de variáveis	Os conceitos do objeto de pesquisa devem estar bem definidos, por isso, separam-se as variáveis. Quando as variáveis descrevem a evolução do sistema, são chamadas variáveis de estado. Caso as variáveis sejam aquelas que agem sobre o sistema, são chamadas variáveis de controle.
Problematização ou formulação dos problemas teóricos numa linguagem própria da área em que está trabalhando	Trata-se do que se quer resolver. O enunciado desse problema deve estar apresentado de forma clara, compreensível e operacional, explicitando a relação entre as variáveis e o objeto de pesquisa.
Formulação de hipóteses	São formulações gerais que dirigem a investigação, permitindo deduções de manifestações empíricas e específicas. É possível gerar as hipóteses de diferentes modos: observação dos fatos, comparação com outros estudos, dedução lógica, experiência pessoal do modelador, observação de casos singulares da própria teoria, analogia de sistemas etc.
Simplificação	Em geral, os estudos das investigações matemáticas em seus fenômenos são apresentados de forma complexa. Para que seja possível o entendimento, é necessário fazer a simplificação do problema trabalhado. É preciso ser cauteloso em relação a quanto simplificar, nem tão pouco, ao ponto de continuar complexo e de difícil resolução, nem muito, para que não se percam informações relevantes.

Fonte: Adaptado de Bassanezi (2006, p. 20).

Etapa 3: Resolução – Estudo Analítico e Numérico

A modelagem matemática só é possível quando conseguimos transformar um problema do cotidiano em linguagem matemática, sem mudar suas características. A resolução do modelo é atividade própria de um matemático, podendo ser desvinculada da realidade modelada e ser obtida através de métodos analíticos ou numéricos, dependendo do grau de complexidade do modelo.

Nesta fase, é possível que novas técnicas e teorias matemáticas sejam desenvolvidas, uma vez que os argumentos conhecidos não sejam suficientes para a obtenção o modelo.

Etapa 4: Validação

No processo de validação, são realizados testes no modelo proposto, através da comparação entre os dados reais e os dados encontrados através do modelo, considerando suas hipóteses, a fim de levar à aceitação ou não do modelo encontrado.

Etapa 5: Modificação

Alguns modelos podem levar a soluções que não conduzem a previsões corretas do objeto que está sendo modelado, pois existe uma série de razões que podem interferir na rejeição do modelo. São elas: hipóteses falsas ou pressupostos de partida incorretos, dados obtidos de modo incorreto, hipóteses insuficientes, variáveis da situação real não consideradas no modelo teórico, ou algum erro cometido no desenvolvimento matemático formal. Ajustes e alterações se tornam, nesses casos, necessários.

Etapa 6: Aplicação

A aplicação é a etapa que mostra o quanto o modelo condiz com a realidade, podendo ser reformulado. Assim, afirmar que um modelo é ideal para um determinado fenômeno, definindo-o como o modelo definitivo, pode induzir à conclusão de que o modelo deva ser utilizado apenas para aquele problema em questão.

Vale ressaltar que modelos bem formulados podem proporcionar a construção de novos modelos e a generalização para a descrição de um determinado fenômeno.

As linhas pontilhadas se referem a etapas da modelagem que podem ser refinadas ou reestruturadas na medida em que a resposta do modelo ainda está longe da realidade observada. Lembrando que nenhum modelo via ou será igual à realidade, pois um modelo representa uma aproximação da realidade.

2.3. História da modelagem no Brasil

Segundo Burak (2004, p. 1), a modelagem matemática começou a ser desenvolvida na década de 1980, na Universidade Estadual de Campinas (Unicamp), como parte de um processo e pesquisa sobre “modelos de crescimento cancerígenos”. Essas pesquisas evoluíram e passaram a integrar a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, do professor Rodney Carlos Bassanezi, do curso de Engenharia de Alimentos (BURAK, 2004, p. 1).

Para Cipriano (2013), no Brasil, Aristides Camargo Barreto, Ubiratan D’Ambrosio, Rodney Carlos Bassanezi, João Frederico Mayer, Marineuza Gazetta e Eduardo Sebastini são os pesquisadores que iniciaram os estudos sobre ensinar matemática por meio da modelagem. A autora destaca o professor Aristides Camargo Barreto como sendo, possivelmente, o primeiro docente/pesquisador que realizou experiências em sala de aula. Barreto tomou conhecimento do tema durante o curso de engenharia na década de 1960.

Segundo Burak (2004), a modelagem matemática na educação teve início com os cursos de especialização para professores, em 1983, na Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Guarapuava, no Paraná. Posteriormente, a modelagem passa a contar com cada vez mais adeptos após migrar e ganhar espaço no Programa de Mestrado em Ensino de Matemática da Universidade Estadual Paulista –(Unesp), uma vez que era preciso encontrar novas alternativas para o ensino de matemática a partir de “situações vivenciadas pelos então alunos de 1° e 2° graus” (BURAK, 2004, p. 1). Já a produção de artigos e dissertações sobre o assunto, começou no ano de 1987, segundo o mesmo artigo de Burak.

3 MODELAGEM DO CRESCIMENTO DE PÃES EM PROCESSO ARTESANAL DE FABRICAÇÃO

O processo de panificação artesanal é uma situação da realidade que pode ser inserido em um modelo matemático. Esse processo depende da fermentação que é realizada por meio de uma reação bioquímica entre as leveduras *saccharomyces cerevisiae* e o açúcar presente na massa dos pães.

Essas leveduras (fungos) alimentam-se do açúcar presente na farinha e na receita do pão, se assim o tiver, produzindo álcool e gás carbônico, sem a presença de oxigênio. O álcool é evaporado durante a cocção e o gás carbônico fica preso dentro da massa criando alvéolos no interior do pão. Essa reação é que faz com que o pão cresça, fique macio e tenha um sabor mais agradável.

> Sabe-se que a fermentação é um processo químico que transforma as cadeias de açúcar ($C_6H_{12}O_6$) contidas na massa em gás carbônico ($2CO_2$), álcool etílico ($2C_2H_6O$) e substâncias aromáticas (ácidos orgânicos), objetivando provocar o crescimento da massa e o surgimento e a incorporação de sabores aos produtos produzidos. (BASSANEZI, 2015, p.209).

Através da observação do crescimento do pão artesanal e da fermentação, este trabalho tem por objetivo modelar e validar um modelo matemático atuante no processo de fabricação de pães produzidos artesanalmente. A validação de tal modelo consiste na observação, interpretação e compreensão dos resultados produzidos, à luz das etapas descritas por Bassanezi (2006), Figura 2.

Vale destacar que a modelagem matemática também pode ser entendida como um meio de aprendizagem, pois permite ao aluno uma participação direta neste processo, no qual é possível fazer uma aproximação das situações cotidianas através da tradução do pensamento abstrato por meio da extração de suas partes essenciais. Assim, como forma de apontar para o desenvolvimento da modelagem matemática, abordaremos brevemente o panorama histórico da mesma no Brasil, especialmente na área de Ensino.

3.1. Modelos matemáticos e a fabricação de pães

A modelagem matemática procura validar um modelo. Mas um modelo, segundo Bassanezi (2006, p. 18) “deve prever, no mínimo, os fatos que o originaram”. Isto porque um modelo matemático é um conjunto “de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma, o modelo-objeto estudado” (BASSANEZI, 2006, p. 20).

> O reconhecimento de uma teoria científica passou a ter como condição necessária o fato de poder ser expressa em uma linguagem matemática. A própria matemática teve uma evolução substancial, em decorrência da demanda das diversas áreas de pesquisa por novas teorias matemáticas. (BASSANEZI, 2006, p.19).

Os modelos, certamente, ao mesmo tempo em que conferem legitimidade à discussão sobre modelagem matemática, corroboram para outra questão, que é a possibilidade de previsibilidade da matemática.

A matemática, nesse sentido, estaria condicionada como verdade ontológica. Conforme mostra a

Figura **3**, a ideia de que há, de um modo ou de outro, uma relação de conexão entre matemática e realidade, sempre pôde ser explorada, mesmo quando não se é viável ou possível afirmar a existência de números ou algarismos enquanto entidades abstratas que compõem a parte fundamental do tecido da realidade. Esta figura representa o esquema de Edwards e Hamson (1990), sobre essa relação paradoxal em uma das leituras sobre o papel da matemática.

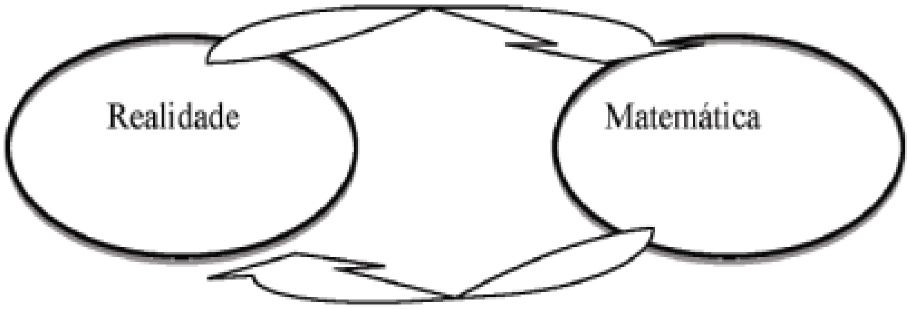

Figura 3 - Esquema representando a modelagem matemática.
Fonte: Adaptado de Edwards e Hamson (1990, p.31).

O estudo e aplicação da matemática enquanto possibilidade de descrição e explicação dos fenômenos e eventos universais advém desde a Antiguidade, quando filosofia, astronomia e matemática eram discutidas pelos pensadores com a mesma ênfase e, praticamente, correlacionadas. Platão, ao fundar a Academia, em cerca de 384/383 a.c., nos arredores de Atenas, talhou em seu pórtico a inscrição "*Ageometrètos mèdeis eisito",* isto é, "Não entre aqui quem não sabe geometria". Mesmo disfarçada de templo em homenagem ao deus Apolo e às musas inspiradoras, de acordo com a lei da época, a Academia marcava assim os reais interesses de seus mestres e frequentadores. *

 * (*Ageometrètos mèdeis eisito*. A referência é datada posteriormente, nos escritos de João Filopono e de Olympiodoro, neoplatônicos, que viveram no século VI d. C.; e por João Tzetzes, autor bizantino do século XII (*Chiliades*, 8, 972). Cf. SAFFREY, Henry. *Ageômetrètos mèdeis eisitô*: une inscription légendaire. *Revue des Études Grecques*, n. 81, p. 67-87, 1968.)

Desde então, o papel de um modelo na educação e na pesquisa científica parece alcançou um destaque igualitário. Especificamente na prática de ensino, é fundamental por se tornarem, mais que instrumentos, parte do exercício pedagógico.

3.2. Modelos mais comuns

Dentre os modelos mais comuns, o Quadro 2 apresenta aqueles apontados por Bassanezi (2006, p. 20), os quais podem ou não ser aplicados em relação à determinada situação-problema.

Linear ou não linear	Conforme suas equações básicas e características.
Estático	Quando se molda ao formato do objeto que o constitui – por exemplo, a forma geométrica do favo de mel, ou dinâmica: quando simula variações diferentes do fenômeno estudado. Por exemplo, crescimento populacional.
Educacional	É um modelo que se exclui algumas variações para que se possa compreender o processo de modelagem matemática. O modelo presa-predador de Lotka-Volterra é um exemplo de tais modelos. Assim, usam-se apenas poucas variáveis para que compreensões do fenômeno possam ser feitas. Geralmente, podem-se encontrar soluções analíticas. É importante ter cuidado, pois estas simplificações quase sempre resultam modelos matemáticos que não descrevem a realidade investigada; ou Aplicativo: é um modelo matemático que utiliza, geralmente, muitas variáveis e sistemas de equações com numerosos parâmetros. Assim, é praticamente impossível o tratamento analítico, sendo importante o uso das Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC) para encontrar soluções;
Determinístico	É baseado na hipótese de que se há informações sobre um determinado instante ou um estágio do processo, então previsões podem ser feitas de modo preciso;
Estocástico	É aquele que descreve a dinâmica de um sistema em termos probabilísticos.

Quadro 2 - Modelos matemáticos mais comuns
Fonte: Adaptado de Bassanezi (2006, pg. 20 e 21).

Levando em consideração esses modelos, tal qual elencados por Bassanezi (2006), podemos ponderar que a modelagem matemática, muito mais do que reduzida à forma e ao discurso da ciência enquanto palavra final pode auxiliar em diversas esferas da vida, seja ela voltada à indústria ou ao ensino Fundamental e Médio de Química, Sociologia, Biologia, dentro de uma perspectiva ampla de interdisciplinaridade.

Em relação à panificação, cabe lembrar que esta perspectiva de problema é tratada como experimento dentro da modelagem matemática. Desta forma, caso se queira levar a experiência da fermentação artesanal de pães como exemplo de estudo de caso de uma situação real, este trabalho apresenta uma proposta de etapas para esta modelagem.

3.3. O problema da fermentação de pães

O pão é um alimento tradicional e um dos mais consumidos mundialmente. Não há um consenso quanto ao seu surgimento, mas sabe-se que o pão fermentado se originou no Egito, sendo passado aos gregos e propagado ao mundo pelos romanos.

De acordo com Ribeiro (2006), para que a panificação ocorra com sucesso, alguns ingredientes são importantes, ou seja, fundamentais no processo, como: farinha, água, sal, açúcar, gordura, leite, ovos, fermento. (Os únicos ingredientes fundamentais para fazer pão são farinha, água e sal. Daí, os egípcios descobriam o fermento e inventaram o pão com fermento. O resto é agregado) Do ponto de vista prático, existem três tipos de fermento biológico que são comercializados: o fermento fresco, fermento seco e fermento seco instantâneo.

A fermentação tratada neste trabalho tem como agente as leveduras *saccharomyces cerevisiae*, que se caracteriza como fermento biológico seco. Quando estes microrganismos se alimentam da glicose, liberam gás carbônico e álcool, de tal modo que, quanto maior for a temperatura ambiente, mais rápido será esse processo.

A

Figura **4**[2] apresenta o processo de fermentação alcoólica realizado pelas leveduras contidas no fermento biológico seco.

[2] Fonte: www.sobiologia.com.br

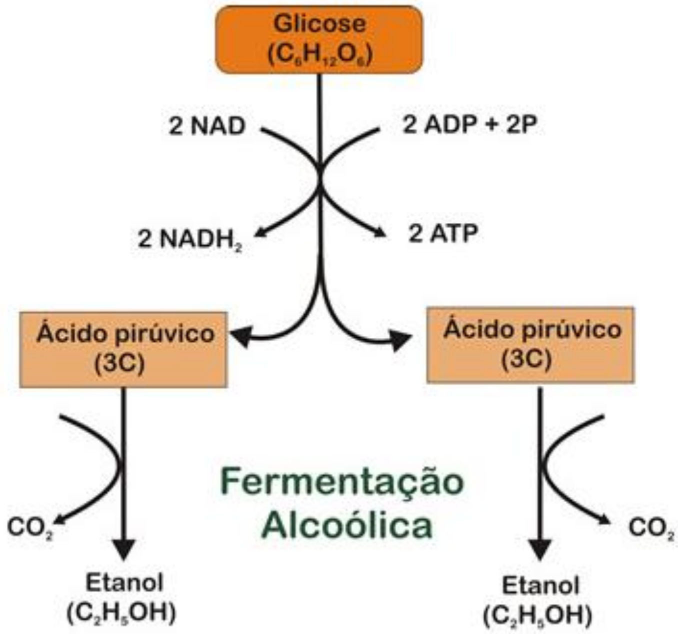

Figura 4 - Processo de fermentação alcoólica das leveduras.
Fonte: Só Biologia

3.4. A preparação do experimento e coleta de dados

Os pães foram preparados com uma receita familiar que se encontra no Anexo A. Cada ingrediente foi pesado e medido para que a coleta pudesse ser a mais fiel possível dentro do contexto ao qual estava submetido o experimento.

O preparo da massa acontece em duas etapas: a primeira tem como objetivo a mistura dos ingredientes conforme a receita, uma sova da massa para homogeneizar os ingredientes com o fermento e o descanso da massa por 20 minutos.

Após o descanso, ocorre à segunda etapa: uma nova sova da massa para ativar os fungos e modelar o pão, que deverá mais uma vez descansar. É nesta segunda etapa que ocorre a coleta de dados experimentais.

Na segunda etapa a massa recebe calor devido à sova, assim as leveduras voltam a ser ativadas alimentando-se da glicose, liberando o gás carbônico criando alvéolos na massa e é dessa forma que o pão caseiro cresce.

Os dados experimentais são compostos por imagens fotográficas, cujo objetivo é acompanhar o processo de fermentação dos pães. Estas imagens foram obtidas em ambiente doméstico, todas no mesmo local e sob as mesmas condições, variando-se apenas o horário no qual as coletas ocorreram.

Para isto, uma câmera fotográfica comum foi ajustada a uma distância de 30 cm da forma do pão que foi colocada em um estúdio cuja cor de fundo corresponde à mesma cor da forma do pão, Figura 5.

As imagens foram adquiridas com intervalos de 1 minuto entre cada disparo e o tempo total de captura das imagens de cada pão variou entre 60 e 80 minutos.

A Figura 5 apresenta um exemplo de imagem inicial e imagem final de um pão após esse processo.

Figura 5 - Imagem coletada no início e final do experimento

A fim de que as imagens obtidas fossem convertidas em valores numéricos que refletissem o crescimento dos pães e, consequentemente, representassem o processo de fermentação, estas foram binarizadas, Figura 6**Erro! Fonte de referência não encontrada.**, de modo que a região clara represente a área do pão.

Esta área do pão é a variável a ser considerada para avaliar o processo de fermentação de pães artesanais.

Figura 6 - Imagem experimental e Imagem experimental binarizada

Ao processo descrito nesta seção corresponde à primeira etapa definida por Bassanezi (2011): Experimentação.

3.5. Formulação de modelo matemático

Analisando a coleta graficamente, através dos gráficos de dispersão tempo (s) x área do pão ($pixel^2$), é possível observar a dinâmica de crescimento da área do pão em relação ao tempo, Gráfico 1. Nesta figura, observa-se, além da dinâmica crescente já esperada para o processo de fermentação, um proeminente comportamento assintótico, evidenciado principalmente no caso do experimento Pão 1 (P1), (P2), (P3) e (P4).

P1 e P2 foram coletados em dias mais quentes, a temperatura da torre de medição mais próxima ao local de coleta marcava 26°C, enquanto que P3 e P4 a temperatura da torre de medição mais próxima marca 19°C, evidenciando que as leveduras reagem melhor com o calor.

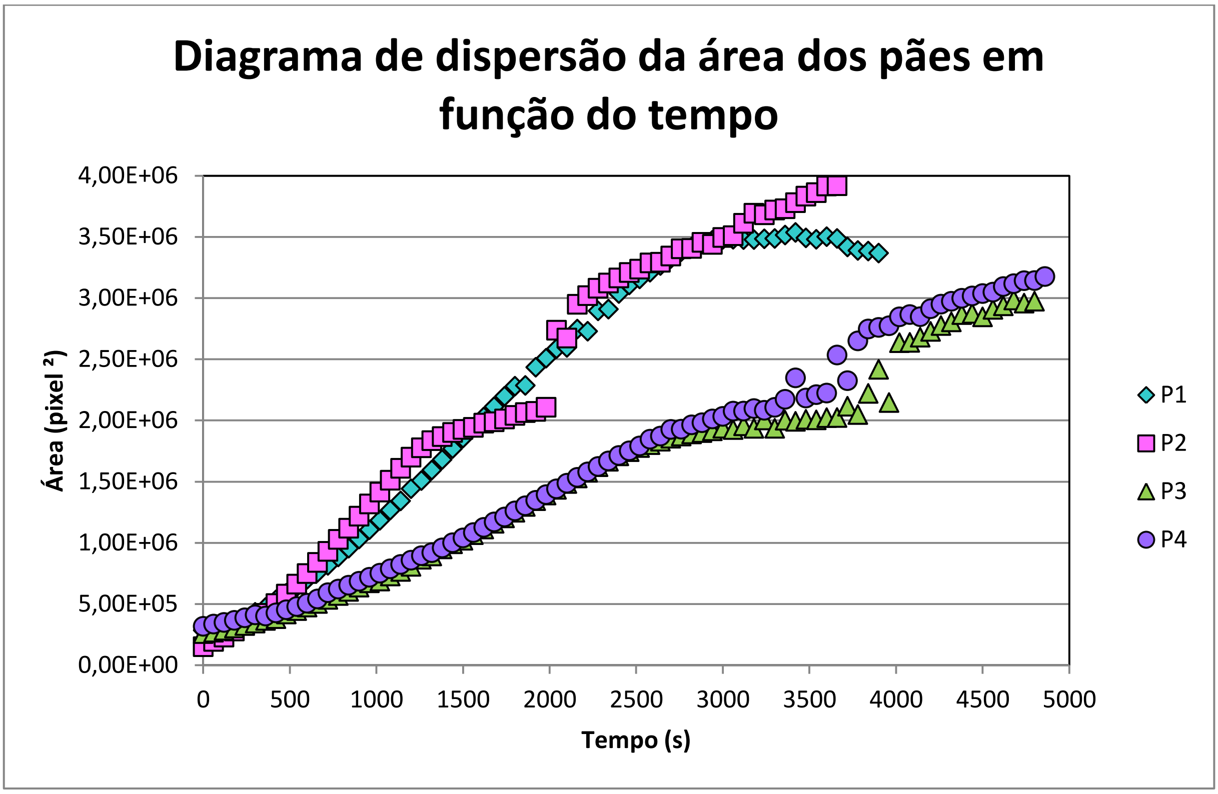

Gráfico 1 - Gráfico de dispersão dos dados experimentais

Assim, os modelos escolhidos para modelar esta dinâmica foram aqueles que apresentam características com perfil de crescimento assintótico. Entre os modelos estudados como possíveis para essa modelagem foram utilizados o modelo exponencial assintótico e o modelo logístico.

Ao estabelecer os possíveis modelos para a descrição da dinâmica de crescimento de pães, pode-se dizer que a etapa 2 de abstração, segundo Bassanezi está concluída.

3.5.1. Descrição dos modelos e método numérico escolhido para o ajuste de curvas

O ajuste de curvas trata-se de métodos numéricos usualmente empregados para obter uma função (modelo) que se aproxima de um determinado conjunto de pontos tabelados e/ou extraídos de um determinado fenômeno, natural ou não. O ajuste de curvas, em geral, realiza uma aproximação da função do modelo previsto, $\varphi(t)$, aos dados experimentais, $f(t_i)$, de forma que $\varphi(t)$ seja ajustada de modo a minimizar o desvio entre o modelo e os dados experimentais.

Como mencionado anteriormente, os modelos escolhidos para o ajuste aos dados, foram o modelo exponencial assintótico e o modelo logístico, que são descritos nas equações abaixo:

$$\varphi(t) = y^* - be^{\lambda t}(y^* > 0, \qquad b\ e\ \lambda < 0)$$

Equação 1 - Modelo Exponencial Assintótico

$$\varphi(t) = \frac{{y_i}^*}{be^{-\lambda t} + 1}, \qquad b > 0$$

Equação 2 - Modelo Logístico

3.5.1.1. Modelo Exponencial Assintótico

Em algumas situações, há uma tendência monótona de valores, apresentando um comportamento assintótico, ou seja, possui uma tendência de estabilização dos dados, sendo descrito pela função:

$$y = y^* - be^{\lambda t}$$

onde: $b < 0$ e $\lambda < 0$ são os parâmetros do modelo a ser ajustado e, $y^* > 0$ é chamado de valor assintótico dos dados.

O valor assintótico y^* nada mais é que o limite de tendência de y quando t tende a infinito, ou seja,

$$\lim_{t\to\infty} y = \lim_{t\to\infty}\left(y^* - be^{\lambda t}\right) = y^*.$$

Os valores dos parâmetros b eλ são obtidos através da linearização da Equação 1, com o auxílio dos dados experimentais y.

Linearizando a Equação 1 e tomando $f(t) = y$, obtêm-se a reta $z = at + c$, onde:

$$z = \ln(y - y^*) \qquad (3.1)$$

$$a = -\lambda \qquad (3.2)$$

$$c = ln(-b) \text{ ou } e^c = -b \quad (3.3)$$

De posse destes parâmetros, a função ajustada $\varphi(t)$ está completamente determinada.

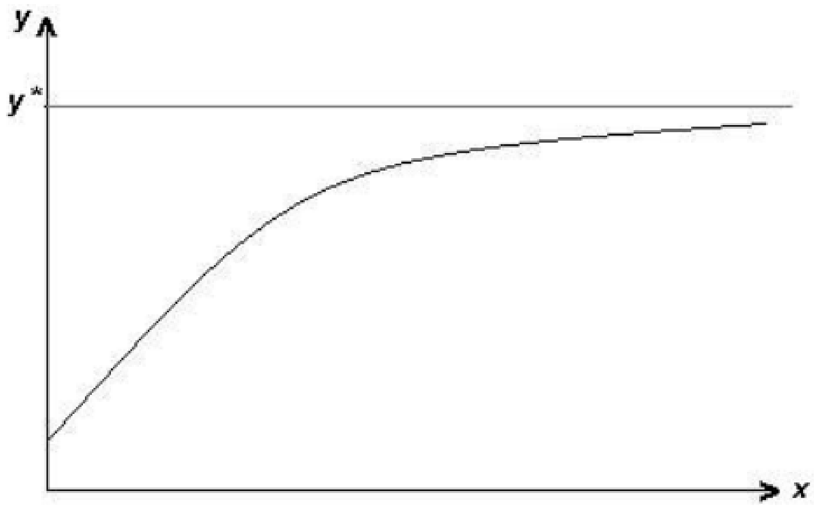

Gráfico 2 - Função Exponencial Assintótica
Fonte: Bassanezi, Temas e Modelos

3.5.1.2. Modelo Logístico

O modelo logístico, também conhecido por modelo de Verhurst, considera que uma população inserida em um determinado local por um determinado tempo, tenderá até um limite denominado capacidade suporte.

As características fundamentais da curva logística são (BASSANEZI, 2012):

1. Tendência a estabilidade, apresentando assim um valor de capacidade suporte;

2. A curva é crescente até próximo do valor da capacidade suporte;

3. A taxa de crescimento relativo é linear, isto é, $\lambda_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{y_i}$ e pode ser ajustada por uma reta;

4. A curva apresenta um ponto de inflexão. Se $y_0 < {}^{y*}/_{2}$, a curva $y(t)$ muda de concavidade quando $y = \frac{y*}{2}$, o que implica num ponto de inflexão na curva.

Linearizando a Equação 2, obtém-se a equação $z = ay + c$ para os parâmetros z, λ e b, tais que:

$$z = \ln\left(\frac{y^* - y}{y}\right) \tag{3.4}$$

$$a = -\lambda \tag{3.5}$$

$$c = ln(b) \text{ ou } e^c = b \tag{3.6}$$

Com os valores dos parâmetros encontrados, calcula-se a função ajustada $y(t)$ utilizando os valores de $y(t_k)$. Neste trabalho, os valores t_k correspondem à variável tempo dos dados coletados.

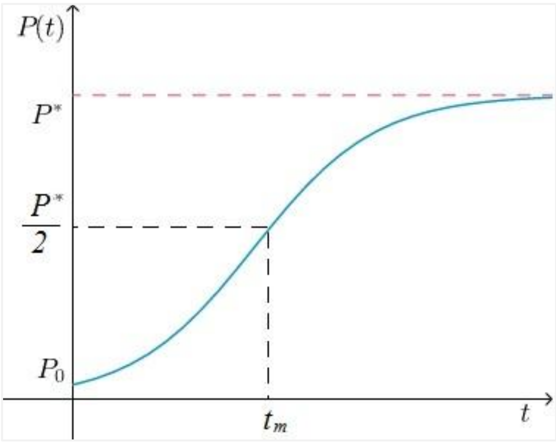

Gráfico 3 - Curva logística do modelo de Verhulst
Fonte: KONO (2017)

A seguir, apresentamos os resultados referentes aos modelos escolhidos e os dados coletados, que se encontram no Anexo B.

3.5.1.3. Estimativa do ponto de estabilização

O ponto de estabilização, isto é, o valor assintótico (y^*), pode ser estimado de diferentes maneiras.

Para este trabalho, a metodologia escolhida foi utilizar o fato de que um ponto de estabilização é tal que $y_{i+1} \simeq y_i$, ou seja, a taxa de crescimento é próxima ou igual a zero. Deste modo, para cada um dos pães em estudo foram calculadas as derivadas discretas dos valores de $y(t)$ e, o valor cuja derivada foi o mais próximo de zero, em valores absolutos, foi considerado como valor assintótico, y^*.

4 DISCUSSÃO E RESULTADOS

Prosseguindo com as etapas da modelagem, segundo Bassanezi (2011), em cada experimento foram analisados os dois modelos que representam crescimento e possuem estabilização, isto é, $y_{k+1} - y_k \cong 0$.

4.1. Pão 1

Neste experimento, o valor assintótico obtido foi de $y^* = 3.477.738{,}13$.

4.1.1. Ajuste Exponencial Assintótico

O Gráfico 4 mostra o gráfico da curva $z = at + c$, de tal modo que os coeficientes a e c são utilizados para a obtenção dos parâmetros λ e b do modelo, conforme equações (3.2) e (3.3) respectivamente.

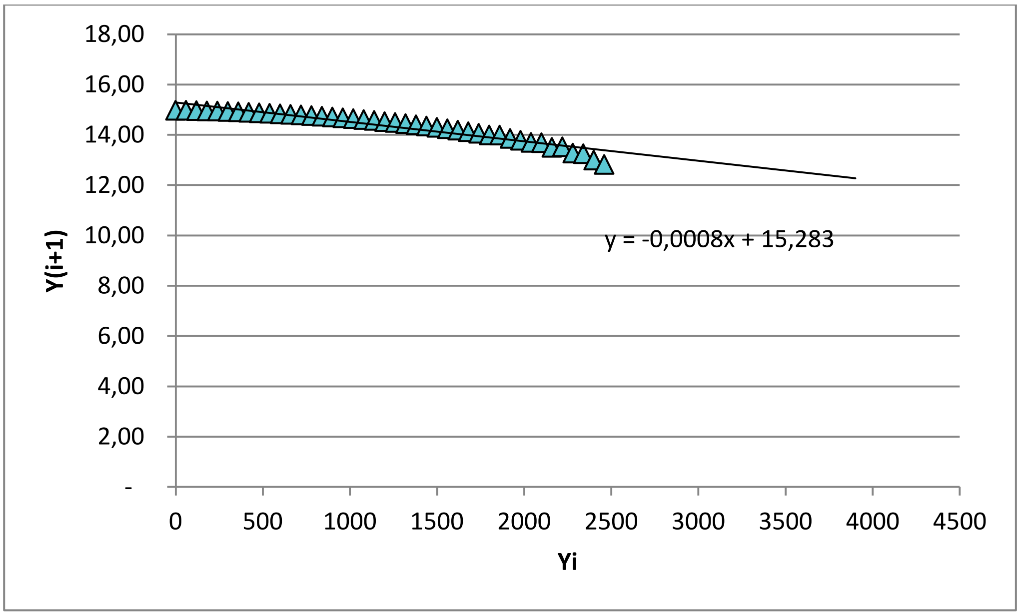

Gráfico 4 - Ajuste linear para o Pão 1 (P1), caso exponencial assintótico.

A reta de regressão linear fornece para os valores de $a = -0{,}0008$ e $c = 15{,}283$, resultando em $\lambda = 0{,}0003$ e $b = -3.242.970$.

Com base nos valores obtidos acima, a curva que ajusta para o modelo exponencial assintótico para o crescimento do pão 1 é dada por:

$$y(t) = 3.477.738{,}13 - 3.242.970e^{-0{,}0003\,t} \tag{3.7}$$

4.1.2. Ajuste Logístico

O Gráfico 5 mostra a curva de ajuste linear para o modelo logístico, tal que os coeficientes angular e linear estão relacionados aos coeficientes deste modelo através das equações (3.5) e (3.6).

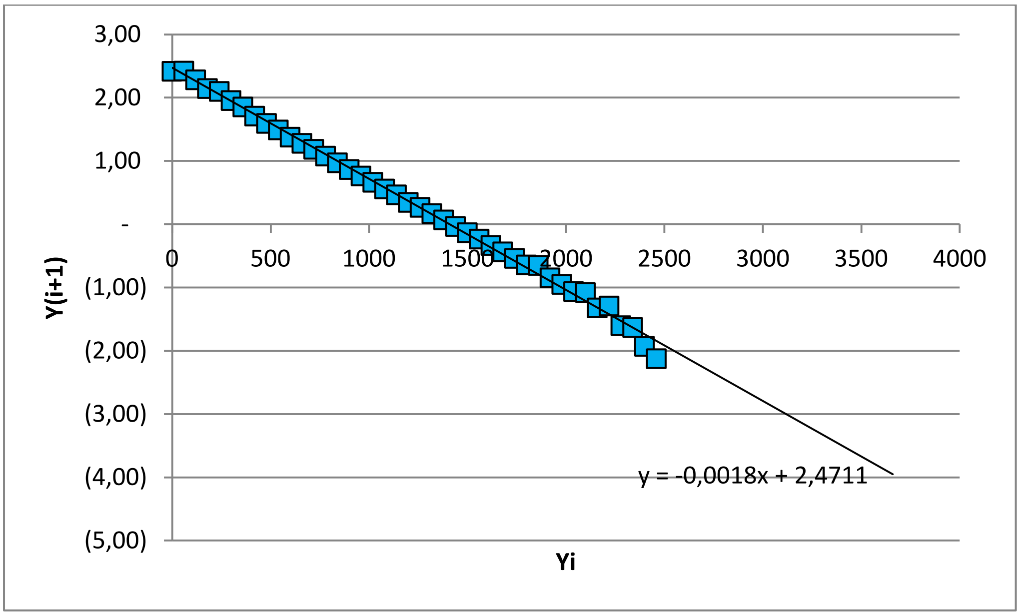

Gráfico 5 - Ajuste linear para o Pão 1 (P1), caso logístico.

Para este ajuste obtém-se de $a = -0{,}0018$ e $c = 2{,}4711$ resultando em $\lambda = 0{,}0018$ e $b = 11{,}8355$ e como curva de ajuste logístico:

$$y(t) = \frac{3.477.738}{1 + 11{,}8355e^{-0{,}0018\,t}} \tag{3.8}$$

O Gráfico 6 mostra as curvas ajustadas em comparação com os dados experimentais.

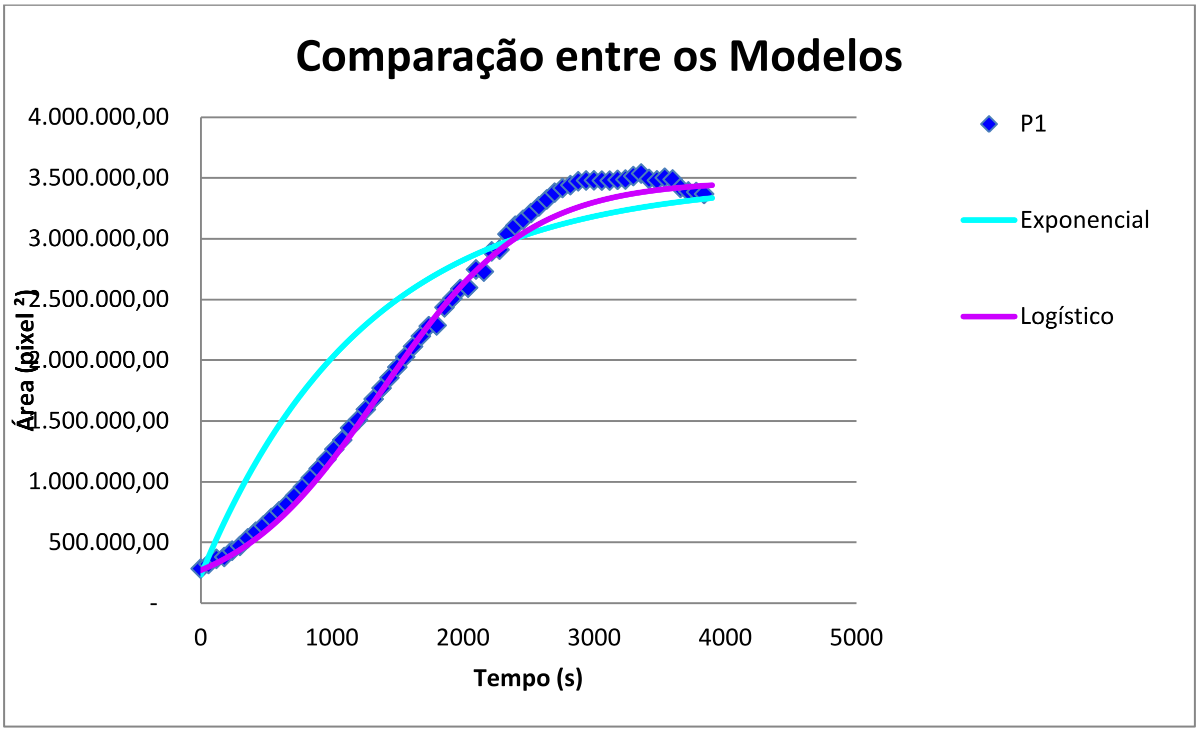

Gráfico 6 - Dados experimentais (P1) X Modelos teóricos

Para o modelo exponencial assintótico, assim como para o modelo logístico, foi necessário fazer o cálculo do y* como mostrado na seção 3.4.1.3. Os modelos foram ajustados de acordo com as seções 4.1.1 e 4.1.2 para a obtenção dos valores dos parâmetros e, assim, ajustando aos dados das curvas dos modelos estudados neste trabalho.

O modelo exponencial assintótico, juntamente com o modelo logístico, foi avaliado como mostra o Gráfico 6, porém o modelo logístico visualmente se adequou melhor aos dados, mas para se saber se o que é visto nos gráficos faz jus aos dados, as quatro características do modelo logístico foram avaliadas.

1. Possui capacidade de suporte, uma vez que o valor assintótico é coerente aos dados;

2. Visualmente é crescente até a capacidade de suporte, mostrando uma possibilidade de estabilidade após este valor;

3. A taxa de crescimento relativo tem característica linear;

4. A curva de dados do P1 parece visualmente ter ponto de inflexão.

Assim, podemos dizer que o modelo logístico corresponde bem à dinâmica dos dados de acordo as etapas definidas por Bassanezi.

4.2. Pão 2

No caso do experimento Pão 2 ou P2, o valor assintótico obtido foi $\mathbf{y}^* = \mathbf{3.918.073}$.

4.2.1. Ajuste Exponencial Assintótico

No Gráfico 7 temos o ajuste linear da Equação 1 - Modelo Exponencial Assintótico, tal que os parâmetros λ e b do modelo exponencial assintótico, obtidos através das equações (3.2) e (3.3), resultam respectivamente em $-0{,}0006$ e $4.533.478$, ou seja, na curva ajusta por:

$$y(t) = 3.918.073 - 4.533.478e^{-0{,}0006\,t} \tag{3.9}$$

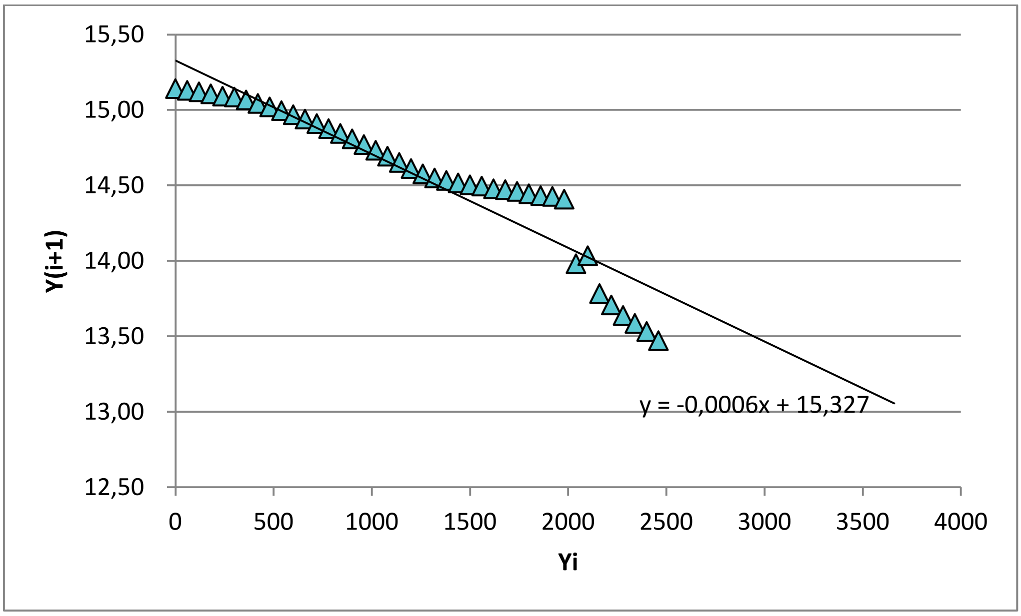

Gráfico 7 - Ajuste linear para o Pão 2 (P2), caso exponencial assintótico.

4.2.2. Ajuste Logístico

Os coeficientes do ajuste linear para o modelo logístico, Gráfico 8, permitem obter os coeficientes do modelo logístico, $\lambda = 0{,}0017$ e $b = 13{,}8087$, tal que:

$$y(t) = \frac{3.477.738}{1 + 11{,}8355e^{-0{,}0018\,t}} \tag{3.10}$$

é a curva de ajuste do modelo logístico.

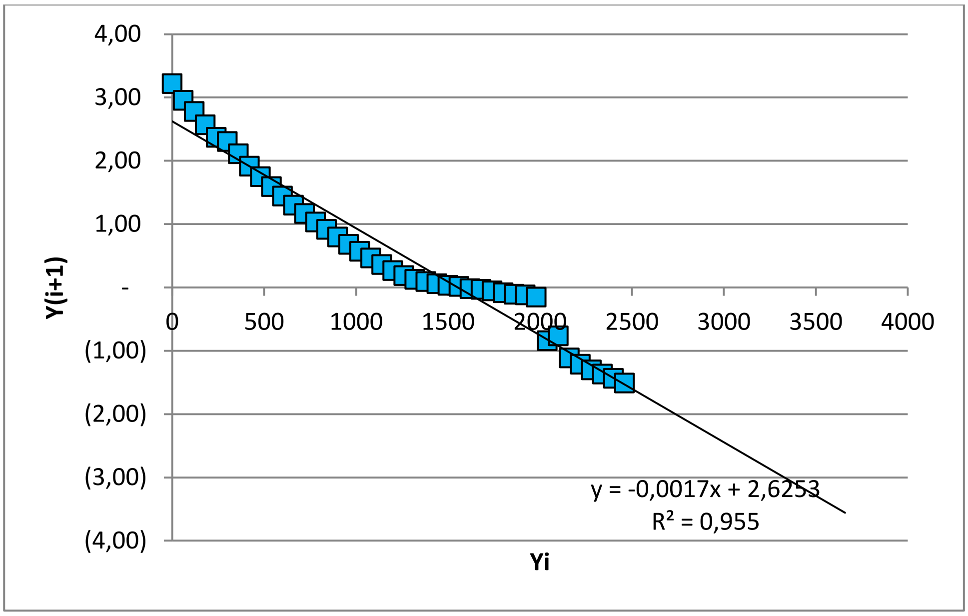

Gráfico 8 - Ajuste linear para o Pão 2 (P2), caso logístico.

O Gráfico 9 apresenta as curvas ajustadas em comparação com os dados experimentais para o pão 2.

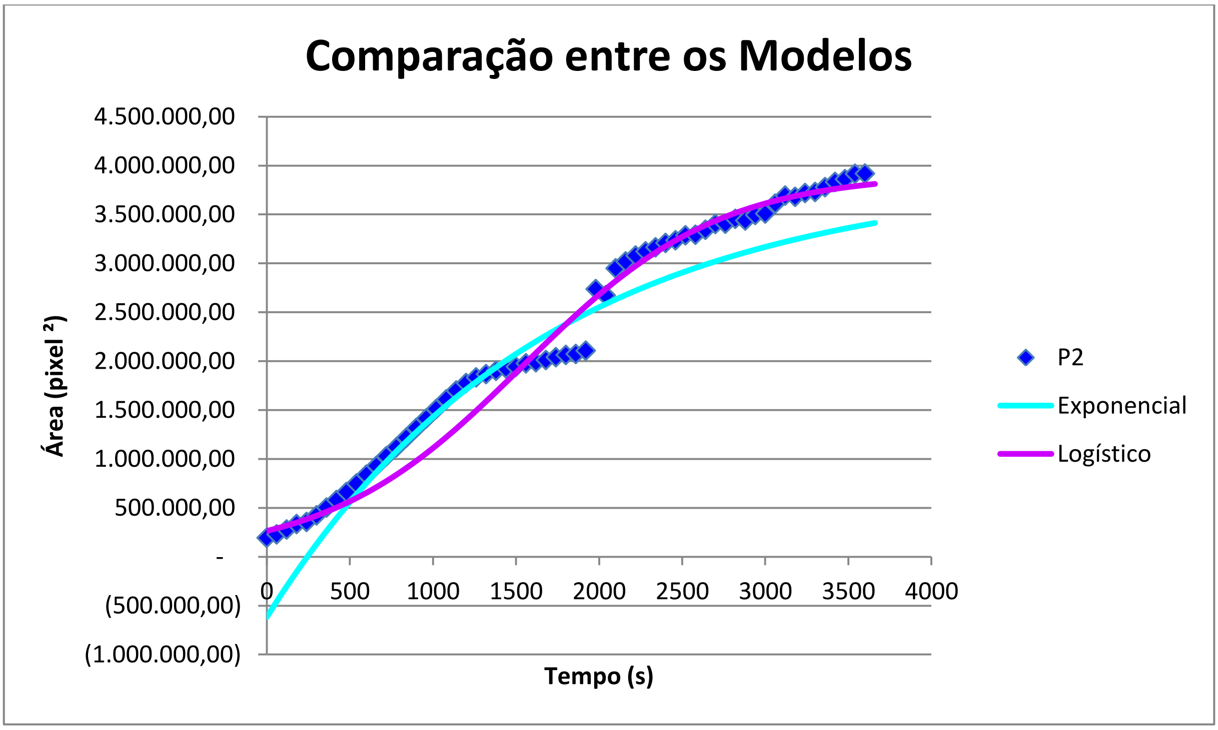

Gráfico 9 - Dados experimentais (P2) x Modelos teóricos.

Assim como foi feito no P1, para o P2 também foi calculado o valor assintótico pelo mesmo método. Desta forma, é possível prosseguir com a modelagem dos dados utilizando os modelos exponencial assintótico e logístico.

O modelo exponencial assintótico não corresponde bem aos dados, mas o modelo logístico possui uma curva que descreve melhor o conjunto de pontos dos dados reais.

O modelo exponencial assintótico para o P2, inicialmente, apresenta área do pão negativa, mas se tratando de área, não é possível que seja negativa, logo este modelo pode ser descartado.

Para avaliar o modelo logístico, antes é analisado se as características fundamentais estão presentes nos dados do experimento:

1. Possui capacidade de suporte, uma vez que o valor assintótico é coerente aos dados;

2. Visualmente é crescente até a capacidade de suporte, mostrando uma possibilidade de estabilidade após este valor;

3. A taxa de crescimento relativo tem característica linear;

4. Devido a alguns ruídos na coleta, não se pode afirmar se há ponto de inflexão.

O Gráfico 9 apresenta o resultado para o modelo logístico, que corresponde bem à dinâmica dos dados.

4.3. Pão 3

Para o Pão 3 (P3), o valor assintótico obtido foi $\boldsymbol{y^* = 2.023.803}$.

4.3.1. Ajuste Exponencial Assintótico

O ajuste linear do modelo exponencial assintótico, Gráfico 10, mostra que os valores de $\lambda = -0{,}0007$ e $b = 2.305.942$e, a curva ajustada por:

$$y(t) = 2.023.803 - 2.305.942e^{-0{,}0006\,t} \tag{3.11}$$

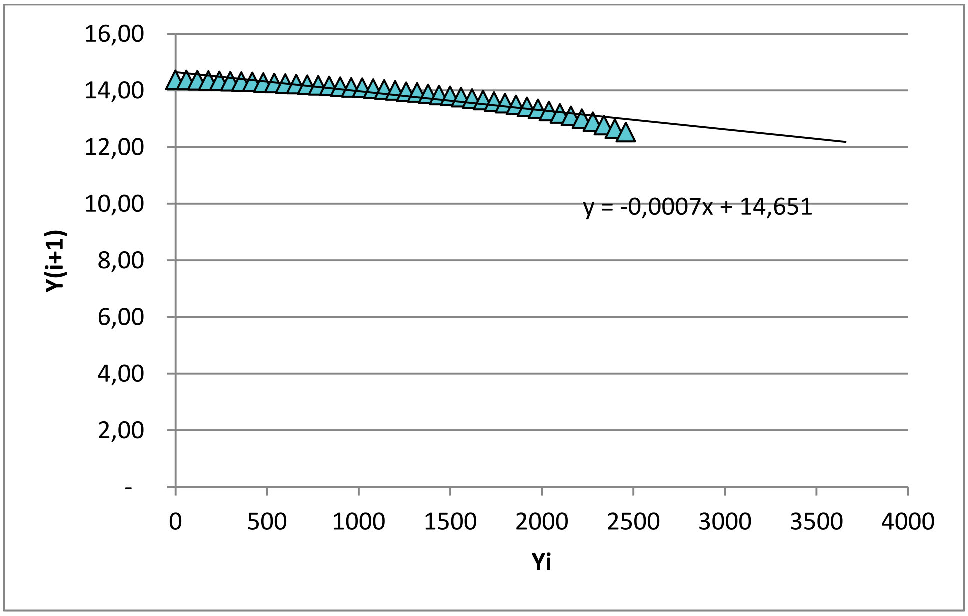

Gráfico 10 - Ajuste linear para o Pão 3 (P3), caso exponencial assintótico.

4.3.2. Ajuste Logístico

Para o modelo logístico, Gráfico 11, os coeficientes foram: $\lambda = 0{,}0015$ e $b = 7{,}9885$ e:

$$y(t) = \frac{2.023.803}{1 + 7{,}9885e^{-0{,}0015\,t}} \tag{3.12}$$

representa a curva de ajuste deste modelo.

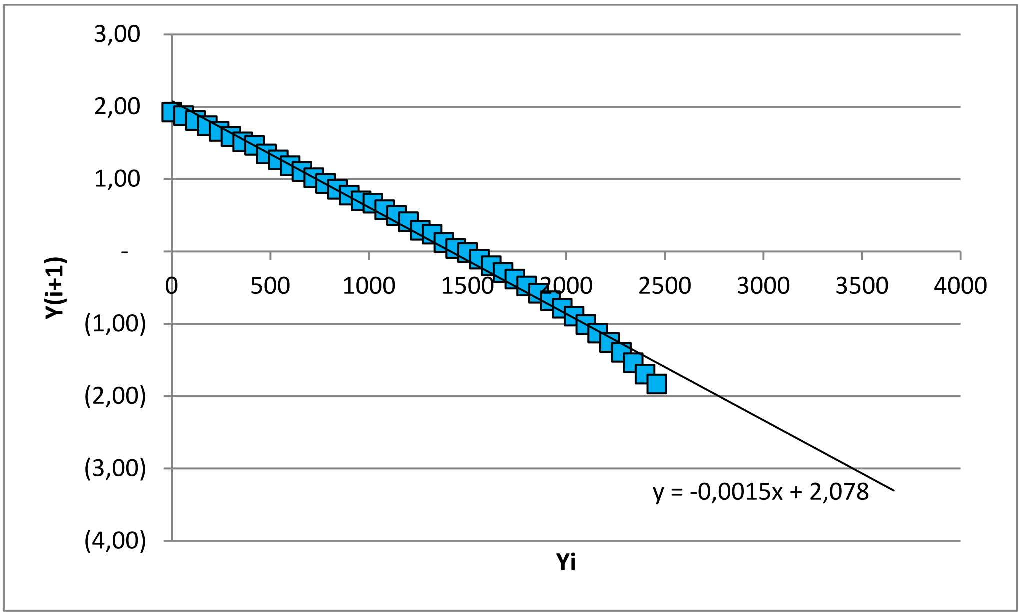

Gráfico 11 - Ajuste linear para o Pão 3 (P3), caso logístico.

O Gráfico 12 tem-se as curvas ajustadas para comparação com os dados experimentais para o pão 3.

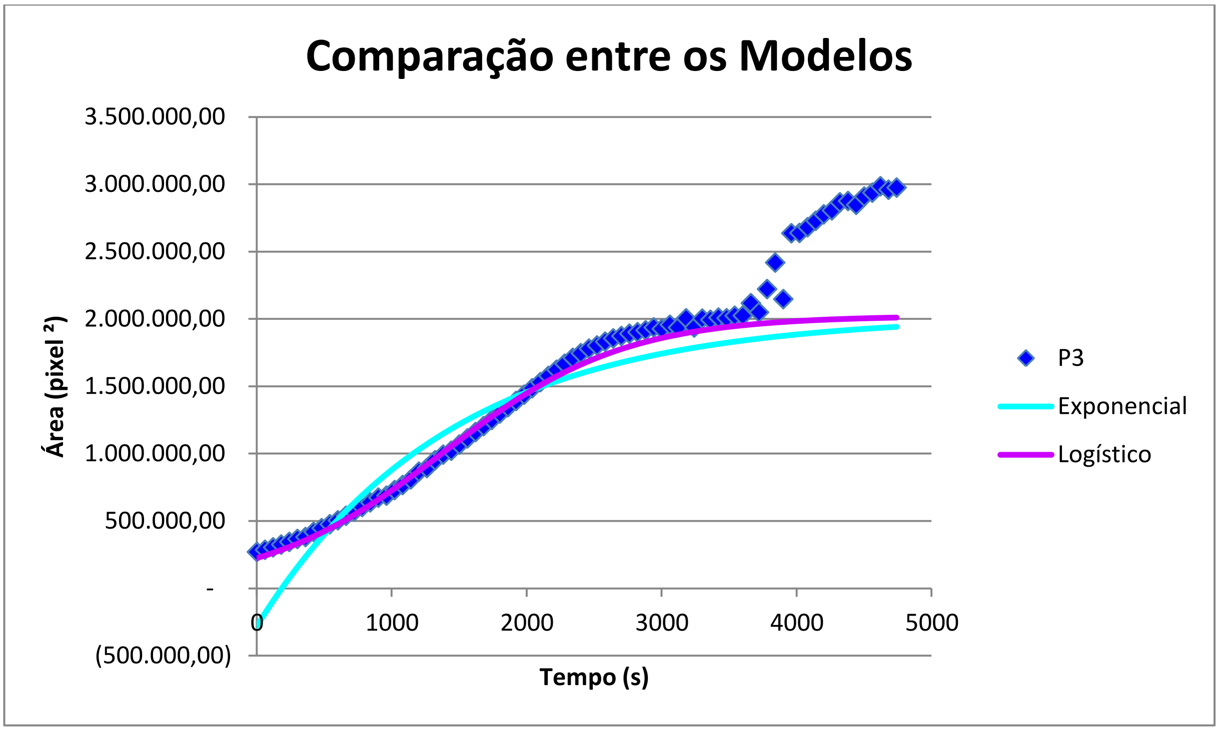

Gráfico 12 - Dados experimentais (P3) x Modelos teóricos.

Prosseguindo com os modelos, como dito anteriormente, que os modelos estudados neste trabalho são o modelo exponencial assintótico e modelo logístico que necessitam do valor assintótico calculado na seção 4.2, está coerente aos dados, assim se prossegue com o ajuste dos modelos.

O modelo exponencial assintótico, em seus pontos iniciais, apresenta área negativa, sendo descartado pelo mesmo motivo do P(2), também é possível ver que esse modelo não é o modelo que melhor pode representar os dados reais. O modelo logístico parece adequar-se aos dados, mas não se pode esquecer de avaliar as características essenciais:

1. Tem capacidade suporte;
2. Visualmente não é possível descrever se é crescente até capacidade suporte e decrescente depois da capacidade;
3. A taxa de crescimento relativo apresenta comportamento linear;
4. Visualmente a curva dos dados pode ter um ponto de inflexão.

Observe que o Gráfico 12 apresenta um modelo logístico que corresponde aos dados, apesar dos mesmos indicarem algum problema na coleta no período entre 3500 e 4000 segundos.

4.4. Pão 4

No experimento Pão 4 (P4), tem-se $\boldsymbol{y^* = 3.141.874}$ como valor assintótico.

4.4.1. Ajuste Exponencial Assintótico

Para o ajuste linear do modelo exponencial assintótico, Gráfico 13, os valores de λ e b obtidos são, respectivamente, $-0{,}0003$ e $3.081.725$.

$$y(t) = 3.141.874 - 3.081.725e^{-0{,}0003\,t} \tag{3.13}$$

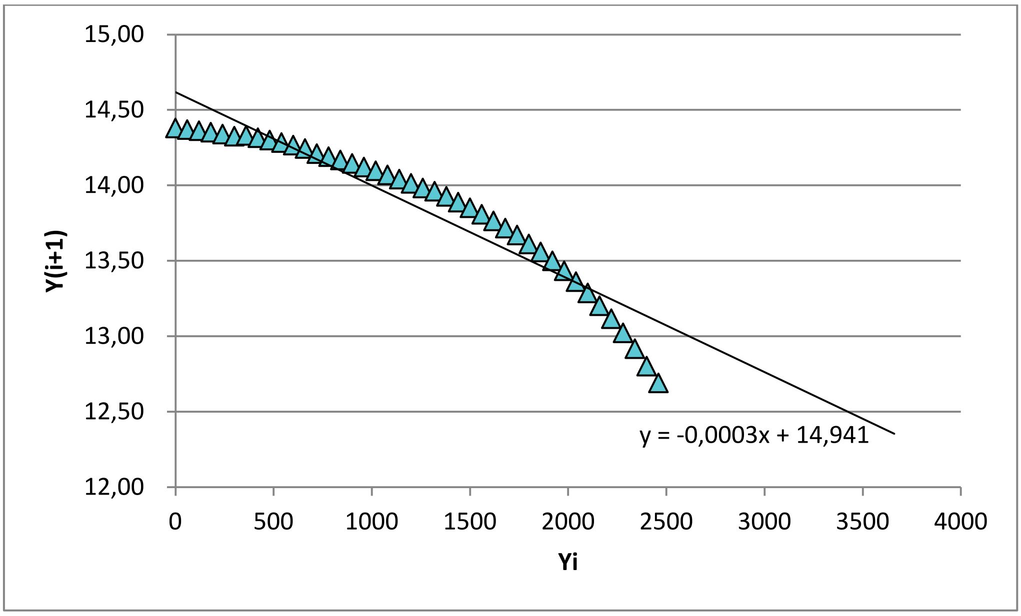

Gráfico 13 - Ajuste linear para o Pão 4 (P4), caso exponencial assintótico.

4.4.2. Ajuste Logístico

No modelo logístico, Gráfico 14, os coeficientes foram: $\lambda = 0{,}0010$ e$b = 9{,}0993$e:

$$y(t) = \frac{3.141.874}{1 + 9{,}0993e^{-0{,}0010\,t}} \quad (3.14)$$

é a curva de ajuste deste modelo.

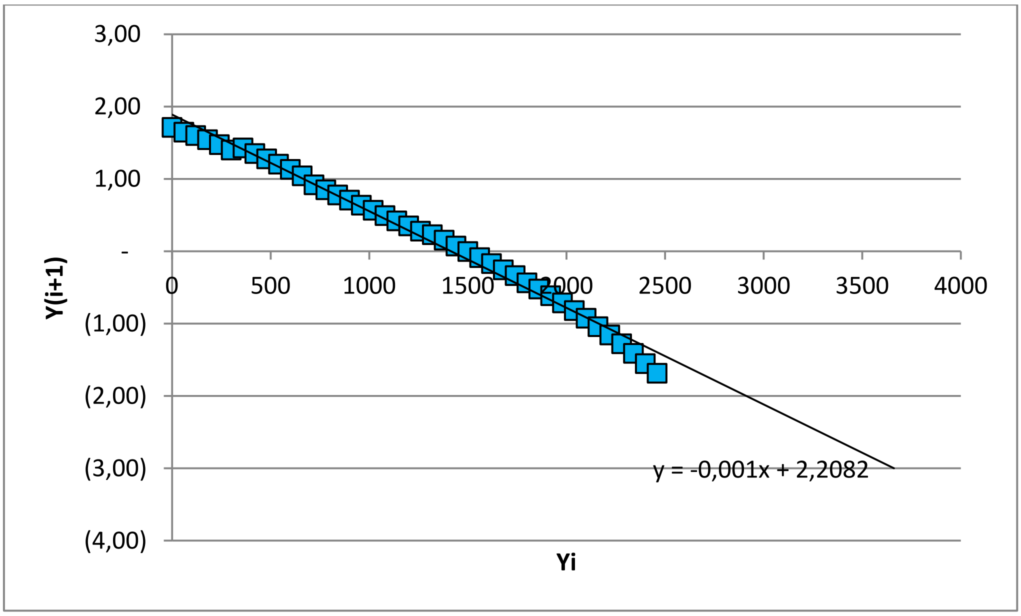

Gráfico 14 - Ajuste linear para o Pão 4 (P4), caso logístico.

As curvas ajustadas para comparação com os dados experimentais para o pão 4 estão representadas no Gráfico 15.

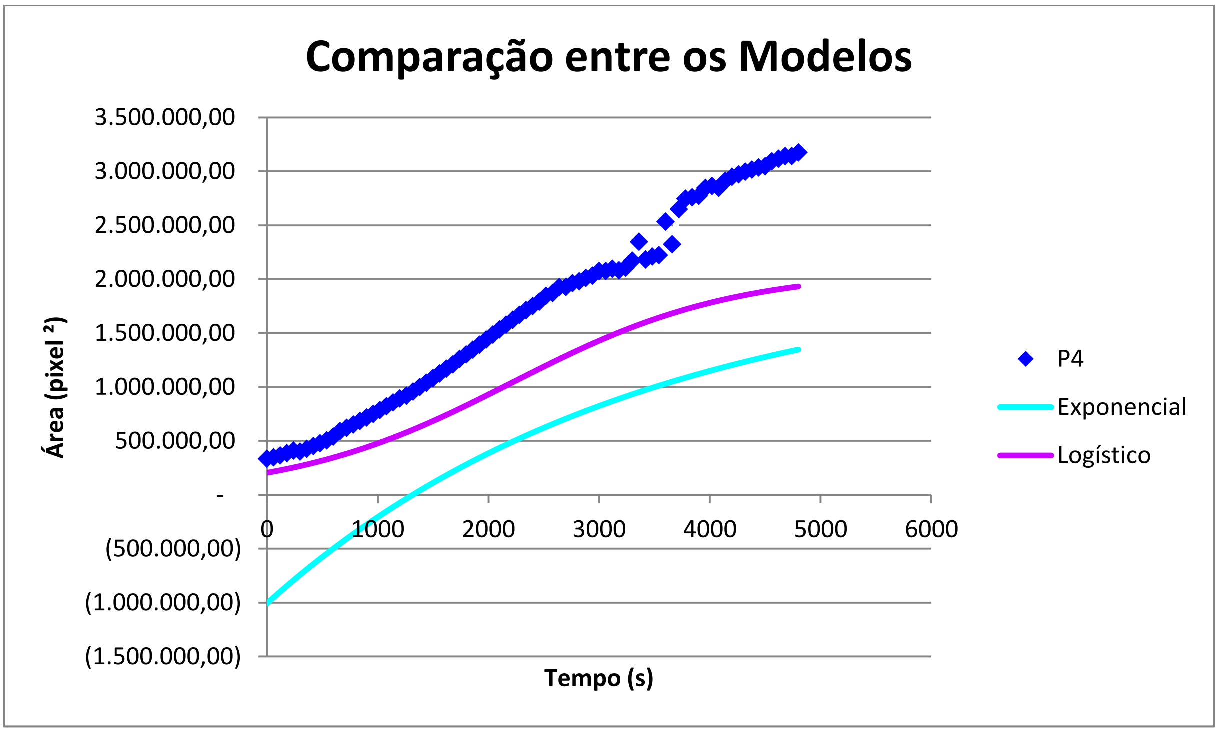

Gráfico 15 - Dados experimentais (P4) x Modelos teóricos.

Seguindo com a análise dos modelos para o P(4), os dados coletados não se adéquam aos modelos estudados, uma possível justificativa foi à temperatura da data e horário da coleta.

Dessa forma, concluímos a etapa 3 de Bassanezi (2011): o estudo analítico e numérico do modelo, utilizando também da etapa 4, a validação, e da etapa 5, modificação, tentando outros modelos ajustados aos dados.

4.5. Validação do modelo matemático

O pão não cresce infinitamente e, em um determinado momento, esse crescimento estaciona, indicando uma dinâmica assintótica, o que pode ser mais bem representado pelos modelos exponencial assintótico e logístico.

A fermentação é resultante de um processo bioquímico realizado por leveduras que, no início do experimento, apresenta poucos fungos e muito alimento, assim gerando um crescimento rápido, associado ao calor. Logo, a taxa de crescimento é crescente, mas em um determinado momento (ponto de inflexão) as taxas de crescimento começam a diminuir (mesmo sendo altas, há um decrescimento) devido à quantidade de alimento disponível e ao número de leveduras presentes na massa.

Observou-se que o melhor ajuste para os modelos de crescimentos dos pães é o modelo logístico.

Os pães apresentaram mais coerência com a dinâmica esperada para a fermentação: um comportamento assintótico. Neste caso também, a variação do tempo de coleta de dados, que se deu devido à temperatura observada no momento e à observação do crescimento dos pães, contribuiu para se observar a dinâmica assintótica de um modelo logístico.

Neste sentido e observando os resultados obtidos, podemos dizer que obtemos resultados de acordo com a literatura, e o modelo que pode ser utilizado para descrever a fermentação de pães artesanais é o **modelo logístico**.

Desta forma encerraram-se as etapas 4 e 5 da modelagem matemática de acordo com a descrição de Bassanezzi (2011).

4.6. Aplicação

O experimento retratado neste trabalho avalia qual modelo valida a fermentação em pães caseiros. No entanto, podemos verificar dinâmica parecida em outros tipos de pães ou produtos que use uma massa fermentada, como alguns tipos de massas de pizzas, pães doces, roscas e bolinhos assados. Para que seja feita essa verificação é necessário que, no preparo da massa, seja utilizado fermento biológico, que tem como agentes as leveduras.

Essa proposta pode ser utilizada como exemplo para etapas de modelagem matemática, em especial quando estuda-se funções exponenciais.

Uma sugestão de atividade para o ensino é preparar a receita do pão com os alunos, separar os alunos em grupos, dividir a massa em pequenas porções, colocar uma amostra dentro de uma proveta, e então tomar notas a cerca de seu crescimento por aproximadamente 20 a 30 minutos. Após isto, construir o diagrama de dispersão dos dados coletados.

Pode-se também fazer uma atividade interdisciplinar com os professores das disciplinas de biologia e química, enquanto um retrata o ciclo de vida das leveduras, o outro ficaria responsável por explicar o processo químico envolvendo a fermentação alcoólica.

Uma segunda sugestão de atividade para o ensino consiste na utilização de placas de acrílico, uma malha quadriculada, colocando no centro da placa um pedaço de massa e cobri-la com outra placa, anotando a área dessa massa em intervalos de tempo regulares. Essa atividade permite explorar conteúdos de geometria e funções dentro de um mesmo experimento.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O desenvolvimento do presente trabalho resultou em um estudo de validação dos modelos exponencial assintótico e logístico a quatro conjuntos de dados, analisando o crescimento de pães, por meio da fermentação. Sabendo que a matemática pode ser entendida dentro de um processo de modelagem, descrevendo fenômenos físicos e situações-problema do cotidiano, verificou-se qual desses modelos representa melhor esse conjunto de dados.

Evidenciamos que a matemática pode transformar situações-problema de nosso cotidiano em linguagem própria, agregando expansão do conhecimento, fazendo com que as perspectivas dos fenômenos reais tenham uma interpretação matemática simplificada, obtendo como resultado um modelo.

Em relação ao questionamento - qual é o modelo matemático que melhor se ajusta na fabricação de pães artesanais? – lançado nesta pesquisa, notamos que o modelo logístico descreve melhor a fermentação nesse processo.

No intuito de validar um modelo matemático para descrever o processo de crescimento por meio da fermentação na panificação artesanal, notamos que, apesar de os dados apresentarem ruídos mais do que o esperado, dentre os modelos verificados para descrever o crescimento do pão, o modelo logístico é o mais adequado.

O modelo logístico, assim como o modelo exponencial assintótico, possui um limitante. Logo, o crescimento de pão caseiro pode ser representado pelo modelo logístico. Porém, para uma coleta mais significativa é necessário adquirir os dados em um ambiente com temperatura e iluminação controladas, diminuindo assim a quantidade de ruídos. Tais condições podem ser relacionadas a possíveis trabalhos futuros neste tema.

Dentro dessa concepção também, evidenciamos que o objetivo geral deste trabalho foi alcançado, constatando que dentro de uma realidade cuja matemática é essencial, a modelagem matemática pode descrever uma situação real por meio de um modelo matemático.

REFERÊNCIAS

BASSANEZI, Rodney Carlos. Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática. 3. ed.,3° reimpressão. São Paulo: Contexto. 2011.

BASSANEZI, Rodney Carlos. Temas e Modelos. Santo André: UFABC, 2012.

BASSANEZI, Rodney Carlos. Modelagem Matemática: Teoria e Prática. São Paulo: Contexto, 2015.

BASSANEZI, Rodney Carlos. Introdução ao Cálculo e Aplicações. São Paulo: Contexto, 2015.

BIEMBENGUT, Maria Sallet. e HEIN, Nelson. Modelagem Matemática no ensino. 3.ed.São Paulo: Contexto, 2003.

BURAK, Dionísio. Modelagem Matemática e a Sala de Aula. In: I EPEM - Encontro Paranaense da Modelagem Na Educação Matemática. 2004, Londrina.

CIPRIANO, Tatiana Soares. Modelagem Matemática como Metodologia no Ensino Regular: Estratégias e Possibilidades. 2013. 56f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) — Departamento de matemática, instituto de ciências exatas, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica.

CURY, H.N. Uma leitura crítica de Robbie Case: considerações para a educação matemática. Educação, v. 15, n.22, p. 73-89, 1992.

EDWARDS, D. e HAMSOM, M. Guide to Mathematical Modeling. Boca Raton. CRC Press, 1990..

KONO, Jaqueline Eiri. Uma Proposta De Atividades Didáticas Com Aplicação De Funções Exponenciais Utilizando Modelagem Matemática: O caso De Placas Veiculares No Brasil. 2017. 70f. Trabalho de Conclusão do Curso (TCC) do Curso de Licenciatura em Matemática. - São Paulo: IFSP.

MALTHUS, Thomas. Coleção Grandes Cientistas Sociais, São Paulo: Ática, 1982.

PLATÃO. A República. 7. ed. Trad. Maria Helena da Rocha Pereira. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 1993..

RIBEIRO, Carlos Manoel Almeida. Panificação. São Paulo: Hotec, 2006.

Só Biologia - Fermentação. Disponível na Internet em: <https://www.sobiologia.com.br/conteudos/bioquimica/bioquimica3.php>. Acesso em janeiro/2018.

MALTHUS, Thomas Robert. Ensaio sobre a População. <https://books.google.com.br/books?id=FKEvDwAAQBAJ&printsec=frontcover&dq=quem+%C3%A9+thomas+malthus&hl=pt-BR&sa=X&ved=0ahUKEwibtZznvtTdAhVGC5AKHa2DDAIQ6AEIMjAB#v=onepage&q=quem%20%C3%A9%20thomas%20malthus&f=false> Acesso em: 21/03/2018

ANEXO A – RECEITA PARA A FABRICAÇÃO DE PÃES CASEIROS

Ingredientes:

- 480 g de farinha
- 50 g de açúcar
- 200 ml de leite morno
- 50 g de manteiga ou nata em temperatura ambiente
- 1 pitada de sal
- 1 ovo
- 10 g de fermento biológico seco
- 1 gema

Preparo:

Coloque o leite morno em uma bacia, adicione o fermento biológico seco e mexa para "hidratar" o fermento, então acrescente o ovo e a manteiga e misture bem até ficar quase homogêneo, em seguida pode colocar os secos junto à mistura e sove bem por 10 minutos, pois a massa precisa incorporar todos os ingredientes até soltar das mãos.

Após a primeira sova, coloque a massa num recipiente e cubra, deixando descansar por 20 minutos ou até dobrar de tamanho, em um local que não seja frio (ex: forno micro-ondas, forno convencional, sem ligá-los).

Feito isso, sove novamente para ativar o fermento, modele o pão, coloque numa forma para pão, deixe crescer por 40 minutos, pincele a gema em cima do pão, mas com cuidado para não apertar a massa, leve para assar em forno pré-aquecido a 180 °C por aproximadamente 30 minutos.

ANEXO B – DADOS COLETADOS NO EXPERIMENTO

DADOS OBTIDOS NA COLETA

T	P1	P2	P3	P4
0	284779,5	150720,875	257783,5	317381,375
60	283934,5	193997,375	269298,375	335524,75
120	322105	229131,25	285095,25	348868
180	364665,875	278833,25	303251,75	365829,25
240	379819,5	334735,875	323869,75	386801,125
300	431571,875	355662,125	343563,75	410877,5
360	471330,875	423267,5	365425	401467,125
420	533440,25	503117,625	379930,125	427043,25
480	587494	580492,75	417983,625	452598,875
540	639695,75	662127,625	445993,875	478995,375
600	701229,75	748511,875	474753,625	506107
660	757492,625	839467,625	504030,625	541018,25
720	815035,625	929715,5	537475,375	592103,25
780	883936,625	1027912,625	569356,375	621620,25
840	955526,25	1118991	602893,75	653106,875
900	1030458,875	1217396,25	637425,25	685410,5
960	1106801	1317245,875	672725,125	718183,25
1020	1183010,875	1414231	687086,875	751420,125
1080	1266744	1511007,25	728653,375	787147,25
1140	1342195,375	1608514,875	765935,25	822982,75
1200	1441754,5	1699670,625	807566,875	857636,75
1260	1508222,5	1776421,75	865524,875	894529,25
1320	1594052,5	1834460,25	892244,25	919386
1380	1679714,125	1867990,125	950106	958210,375
1440	1769521	1901376,375	991614,125	1000333,375
1500	1855438,375	1926230,25	1020576	1039660,125
1560	1942260,375	1943204,625	1066289,375	1083406,875
1620	2027881,75	1977864,75	1112402,25	1125983,25
1680	2112531,125	1988966,75	1159223,5	1170349,875
1740	2197232,75	2011764,5	1203400,25	1210800,5
1800	2279706,125	2040900,625	1249535,25	1260688,25
1860	2285851,75	2064037	1297048	1302608,25
1920	2434365,75	2073703,375	1344225,875	1346954,875
1980	2508354,75	2107557	1390198,25	1393391,5
2040	2586062,125	2737252,625	1436777	1440906,75
2100	2596354,5	2673171,5	1484424	1486611,75
2160	2746241,25	2949128,25	1529678,875	1534665,125
2220	2728576,625	3019706	1576384,25	1579232,625
2280	2895269,5	3080178	1621867	1623657,25

2340	2909082,625	3122923,625	1666380,875	1668817,5
2400	3036934,125	3164432,625	1710296,625	1713332,25
2460	3106835,125	3208740,5	1744813,75	1751501,875
2520	3156012,125	3236246,75	1778362,5	1791492,625
2580	3210722	3287106,25	1801984,875	1846475,125
2640	3265798,25	3292600,125	1830132,875	1871996
2700	3322507,875	3343647,875	1854568,625	1926372,125
2760	3378800,5	3402574,25	1872309,375	1928316,875
2820	3416370,75	3405453	1889568,875	1963804,125
2880	3440189	3455197,625	1900509	1980988,75
2940	3472161	3438478,25	1914995,125	2012020,25
3000	3478906,375	3494959,875	1936122,875	2032868,75
3060	3480013,25	3509530,625	1925344,625	2075880,875
3120	3477697	3610791,875	1955914	2076303
3180	3477738,125	3693006	1935319,125	2096804,875
3240	3484127,625	3680430,125	2003656,625	2082872,875
3300	3486660,5	3719405,5	1935584,625	2106903,125
3360	3514797,5	3730098,625	2001555	2172367,125
3420	3536238,125	3779417,625	1992525,5	2347652,125
3480	3491756,125	3832872,5	2009081,75	2182971
3540	3479909,125	3861478,25	2004497,5	2210642,125
3600	3501541	3915880,375	2022869,125	2223512,375
3660	3486986,375	3918073,375	2023803,125	2534418,25
3720	3417501		2115897,375	2324676,625
3780	3388564,125		2048137,625	2650058,5
3840	3383953,5		2220760,375	2747115,375
3900	3367516,375		2417600,625	2760113,625
3960			2146236	2773576,375
4020			2635372,5	2846644,75
4080			2637693,75	2865165
4140			2679976,375	2847711,125
4200			2727632,625	2912537,75
4260			2775550,5	2950167,75
4320			2805328,75	2973603
4380			2864848	2998034,375
4440			2874751	3017246,75
4500			2846300,75	3036648
4560			2907675,5	3048305,125
4620			2936626,5	3093915,375
4680			2984122,375	3117461,875
4740			2958302,625	3141873,75
4800			2974340,875	3142708,375
4860				3175981