Alguns métodos de resolução de equações a uma variável real e aplicações.

Phelipe Thomé de Oliveira

Trabalho de Conclusão do Curso Superior de Licenciatura em Matemática, orientado pelo Prof. Leandro Albino Mosca Rodrigues.

São Paulo
2017

PHELIPE THOMÉ DE OLIVEIRA

ALGUNS MÉTODOS DE RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES A UMA VARIÁVEL REAL E APLICAÇÕES.

Monografia apresentada ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo Campus São Paulo, orientado pelo Prof. Leandro Albino Mosca Rodrigues, em cumprimento ao requisito para obtenção do grau acadêmico de Licenciado em Matemática.

São Paulo
2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Oliveira, Phelipe Thomé de.
Alguns métodos de resolução de equações a uma variável real e aplicações / Phelipe Thomé de Oliveira. - São Paulo: IFSP, 2017.
46f

Trabalho de Conclusão do Curso Superior de Licenciatura em Matemática-Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo
Orientador(es): Me. Leandro Albino Mosca Rodrigues.

1.Equações. 2. Métodos de resolução. 3. Aplicações. 4. Comentários. I. Título do trabalho.

PHELIPE THOMÉ DE OLIVEIRA

ALGUNS MÉTODOS DE RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES A UMA VARIÁVEL REAL E APLICAÇÕES

Monografia apresentada ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, em cumprimento ao requisito exigido para a obtenção do grau acadêmico de Licenciada em Matemática.

APROVADO EM 08/12/2017 **CONCEITO:** 9,0

Emiliano Augusto Chagas

Prof. Me. Emiliano Augusto Chagas
Membro da Banca

Prof. Me. Oertes Alves Souza
Membro da Banca

Leandro Albino Mosca Rodrigues

Prof. Me. Leandro Albino Mosca Rodrigues
Orientador

Phelipe Thomé de Oliveira

Aluno: Phelipe Thomé de Oliveira

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por ter me dado forças e incentivo para continuar em minha jornada acadêmica, graças a ele tenho o privilégio de procurar ser uma pessoa melhor e ascender na vida com um grau acadêmico.

Agradeço meus amados pais, Edson Antônio Tomé de Oliveira e Ivanete Ana de Oliveira por terem a resiliência de contarem com um filho que pudesse vencer na vida, garantindo suporte emocional e financeiro para tal. Agradeço o meu primo, Renato Gomes de Freitas, pelo alicerce e incentivo dado a seguir essa carreira.

Agradeço à professora Alda Roberta Torres pela sua experiência e seus relatos quanto à vida acadêmica, que me servirão para o futuro de minha jornada.

Agradeço ao orientador professor Leandro Albino Rodrigues, pelo acompanhamento, apoio e atenção dados em relação a essa pesquisa.

Agradeço aos meus colegas do curso de Licenciatura, em especial, Lucas Ricardo, Priscila das Neves, Thaynara Keido, Polion, Dayene, Renata Piva, Caroline Fernandes, Rivaldo, Walter, Daniele de Paula, Claudio Ticeran, dentre outros que me deram força durante todo o curso.

Agradeço também a todos os professores do curso de Licenciatura em Matemática, por terem me acompanhado durante o curso, incentivando a seguir em frente, seja em momentos vitoriosos seja em dificuldades envolvidas. Em especial aos professores Marco Aurélio Granero Santos, Vania Batista Schunck Flose, Lucas Casanova, Amari Goulart e outros.

Por fim, agradeço a todos que contribuiram com esse trabalho, seja direta ou indiretamente, com elogios ou críticas.

RESUMO

Na Matemática as equações constituem um ramo de estudo teórico importante, desenvolvido historicamente e aplicado em várias situações práticas do cotidiano. Há vários tipos de equações, classificadas de acordo com a sua estrutura: exponenciais, polinomiais, irracionais, trigonométricas, etc. Nesta pesquisa, serão abordados alguns métodos não numéricos de resolução de equações a uma variável real, escolhidos e selecionados dentre outros e por fim serão mostradas as suas aplicações, principalmente com alguns exemplos de classes de equações soluvéis pelos métodos mostrados, com comentários sobre cada exemplo que será exposto e solucionável por um ou mais desses.

Palavras-chaves: Equações, Métodos de resolução, Aplicações.

SOME METHODS FOR RESOLUTION OF ONE-VARIABLE EQUATIONS AND ITS APPLICATIONS.

ABSTRACT

In Mathematics the equations constitute an important theoretical branch of study, developed historically and applied in several practical situations of daily life. There are several types of equations, classified according to their structure: exponential, polynomial, irrational, trigonometric, etc. In this research, some non-numerical methods of solving equations to a real variable will be approached, chosen and selected among others and finally their applications will be shown, mainly with some examples of classes of equations that can be solved by the methods shown, with comments on each example that will be exposed and solvable by one or more of these.

Keywords: Equations, Methods of resolution, Applications

LISTA DE FIGURAS

Pág.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Estudar equações a uma variável real e a metodologia para encontrar suas soluções garantem que alguns fenômenos matemáticos, físicos ou outros que sejam quantitativos possam ser compreendidos. Essas equações podem aparecer no estudo ou modelagem de alguma situação problema. (ALVES, 2015, p. 08)

A partir de Boyer (2010), Garbi (2009) e outros, percebemos que as equações algébricas[1] de grau n foram tidas como principal objeto de estudo ao longo de vários anos. As raízes desse tipo de equações foram sendo determinadas, principalmente por obtenção de fórmulas reduzidas por radicais e operações básicas (soma, subtração, multiplicação) envolvendo seus coeficientes, que forneciam o valor de uma ou mais raízes.

Observamos que na literatura existem artigos acadêmicos e dissertações que analisam as várias estratégias de resolução de equações algébricas de primeiro a quarto graus por meio da determinação de uma fórmula específica. Há outras metodologias expostas nesses artigos em que são fornecidas alternativas para obtenção de algumas raízes e através de alguns outros processos, embasados por teoremas, obtém-se as demais.

Como apresentado por Alves (2015), historicamente são encontrados vários métodos de se resolver as equações algébricas de terceiro ou de quarto graus. Várias estratégias foram usadas para se obter fórmulas ou raízes envolvendo processos diversos tais como manipulações algébricas e resultados de Geometria, alguns não previstos a serem abordados na Educação Básica. O autor desenvolve também as fórmulas obtidas historicamente por matemáticos, como Girolamo Cardano (1501 – 1576) e François Viète (1540 – 1603), para resolver tipos específicos de equações algébricas. Por fim, a aplicação em algumas dessas mostra em seu trabalho que esses métodos históricos e outros construídos acarretam nas mesmas soluções.

Fórmulas resolventes são utilizadas para se solucionar equações do segundo grau e algumas de terceiro e quarto graus. Na Educação Básica, as equações algébricas do segundo grau podem ser resolvidas por métodos não restritos somente na simples aplicação dos coeficientes na fórmula resolvente. Entretanto, há muitos modos de se encontrar uma raíz incógnita: estratégias diversas usando soma e produtos de raízes, identidades provenientes de

[1] Grau de equação algébrica é o maior valor ao qual a variável x em polinômio está elevado (Ver capítulo seguinte).

fatos geométricos e outros, que podem enriquecer a aula de um futuro docente que queira melhorar seus conhecimentos e a sua prática. (JUNIOR, 2013).

Esse problema da falta de enriquecimento de informações no ensino de resolução de equações por múltiplos modos é também ressaltado por Vale (2013):

> […] o ensino de vários métodos de resolução de equação além de tornar as aulas de matemática mais ricas de informações, tornando uma aula mais motivadora, facilita a aplicabilidade desse conteúdo em várias tarefas realizadas na vida escolar desse aluno, bem como ajuda o desenvolvimento do raciocínio lógico, fazendo com que esse aluno deixe ter apenas aquela aula tradicional sobre equações do segundo grau onde é mostrado apenas uma maneira de se resolver esse tipo de equação sem dizer nem se quer como surgiu essa fórmula resolutiva. […] (VALE, 2013, p. 72)

George Polya [2](1995) apresenta em seu livro um ou mais exemplos de equações e as tratam como problemas, redutíveis a problemas auxiliares. Descreve também a resolução de uma equação genérica como um processo redutor, partindo de um problema mais complexo para um outro mais simples e conhecido. A utilização de problemas auxiliares que tenham relação com o problema original é apresentada para se resolver o que chama de problema de determinação da incógnita que satisfaça alguma equação.

Um professor terá segurança em sala de aula para lidar com elucidação de problemas, a incluir equações, algumas mais desafiadores ou difíceis? Ramos (2013, p. 29) [3]descreve uma situação de um professor que propõe inadequadamente a resolução da equação irracional (1) em sala de aula, e um de seus alunos a considera como um desafio sério. O aluno busca obter a solução dessa equação através de vários professores, incluindo o proponente de tal problema. Diante disso, esse professor não consegue explicar ao aluno uma forma analítica de resolução que fosse satisfatória ao aluno questionador. Apesar dele buscar ajuda de um outros profissionais e pesquisadores, incluindo um que utiliza fórmulas do Cálculo Numérico para resolvê-la, o problema não se torna solúvel de modo satisfatório para o tal aluno.

$$\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{x}{2}}=\frac{x^2}{8}+\sqrt[3]{\frac{4}{x^2}} \tag{1}$$

[2] George Polya (1887-1985) foi um professor de Matemática da Hungria, que estudou a resolução de problemas, passo a passo para investigá-los, entre outros.

[3] José Ivan da Silva Ramos é um professor doutor da UFAC (Universidade Federal do Acre) e foi orientador de um trabalho de conclusão de curso sobre a influência do conjunto solução de uma equação em seu processo de resolução, do autor Cléber Pereira Silva (RAMOS, 2013, p.33)

Da leitura de Ramos (2013), a equação (1) caiu no esquecimento diante do episódio gerado pela sua proposta em sala de aula. O professor proponente desse problema descobriu uma forma de encontrar uma de suas raízes através da tentativa própria de sugestão de resolução efetuada por ele mesmo em um escaninho de um de seus professores em Estruturas Algébricas de sua especialização (Mestrado), que conseguiu obter o valor de uma das raízes incógnitas de (1), se não houverem outros.

Neste trabalho sentimo-nos motivados a ampliar a abordagem sobre metodologias para buscar o conjunto das raízes de certas classes de equações. As metodologias para se resolver tais equações utilizarão conceitos que serão expostos no início como noções preliminares, para garantirem a compreensão de qualquer leitor.

Será que dispomos de recursos e conhecimentos suficientes para lidar com equações do tipo $2 + 3^{x+2} = x + 9^x$? Existem outras formas alternativas de encontrar as raízes de $(x + 1)^6 = x^6$ sem partir para o trabalho braçal algébrico? Como o leitor lidaria com esses problemas com êxito se caso lhes fossem propostos?

1 UM BREVE CONTEXTO HISTÓRICO

A Matemática surgiu como instrumento de resolução de problemas que envolviam os números, seja em situações na vida prática e cotidiana, seja em situações mais complexas e abstratas. A Aritmética ao longo da história teve o seu papel na solução de problemas mais simples, ligados à demanda numérica e quantitativa nas relações sociais. Porém, com a complexização dessas relações, essa ciência teve de evoluir na busca de elucidação para esses problemas cada vez mais complexos.

Passou-se então a utilizar artifícios cada vez mais sofisticados para representar os componentes de um problema, incluindo o que não era conhecido, em termos numéricos. Fato é que a Álgebra surgiu por intermédio dos estudos geométricos e foi sendo criada e construída por diversas pessoas a partir de impasses que surgiam. Suas ideias foram sendo reescritas, experimentadas e aperfeiçoadas ao longo de vários anos.

A evolução da Geometria garantiu o avanço dos estudos pioneiros em Álgebra. Os babilônios em 2000 a.C utilizaram de modo geométrico e discursivo o método de completar quadrados para resolver equações quadráticas, além de soluções de algumas equações cúbicas. (EVES, 2007, p. 61-62)

Posteriormente, seguiram avanços na área da Álgebra na Grécia Antiga entre 500 a.C a 300 a.C, vide os estudos de métodos geométricos desenvolvidos pelos gregos, como a solução geométrica de equações da forma $x^2 - ax \mp b^2 = 0$. (EVES, 2004, p. 110-111). Por volta de 250 d.C equações envolvendo soluções inteiras eram estudadas por Diofanto de Alexandria (século III d.C). Diofanto foi um dos primeiros a tentar criar uma notação algébrica, assim como exposto por Boyer:

> [...] A expressão $2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 5x - 6$, por exemplo, poderia aparecer numa forma equivalente a SS2 C3 x5 MS4 u6, onde as nossas letras S, C, x, M e u foram usadas para “quadrado”, “cubo”, a “incógnita”, “menos” e “unidade” e nossos numerais em lugar de notação grega alfabética que se usava no tempo de Diofante. [...] (BOYER, 2010, p. 123)

Na Índia, em meados do século IV a V d.C, emergiram os primeiros investigadores mais marcantes no início da teoria das equações e em outros ramos da Matemática, um deles Varahamihira e Brahmagupta. (GARBI, 2009, p. 24-25). Brahmagupta propôs a equação $x^2 =$

$1 + py^2$ para soluções inteiras, as quais foram estudadas posteriormente pelo hindu Bhaskara (século XII d.C). (BOYER, 2010, p. 150-152).

As equações quadráticas já seguiam em estudo na época de Bhaskara, quem em suas obras *Lilavati* e *Vija-Ganita* apresentou contribuições à solucionar algumas equações, inclusive algébricas do segundo grau, mesmo não utilizando os seus coeficientes. (EVES, 2004, p. 251; BOYER, 2010, p. 152).

No ano de 825 d.C em Bagdá, al-Khowarizmi (século VIII - IX d.C) em seu livro *Hisabal-jabrw'al-muqabalah*, traduzido por "Ciência da restauração e redução", introduz o termo *al-jabr*, variante latina do termo álgebra. Segundo Boyer (2010, p. 156), *al-jabr* significa muito equivalentemente a "restauração" ou "completação".

O termo *muqabalah* pode ser interpretado como balanceio, equilíbrio, em que há uma igualdade em dois termos e mesmas quantidades podem ser subtraídas ou adicionadas em ambos, gerando o balanceamento (BOYER, 2010, p. 156). A Álgebra nesse livro começou a ser introduzida restritivamente para determinar e investigar as equações.

Porém, tudo era descrito sem a utilização de simbologias como letras, isto é, restritivamente com o emprego de palavras, e na maioria dos casos eram problemas aliados à Aritmética e à Geometria. Somente 700 anos mais tarde que os matemáticos da Era Moderna passaram a desenvolver uma simbologia específica para a manipulação algébrica, e isso de modo muito lento. (MILIES, 2004, p. 6).

Um dos protagonistas que podemos citar, além de outros, dessa transição foi o francês matemático François Viète (1540 - 1603), quem desenvolveu em sua obra *In Artem Analyticam Isagoge* (1591) (Introdução à Arte Analítica) uma álgebra simbólica, introduzindo uma convenção de usar vogais para quantidades desconhecidas e consoantes para grandezas conhecidas. (BOYER, 2010, p. 207-209; MILIES, 2004, p. 7-8). Com base ainda nessas ideias, descreve Vale (2013):

> Em sua obra foi encontrada, pela primeira vez em Álgebra, uma diferença clara entre o conceito de parâmetro e a ideia de uma quantidade desconhecida que chamamos de incógnita. Viète utilizou uma vogal para representar uma grandeza ou um número supostamente conhecido ou dado. Na época de Viète, a álgebra árabe já havia sido aperfeiçoada, tanto pelas resoluções das equações quadráticas, cúbicas e quárticas, como por um uso parcial de símbolos. (VALE, 2013, p. 32)

Françóis Viète em sua obra *Zeteticorum Libri Quinque* (1593), resolve algumas equações do segundo grau por completamento de quadrados e ainda desenvolveu algumas identidades matemáticas como o cubo da soma $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$. (MILIES, 2004, p. 9).

Ainda mais, F. Viète passou então a representar equações do primeiro grau como expressões generalizadas da forma $ax + b = 0$. Passou a utilizar uma vogal, por exemplo, A para incógnita, os símbolos +, $-$ e in para adição, subtração e multiplicação, respectivamente. (BOYER, 2010, p. 208). Veja a seguir como ele representava algumas igualdades:

1. $x + 4 = 6 - x$ era escrita como A $+$ 4 aequatur 6 $-$ A.
2. $3x = 5$ representada por 3 $in\ A$ aequatur 5.

Na obra de Garbi (2009, p.101) inferimos que com somas de contribuições históricas, as palavras passaram a se tornar cada vez mais escassas na simbologia algébrica conforme pequenas contribuições. Uma notação mais sofisticada auxiliaria no estudo das equações. Os matemáticos Robert Record (1510 - 1558) e Thomas Harriot (1560-1621), se propuseram a dar uma simbologia para a igualdade, utilizando o símbolo conhecido atualmente $(=)$, além dos símbolos > e < para desigualdades, porém não foi utilizado de modo imediato, dado que F.Viète ainda utilizava a abreviação da palavra latina *aequalis* para a igualdade.

A partir de Garbi (2009, p. 100-103) e Milies (2004, p.5, p. 11), René Descartes (1596 - 1650) em seus escritos representava potências na forma $aa = a^2$, $aaa = a^3, aaaa = a^4$, a/b como o quociente de a por b, a raiz quadrada de $a^2 + b^2$ por $\sqrt{a^2 + b^2}$, entre outros. Mais ainda, ele foi " um dos primeiros a escrever as equações algébricas sob a forma de um polinômio igualado a zero. " (GARBI, 2009, p. 101).

Nos tempos modernos ainda surgiram variadas contribuições ao campo de estudo da álgebra e da resolução de equações. Conforme Milies (2004, p. 7) e ainda Boyer (2010, p. 219), o matemático belga Simon Stevin (1548 - 1620) publicou em sua obra *L'Arithmétique* (1585) o conceito primitivo de polinômios, introduzido como os multinômios. Um polinômio passou a ser foco de pesquisa quanto as suas operações, as quais demonstraram serem análogas a tratamentos com números.

Ainda deixa a entender Milies (2004, p. 08) que, mais tarde, a representação simbólica dos polinômios passou a ser utilizada a partir do matemático John Hudde (1633 - 1704), utilizando letras para representar quantidades variáveis nos multinômios. Boyer (2010, p. 256) ainda ressalta a contribuição que John Hudde ofereceu no processo de consolidação de notações na teoria das equações, como ainda afirma: “[...] Esse passo final no processo de generalização das notações de Viète na teoria das equações foi feito numa obra de Hudde intitulada *De reductione aequationum* [...]”.

Paralelamente a esses avanços, a busca de fórmulas fixas resolutivas ou outros métodos de determinar todas as soluções de equações de terceiro grau teve início antes da Idade Moderna. Como exposto por Boyer (2010, p. 164-165), o árabe Omar Khayyam (cerca de 1048 – 1131), já utilizava métodos geométricos para solucionar algumas delas. Porém, esse desenvolvimento histórico não para por aí.

Ao longo dos séculos XVI e XVII aparecem os estudos de Nicolo Fontana (1499-1557), Ludovico Ferrari (1522 – 1565) e Albert Girard (1595 – 1632), e outros na Itália. Pesquisadores de Álgebra passaram a contribuir inicialmente para a obtenção de raízes incógnitas de polinômios de qualquer grau, incluindo determinação de fórmulas resolventes. Em *Ars Magna* (1545) do italiano Girolamo Cardano são apresentadas metodologias para solucionar diversas equações algébricas de até quarto grau. (BOYER, 2010, p. 193-194). Albert Girard (1595 – 1632), grande contribuidor na área da Álgebra e Geometria, em sua obra *Invention nouvelle en l'algèbre* (1629), estabeleceu a sua descoberta da relação entre as raízes de uma equação algébrica e seus coeficientes. (BOYER, 2010, p. 209; EVES, 2004, p. 302-305; KOERICH, 2000, p. 4-6)

Essas buscas por fórmulas para equações polinomiais seguiram-se durante os séculos XVII e XVIII. Um dos quebra-cabeças da Matemática da Era Moderna foi encontrar uma fórmula fixa para a equação quíntica (do 5º grau). Esse impasse durou aproximadamente 300 anos. Paolo Ruffini (1765 – 1822) desenvolveu estudos na busca de uma fórmula para se resolver a equação do quinto grau e por consequência, provou a menos de um engano a impossibilidade de se encontrá-la. Na época esse fato era tratado como um contrassenso, e ainda assim P.Ruffini tentou corrigir, sem sucesso, a sua demonstração.

Ressalta Boyer (2010, p. 361-366) e Lobo (2017, p. 17) que o norueguês Niels Henrik Abel (1802 – 1829), inicialmente se enganou quando acreditou ter achado a fórmula específica em 1821 para a equação do quinto grau. Posteriormente em 1824 através de um artigo “Sobre a resolução algébrica de equações”, conseguiu provar pela primeira vez e publicar que essas não admitiam fórmulas resolventes. Mais tarde, Évariste Galois (1811 – 1832) foi além, e provou essa impossibilidade para as de grau superior a cinco.

Paralelamente a essa busca por fórmulas que determinam as soluções das equações algébricas ao longo dos séculos da Era Moderna, um novo objeto matemático passou a surgir para a sua complementação: a ideia de função. Com os estudos pioneiros de Isaac Newton (1642 – 1727) e de Leibniz (1646 – 1716) no cálculo diferencial e infinitesimal, surge a ideia de variável. Segundo Boyer (2010, p. 279): "[...] Leibniz não é responsável pela moderna notação para função, mas é a ele que se deve a palavra "função", praticamente no mesmo sentido em que é usada hoje. "

Com o avanço nos procedimentos para se resolver problemas, a questão da notação sempre avançava paralelamente. Evidencia Milies (2004, p. 10) que Isaac Newton (1642 – 1727) em uma carta dirigida ao secretário da então Royal Society em 1676, escreveu notações mais sofisticadas e simplificadoras, incluindo expoentes fracionários e negativos.

Ainda segundo Boyer (2010, p. 279), Garbi (2009, p. 102) e também Eves (2004, p. 472-473), Leibniz e Leonhard Euler (1707 – 1783) contribuíram amplamente na Matemática para formular notações generalizadoras. Euler foi mais além, introduziu constantes notáveis, terminologias e várias ideias de caráter inéditos utilizados atualmente. Garbi (2009, p. 102) destaca alguns símbolos empregados na linguagem atual: "[...] Foi Euler quem criou o símbolo $\sum$ para a somatória, a notação f(x) para as funções, a representação $\binom{m}{n}$ para as combinações, etc. [...]"

A ideia de função como transformação, em que cada elemento x é transformado em um outro $y = f(x)$, passou a ser dada pelo britânico George Boole (1815 – 1864). Um outro matemático que passou a utilizar o conceito de função como o de aplicação entre dois conjuntos foi o alemão Richard Dedekind (1831 – 1916). Por fim, houve a definição dada pelo inglês George Harold Hardy (1877 – 1947) em que para cada elemento de um conjunto E, corresponde um único elemento $f(x)$ do conjunto F (Contradomínio), sendo essa correspondência determinada por alguma lei, relação entre elementos ou expressão. (SILVA e REZENDE, p. 29 -32).

A Matemática a partir daí passa por um processo de estruturação e complexização de suas estruturas e conceitos. A busca por soluções de vários tipos de equações continuou devido a novas demandas e necessidades tecnológicas, ou ainda, aprofundamento teórico. Com tudo isso, a pesquisa provavelmente ainda continua.

2 NOÇÕES PRELIMINARES

Ao longo deste Capítulo, iremos relembrar algumas noções e conceitos fundamentais para o desenvolvimento do nosso trabalho em teoria das equações.

Inicialmente um breve exposto sobre os números reais; partiremos depois para o entendimento das funções e equações reais a uma variável real. Noções sobre polinômios também serão abordadas.

Iremos embasar os conceitos que serão apresentados neste capítulo principalmente nas fontes referenciais e bibliográficas a seguir: Lima (2006, p. 198-249), Caputi e Miranda (2017), Delfino (s.d.), Marques (1999, p. 34-38) e as duas obras de Gelson Iezzi e outros (2011a, 2011b).

2.1 Números reais, potenciação e radiciação

Neste trabalho, iremos utilizar o conjunto dos números reais, denotado por $\mathbb{R}$, cujos elementos são números das formas ao lado: $\frac{2}{7}, -\frac{8}{31}, \sqrt{6}, -0{,}1111111\ldots$.

Iremos apresentar algumas noções de modo bem resumido e não detalhado sobre os números reais. Espera-se que o leitor tenha algum conhecimento basal sobre esse conjunto e seus elementos.

Definição 2.1.1: Dado um conjunto A, diz-se que B é um subconjunto de A, denotado por $B \subset A$, se $x \in B \Longrightarrow x \in A$.

Exemplos :

1. $A = \{-\sqrt{6}, 1, 0{,}17\} \subset \mathbb{R}$ tendo em vista que $x \in \{-\sqrt{6}, 1, 0{,}17\} \Longrightarrow x \in \mathbb{R}$
2. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, pois $x \in \mathbb{Q} \Longrightarrow x \in \mathbb{R}$;

Há outros exemplos de subconjuntos, um de especial utilidade, denominados intervalos. Veja a Definição 2.1.2 a seguir:

Definição 2.1.2: Um intervalo real I é um subconjunto de $\mathbb{R}$ tal que dados a, b e x reais, com $x \in I$, então:

1. $x \in I = [a, b] \Leftrightarrow a \leq x \leq b$.
2. $x \in I = (a, b] \Leftrightarrow a < x \leq b$;
3. $x \in I = [a, b) \Leftrightarrow a \leq x < b$;
4. $x \in I = (a, b) \Leftrightarrow a < x < b$;
5. $x \in I = (a, +\infty) \Leftrightarrow a < x$;
6. $x \in I = [a, +\infty) \Leftrightarrow a \leq x$;
7. $x \in I = (-\infty, a) \Leftrightarrow x < a$;
8. $x \in I = (-\infty, a] \Leftrightarrow x \leq a$;

Potência de expoente inteiro

Definição 2.1.3: Dado $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ e $n \in \mathbb{Z}$, definimos potência de base a e expoente n o número real a^n assim definido: $a^n = \begin{cases} 1 & \text{para } n = 0 \\ a \cdot a^{n-1} & \text{para } n \geq 1 \\ \frac{1}{a^{-n}} & \text{para } n < 0 \end{cases}$

Observe que sendo m e n inteiros, se cumpre: $\begin{cases} a^{m+n} = a^m \cdot a^n \\ (a^m)^n = a^{m \cdot n} \end{cases}$

Potência com expoente racional

Definição 2.1.4: Dado a um número real e $r = \frac{m}{n}$, m e n inteiros, com $n > 0$, definimos: $a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$. Algumas propriedades são listadas a seguir:

1. $b = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$ é a raiz quadrada de a, com $a \geq 0$ e sendo $b \geq 0$;
2. $\sqrt{a^2} = a$ se $a > 0$ e $\sqrt{a^2} = -a$, se $a < 0$;
3. $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow a = b^n$, sendo $a > 0$;
4. $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow a = b^n$, sendo $a < 0$ e n ímpar;

Observação: Se $a < 0$ e n par, logo $\sqrt[n]{a} \notin \mathbb{R}$.

Potência com expoente real

Definição 2.1.5: Dados $a \geq 0$ e r um número real, o número a^r é a potência de a com expoente em $\mathbb{R}$.

Veja que:

1. Se $a > 0$ e $x = a^r \Longrightarrow x \in \mathbb{R}$ para todo r real;
2. Se $a = 0$, então $x = a^r = 0$ para qualquer r real não nulo;

Observação: Se $a < 0$, então existe r real de modo que $x = a^r \nRightarrow x \in \mathbb{R}$;

Dados a e b reais quaisquer. As seguintes igualdades (chamadas de identidades) ou implicações se cumprem em $\mathbb{R}$:

1. $(a \mp b)^2 = a^2 \mp 2ab + b^2$;
2. $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$;
3. $(a \mp b)^3 = a^3 \mp b^3 \mp 3ab(a \mp b)$;
4. $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$, sendo n natural;
5. $a = b \Leftrightarrow a^n = b^n$ se n é ímpar;
6. $a = b \Longrightarrow a^n = b^n$ se n é par;

Observação: Para n par, $a^n = b^n \Longrightarrow a = b$ nem sempre é verdadeira. Vejamos um exemplo: $(-2)^4 = (+2)^4 \not\Rightarrow -2 = +2$.

Racionalização

Um número fracionário, em alguns casos com denominador irracional, pode ser representado por uma forma fracionária equivalente de denominador em $\mathbb{Q}$, pelo processo de racionalização de denominadores. [4]

Exemplo 2.1.1: Racionalizar o número real $y = \frac{1}{3-\sqrt{3}}$

Como $(3 + \sqrt{3}) \cdot (3 - \sqrt{3}) \in \mathbb{Q}$, basta multiplicar o numerador e o denominador de y por $3 + \sqrt{3}$:

$$y = \frac{1}{3 - \sqrt{3}} = \frac{3 + \sqrt{3}}{(3 - \sqrt{3})(3 + \sqrt{3})} = \frac{3 + \sqrt{3}}{3^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{3 + \sqrt{3}}{6}$$

2.2 Funções a uma variável real a valores em $\mathbb{R}$

Definição 2.2.1: Sejam os conjuntos A e B não vazios. Define-se como função de A em B, denotada por $f: A \to B$ a uma relação que associa a cada elemento $a \in A$ a um único y elemento de B, chamado de imagem de a pela f, e indicado por $y = f(a)$.

O conjunto A é o domínio da f, que será denotado por $D(f)$ e o conjunto B é o contradomínio da f, que será denotado por $CD(f)$.

[4] Nessa técnica, basta multiplicar o denominador por um outro número de modo que o denominador transformado seja um número racional. Consideremos casos em que o fator dessa transformação não seja o inverso multiplicativo do irracional dado no denominador. Isso exclui exemplos de tentar racionalizar, por exemplo, o denominador da fração $\frac{1}{\pi}$.

Definição 2.2.2: Seja f uma função de A em B, isto é, $f: A \to B.$ Definimos como conjunto imagem da f o conjunto denotado por $Im(f)$ tal que $Im(f) = \{y \in B: y = f(x)$ para algum $x \in A\}$.

Definição 2.2.3: Sejam A e B conjuntos tais que $A \subset \mathbb{R}$ e $B \subset \mathbb{R}$. Define-se por função de uma variável real a valores reais (ou simplesmente por função) a função de A no conjunto B, ou seja, dado $a \in A$ um número real, $f(a) \in B$ é um número real.

Funções em $\mathbb{R}$ podem, em alguns casos, ser descritas com uma lei de formação relacionando a variável independente x e a variável dependente $y = f(x)$.

Exemplos :

1. $y = f(x) = \sqrt{x^2 + 1};$
2. $y = f(x) = \begin{cases} 1\ se\ \ x > 0; \\ -1\ se\ \ x \leq 0; \end{cases}$

Definição 2.2.4: Sejam $f : A \to B$ e $\wp$ o conjunto de pares ordenados de números reais. O conjunto G_f tal que $G_f = \{(x, f(x)) \in \wp: x \in A\}$ é denominado gráfico de f.

Exemplos :

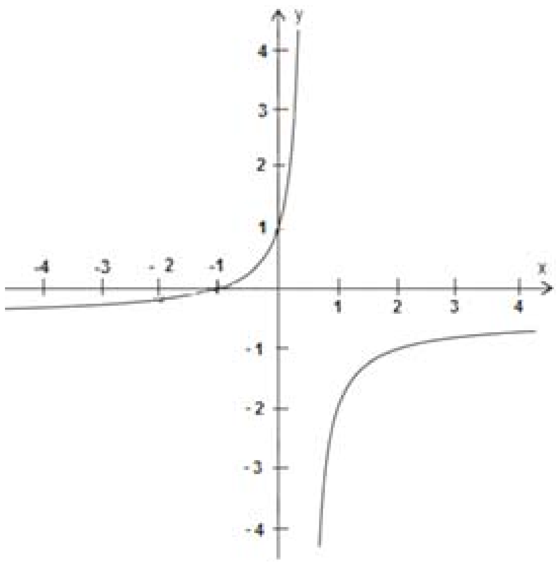

Figura 2.1: Gráfico da função $f(x) = \frac{1+x}{1-2x}$

Fonte: elaborada pelo autor (2017)

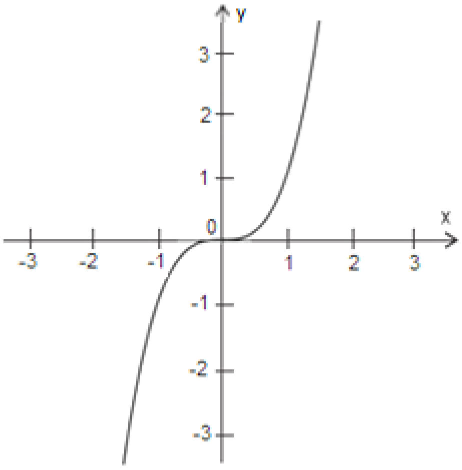

Figura 2.2: Gráfico de $f(x) = x^3$

Fonte: elaborada pelo autor (2017)

Definição 2.2.5: Uma função f é dita contínua em $x = a$, $a \in \mathbb{R}$, se satisfaz as condições a seguir :

1. f está definida para $x = a$, isto é, $a \in D(f)$;
2. Dado $\varepsilon > 0$ qualquer, existe $\delta > 0$ tal que $x \in (a - \delta, a + \delta) \Longrightarrow$ $f(x) \in (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$.

Definição 2.2.6: Uma função f é dita contínua no subconjunto $X \subset D(f)$ se, e somente se, f é contínua para todo $x \in X$.

A Definição 2.2.6 de continuidade pode ser interpretada de forma intuitiva como ser possível traçar o gráfico da função dada sem tirar o lápis do papel, ao longo do domínio especificado[5].

Exemplo 2.2.1: A função $f(x) = 3x - 2$ é contínua em $\mathbb{R}$, por outro lado

$g(x) = \begin{cases} x - 1 \ , \ se\ x \leq 1 \\ 3x \quad\ \ , \ se\ x > 1 \end{cases}$ não é contínua em $x = 1$.

[5] Essa ideia teve como fonte o que se encontra disponível no endereço abaixo: <http://www.uff.br/webmat/Calc1_LivroOnLine/Cap06_Calc1.html>. Acesso em 23/08/17.

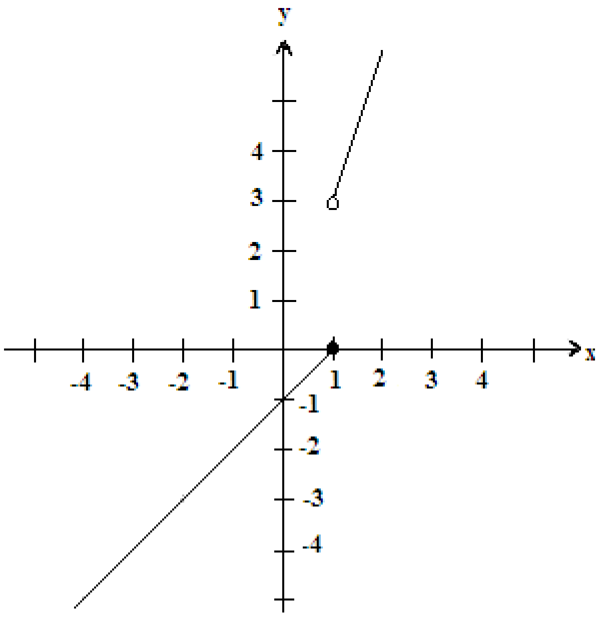

Figura 2.3: Gráfico da função $g(x) = \begin{cases} x-1 \ , & se\ x \leq 1 \\ 3x \ , & se\ x > 1 \end{cases}$

Fonte: elaborada pelo autor (2017)

Definição 2.2.7: Sejam as funções $f: A \to B$ e $g: C \to D$, com $Im(f) \subset C$. A função $g \circ f : A \to D$ é definida como a composta de g em f e é indicada por $g\big(f(x)\big) = (g \circ f)(x)$ para todo $x \in A$.

Exemplos :

1. $f(x) = \sqrt{x+1}$ e $g(x) = 1 - 2x$, logo $g\big(f(x)\big) = 1 - 2f(x) = 1 - 2\sqrt{x+1}$ para todo $x \geq -1$.
2. $f(x) = 1 - 3\sqrt{3-x}$, então $f\big(f(x)\big) = 1 - 3\sqrt{3 - f(x)} = 1 - 3\sqrt{2 + 3\sqrt{3-x}}$ para todo $x \leq 3$.
3. $f(x) = \sqrt{x}$, então $f\left(f\big(f(x)\big)\right) = \sqrt{\sqrt{f(x)}} = \sqrt[4]{f(x)} = \sqrt[4]{\sqrt{x}} = \sqrt[8]{x}$ para todo $x \geq 0$.

Monotonia de funções reais

Definição 2.2.8: Uma função f: A $\to B$ é constante em A quando para todo x_1 e $x_2 \in A$, tem-se que $x_1 \leq x_2 \Longrightarrow f(x_1) = f(x_2)$.

Definição 2.2.9: Uma função $f\colon \mathrm{A} \to B$ é crescente (decrescente) em A quando ela não é constante em A e para todo x_1 e $x_2 \in A$, tem-se que $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ $(x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geq f(x_2))$.

Definição 2.2.10: Uma função $f\colon A \to B$ é estritamente crescente (decrescente) em A quando quando ela não é constante em A e para todo x_1 e $x_2 \in \mathrm{A}$, tem-se que $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$ $(x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2))$.

Definição 2.2.11: Uma função $f\colon \mathrm{A} \to B$ é (estritamente) monótona em um intervalo $I \subset A$, quando para todo x_1 e $x_2 \in I$, a função é (estritamente) crescente ou (estritamente) decrescente.

A função $f(x) = 1 - 2^x$ é estritamente decrescente em $\mathbb{R}$. Por outro lado, em $[1,+\infty)$ $f(x) = x^3 - x$ é estritamente crescente e em $(-\infty, -1]$ é estritamente decrescente, como elucidam as Figuras 2.4 e 2.5 a seguir:

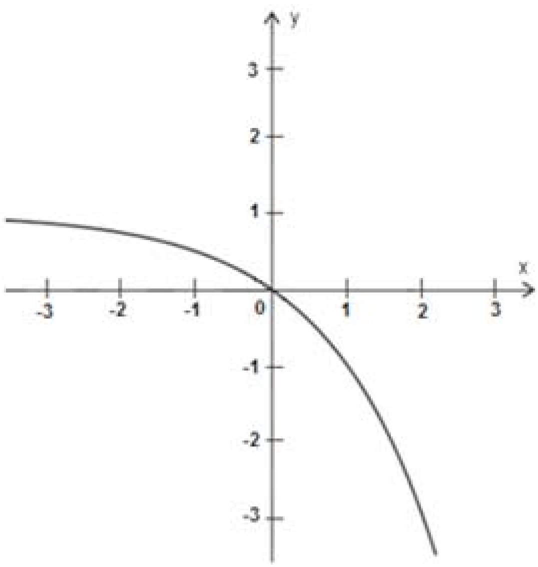

Figura 2.4: Esboço do gráfico de $f(x) = 1 - 2^x$

Fonte: elaborada pelo autor (2017)

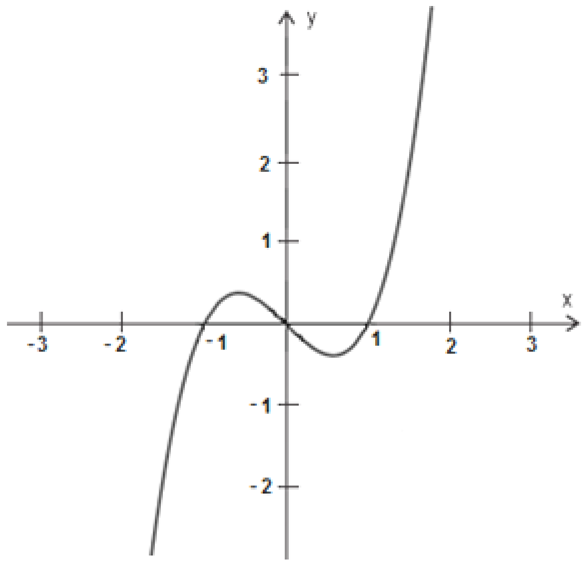

Figura 2.5: Gráfico de $f(x) = x^3 - x$

Fonte: elaborada pelo autor (2017)

Proposição 2.2.1: Considere a função exponencial $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = a^x$ com $a > 0$ e $a \neq 1$. Segue que $f(x) > 0$ para todo x real e que se $0 < a < 1$, f é monótona estritamente decrescente e se $a > 1$, f é monótona estritamente crescente.[6]

Proposição 2.2.2: A função $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$, com $f(x), g(x) > 0$, n natural, para algum intervalo real I, é monótona crescente se, e somente se, $g(x)$ é monótona crescente em I.

Demonstração: Supondo, sem perda de generalidade, que $a, b \in I$ com $a < b$, das hipóteses tomadas, segue que $f(a) \leq f(b) \implies \sqrt[n]{g(a)} \leq \sqrt[n]{g(b)} \implies \sqrt[n]{g(b)} - \sqrt[n]{g(a)} \geq 0$. Logo,

$$g(b) - g(a) = \left(\sqrt[n]{g(b)} - \sqrt[n]{g(a)}\right) \cdot \left(\sqrt[n]{\left(g(b)\right)^{n-1}} + \dots + \sqrt[n]{\left(g(a)\right)^{n-1}}\right) \geq 0$$

devido ao fato do segundo termo do produto acima ser positivo, por isso $g(a) \leq g(b)$. O caso recíproco é análogo.

Corolário 2.2.1: A função $f(x) = \sqrt{g(x)}$, com $f(x), g(x) > 0$ para algum intervalo real I, é monótona crescente se, e somente se, $g(x)$ é monótona crescente em I.

[6] Esse resultado não será demonstrado em nosso trabalho devido a sua complexidade. Por outro lado, indicaremos uma referência como sugestão ao leitor para a constatação dessa proposição: O livro Fundamentos de Análise II (2013), do autor Paulo Cupertino de Lima, disponível em: <http://www.mat.ufmg.br/ead/acervo/livros/Fundamentos_de_Analise_II.pdf.>. Acesso em 03/11/2017.

2.3 Equações a uma variável real

Definição 2.3.1: Uma equação a uma variável real em $\mathbb{R}$ é uma sentença aberta do tipo $f(x) = 0$, sendo f uma função de uma variável real a valores em $\mathbb{R}$.

Definição 2.3.2: Todo $\mathrm{x_o} \in D$, com $\mathrm{D} \subset \mathbb{R}$ que verifica $f(\mathrm{x_o}) = 0$ denomina-se raiz, zero ou solução da equação em D. O conjunto das raízes de f, chamado de conjunto solução ou conjunto verdade de f, é dado por $S = \{x \in D: f(x) = 0\}$.

A partir da Definição 2.3.1, iremos nos referir a equações a uma variável real simplesmente como equações.

Se $f(x) = g(x) - h(x)$ para algum par de funções no domínio considerado, então a equação $f(x) = 0$ pode ser reescrita como $g(x) = h(x)$.

Considerando a equação $2\mathrm{x}^2 - 3\mathrm{x} + 1 = 0$, segue que $2\mathrm{x}^2, -3\mathrm{x}$ e 1 são os seus termos e os lados direito e esquerdo da igualdade são os seus membros.

Ainda assim, segue da Definição 2.3.2 que as raízes de uma equação $f(x) = 0$ são determinadas dentro de um conjunto, denominado universo ou domínio de validade, que será denotado por D, subconjunto dos números reais. O conjunto D pode ser considerado como o domínio da função f, ou seja, $D = D(f)$.

Definição 2.3.3: Seja a equação $f(x) = 0$ no domínio de validade D. Logo, o conjunto solução S deve verificar $S \subset D$.

Resolver a equação no conjunto D será encontrar todos os $x \in D$ tais que $f(x) = 0$ seja verdadeira.

Exemplos :

1. $2\mathrm{x}^2 - 3\mathrm{x} + 1 = 0$ no domínio de validade $\mathbb{Z} \Rightarrow S = \{1\}$.
2. $2\mathrm{x}^2 - 3\mathrm{x} + 1 = 0$ no domínio de validade $\mathbb{R} \Rightarrow S = \left\{\frac{1}{2}, 1\right\}$.
3. $2\mathrm{x}^2 - 3\mathrm{x} + 1 = 0$ no domínio de validade $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \Rightarrow S = \emptyset$.

Definição 2.3.4: (DELFINO, s.d., p. 04) Sejam S_1 e S_2 os conjuntos soluções de $f(x) = 0$ e $g(x) = 0$, respectivamente. Se $S_1 \subset S_2$, então $g(x) = 0$ é dita equação consequente de $f(x) = 0$.

Exemplo 2.3.1: Considerando $\mathbb{R}$ como domínio de validade, segue que :

$$x = \sqrt{2\mathrm{x} + 15} \Longrightarrow S_1 = \{5\}. \tag{1}$$

$$x^2 = 2x + 15 \Longrightarrow S_2 = \{-3,5\}. \tag{2}$$

$\therefore$ A equação (2) é consequente da equação (1).

Definição 2.3.5: Seja $f(x) = 0$ de conjunto solução S_1 e $g(x) = 0$ de conjunto solução S_2 no domínio de validade D. Se $S_1 = S_2$, então $f(x) = 0$ e $g(x) = 0$ são equações equivalentes em D. Indicaremos por $f(x) = 0 \Longleftrightarrow g(x) = 0$.

Exemplo 2.3.2: Considerando $\mathbb{Z}$ como domínio de validade, segue que :

$$(x + 3)\sqrt{6 - 2x} = 0 \Longrightarrow S_1 = \{-3,3\} \tag{1}$$

$$\mathrm{x}^4 - 17\mathrm{x}^2 + 72 = 0 \Longrightarrow S_2 = \{-3,3\} \tag{2}$$

$\therefore$ (1) e (2) são equivalentes, ou seja, (1) $\Longleftrightarrow$ (2).

Definição 2.3.5: Uma equação produto no domínio de validade D é uma sentença aberta da forma $f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot f_3(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x) = 0$ para algum natural $n \geq 2$. Se $x_0 \in D$ pertence ao conjunto solução dessa equação, então $f_k(x_0) = 0$ para algum $1 \leq k \leq n$.

Exemplos:

1. $(x - 1) \cdot (x + 2) = 0$ no domínio dos reais tem conjunto solução $S = \{-2,1\}$.
2. $\left(\sqrt{x^2 + 4x + 3}\right) \cdot (x^2 + 1) = 0$, no domínio de validade dos reais, admite raízes em $S = \{-3, -1\}$.
3. Se $\left(\sqrt{2x^2 + 9}\right) \cdot (x^2 - 1) \cdot \left(\frac{8-2^x}{x-1}\right) = 0$ tem domínio de validade $\mathbb{R}\backslash\{1\}$, então $S = \{-1,3\}$.

2.3 Polinômios a uma variável real e equações algébricas

Definição 2.4.1: A expressão $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ para $a_i \in \mathbb{R}$ sendo i natural de 1 a n é chamada de polinômio a uma variável real de coeficientes reais, sendo indicado por $P(x)$.

Os valores reais a_i são chamados de coeficientes do polinômio $P(x)$, a_0 é chamado de termo independente e, quando a_n é diferente de zero, o natural n é chamado de grau do polinômio, com a_n dito coeficiente dominante de $P(x)$.

O polinômio identicamente nulo é tal que $a_i = 0$ para todo i natural. Seu grau é indefinido.

Para a ciência do leitor, a partir da Definição 2.4.1, iremos nos referir a polinômios a uma variável real simplesmente como polinômios.

Definição 2.4.2: O valor $P(\beta) = a_n\beta^n + a_{n-1}\beta^{n-1} + \cdots + a_2\beta^2 + a_1\beta + a_0$, tal que $\beta \in \mathbb{R}$ é dito valor numérico do polinômio para $x = \beta$.

Note que $P(0) = a_0$ é o coeficiente independente e que $P(1) = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1 + a_0$ representa a soma dos coeficientes reais de $P(x)$.

Definição 2.4.3: Seja $P(x)$ um polinômio não identicamente nulo e $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $P(\alpha) = 0$. Diz-se que α é uma raiz real de $P(x)$.

Exemplos :

1. $\alpha = \sqrt{3}$ é raiz real de $P(x) = x^4 - 9$ pois $P(\sqrt{3}) = 0$;
2. $\alpha = 1$ não é raíz real de $P(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x - 4$ pois $P(1) = -4$;

Definição 2.4.4: A função $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$, tal que $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ com $a_n \neq 0$, é definida como função polinomial de grau n sobre $\mathbb{R}$.

Definição 2.4.5: Dados P e Q polinômios distintos como a seguir, podemos definir operações fundamentais entre seus termos. Retiramos algumas definições a seguir de Marques (1999, p.34-37):

$$\left| \begin{array}{l} P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 \\ Q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_0. \end{array} \right.$$

1. (Soma) $P(x) + Q(x) = \big(a_p + b_p)x^p + (a_{p-1} + b_{p-1})x^{p-1} + \ \ldots + (a_0 + b_0\big)$
onde $a_{\mathrm{i}} = 0$ para todo $i > p$ e $b_{\mathrm{i}} = 0$ se $i > m$.
2. (Multiplicação) $P(x) \cdot Q(x) = c_{m+n}x^{m+n} + c_{m+n-1}x^{m+n-1} + \ \ldots + c_0$
tal que $c_j = a_j b_0 + a_{j-1}b_1 + a_{j-2}b_2 + \cdots + a_0 b_j$, para todo $j = 0,1,2, \ldots, m+n$.

Exemplo 2.4.1: Consideremos $P(x) = x^3 - x + 1$ e $Q(x) = x^2 + x + 1$**,** então:

$$P(x) + Q(x) = x^3 + x^2 + 2$$

$$P(x) \cdot Q(x) = (x^3 - x + 1) \cdot (x^2 + x + 1) =$$

$$\left| \begin{array}{l} = x^5 + x^4 + x^3 - x^3 - x^2 - x + x^2 + x + 1 = \\ = x^5 + x^4 + 1 \end{array} \right.$$

3. (Divisão) Dividir o polinômio $P(x)$ pelo polinômio não nulo $D(x)$, significa obter polinômios $Q(x)$ e $R(x)$ tais que $P(x) = Q(x) \cdot D(x) + R(x)$.

Se $R(x)$ é o polinômio identicamente nulo, então dizemos que $P(x)$ é divisível por $D(x)$**.** Se $R(x)$ não é identicamente nulo, $R(x)$ é considerado como o resto da divisão de $P(x)$ por $D(x)$ e seu grau será menor que o grau do polinômio $D(x)$.

Para a divisão de um polinômio $P(x)$ por um outro polinômio $D(x)$ não identicamente nulo, iremos recorrer ao algoritmo da chave, também utilizado na divisão entre números inteiros. Os passos desse algoritmo são:

1º) Dividir o termo de maior grau de $P(x)$ pelo termo de maior grau de $D(x)$.

2º) Multiplicar o resultado parcial pelo divisor $D(x)$ e depois subtrair o resultado encontrado de $P(x)$, e obter um novo dividendo, chamado de resto parcial.

3º) Dividir o termo de maior grau do resto parcial pelo termo de maior grau de $D(x)$ e repetir o processo do 2ª passo, obter um segundo resto parcial de grau menor que o primeiro resto parcial.

4º) Continuar tal procedimento até obter o resto parcial $R(x)$ identicamente nulo ou de grau menor que o dividendo $D(x)$. Nessas condições, a divisão estará acabada.

A divisão pelo algoritmo da chave de $P(x) = x^4 - 3x^3 + 4$ por $D(x) = x - 2$, resulta em $Q(x) = x^3 - x^2 - 2x - 4$ e $R(x) = -4$.

$$
\begin{array}{r|l}
x^4 - 3x^3 + 4 & x - 2 \\
-x^4 + 2x^3 & \overline{x^3 - x^2 - 2x - 4} \\
\hline
-x^3 + 4 & \\
x^3 - 2x^2 & \\
\hline
-2x^2 + 4 & \\
2x^2 - 4x & \\
\hline
-4x + 4 & \\
4x - 8 & \\
\hline
-4 &
\end{array}
$$

Figura 2.6: Algoritmo da chave para $P(x)$ e $D(x)$

Fonte: Adaptado de LOBO, F.C.G.D. (2017, p. 40).

Teorema 2.4.1: Seja $a \in \mathbb{R}$ e seja $P(x)$ um polinômio em $\mathbb{R}$. O resto da divisão de $P(x)$ por $x - a$ é igual a $P(a)$.

Demonstração: Dada a divisão de $P(x)$ por $x - a$, temos que $R(x)$ é identicamente nulo ou o grau de $R(x)$ é menor do que 1, ou seja, $R(x) = r_0$ para algum $r_0 \in \mathbb{R}$. De fato, sendo $P(x) = (x - a)Q(x) + R(x)$, temos que $P(a) = (a - a) \cdot Q(a) + R(a) = R(a)$.

Teorema 2.4.2: (D'Alembert) Seja a uma constante real. O polinômio $P(x)$ é divisível por $x - a$ se, e somente se, a é raiz de $P(x)$.

Demonstração: Se $P(x)$ é divisível por $x - a \Longrightarrow P(x) = (x - a)Q(x) \Longrightarrow P(a) = (a - a)Q(a) = 0$. Reciprocamente, se a é uma raiz de $P(x)$, então $P(a) = 0$, o que pelo Teorema 2.4.1 $\Longrightarrow R(x) = 0$ na divisão por $x - a \Longrightarrow P(x)$ é divisível por $x - a$.

Teorema 2.4.3 (Fundamental da Álgebra)**:** Uma equação polinomial é uma igualdade da forma $f(x_0) = 0$, sendo f uma função polinomial sobre um conjunto A. Se $A = \mathbb{C}$, tal equação admite pelo menos uma raiz complexa [7].

Demonstração: Será omitida neste trabalho devido à sua complexidade, mas será utilizado em alguns resultados a seguir.

[7]Raiz complexa é uma raiz da forma $x = a + bi$, sendo a, b números reais e i um número denominado unidade imaginária tal que $i^2 = -1$. Equações podem admitir raízes complexas. O Teorema 2.4.3 pode ser reescrito assim : Toda equação polinomial de grau n, $P(x) = 0$, admite no máximo n raízes reais, não necessariamente distintas entre si

Teorema 2.4.4: (Decomposição)**:** Todo polinômio de grau $n \geq 1$ pode ser fatorado na forma $P(x) = a_n(x - k_n)(x - k_{n-1}) \cdot \ldots \cdot (x - k_1)$, sendo k_i as raízes complexas de $P(x)$.

Demonstração: Pelo Teorema 2.4.3, $P(x)$ admite uma raiz complexa k_1, e vide o Teorema 2.4.2, $P(x) = (x - k_1) \cdot Q_1(x)$ sendo $Q_1(x)$ de grau $n - 1$. Por outro lado, $Q_1(x)$ admite uma raiz complexa k_2 pelo Teorema 2.4.3 supondo $n - 1 \geq 1$, portanto $Q_1(x) = (x - k_2) \cdot Q_2(x)$, assim obtendo $P(x) = (x - k_1) \cdot (x - k_2) \cdot Q_2(x)$. Esse procedimento pode ser repetido até que o grau de $Q_n(x)$ seja zero, isto é, $Q_n(x)$ é uma constante, obtendo $P(x) = (x - k_1)(x - k_2) \cdot \ldots \cdot (x - k_{n-1})(x - k_n) \cdot Q_n(x)$. Por identidade de polinômios, obtemos $Q_n(x) = a_n$ e provamos tal resultado.

Corolário 2.4.1: Uma equação polinomial de grau n admite exatamente n raízes complexas, não necessariamente distintas entre si.

Demonstração: Pelo Teorema 2.4.4, podemos tomar a equação $P(x) = 0$ reescrita da forma $P(x) = a_n(x - k_n)(x - k_{n-1})(x - k_{n-2}) \cdot \ldots \cdot (x - k_1) = 0$. Daí, $P(k_i) = 0$ para todo i natural de 1 a n. Então, o número de raízes complexas de $P(x) = 0$ é igual a n.

Exemplo 2.4.2: Se $P(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 8x - 12 = 0$, então as raízes de $P(x)$ pertencem ao conjunto $\{-1, 3, 2i, -2i\}$, por isso $P(x) = (x + 1)(x - 3)(x - 2i)(x + 2i)$, sendo i a unidade imaginária tal que $i^2 = -1$.

Exemplo 2.4.3: Considere $P(x) = x^5 - 3x^4 + 6x^3 - 10x^2 + 9x - 3 = 0$. Como $P(1) = 0$, então $x - 1$ divide $P(x)$ e obtemos $Q(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 3$. De modo análogo, $Q(1) = 0$ e assim sucessivamente, até obtermos $P(x) = (x - 1)^3\,(x^2 + 3) =$ $= (x - 1)^3(x - 3i)(x + 3i)$.

3 ALGUNS MÉTODOS DE RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES

Para que vários métodos de se resolver equações? Por que há uma coleção de métodos para se resolver, por exemplo, uma somente? Bernard e Cohen (1994, p. 111) afirma:

> [...] Como as equações desempenham um papel tão importante na matemática e em muitas de suas aplicações, não é de surpreender que o aprendizado da resolução de equações ainda seja um elemento essencial no estudo da álgebra. [...] (BERNARD e COHEN, 1994, p. 111)

Cabe ao leitor ter ciência de que existem outros métodos não explicitados neste trabalho, ou ainda, que nem todos os métodos aqui apresentados garantem que toda e qualquer equação seja resolvida.

Alguns métodos analíticos a serem utilizados foram baseados no livro russo *Métodos no estandáres para la resolución de ecuaciones y desigualdades* (2009), do autor V.P. Suprún, traduzido em espanhol, presente nas referências deste trabalho. As equações dadas em alguns exemplos foram adaptadas, selecionadas ou criadas a partir dessa obra.

Em referência a alguns métodos presentes na sua obra, Suprún (2009) declara:

> [...] A aplicação desses métodos exige que os estudantes raciocinem de maneira não padrão e seu desconhecimento e incompreensão diminuem consideravelmente o conjunto de problemas que podem ser resolvidos com êxito. (SUPRÚN, 2009, p. 04, tradução nossa)[8]

Dos métodos nessa obra, foram selecionados alguns que serão apresentados ao longo desse Capítulo. Houve muito mais variedades de metodologias para solucionar uma equação do que será mostrado ao leitor, por isso que o autor selecionou os métodos que julgou parecer semelhantes de modo que simplificam e deduzem classes de equações estruturalmente parecidas entre si.

Nem todas equações podem ser solucionadas através de processos simplificadores elementares e puramente algébricos. Isso envolve o uso de operações fundamentais como soma, subtração, multiplicação, potenciação inteira e radiciação em seus termos, ou ainda o uso de definições mais diretas, como nas equações exponenciais do tipo $2^x = 8$.

[8] Trecho no livro: [...] “La aplicación de estos métodos exige de los estudiantes razonar de maneira no estándar y su desconocimiento e incomprensión disminuyen considerablemente el conjunto de problemas que pueden ser resueltos con éxito.” (SUPRÚN, 2009, p. 04)

Para certas equações, os métodos puramente algébricos mais tradicionais não se aplicam, e as pessoas propõem o problema de se resolver uma equação desse tipo, sentindo relativa insegurança e incômodo ao apelar para os métodos de aproximação numéricos. Existe um determinado condicionamento a preferir métodos que envolvem artifícios algébricos, como fórmulas resolventes ou artifícios diversos. (LIMA,1991, p. 177).

Por outro lado, algumas equações são bem complexas ou impossíveis de serem redutíveis a uma equivalência mais simples. Logo, a manipulação analítica redutora da equação não se torna possível e o método numérico por aproximações se torna o mais apropriado.

Iremos com cada método apresentado resolver uma classe de problemas equacionais, os quais não incluem trigonométricas, logarítmicas, modulares, etc. Cada método tem suas vantagens e desvantagens e a proposta desse capítulo é apresentá-los para o leitor, com alguns exemplos para cada um deles.

3.1 Método das equações equivalentes

Se $f(x) = 0$ e $g(x) = 0$ são equivalentes em D, logo $S_1 = S_2$, com S_1 e S_2 conjunto solução de $f(x) = 0$ e $g(x) = 0$, respectivamente. De fato, $f(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0$.

Segundo Polya (1995, p. 121), se a solução é tida como um problema matemático de determinação, segue que dois problemas são equivalentes quando a solução de um desses implica na solução do outro problema. Isso pode ser generalizável para uma série de problemas equivalentes, e o raciocício será reduzir o problema original a um equivalente mais simples, assim como descreve Polya:

> Cadeias de problemas auxiliares equivalentes são frequentes no raciocínio matemático. Temos a resolver o problema *A* e não sabemos como, mas podemos achar que *A* é equivalente a um outro problema *B*. Ao examinarmos *B*, podemos encontrar um terceiro problema *C*, equivalente a *B*. Procedendo da mesma maneira, reduzimos *C* a *D*, e assim por diante, até chegarmos a um último problema, *L*, cuja resolução é conhecida ou imediata. Como cada um desses problemas é equivalente ao que o precede; o último problema *L*, deve ser igual ao problema original *A*. Ficamos, assim, capazes de deduzir a resolução do problema original *A* a partir do problema *L*, ao qual chegamos com o último elo de uma cadeia de problemas auxiliares. (POLYA, 1995, p. 121).

Descrição do método:

1. Seja uma equação $f(x) = 0$ na variável x. Através de procedimentos analíticos embasados em propriedades que possam serem verificadas e demonstradas a serem verdadeiras para todos os valores do domínio considerado, encontrar uma equação $g(x) = 0$ equivalente a $f(x) = 0$.
2. O objetivo é sequenciar várias equações equivalentes à equação original, de modo a obter uma mais simples, a qual resolvida, garante o problema original.

Observação 1 : Nem sempre as equivalências serão encontradas facilmente;
Observação 2 : Alguns dos procedimentos ditos acima são : somar ou subtrair um mesmo número a ambos os termos da equação, potenciação inteira de ambos os membros ou radiciação, entre outros.

Esse método está presente nos livros ou obras de V.P. Suprún (SUPRÚN, 2009), Delfino (DELFINO, s.d.), Elon Lages Lima (LIMA,1991), Gelson Iezzi (IEZZI et al, 2011), Caputi e Miranda (CAPUTI e MIRANDA, 2017), entre outras fontes.

Exemplo 3.1.1: (POLYA, p.122, adaptado) Resolver $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ (1).
Resolução:

Multiplicando os termos de (1) por 4, iremos obter uma outra equação equivalente (2), que será simplificada nas passagens de (2) a (6), segundo o raciocínio de Polya:

$$4x^4 - 52x^2 + 144 = 0 \Leftrightarrow \tag{2}$$

$$\Leftrightarrow (2x^2)^2 - 2(2x^2) \cdot 13 + 144 = 0 \Leftrightarrow \tag{3}$$
$$\Leftrightarrow (2x^2)^2 - 2(2x^2) \cdot 13 + 169 = 25 \Leftrightarrow \tag{4}$$
$$\Leftrightarrow (2x^2 - 13)^2 = 25 \Leftrightarrow \tag{5}$$
$$\Leftrightarrow 2x^2 - 13 = \mp 5 \Rightarrow \tag{6}$$
$$\Rightarrow 2x^2 = 18 \text{ ou } 2x^2 = 8 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x \in \{-2, 2, -3, 3\}$$

$$\therefore S = \{-3, -2, 2, 3\}$$

Muitas vezes uma equação será transformada em uma nova equação consequente da primeira por alguma operação ou manipulação analítica.

As operações de equilíbrio podem ser utilizadas de modo a submeter os termos e os membros de uma equação de modo que as suas soluções não se percam no processo, ou ainda, não sejam introduzidas falsas raízes nesse, uma preservação de seu conjunto solução. (BERNARD e COHEN, 1994, p. 123)

Elevar os dois termos de uma equação ao quadrado não necessariamente preserva o conjunto solução. Isso ocorre muito na resolução de equações irracionais (que possuem radicais em algum termo com variável). Vejamos a proposição a seguir:

Proposição 3.1.1: A implicação $f(x) = g(x) \Rightarrow \left(f(x)\right)^2 = \left(g(x)\right)^2$ é verdadeira, e sua recíproca nem sempre é verdadeira.

Demonstração: De fato, $f(x) = g(x) \Rightarrow \left(f(x)\right)^2 - \left(g(x)\right)^2 =$

$$= \left(f(x) - g(x)\right)(f(x) + g(x)) = 0$$

Por outro lado, $\left(f(x)\right)^2 - \left(g(x)\right)^2 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(f(x) - g(x)\right)\left(f(x) + g(x)\right) = 0$$

$$\Rightarrow f(x) = g(x) \text{ ou } f(x) = -g(x).$$

A proposição acima é um subcaso particular do problema de equivalência em elevar a potências pares, assim como expõe Caputi e Miranda (2017): “[...] se na resolução de uma equação elevarmos ambos os lados da equação a uma potência par devemos verificar se as soluções que obtivemos são realmente soluções do problema original.” (CAPUTI e MIRANDA, p. 320, 2017).

Exemplo 3.1.2: Resolver no conjunto dos reais : $\sqrt{4x+5} = x$ (1)

Resolução: Dado que o domínio D de (1) é $D = \{x \in \mathbb{R}\,; x \geq 0\}$, temos que :

$$\sqrt{4x+5} = x \Longrightarrow 4x + 5 = x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow \qquad (2)$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } x = 5$$

Pelo domínio da equação, segue que $x = 5$.

$$\therefore S = \{5\}$$

É possível perceber que $x = -1$ satisfaz (2) mas não satisfaz à equação (1). Notemos que $(1) \Longrightarrow (2)$, mas $(2) \nRightarrow (1)$ para $x = -1$. Essa solução obtida, muitas vezes, é chamada de falsa raíz.

O aparecimento da falsa raiz se relaciona com a transformação que foi realizada em sua resolução, que estendeu o domínio da equação consequente obtida. (DELFINO, s.d., p. 06).

Exemplo 3.1.3: Determine $x \in \mathbb{R}$ tal que $\sqrt{3x+1} + \sqrt{x-1} = 2$ (1)

Resolução: Para $x \geq 1$, elevando ambos os membros ao quadrado, segue:

$$\left(\sqrt{3x+1} + \sqrt{x-1}\right)^2 = 4 \Leftrightarrow \qquad (2)$$
$$\Leftrightarrow 4x + 2\sqrt{(3x+1)(x-1)} = 4 \Leftrightarrow \qquad (3)$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{(3x+1)(x-1)} = 2 - 2x \qquad (4)$$

Elevando (4) novamente ao quadrado, segue:

$$(3x+1)(x-1) = 4x^2 - 8x + 4 \Leftrightarrow \qquad (5)$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = 5$$

Por outro lado, é possível verificar $x = 5$ não é solução de (1), sendo uma falsa raiz que apareceu no processo de resolução. Veja que $(4) \Longrightarrow (5)$, mas $(5) \nRightarrow (4)$.

$$\therefore S = \{1\}$$

Delfino (s.d., p. 08) em seu trabalho indica transformações no processo de resolver equações que restringem (estreitam) ou ampliam o domínio das novas equações obtidas durante esse último. Iremos ilustrar um caso desse acontecimento com o próximo exemplo:

Exemplo 3.1.4: Tentativa de resolução de $(1 - x^2)(x^2 - 2x + 3) = 0$ (1)

Resolução: Considerando o domínio de (1) como $D = \mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$, vem:

$$(1 - x^2)(x^2 - 2x + 3) = 0 \Leftrightarrow x^2(1 - x^2) + (-2x + 3)(1 - x^2) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2(1 - x^2) = (2x - 3)(1 - x^2) \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \frac{2x - 3}{x^2} = 1 \qquad (2)$$

Porém, o domínio de (2) é $D^* = \mathbb{R}\backslash\{-1,0,1\}$, com $D^* \subset D$.

O cuidado para evitar falsas raízes ocorre frequentemente em equações com radicais, assim como destaca Caputi e Miranda: " Em geral ao resolvermos uma equação envolvendo raízes temos que elevar ambos lados da equação a uma potência. Se essa potência for par ao realizarmos esse procedimento podemos ter introduzido **falsas raízes**. " (CAPUTI e MIRANDA, p. 319, 2017).

Para equações do tipo irracional, algumas equivalências básicas dificultam o aparecimento de falsas raízes, por isso iremos apresentá-las como segue:

Algumas equivalências utilizadas em equações irracionais

$$1.\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = [g(x)]^2 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

$$2.\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \ \ e \ g(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$$

$$3.\ \sqrt{(f(x))^2} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \ ou \ f(x) = -g(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

$$4.\ \sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = \sqrt{h(x)} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} f(x) \geq 0, g(x) \geq 0 \\ h(x) \geq 0 \\ 2\sqrt{f(x) \cdot g(x)} = h(x) - f(x) - g(x) \end{cases}$$

Definição 3.1.1: Sejam $P(x)$ e $Q(x)$ polinômios de uma variável real, sendo $Q(x)$ não identicamente nulo. O quociente a seguir é chamado fração algébrica nos reais:

$$\frac{\mathrm{P(x)}}{\mathrm{Q(x)}}$$

Duas frações algébricas são idênticas quando para Q(x) e S(x) não identicamente nulos verificam a expressão :

$$\frac{\mathrm{P(x)}}{\mathrm{Q(x)}} = \frac{\mathrm{R(x)}}{\mathrm{S(x)}} \Leftrightarrow \mathrm{P(x)} \cdot \mathrm{S(x)} = \mathrm{Q(x)} \cdot \mathrm{R(x)}$$

Proposição 3.1.2: Sejam os polinômios $P(x) = P, R(x) = R, Q(x) = Q \ e \ S(x) = S$, distintos entre si, sendo Q e S polinômios não identicamente nulos. Então, podemos afirmar que:

$$\frac{P}{Q} = \frac{R}{S} \Leftrightarrow \frac{P+Q}{P-Q} = \frac{R+S}{R-S}. \qquad (1)$$

Demonstração:

Como $P, R, Q\ e\ S$ são distintos entre si, obtemos:

$$\frac{P}{Q} = \frac{R}{S} \Leftrightarrow PS = QR \Leftrightarrow \qquad (2)$$

$$\Leftrightarrow -PS = -QR \Leftrightarrow -PS - QS = -QR - QS \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -PS - QS + PR = -QR - QS + PR \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -PS - QS + PR + QR = -QR - QS + PR + QR \Leftrightarrow \qquad (3)$$
$$\Leftrightarrow P(R-S) + Q(R-S) = P(R+S) - Q(R+S) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (P+Q)(R-S) = (P-Q)(R+S) \Leftrightarrow \qquad (4)$$
$$\Leftrightarrow \frac{P+Q}{P-Q} = \frac{R+S}{R-S} \qquad (5)$$

Reciprocamente, temos:

$$\frac{P+Q}{P-Q} = \frac{R+S}{R-S} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (P+Q)(R-S) = (P-Q)(R+S) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow PR - PS + QR - QS = PR + PS - QR - QS \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow QR - PS = PS - QR \Leftrightarrow QR = PS \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{P}{Q} = \frac{R}{S}$$

A Proposição 3.1.2 pode ser generalizável se $P, R, Q\ ou\ S$ contém expressões algébricas com radicais. Iremos a seguir ilustrar esse fato:

Exemplo 3.1.5: (SUPRÚN, p. 205, modificado) Resolva a seguinte equação em $\mathbb{R}$:

$$\frac{x^2 + \sqrt{5x-6}}{x^2 - \sqrt{5x-6}} = \frac{x+1}{x-1} \qquad (1)$$

Resolução:

Considerando o domínio D de (1) como $D = \left\{x \in \mathbb{R} :\ x > \frac{6}{5}\right\}$, da proposição anterior, temos que:

$$\frac{x^2 + \sqrt{5x-6}}{x^2 - \sqrt{5x-6}} = \frac{x+1}{x-1} \Leftrightarrow \tag{1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{\sqrt{5x-6}} = \frac{x}{1} \Leftrightarrow x^2 = x\sqrt{5x-6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x\sqrt{5x-6} = 0 \tag{2}$$

$$\Leftrightarrow x\left(x - \sqrt{5x-6}\right) = 0 \tag{3}$$

Da última equação em (3) e como $x \neq 0$ devido à restrição do domínio D, podemos dizer que (3) é equivalente a :

$$x = \sqrt{5x-6} \tag{4}$$

Basta solucionarmos (4), logo:

$$x = \sqrt{5x-6} \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \text{ ou } x = 2 \tag{5}$$

Por verificação, vejamos que os valores em (5) solucionam (4), portanto:

$$\therefore S = \{2,3\}$$

3.2 Método por mudança de variável

Também é chamado de método da desconhecida auxiliar ou método da substituição. Trata-se da substituição da variável de $f(x) = 0$ por uma outra, resultando em uma nova equação $g(y) = 0$. Polya (1995, p. 120) enfatiza que o novo problema a ser obtido será auxiliar, e no caso em particular das equações, a incógnita y será chamada de incógnita auxiliar.

Segundo Delfino (s.d., p. 20), o método pode ser aplicável a um tipo de equação mais complicada, e que o uso da troca da troca da variável pela auxiliar revele uma equação mais simples, se baseando na original.

Polya (1995, p. 120) descreve a mudança de variável como uma forma de simplificar o problema dado, tornando-o mais simples ou ainda, sendo esperado que o novo seja instrutivo para se resolver o original. O problema auxiliar servirá de base para o original, mais complexo.

Podemos considerar a substituição de variável inteligente como uma redução do problema inicial a um conversível, o qual segundo George Polya:

> […] As reduções conversíveis são, sob um certo aspecto, mais importantes e mais convenientes do que outras maneiras de introduzir problemas auxiliares, mas mesmo

> quando estes não são equivalentes aos problemas originais, podem, assim mesmo, ser muito úteis […] (POLYA, 1995, p. 121)

Exemplo 3.2.1: (POLYA,1995, p.120) Exemplo. Calcular x, que satisfaça a equação:

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$

> Se observarmos que $x^4 = (x^2)^2$, poderemos ver a vantagem de introduzir $y = x^2$. Obtemos assim um novo problema: calcular y que satisfaça a equação $y^2 - 13y + 36 = 0$. (POLYA ,1995, p.120, adaptado)

Resolução: Pela substituição dada por $y = x^2$, segue que:

$$y^2 - 13y + 36 = 0 \iff \quad (1)$$

$$\iff y = 4 \text{ ou } y = 9 \quad (2)$$

Dado que $y = x^2$, logo temos que :

$$x^2 = 4 \text{ ou } x^2 = 9 \iff \quad (4)$$

$$\iff x = -2 \text{ ou } x = 2 \text{ ou } x = -3 \text{ ou } x = 3.$$

$$\therefore S = \{-3, -2, 2, 3\}$$

Gelson Iezzi (2011b, p. 149) descreve o processo de substituição como uma transformação. Em particular, ao analisar as equações algébricas, define:

> Transformação de uma equação algébrica $P_1(x) = 0$ é toda operação com a qual se obtém uma nova equação $P_2(y) = 0$ cujas raízes estejam relacionadas com as raízes da equação inicial através de uma lei conhecida $y = f(x)$. […] A equação $P_1(x) = 0$ é chamada *equação primitiva*; a equação $P_2(y) = 0$ é chamada *equação transformada* e a relação $y = f(x)$ é chamada *relação de transformação*. (IEZZI, 2011b, p. 149)

Esse método é contemplado em diversas obras e artigos de Matemática em teoria das equações. Destacamos alguns deles: G.Polya (1995), V.P.Suprún (2009, p.5-46), E.L.Lima (1991) e G. Iezzi et al (2011a, 2011b).

Descrição do método:

1. Seja $f(x) = 0$ na variável x. Substituindo um de seus termos, suponhamos $g(x)$, por uma nova variável $y = g(x)$,transformar $f(x) = 0$ em outra equação da forma $h(y) = 0$.

2. Resolver $h(y) = 0$, caso possível, encontrando suas soluções. Como $h\big(g(x)\big) = f(x) = 0$, basta resolver a equação $y\ = g(x)$ com cada valor de y solução de $h(y) = 0$.

Observação 1 : A substituição $y\ = g(x)$ deverá ser escolhida de maneira razoável, para reduzir a equação original a uma mais simples e conhecida. Essa substituição nem sempre será fácil de ser determinada, como cita V.P. Súprun (2009):

> A dificuldade principal da solução de problemas com ajuda do método de substituição funcional consiste em que, frequentemente, resulta difícil encontrar uma substituição apropriada e determinar o tipo de equações (ou desigualdades) nas que é possível utilizar-la […] (SUPRÚN, 2009, p. 05, tradução nossa).[9]

Observação 2 : Caso a nova equação transformada $h(y) = 0$ não seja auxiliar, o processo pode ser repetido, isto é, adotar uma nova variável auxiliar, por exemplo, $t\ = k(y)$, e transformar a equação em uma outra na variável t, isto é, $q(t) = 0$, e assim sucessivamente.

Exemplo 3.2.2: (POLYA,1995, p. 105, adaptado) Determinar o valor de x no domínio dos reais que satisfaça a equação:

$$8(4^{\mathrm{x}} + 4^{-\mathrm{x}}) - 54(2^{\mathrm{x}} + 2^{-\mathrm{x}}) + 101 = 0 \qquad (1)$$

Resolução: Segue que substituindo $y = 2^{\mathrm{x}}$, temos $y^2\ = 4^{\mathrm{x}}$ e portanto (1) pode ser reescrita como:

$$8\left(y^2 + \frac{1}{y^2}\right) - 54\left(y + \frac{1}{y}\right) + 101 = 0 \qquad (2)$$

Tomando $z = y + \frac{1}{y}$, logo temos que :

$$\begin{cases} z = y + \dfrac{1}{y} \\ \text{e} \\ z^2 = y^2 + \dfrac{1}{y^2} + 2 \end{cases}$$

Em (2), pela substituição em z, teremos $8z^2 - 54z + 85 = 0$.

[9] Trecho no livro: [...] "La dificultad principal de la solución de problemas con ayuda del método de sustitución funcional consiste en que, a menudo, resulta difícil encontrar una sustitución apropiada y determinar el tipo de ecuaciones (o desigualdades) en las que es posible utilizarla. [...] " (SUPRÚN, 2009, p. 04)

As raízes de $8z^2 - 54z + 85 = 0$ são $z = \frac{5}{2}$ ou $z = \frac{17}{4}$. Por isso nosso problema será agora na resolução de (4) e (5) a seguir:

$$y + \frac{1}{y} = \frac{5}{2} \tag{4}$$

$$y + \frac{1}{y} = \frac{17}{4} \tag{5}$$

Por (4), obtemos $2y^2 - 5y + 2 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}$ ou $y = 2$.

Solucionando (5), segue que $4y^2 - 17y + 4 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{4}$ ou $y = 4$.

Logo, $2^x = \frac{1}{2}$ ou $2^x = 2 \Rightarrow x = -1$ ou $x = 1$.

E ainda $2^x = \frac{1}{4}$ ou $2^x = 4 \Rightarrow x = -2$ ou $x = 2$.

$$\therefore S = \{-2, -1, 1, 2\}$$

Exemplo 3.2.3: (DELFINO, s.d., modificado, p. 20) Determine todas as soluções reais de

$$2(x^3 - 1) + \sqrt{x^3 - 1} = 0 \tag{6}$$

Resolução: Seja $y = \sqrt{x^3 - 1}$, logo substituindo em (6), definida para $x \geq 1$,vem :

$$2y^2 + y = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = 0 \text{ ou } y = -\frac{1}{2}.$$

Como $y \geq 0$, temos que $\sqrt{x^3 - 1} = 0 \Leftrightarrow x^3 - 1 = 0$.

De fato, $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x^2 + x + 1 = 0$.

Mas, $x^2 + x + 1 = 0$ não admite raízes reais pois $\Delta < 0$, logo concluimos que $x = 1$ é a única solução real de (6).

$$\therefore S = \{1\}$$

3.3 Método da parametrização

Uma equação literal ou paramétrica possui pelo menos uma variável, distinta da incógnita, denominada parâmetro, que representa um número real qualquer. Uma equação pode ser literal de parâmetro único.

A solução de equações dessa forma depende ou não do parâmetro dado. Esses parâmetros podem desempenhar várias funções: generaliza a resolução de algumas equações, podem substituir números em seus termos e tornar possível encontrar uma nova equação auxiliar, além de outros.

Exemplos:

1. $2^{t+2} = -7 \cdot 4^{x} + 2^{x+1}$ tem parâmetro t;
2. $1 - (x + t)^2 = 2(t + u)x$ tem parâmetros t e u;

Nesses casos, basta tratar os parâmetros dados como constantes quaisquer e prosseguir normalmente com algum método conhecido para resolver a nova equação.

Exemplo 3.3.1: Resolver $x^2 - 4t\,x + 3t^2 = 0$ no parâmetro real t.

Resolução: Pela fórmula resolvente de equações de segundo grau, com coeficientes $a = 1$, $b = -4t$ e $c = 3t^2$, segue:

$$x = \frac{4t \pm \sqrt{(-4t)^2 - 4.1.3t^2}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4t \pm \sqrt{4t^2}}{2} = 2t \pm t \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = t \text{ ou } x = 3t$$

$$\therefore S = \{t, 3t\},\ t \in \mathbb{R}$$

Note que $x^2 - 4tx + 3t^2 = 0$ é algébrica de segundo grau em relação à variável x e em relação ao parâmetro t, se tomarmos ele como variável e x como parâmetro.

Exemplo 3.3.2: Resolver $(x - 2)(x^2 + tx + t^2) = 0$ no parâmetro real t.

Resolução: Como $x^2 + tx + t^2 = 0$ é tal que $\Delta = t^2 - 4t^2 = -3t^2 \leq 0$, então para $t = 0$, temos a equação (1):

$$x^2(x - 2) = 0 \qquad (1)$$

cujas soluções são $x = 0$ ou $x = 2$.

Se $t \neq 0$, logo $(x-2)(x^2 + \text{tx} + t^2) = 0$ independe do parâmetro considerando o universo dos reais. A solução de todas equações nessas condições será $x = 2$.

$$\therefore S = \begin{cases} \{0,2\}, & se\ t = 0 \\ \{2\}, & se\ t \neq 0 \end{cases}$$

Exemplo 3.3.3: Resolver $2^{t+1} = 4^x + 2^x(1 - 2^{t+1})$ no parâmetro real t.

Resolução: Podemos utilizar a mudança de variável $y = 2^x$. Substituindo, temos:

$$2^{t+1} = y^2 + (1 - 2^{t+1})y \Leftrightarrow y^2 + (1 - 2^{t+1})y - 2^{t+1} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y = \frac{(2^{t+1} - 1) \pm \sqrt{(1 - 2^{t+1})^2 + 4 \cdot 2^{t+1}}}{2} =$$
$$= \frac{(2^{t+1} - 1) \pm \sqrt{(1 + 2^{t+1})^2}}{2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y = -1 \text{ ou } y = 2^{t+1}$$

O segundo caso é conveniente, pois $y > 0$, logo:

$$2^x = 2^{t+1} \Leftrightarrow x = t + 1$$

$$\therefore S = \{t + 1\}, t \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 3.3.4: Achar todas as soluções da família de equações algébricas paramétricas da forma:

$$tx^3 + t^2x^2 - tx - t^2 = 0 \ (t \neq 0) \tag{1}$$

Resolução: Reorganizando termos convenientemente, podemos encontrar:

$$\text{t}\,\text{x}^3 + \text{t}^2\text{x}^2 - \text{tx} - \text{t}^2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \text{t}\,\text{x}^3 - \text{tx} + \text{t}^2\text{x}^2 - \text{t}^2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \text{tx}(\text{x}^2 - 1) + \text{t}^2(\text{x}^2 - 1) = 0$$
$$\Leftrightarrow (\text{tx} + \text{t}^2)(\text{x}^2 - 1) = 0 \tag{2}$$

A partir de (2), obtemos: $\begin{cases} \text{x}^2 = 1 & (3) \\ \text{ou} & \\ \text{tx} + \text{t}^2 = 0. & (4) \end{cases}$

Vemos que a partir de (3), a equação (1) sempre terá $x = -1$ ou $x = 1$ como raízes. Por outro lado, (4) nos indica que:

$$x + t = 0 \Leftrightarrow \text{x} = -\text{t}$$

$$\therefore S = \{-1, 1, -t\}, t \in \mathbb{R}.$$

Para ilustrar, suponha $t = -2$. Teremos assim $2x^3 - 4x^2 - 2x + 4 = 0$, cujo conjunto solução será $S = \{-1, 1, 2\}$.

No exemplo a seguir, vamos resolver uma equação inicialmente sem parâmetros, e utilizar pelo menos um deles, para obtermos um problema auxiliar, com o qual segundo as ideias de Polya (1995, p.120), podemos obter pistas para a equação original:

Exemplo 3.3.5: (SUPRÚN, 2009, p. 190) Determine as raízes reais de:

$$x^3 - \left(\sqrt{2} + 1\right)x^2 + 2 = 0 \tag{1}$$

.

Resolução: Poderemos utilizar a parametrização em (1), obtemos:

$$x^3 - (t + 1)x^2 + t^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t^2 - x^2 t + (x^3 - x^2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{x^2 \pm \sqrt{(x^2)^2 - 4 \cdot (x^3 - x^2)}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{x^2 \pm \sqrt{x^2(x-2)^2}}{2} = \frac{x^2 \pm x(x-2)}{2}$$

Portanto, $t = x^2 - x$ ou $t = x$. Como $t = \sqrt{2}$, vem: $x^2 - x - \sqrt{2} = 0$ ou $x = \sqrt{2}$.

Aplicando a fórmula resolvente em $x^2 - x - \sqrt{2} = 0$, obtemos: $x = \frac{1+\sqrt{1+4\sqrt{2}}}{2}$ ou $x = \frac{1-\sqrt{1+4\sqrt{2}}}{2}$, o completa a nossa resolução.

$$\therefore S = \left\{\frac{1 - \sqrt{1 + 4\sqrt{2}}}{2}, \sqrt{2}, \frac{1 + \sqrt{1 + 4\sqrt{2}}}{2},\right\}.$$

O método a seguir foi baseado e selecionado para a abordagem por intermédio das obras de V.P. Suprún (SUPRÚN, 2009, p. 190-195), Elon Lages Lima (LIMA, 1991) e Gelson Iezzi (IEZZI et al, 2011a, 2011b).

Descrição do método:

1. Seja $f(x) = 0$ paramétrica. Basta resolvê-la analiticamente, considerando os parâmetros como constantes quaisquer.
2. Se $f(x) = 0$ não tem parâmetros e for vantajoso introduzir um parâmetro $t = k$, k real, para algum número em sua expressão, transformar $f(x) = 0$ em $g(t) = 0$, tomando x como parâmetro.
3. Ao resolver $g(t) = 0$, caso possível, obteremos uma ou mais equações da forma $t = h(x)$.
4. Com base no valor do parâmetro t já determinado inicialmente, basta resolver todas as equações obtidas do passo 2 da forma $h(x) = t = k$, a partir do passo 3.

Observação 1 : É recomendado verificar se todas as soluções das equações encontradas no passo 4 irão satisfazer a $f(x) = 0$ para evitar encontrar falsas raízes.
Observação 2 : Sendo $f(x) = 0$ e $g(t) = 0$ para $t = k$ segue que $f(x) = g(h(x)) = 0$.
Observação 3 : Cuidado com os valores dos parâmetros assumidos e os respectivos conjuntos soluções das equações obtidas, como no Exemplo 3.3.2.

Esse método oferece uma solução de uma família de equações por um ou mais parâmetros em seus coeficientes. Uma desvantagem do método é que em alguns casos esse é desnecessário ou ainda torna o nosso problema ainda mais trabalhoso do que lidar com a equação inalterada.

3.4 Método por monotonia de funções

Algumas classes de equações podem ser escritas da forma $f(x) = g(x)$ sendo f contínua e estritamente crescente em dado intervalo $a \leq x \leq b$ e g contínua e estritamente decrescente nesse mesmo intervalo (ou vice versa).

Nesses casos, investigamos a monotonia das funções f e g, as quais sendo contínuas em dado intervalo real I e se ocorrer o caso de uma ser estritamente crescente e a outra estritamente decrescente em I, $f(x) = g(x)$ irá admitir, no máximo, uma única raíz nesse intervalo.

Nos casos em que $f(a) < g(a)$ e $f(b) > g(b)$, o teorema a seguir garante a existência de pelo menos uma raiz em I :

Teorema 3.4.1: (Bolzano) Seja f uma função contínua em $I = [a, b]$. Se $f(a) \cdot f(b) < 0$, então existirá pelo menos um $c \in \mathbb{R}$, com $c \in I$, tal que $f(c) = 0$.

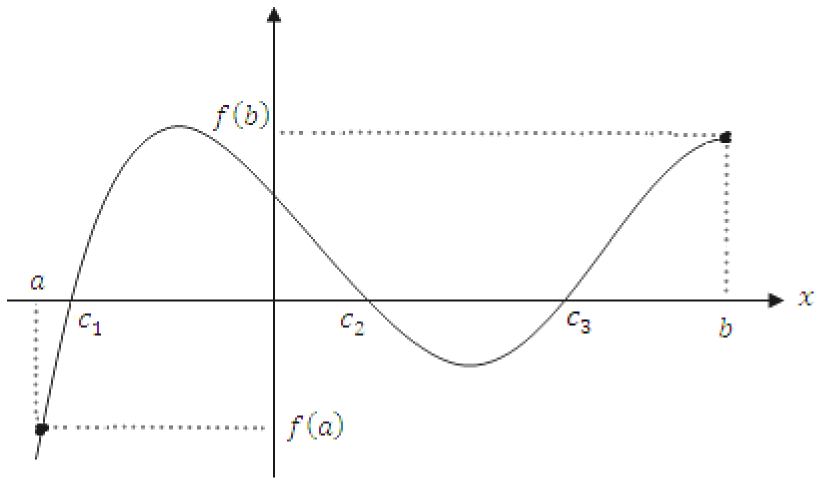

Figura 3.1: Ilustração do Teorema 3.4.1 - gráfico

Fonte: elaborada pelo autor (2017)

O Teorema 3.4.1 não será demonstrado em nosso trabalho devido ao uso de conceitos que fogem da meta dessa pesquisa.

Corolário 3.4.1: Seja φ uma função contínua e estritamente monótona em $I = [a, b]$. Se $\varphi(a) \cdot \varphi(b) < 0$, então existirá um único real $c \in I$ tal que $\varphi(c) = 0$.

Demonstração: Suponha, sem perda de generalidade, que existam $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ com $a \leq c_1 < c_2 \leq b$ tais que $\varphi(c_1) = 0$ e $\varphi(c_2) = 0$. Da hipótese de φ ser estritamente monótona em $I = [a, b]$, suponhamos que φ é estritamente crescente com $\varphi(a) > 0$. Dessas hipóteses, temos que se $\varphi(c_1) = 0$ e $c_1 < c_2$, então $\varphi(c_2) > \varphi(c_1) = 0$, o que contradiz o fato de que $\varphi(c_2) = 0$. Logo, temos que $c_1 = c_2$. As outras suposições nos levam a um resultado análogo.

Corolário 3.4.2: Seja f estritamente crescente em $I = [a, b]$ e seja g estritamente decrescente em I. Se $f(a) < g(a)$ e $g(b) < f(b)$, a equação $f(x) = g(x)$ admite solução única em I.

Demonstração: Considere a função $\varphi(\mathrm{x}) = f(x) - g(x)$. Das hipóteses, temos que $f(a) < g(a)$ e $g(b) < f(b)$. De fato, $\varphi(a) = f(a) - g(a) < 0$ e $\varphi(b) = f(b) - g(b) > 0$. Pelo

Corolário 3.4.1, existe um c real único, com $a \leq c \leq b$, tal que $\varphi(c) = f(c) - g(c) = 0 \Longrightarrow f(c) = g(c)$.

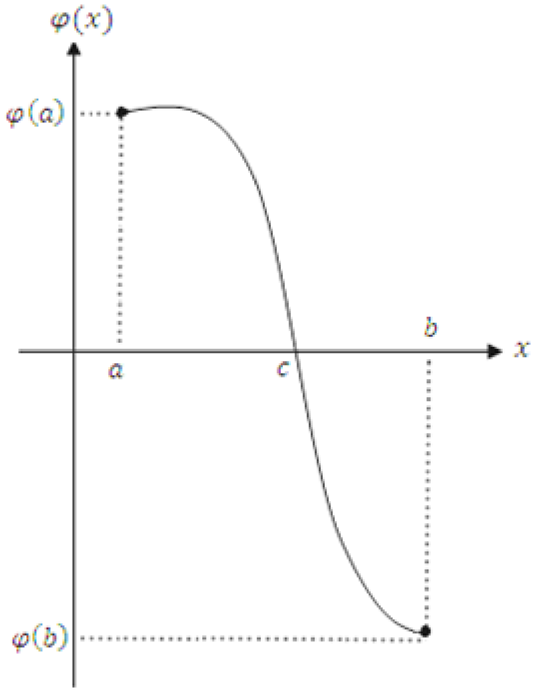

Figura 3.2: Gráfico de uma função hipotética para ilustrar o Corolário 3.4.1

Fonte: elaborada pelo autor (2017)

Corolário 3.4.3: Seja f estritamente crescente em $I = [a, b]$ com $f(x) = k, k \in \mathbb{R}$ e $f(a) < k < f(b)$. A equação $f(x) = k$ admite uma única raiz nesse intervalo. Se f é estritamente decrescente em $I = [a, b]$, $f(x) = k$ e $f(b) < k < f(a)$, $f(x) = k$ também admite solução única.

Demonstração: Consideremos a função $\varphi(x) = f(x) - k$ e suponhamos que f seja estritamente crescente em $I = [a, b]$. Note que φ será estritamente crescente nesse mesmo intervalo. Por isso, $\varphi(a) = f(a) - k$ e $\varphi(b) = f(b) - k$. Da monotonia da f e com base nas hipóteses anteriores, podemos dizer que $f(a) < k < f(b) \Leftrightarrow \varphi(a) < 0 < \varphi(b)$. Pelo Corolário 3.4.1, existe um único c real com $a \leq c \leq b$, tal que $\varphi(c) = 0$, ou seja, $f(c) = k$. O caso para f estritamente decrescente é análogo.

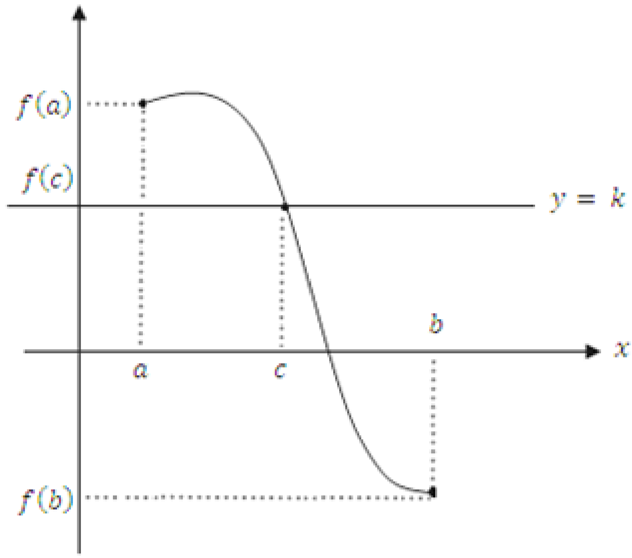

Figura 3.3: Gráfico de uma função hipotética para ilustrar o Corolário 3.4.3

Fonte: elaborada pelo autor (2017)

Corolário 3.4.4: Sejam as funções contínuas $y = f(x)$ estritamente crescente em $I = [a, b]$ e $y = g(x)$ estritamente decrescente nesse mesmo intervalo. Se $f(a) > g(a)$ ou $g(b) > f(b)$, então $f(x) = g(x)$ não tem solução em I.

Demonstração: Consideremos a função $\varphi(x) = f(x) - g(x)$. Se existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $a < c < b$ e $\varphi(c) = f(c) - g(c) = 0$, aplicando as hipóteses nas monotonias de f e g, temos: $f(c) > f(a)$ e $g(a) > g(c)$. Supondo inicialmente $f(a) > g(a)$, segue que $f(c) > g(c) \Rightarrow \varphi(c) > 0$, uma contradição. Logo $f(x) = g(x)$ não tem solução em I. Do mesmo modo, $f(b) > f(c)$ e $g(c) > g(b)$ e supondo que $g(b) > f(b)$, temos $g(c) > g(b) > f(b) > f(c) \Rightarrow \varphi(c) < 0$, uma contradição novamente, por isso $f(x) = g(x)$ também não admite solução em I.

Iremos focalizar em funções estritamente monótonas em intervalos específicos, para mostrarmos a unicidade de sua solução, e ser possível a sua determinação. Para a simplificação desse método neste trabalho, serão considerados casos em que as soluções são números fáceis, sem a abordagem de aproximações.

Ambas as referências sobre V.P. Suprún (SUPRÚN, 2009, p. 128-142) e Delfino (s.d.) contém abordagens sobre esse método.

Descrição do método:

1. Seja uma equação na forma $g(x) = h(x)$ de modo que g seja monótona estritamente crescente (decrescente) e h estritamente decrescente (crescente) em algum intervalo. Os Corolários 3.4.2 ou 3.4.4 garantem que ela admite no máximo uma única solução real nesse intervalo.
2. Tal solução pode ser determinada por tentativa e erro (Considere isso nos casos restritos de alguns problemas, incluindo os que serão abordados nessa pesquisa).

Observação 1 : Nem sempre será possível evitar o uso de métodos que utilizam aproximações para a solução da equação dada.
Observação 2 : Se escrita na forma $f(x) = 0$, em alguns casos, é possível reescrevê-la na forma equivalente $g(x) = h(x)$, que satisfaz o Corolário 3.4.2.
Observação 3 : Algumas funções serão mais fáceis de serem determinadas quanto à sua monotonia em intervalos considerados. Outras não serão elementares nesse sentido.

Exemplo 3.4.1: (SUPRÚN, 2009, p. 128-129, modificado) Determine todas as soluções reais de:

$$\sqrt{x-1} + \sqrt[3]{x+6} = 3$$

Resolução: A função $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt[3]{x+6}$ é estritamente crescente em $I = (1, +\infty)$ (especificamente o seu domínio de validade). Como $g(x) = 3$ em I, logo $f(x) = g(x)$ admite uma única solução, pois $f(1) < 3$, e por exemplo, $f(10) > 3$.

É possível verificar que $x = 2$ verifica $f(2) = g(2)$.

$$\therefore S = \{2\}$$

Exemplo 3.4.2: Resolva no conjuntos dos reais :

$$\sqrt{4x+5} + 2\sqrt{x} = 6 - \sqrt{2x-1} \qquad (1)$$

Resolução: É possível verificar que o domínio de validade de (1) é $D = \left\{x \in \mathbb{R} : x \geq \frac{1}{2}\right\}$.

Como em D, $f(x) = \sqrt{4x+5} + 2\sqrt{x}$ é estritamente crescente e $g(x) = 6 - \sqrt{2x-1}$ é estritamente decrescente, portanto $f(x) = g(x)$, que representa (1), admite uma única solução nesse intervalo, pois, em particular, $f\left(\frac{1}{2}\right) < g\left(\frac{1}{2}\right)$ e $f(5) > g(5)$. É possível verificar que $x = 1$ é solução.

$$\therefore S = \{1\}$$

Exemplo 3.4.3: (SUPRÚN, 2009, p. 134, modificado) Determine todos os valores reais de x que verificam a $3^x + 4^x = 5^x$.

Resolução: Se considerarmos $f(x) = 3^x + 4^x$ e $g(x) = 5^x$ para o uso do método em particular, teremos duas funções estritamente crescentes em $\mathbb{R}$. Por isso, dividiremos ambos os membros de $f(x) = g(x)$ por 5^x:

Note que $3^x + 4^x = 5^x \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1$.

Como $h(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x$ é estritamente decrescente em $\mathbb{R}$ e, por exemplo, $h(3) < 1 < h(0)$. Pelo Corolário 3.4.3, $h(x) = 1$ tem solução única.[10] De fato, $x = 2$.

$$\therefore S = \{2\}$$

3.5 Métodos utilizando equação funcional

Uma equação funcional é um tipo de equação cuja incógnita a ser determinada será uma função. Podemos tomar como exemplo, a equação funcional $(f(x))^2 = f(x^2)$. Note que a função dada por $f(x) = x^2$ é uma de suas raízes (pode não ser a única) visto que $(f(x))^2 = (x^2)^2 = x^4$ e $f(x^2) = (x^2)^2 = x^4$.

O método e as idéias a seguir que serão apresentadas foram baseadas e retiradas do livro de V.P. Suprún (SUPRÚN, 2009, p. 143).

Caso 1 : Para alguma função f estritamente crescente em dado intervalo, equações da forma

$$\underbrace{f\left(f\left(\dots\left(f(x)\right)\dots\right)\right)}_{\text{n vezes}} = x \qquad (1)$$

[10] Ao analisar a equação na forma $3^x + 4^x = 5^x$ por mais que a sua raiz possa ser determinada sem resolução analítica, o que ocorre é a incerteza da quantidade de soluções reais que ela admite. Ao reescrevê-la em outra forma, auxiliar, é possível mostrar que essa solução é única.

Teorema 3.5.1 : Se $y = f(x)$ é estritamente crescente em $I = [a, b]$, com $f(x) \in I$, então para $x \in I$, a equação (1) é equivalente à $f(x) = x$.

Demonstração: Seja x_0 uma solução de $f(x) = x$ com $a \leq x_0 \leq b$. Portanto, podemos dizer que $f(x_0) = x_0$. Aplicando f em ambos os membros, obtemos $f(f(x_0)) = f(x_0) = x_0$. Aplicando f sucessivas vezes obtemos que $\underbrace{f\left(f\left(\ldots\left(f(x_0)\right)\ldots\right)\right)}_{\text{n vezes}} = x_0$ (2)

Reciprocamente, seja x_0 uma solução de (1). Suponha que x_0 não satisfaça $f(x) = x$, isto é, $f(x_0) \neq x_0$. Vamos considerar, sem perda de generalidade, que $f(x_0) > x_0$. Como f é crescente em $a \leq x \leq b$, escreveremos:

$$a \leq x_0 < f(x_0) < f(f(x_0)) < \cdots < \underbrace{f\left(f\left(\ldots\left(f(x_0)\right)\ldots\right)\right)}_{\text{n vezes}} \leq b \qquad (3)$$

Por outro lado, como x_0 é solução de (1), obtemos $x_0 < x_0$ a partir de (3), um absurdo. O outro caso é análogo. Portanto, concluímos que $f(x_0) = x_0$.

Corolário 3.5.1 : Seja $y = f(x)$ estritamente crescente em todo o seu domínio D. Então, as equações (1) e $f(x) = x$ são equivalentes em D.

Exemplo 3.5.1: Resolver a equação $\sqrt{\sqrt{\sqrt{x+1}+1}+1} = x$ no conjunto dos reais.

Resolução: Como $f(x) = \sqrt{x+1}$ é estritamente crescente em $(-1, +\infty)$, para $x \geq 1$, logo:

$$f(f(f(x))) = \sqrt{\sqrt{\sqrt{x+1}+1}+1} = x \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = x$$

Resolvendo $\sqrt{x+1} = x$, obtemos $x = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$

$$\therefore S = \left\{\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right\}$$

Exemplo 3.5.2: Determine todos os reais que satisfazem a $\sqrt{3 + 2\sqrt{3+2x}} = x$.

Resolução: Como $f(x) = \sqrt{3+2x}$ é estritamente crescente em $(-\frac{3}{2}, +\infty)$, portanto:

$$\sqrt{3+2\sqrt{3+2x}} = x \iff \sqrt{3+2x} = x$$

Por isso,

$$\sqrt{3+2x} = x \iff x^2 - 2x - 3 = 0 \iff$$
$$\iff x = 3 \text{ ou } x = -1$$

Como $x > 0$, logo $x = 3$.

$$\therefore S = \{3\}$$

Caso 2 : Equações da forma $f(g(x)) = f(h(x))$, sendo f estritamente monótona com $D(f) \subset Im(g) \cap Im(h)$.

Teorema 3.5.2 : A equação $f(g(x)) = f(h(x))$ é equivalente à $g(x) = h(x)$ para $y = f(x)$ estritamente monótona em algum subconjunto dos reais $Y \subset Im(g) \cap Im(h)$.

Demonstração : Seja x_0 uma solução de $f(g(x)) = f(h(x))$, ou seja, $f(g(x_0)) = f(h(x_0))$, com $x_0 \in D(g) \cap D(h)$. Suponha que $y = f(x)$ seja estritamente crescente e que $g(x_0) < h(x_0)$. Portanto, $f(g(x_0)) < f(h(x_0))$, contradizendo a hipótese. Analogamente caso f seja estritamente decrescente. Concluímos, então que $g(x_0) = h(x_0)$.

Reciprocamente, $g(x_0) = h(x_0) \Longrightarrow f(g(x_0)) = f(h(x_0))$, logo x_0 é solução de $f(g(x)) = f(h(x))$.

Exemplo 3.5.3: Resolva a equação $\sqrt{x + \sqrt{x-1}} = \sqrt{3x - 2 + \sqrt{3x-3}}$ para x real.

Resolução: Para $y \geq 3$, consideremos $f(y) = \sqrt{y - 2 + \sqrt{y-3}}$. Para $x \geq 1$, temos que $g(x) = x + 2 \geq 3$ e $h(x) = 3x \geq 3$. Por isso, f é estritamente monótona na imagem das funções h e g. Dado isso, nosso problema é equivalente a:

$$f(x+2) = f(3x) \iff x + 2 = 3x$$
$$\iff x = 1$$

$$\therefore S = \{1\}$$

Exemplo 3.5.4: Encontre todas as raízes reais de $2^{-x} - x = 2^{x-2} - 1$.

Resolução: Multiplicando os dois membros de tal equação por 2, seguem as manipulações abaixo:

$$2^{-x} - x = 2^{x-2} - 1 \Leftrightarrow 2^{1-x} - 2x = 2^{x-1} - 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ 2^{1-x} + 2 = 2x + 2^{x-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^{1-x} + (1-x) = (x-1) + 2^{x-1}$$

Considerando $f(x) = x + 2^x$ estritamente monótona em $\mathbb{R}$, segue:

$$f(1-x) = f(x-1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - x = x - 1 \Leftrightarrow x = 1$$

$$\therefore S = \{1\}$$

4 APLICAÇÕES DOS MÉTODOS

Neste capítulo, iremos apresentar aplicações para os métodos apresentados no capítulo anterior, através de exemplos selecionados.

As equações presentes neste capítulo foram, em grande parte, elaboradas pelo autor, mas derivaram das ideias presentes em artigos como "Propostas de métodos para resolução de equações irracionais" de Bartolomeu Chindumbo Delfino (DELFINO, s.d.) ou livros como o do autor V.P. Suprún (SUPRÚN, 2009) , presente nas referências do final deste trabalho.

Este capítulo está subdividido em três seções: Na primeira, apresentaremos uma breve parte sobre as equações algébricas do segundo e terceiro graus. Existe uma forma alternativa de resolver uma equação quadrática sem a sua fórmula resolvente? O que é preciso deduzir para encontrar a fórmula das equações do terceiro grau?

Na segunda seção, uma bateria de alguns exemplos serão selecionados para serem resolvidos pelos métodos apresentados no Capítulo 3. Comentários sobre cada equação irão acompanhar a resolução de cada uma.

Na terceira, iremos discorrer sobre os problemas e limites dos métodos utilizados nessa pesquisa. É possível resolver qualquer equação sob qualquer condição? Todas as soluções podem ser encontradas? Que dificuldades e limitações esses métodos podem trazer?

4.1 Equações algébricas do segundo e terceiro graus

Na Revista do Professor de Matemática (RPM) número 13, se encontra um artigo sobre um método, exposto por João Tomas do Amaral, de se determinar as raízes da equação algébrica de segundo grau sem a utilização de sua fórmula resolvente.

Esse método particular também foi apresentado e demonstrado em diversos livros e artigos da literatura matemática, alguns deles: Gilberto Garbi (GARBI, 2009) e Elon Lages Lima (LIMA, 1991). Pelo seu valor histórico, iremos apresentá-lo neste Capítulo da mesma forma.

Consideremos a forma geral da equação $ax^2 + bx + c = 0$ com $a \neq 0$. Pela substituição $x = u + v$, obtemos as seguintes equivalências:

$$a(u+v)^2 + b(u+v) + c = 0 \iff$$
$$\iff au^2 + (2av+b)u + (av^2 + bv + c) = 0$$

Pela substituição $v = -\frac{b}{2a}$ anulamos o coeficiente de u, e obteremos:

$$au^2 + a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = 0 \tag{1}$$

Basta simplificarmos (1), logo:

$$4a^3u^2 + \ ab^2 - 2ab^2 + 4a^2c = 0 \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u^2 = \frac{ab^2 - 4a^2c}{4a^3} \tag{2}$$

Se o segundo termo de (2) for positivo, logo $u \in \mathbb{R}$, o que implica $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 4.1.1: (AMARAL, 1988) Determine as raízes de $x^2 - 7x + 6 = 0$.

Resolução: Façamos $x = u + v$ na equação considerada e obtemos:

$$(u + v)^2 - 7(u + v) + 6 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u^2 + (2v - 7)u + (v^2 - 7v + 6) = 0.$$

Tomamos $v = \frac{7}{2}$ para anularmos o termo central em u, por isso:

$$u^2 + \frac{49}{4} - \frac{49}{2} + \ 6 = 0 \Leftrightarrow u^2 = \frac{25}{4}$$

Logo, obtemos que $u = \frac{5}{2}$ ou $u = -\frac{5}{2}$. Calculando $x = u + v$, segue:

$$\begin{cases} x = u + v = \frac{5}{2} + \frac{7}{2} = 6 \\ x = u + v = -\frac{5}{2} + \frac{7}{2} = 1 \end{cases}$$

$$\therefore S = \{1{,}6\}$$

As substituições nesse caso foram auxiliares para se determinar as raízes de uma equação quadrática, sem recorrer à fórmula resolvente, segundo o exposto por Vale (2013, p. 32-34).

Como exposto por Lima (1991, p. 18) e Garbi (2009, p. 33-41), para $p, q \in \mathbb{R}$, considere a equação algébrica do terceiro grau:

$$x^3 + px + q = 0 \tag{1}$$

Façamos $x = u + v$ em (1) e desenvolvendo a nova equação obtida, segue:

$$(u+v)^3 + p(u+v) + q = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + pu + pv + q = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u^3 + v^3 + 3uv(u+v) + p(u+v) + q = 0 \Leftrightarrow \tag{3}$$

$$\Leftrightarrow u^3 + v^3 + (3uv + p)(u+v) + q = 0$$

Da substituição $v = -\frac{p}{3u}$ em (3), com $u \neq 0$, temos:

$$u^3 + \left(-\frac{p}{3u}\right)^3 + q = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u^3 - \frac{p^3}{27u^3} + q = 0 \Leftrightarrow 27u^6 + 27qu^3 - p^3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u^6 + qu^3 - \frac{p^3}{27} = 0 \tag{4}$$

Por uma nova mudança de variável $y = u^3$ na última equação de (4), vem:

$$\Leftrightarrow y^2 + qy - \frac{p^3}{27} = 0 \tag{5}$$

Pela fórmula resolvente em (5), vem:

$$y = -\frac{q}{2} \mp \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \tag{6}$$

logo

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \mp \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \tag{7}$$

Fixemos $w = \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$ e supondo $u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - w}$, vejamos que :

$$v = -\frac{p}{3u} = \frac{-p}{3\left(\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - w}\right)} =$$

$$= \frac{-p\left(\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+w}\right)}{3\left(\sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2}\right)^2 - w^2}\right)} = \frac{-p\left(\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+w}\right)}{3\left(\sqrt[3]{\left(\frac{-p}{3}\right)^3}\right)} =$$

$$= \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+w}.$$

Por isso, obteremos a seguinte igualdade:

$$x = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} \qquad (9)$$

A igualdade (9) acima é conhecida como fórmula de Cardano.

Exemplo 4.1.2: Determine todas as raízes de $x^3 - 3x - 2 = 0$.

Resolução: Fazendo $x = u + v$ na equação considerada obtemos:

$$(u+v)^3 - 3(u+v) - 2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 - 3u - 3v - 2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow u^3 + v^3 + 3uv(u+v) - 3(u+v) - 2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow u^3 + v^3 + 3(uv-1)(u+v) - 2 = 0$$

Substituindo $v = \frac{1}{u}$ com $u \neq 0$ na igualdade anterior e simplificando, segue:

$$u^6 - 2u^3 + 1 = 0 \qquad (1)$$

Da substituição $y = u^3$, obtemos $y^2 - 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = 1$. Por isso, $u^3 = 1 \Leftrightarrow u = 1 \Rightarrow v = 1$.

Como $x = u + v$, segue que $x = 1 + 1 = 2$.

As outras raízes podem ser encontradas ao dividir $P(x) = x^3 - 3x - 2$ por $x - 2$, obtendo $P(x) = (x-2)(x+1)^2$.

Concluimos que $P(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 2$.

$$\therefore S = \{-1,2\}$$

E no caso da equação $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ com $a \neq 0$? Ainda segundo Garbi (2009, p.38-39), veja que pela mudança de variável $x = u + m$, obtemos:

$$a(u+m)^3 + b(u+m)^2 + c(u+m) + d = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a(u^3 + 3u^2m + 3um^2 + m^3) + b(u^2 + 2um + m^2) + cu + cm + d = 0$$

ou ainda,

$$au^3 + u^2(b + 3am) + u(3am^2 + 2bm + c) + (m^3a + bm^2 + cm + d) = 0$$

Ao considerarmos a substituição $m = \dfrac{-b}{3a}$ na igualdade acima, teremos:

$$au^3 + u\left(3a\left(\frac{-b}{3a}\right)^2 + 2b\left(\frac{-b}{3a}\right) + c\right) + \left(a\left(\frac{-b}{3a}\right)^3 + b\left(\frac{-b}{3a}\right)^2 + c\left(\frac{-b}{3a}\right) + d\right) = 0$$

Desenvolvendo algebricamente os termos e simplificando, obtemos:

$$au^3 + \left(\frac{3ac - b^2}{3a}\right)u + \left(\frac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{27a^2}\right) = 0 \tag{5}$$

Basta resolver a equação (5) em u, utilizando a fórmula de Cardano (9) após dividir todos os coeficientes por $a \neq 0$.

Exemplo 4.1.3: Determine as raízes reais de $x^3 - 3x^2 + 3x + 7 = 0$.

Resolução: Substituindo $x = u + 1$ em $P(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 7 = 0$, segue que:

$$(u + 1)^3 - 3(u + 1)^2 + 3(u + 1) + 7 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow u^3 + 8 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow u = -2 \Rightarrow x = -1$$

Como $P(-1) = 0$, $P(x)$ é divisível por $x + 1$. Por isso,

$$P(x) = (x + 1)(x^2 - 4x + 7)$$

Note que $f(x) = x^2 - 4x + 7$ não admite raízes reais, pois $\Delta < 0$. Portanto, nesse caso a única raíz real é $x = -1$.

$$\therefore S = \{-1\}$$

4.2 Aplicações dos métodos para resolução de certas equações

Nessa seção, utilizaremos os métodos do Capítulo anterior em exemplos selecionados, elaborados a partir das obras mencionadas para cada um. Cada exemplo será comentado principalmente pelo autor e apresentado com a sua respectiva resolução.

Exemplo 4.2.1: (SUPRÚN, p. 31, modificado) Resolva no conjunto dos reais:

$$3^{\frac{1}{x+2}} - 3^{\frac{x+1}{x+2}} = 2 \qquad (1)$$

Comentários: Considerando (1), qual dos métodos nos daria pistas para resolvê-la?

Por sua característica, os métodos de mudança de variável ou equação funcional parecem ser mais apropriados. Seria difícil também encontrar uma função f que verifica as condições desses métodos e fosse aplicável a este problema.

Não seria fácil também manipulá-la através de operações algébricas que auxiliariam a resolução, principalmente pela diferença de exponenciais. O método da monotonia não seria conveniente, pois uma investigação do comportamento de $f(x) = 3^{\frac{1}{x+2}} - 3^{\frac{x+1}{x+2}}$ seria trabalhosa e inviável segundo o escopo desse trabalho.

Iremos recorrer à substituição de variáveis e, se for possível, tentar reduzir (1):

Resolução: No domínio de validade $D = \mathbb{R}\backslash\{-2\}$ pela mudança de variável

$$y = \frac{x+1}{x+2} \qquad (1)$$

poderemos escrever que: $1 - y = \frac{1}{x+2}$ e, portanto:

$$3^{\frac{1}{x+2}} - 3^{\frac{x+1}{x+2}} = 2 \implies 3^{1-y} - 3^{y} = 2 \qquad (2)$$

Por uma nova mudança de variável $z = 3^{y}$ em $3^{1-y} - 3^{y} = 2$ com $z > 0$, segue:

$$\frac{3}{z} - z = 2 \qquad (3)$$

Os valores que verificam (3) são $z = -3$ ou $z = 1$. Como $z > 0$, temos que $z = 1$, portanto: $3^{y} = 1 \iff y = 0$.

Obtido o valor de y, basta utilizar em (1) e encontramos:

$$\frac{x+1}{x+2} = 0 \iff x = -1$$

$$\therefore S = \{-1\}$$

Exemplo 4.2.2: (SUPRÚN, p. 164, modificado) Determine todos os reais que verificam a $2 + 3^{x+2} = x + 9^{x}$.

Comentários:

Operando algebricamente, incluindo utilizando equivalências, buscar parametrizações ou alguma substituição de variável, iremos recair em sentenças abertas cada vez mais inconclusivas.

Por isso restam os métodos da monotonia e o da equação funcional para teste. Considerando nosso problema como $9^x - 3^{x+2} = 2 - x$, teremos $f(x) \ = 9^x - 3^{x+2}$ e $g(x) = 2 - x$, de monotonias distintas em cada um dos intervalos $(2, +\infty)$ e $(-\infty, 2)$. Disso segue que em cada um dos intervalos $(2, +\infty)$ e $(-\infty, 2)$ essa equação não terá raiz, pois $f(x) \cdot g(x) < 0$. Testando para $x = 2$, segue que é a única solução dessa equação na reta real.

Iremos empregar o método da equação funcional na resolução desse problema, veja a seguir:

Resolução: No domínio de validade $D = \mathbb{R}$, considere $2 + 3^{x+2} = x + 3^{2x}$. Somando x a ambos os membros, temos:

$$(x + 2) + 3^{x+2} = 2x + 3^{2x} \tag{1}$$

Pelo método da equação funcional em (1), podemos considerar $f(x) = x + 3^x$, $g(x) = x + 2$ e $h(x) = 2x$. Como f é estritamente monótona em $\mathbb{R}$, então:

$$f(g(x)) = f(h(x)) \Leftrightarrow f(x + 2) = f(2x) \Leftrightarrow x + 2 = 2x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 2$$

$$\therefore S = \{2\}$$

Exemplo 4.2.3: Encontre o conjunto solução em $\mathbb{R}$ de :

$$\frac{x^2 + x + 7}{2x + 7} = \frac{3x^2 + x + 3}{2x^2 + 2x + 3} \tag{1}$$

Comentários:

Nesse caso, é possível utilizar mudança de variáveis, mas é desnecessário, pois (1) se torna mais dificultosa. Além disso, procurar uma mudança de variável a qual reduz (1) para um problema mais simples seria dispendioso e difícil.

Os outros métodos apresentados, com exceção do uso de equivalências, seriam desnecessários, sendo a maioria deles inconclusivos para (1).

Resolução: Consideremos $P = P(x) = x^2 + x + 7$, $Q = Q(x) = 2x + 7$, $R = R(x) = 3x^2 + x + 3$ e $S = S(x) = 2x^2 + 2x + 3$. Sendo $Q(x) \neq 0$ e $S(x) \neq 0$ não identicamente nulos, podemos utilizar a seguinte equivalência:

$$\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}} = \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{S}} \Leftrightarrow \mathrm{PS} = \mathrm{RQ} \Leftrightarrow \mathrm{P(R-S)} = \mathrm{R(P-Q)} \tag{2}$$

A partir de (2) em (1), segue que:

$$(x^2 + x + 7)(x^2 - x) = (3x^2 + x + 3)(x^2 - x) \tag{3}$$

Por (1), temos que $x \in D$ (domínio de (1)) se $2x + 7 \neq 0$ e $2x^2 + 2x + 3 \neq 0$.

De (3), se $x^2 - x = 0 \Longrightarrow x = 0$ ou $x = 1$, que por verificação satisfazem a (1) e $x \in D$.

Se $x^2 - x \neq 0$, temos que vide (3):

$$x^2 + x + 7 = 3x^2 + x + 3 \Leftrightarrow x = -\sqrt{2} \text{ ou } x = \sqrt{2}$$

ambas satisfazem a $2x + 7 \neq 0$ e $2x^2 + 2x + 3 \neq 0$, por isso:

$$\therefore S = \{-\sqrt{2}, 0, 1, \sqrt{2}\}$$

Exemplo 4.2.4: Determine as raízes reais de $x^6 - x^5 - x^4 + 2x^3 - x^2 - x + 1 = 0$

Comentários:

Esse tipo de equação algébrica apresenta uma simetria na disposição de seus coeficientes. Veja que $x = 0$ não é solução dessa equação.

Nenhum caminho de resolução pelos métodos apresentados, exceto pela mudança de variável específica para esse tipo de equação, levaria facilmente a uma simplificação.

A mudança de variável específica será dada por $y = x + \frac{1}{x}$. Veja que dado isso:

$$\begin{cases} y^2 - 2 = x^2 + \dfrac{1}{x^2} \\ \\ \end{cases} \tag{1}$$

$$y^3 - 3y \ = \ x^3 + \frac{1}{x^3} \qquad (2)$$

Resolução: Dividindo todos os membros de $x^6 - x^5 - x^4 + 2x^3 - x^2 - x + 1 = 0$ (a qual chamaremos de (3)) por x^3, pois $x \neq 0$, obtemos:

$$x^3 - x^2 - x + 2 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} = 0 \qquad (4)$$

ou ainda,

$$\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) - \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - \left(x + \frac{1}{x}\right) + 2 = 0 \qquad (5)$$

Substituindo (1) e (2) em (5), vem:

$$(y^3 - 3\mathrm{y}) - (y^2 - 2) - y + 2 = 0 \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(y) = y^3 - y^2 - \ 4y + 4 = 0 \qquad (6)$$

Como por (6) $P(1) = 0$, então $P(y)$ é divisível por $y - 1$. Fatorando (6), segue abaixo:

$$(y-2)(y+2)(y-1) = 0 \Leftrightarrow y = 1 \ \text{ ou } y = -2 \text{ ou } \ y = 2$$

Voltando à mudança de variável $y = x + \frac{1}{x}$, teremos que resolver três novas equações:

$$\begin{cases} x + \dfrac{1}{x} = 1 & (6) \\ x + \dfrac{1}{x} = 2 & (7) \\ x + \dfrac{1}{x} = -2 & (8) \end{cases}$$

De (6), obtemos: $x^2 - x + 1 = 0 \Longrightarrow x \notin \mathbb{R}$

De (7), vem: $x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

De (8), segue: $x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

Por verificação, vemos que $x = -1$ e $x = 1$ são as raízes reais dessa equação.

$$\therefore S = \{-1{,}1\}$$

Exemplo 4.2.5: Na Revista do Professor de Matemática número 84, entre as páginas 58 e 59, segue uma dúvida de um de seus leitores, sobre se existe uma solução analítica para a equação abaixo:

$$\sqrt{2^{x+1}} + \sqrt{3^{x+1}} = \sqrt{4} \qquad (1)$$

Comentários:

Ao leitor foi respondido que a equação (1) não apresenta uma solução analítica, mas pode ser resolvida.

O método a ser utilizado é a da monotonia. Muitas classes de equações, de acordo com a sua forma e estrutura, podem ser solucionáveis por tal método, principalmente se ajustar à forma $f(x) = k$, com f estritamente monótona em dado intervalo e k constante. Nesse caso (1) se encaixa.

Resolução: Notemos que $f(x) = \sqrt{2^{x+1}} + \sqrt{3^{x+1}}$ é estritamente crescente em $\mathbb{R}$ e $g(x) = \sqrt{4} = 2$ é constante nesse intervalo. Como $f(-2) < 2 < f(3)$, então $f(x) = g(x)$ admite solução única nos reais.

Em particular para esse Exemplo, se $\sqrt{2^{x+1}} = \sqrt{3^{x+1}} = 1$, teremos que $2^{x+1} = 3^{x+1} = 1$, o que implica $x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

$$\therefore S = \{-1\}$$

Exemplo 4.2.6: Achar todos os valores reais que cumprem a sentença aberta a seguir:

$$x + \sqrt{3 + \sqrt{x}} = 3 \qquad (1)$$

Comentários:

Essa equação é interessante (para o autor), pois poderá ser resolvida utilizando a maioria dos métodos presentes no Capítulo anterior.

O uso das equivalências para se resolver equações com radicais tornaria o problema difícil e o método da equação funcional seria útil se consideramos a situação abaixo:

$$3 + \sqrt{3 + \sqrt{x}} = x$$

De tal modo, temos que $f(x) = 3 + \sqrt{x}$ e $f\big(f(x)\big) = x$, visto que $f\big(f(x)\big) = 3 + \sqrt{3 + \sqrt{x}} = x$. Porém, isso diverge de (1).

Resolução: Iremos utilizar inicialmente o método da mudança de variáveis. Para $x \geq 0$, considere $y = 3 + \sqrt{x}$, que chamaremos de (2). Teremos que por (2), $y \geq 3$.

Portanto, (1) se torna $x + \sqrt{y} = 3$. Substituindo (1) em (2), obtemos:

$$y = 3 + \sqrt{x} \Leftrightarrow y = (x + \sqrt{y}) + \sqrt{x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = x + \sqrt{y} + \sqrt{x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y - x = \sqrt{y} + \sqrt{x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{y} + \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{y} - \sqrt{x}\right) = \sqrt{y} + \sqrt{x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{y} + \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{y} - \sqrt{x} - 1\right) = 0.$$

Como $\sqrt{y} + \sqrt{x} > 0$ para $x > 0$ e $y \geq 3$, logo:

$$\sqrt{y} - \sqrt{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{y}\right)^2 = \left(1 + \sqrt{x}\right)^2 \Leftrightarrow y = 1 + x + 2\sqrt{x}.$$

Como $y = 3 + \sqrt{x}$, logo substituindo em $y = 1 + x + 2\sqrt{x}$, segue que:

$$3 + \sqrt{x} = 1 + x + 2\sqrt{x} \tag{3}$$

Simplificando (3), obtemos $x + \sqrt{x} = 2$, que se verifica para $x = 1$. Como $\sqrt{3 + \sqrt{x}} = 3 - x \Longrightarrow 3 - x \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 3$, logo $x = 1$ é a única solução de (1).

$$\therefore S = \{1\}$$

Poderemos utilizar, nesse caso, parametrização, para $0 \leq x \leq 3$. Sendo $t = 3$ em (1), escrevemos: $x + \sqrt{t + \sqrt{x}} = t$, logo:

$$x + \sqrt{t + \sqrt{x}} = t \Leftrightarrow t - x = \sqrt{t + \sqrt{x}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (t-x)^2 = t+\sqrt{x} \Leftrightarrow t^2 - 2tx + x^2 - t - \sqrt{x} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t^2 - (1+2x)t + x^2 - \sqrt{x} = 0 \qquad (2)$$

Utilizando a fórmula resolvente para algébricas do segundo grau em t para (2) segue:

$$t = \frac{(1+2x) \mp \sqrt{(2\sqrt{x}+1)^2}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{(1+2x) \mp (2\sqrt{x}+1)}{2} \qquad (3)$$

Na volta da substituição $t = 3$ em (3) para os dois casos possíveis, obtemos após simplificações :

$$\begin{cases} x+\sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 1 \\ x-\sqrt{x} = 3 \Leftrightarrow x = \dfrac{7+\sqrt{13}}{2} \end{cases}$$

Devido ao domínio de validade de (1) (que é $D = [0,3]$), segue que $x = 1$.

Veja que um método não é incoerente com o outro, isto é, ao resolver (1) por dois métodos distintos, ambos chegaram às mesmas conclusões quanto à solução da equação.

Utilizando a monotonia, sejam $f(x) = \sqrt{3+\sqrt{x}}$ e $g(x) = 3 - x$. Teremos $f(x) = g(x)$ com f monótona estritamente crescente em $[0,+\infty[$ e g é monótona estritamente decrescente nesse mesmo intervalo.

Como visto no Capítulo 3, $f(x) = g(x)$ admite uma única raiz pois $f(0) < g(0)$ e $g(2) < f(2)$. Notemos que $x = 1$ é sua raiz e a única que satisfaz esse problema.

Exemplo 4.2.7: Determine todos os reais tais que $2^x + 3^x = 5^x$.

Comentários:

Muito dificilmente o problema será resolvido por equivalência ou operações algébricas que geram implicações instrutivas. Do mesmo modo, parametrização é inviável.

$2^x + 3^x = 5^x$ pela sua estrutura pode ser rapidamente resolvida pela monotonia, como no Exemplo 3.4.3 do Capítulo anterior.

Resolução: Dividindo todos os termos por 3^x, vem que $\left(\frac{2}{3}\right)^x + 1 = \left(\frac{5}{3}\right)^x$.

Sejam $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x + 1$ e $g(x) = \left(\frac{5}{3}\right)^x$. Com efeito, f é monótona estritamente decrescente e g é monótona estritamente crescente em $\mathbb{R}$, e mais ainda, $g(0) < f(0)$ e $f(2) < g(2)$, por isso $f(x) = g(x)$ admite somente uma raiz em [0,2]. Nesse caso e das hipóteses anteriores, sua determinação é $x = 1$, de modo único na reta real.

$\therefore S = \{1\}$

Exemplo 4.2.8: Determine todas as raízes reais de $x^9 - x = 0$.

Comentários:

Com base em nossos métodos, esse problema admite duas resoluções muito interessantes: a mais comum é fatorar e utilizar equivalências, se possível. O método da equação funcional irá resolver esse mesmo problema de outra forma igualmente interessante (para o autor), vejamos:

Resolução: Fatorando algebricamente, temos:

$$x^9 - x = x(x^8 - 1) =$$
$$= x(x^4 + 1)(x^4 - 1) =$$
$$= x(x^2 - 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1) =$$
$$= x(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1) = 0 \tag{1}$$

Da última equação produto em $\mathbb{R}$, segue que $x = 0$, $x = -1$ ou $x = 1$ são raízes dessa equação.

Vamos utilizar o método da equação funcional e obter os mesmos resultados. Seja $x^9 = x$ e $f(x) = x^3$. Dado isso, temos a equação funcional $f(f(x)) = x$ que será equivalente a $x^9 - x = 0$. Como f é estritamente crescente em $\mathbb{R}$, teremos a equivalência

$x^3 = x$. Por fim, fatorando o polinômio $P(x) = x^3 - x$, obteremos $x = 0$, $x = -1$ ou $x = 1$ como raízes reais.

$$\therefore S = \{-1,0,1\}$$

Exemplo 4.2.9: Encontre todos os valores reais de x que verificam a

$$\frac{\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}}{2} = \frac{(x+1) + \sqrt{x^2-1}}{3} \qquad (1)$$

Comentários:

Não que seja o método mais rápido ou apropriado, mas mudar variáveis nesse problema evitaria lidar com equações algébricas do quarto grau. Seus termos são favoráveis a uma mudança por duas novas variáveis específicas, ou ainda por uma somente, desde que escolhida convenientemente.

O uso da parametrização se torna possível para $t = 1$, porém pode tornar as sentenças obtidas cada vez mais complicadas visto possivelmente a utilização de equações algébricas do quarto grau em t. Por isso, não seria recomendado.

Resolução: Façamos a dupla mudança de variáveis $u = x + 1$ e $v = x - 1$ com $x \geq 1$.

Nosso problema se transformará em resolver para u e v:

$$3\left(\sqrt{u} + \sqrt{v}\right) = 2\left(u + \sqrt{uv}\right) \qquad (3)$$

Elevando ambos os membros ao quadrado de (3), obtemos:

$$9\left(u + v + 2\sqrt{uv}\right) = 4u\left(u + v + 2\sqrt{uv}\right)$$

$$\left(u + v + 2\sqrt{uv}\right)(4u - 9) = 0 \qquad (4)$$

Visto que $u > 0$ e $v > 0$, segue a partir de (4) : $4u = 9 \Leftrightarrow u = \frac{9}{4}$.

Por isso, $x = u - 1 = \frac{9}{4} - \frac{4}{4} = \frac{5}{4}$.

De um modo alternativo, consideremos $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}$ para $x \geq 1$.

Veja que $y^2 = 2x + 2\sqrt{x^2-1} \Leftrightarrow y^2 + 2 = 2\left(x + 1 + \sqrt{x^2-1}\right)$. Reescrevendo (1), segue:

$$\frac{\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}}{2} = \frac{(x+1) + \sqrt{x^2-1}}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\left(\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}\right) = 2((x+1) + \sqrt{x^2-1}) \tag{5}$$

Substituindo y em (5), temos:

$$3y = y^2 + 2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y^2 - 3y + 2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y = 1 \text{ ou } y = 2.$$

Por isso, seguem dois casos a analisar:

$$\begin{cases} \sqrt{x-1} + \sqrt{x+1} = y = 1 & (6) \\ \text{ou} & \\ \sqrt{x-1} + \sqrt{x+1} = y = 2 & (7) \end{cases}$$

Primeiramente, resolvendo (6), temos:

$$\left(\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}\right)^2 = 1 \Rightarrow 2x + 2\sqrt{x^2-1} = 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x - 1 = -2\sqrt{x^2-1} \Rightarrow (2x-1)^2 = 4(x^2-1) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 = 4x^2 - 4 \Leftrightarrow x = \frac{5}{4}$$

Notemos que $x = \dfrac{5}{4}$ não é solução de (6), pois o domínio de $2x - 1 = -2\sqrt{x^2-1}$ é $D = (-\infty, \frac{1}{2}]$.

Analogamente para (7), segue:

$$\left(\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}\right)^2 = 4 \Rightarrow 2x + 2\sqrt{x^2-1} = 4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x - 2 = -\sqrt{x^2-1} \Rightarrow (x-2)^2 = x^2 - 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = x^2 - 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{4}$$

$$\therefore S = \{\frac{5}{4}\}$$

Exemplo 4.2.10: Determinar todos os reais $x > 0$ que verificam a $\sqrt{x} = 1 + \sqrt{1 + \sqrt[4]{x}}$

Comentários:

Dada essa equação, notemos que elevando ela ao quadrado, temos um novo problema que não se torna simples, veja a seguir:

$$\left(\sqrt{x}\right)^2 = \left(1 + \sqrt{1 + \sqrt[4]{x}}\right)^2 \Leftrightarrow x = 2 + \sqrt[4]{x} + 2\sqrt{1 + \sqrt[4]{x}}$$

É possível que chegamos a uma equação algébrica de grau superior a 16 caso elevamos $x = 2 + \sqrt[4]{x} + 2\sqrt{1 + \sqrt[4]{x}}$ várias vezes a potências inteiras de modo a eliminar os radicais. Isso tornará o trabalho de resolução de equações muito dificultoso e lento.

Resolução:

Pela substituição de variáveis $y = \sqrt{x}$ em $\sqrt{x} = 1 + \sqrt{1 + \sqrt[4]{x}}$, obtemos a nova equação $y = 1 + \sqrt{1 + \sqrt{y}}$, para $y \geq 0$, a qual chamaremos de (1).

Consideremos $f(y) = 1 + \sqrt{y}$, monótona estritamente crescente para $y \geq 0$. Por isso, (1) poderá ser reescrita da forma $f\big(f(y)\big) = y$. Das hipóteses existentes, temos que $f\big(f(y)\big) = y \Leftrightarrow f(y) = y$. Dessa equivalência, obtemos:

$$1 + \sqrt{y} = y \Rightarrow y^2 - 2y + 1 = y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y^2 - 3y + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \text{ ou } y = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

Notemos que $1 + \sqrt{y} = y \Leftrightarrow y^2 - 2y + 1 = y$ é uma equivalência válida na restrição $y \geq 1$, pois $1 + \sqrt{y} = y \Leftrightarrow \sqrt{y} = y - 1$. Logo temos que $y = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ não é válida pois nesse caso $y < 1$. Devido a isso e como $\sqrt{x} = y$, temos que $x = y^2$ com:

$$x = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{7+3\sqrt{5}}{2}$$

$$\therefore S = \left\{\frac{7 + 3\sqrt{5}}{2}\right\}$$

Exemplo 4.2.11: Mostre que em $\mathbb{R}$ existe um único x tal que $2^x + 2^{3x} = 3^x + 3^{3x}$.

Comentários:

No exemplo acima, pode ser obtida a solução $x = 0$ por verificação. Resolveu o problema todo? Como mostrar que será a única solução?

Nesse caso analisar a monotonia não é uma boa pedida, mas ainda traria boas conclusões sobre a unicidade da raiz. De fato, $2^x + 2^{3x} = 3^x + 3^{3x} \Leftrightarrow 2^x - 3^x = 3^{3x} - 2^{3x}$. Similarmente ao Exemplo 4.2.2, temos que $f(x) = 2^x - 3^x$ e $g(x) = 3^{3x} - 2^{3x}$ são tais que $f(x) \cdot g(x) < 0$ em cada um dos intervalos $(-\infty, 0)$ e $(0, +\infty)$. Esse fato mostra a unicidade.

O método da equação funcional irá confirmar essas análises:

Resolução:

Dado $f(x) = x^3 + x$, devemos resolver $f(2^x) = f(3^x)$ com $2^x,\ 3^x > 0$.

Para $x > 0$, f é monótona estritamente crescente. Portanto, pode-se concluir que $2^x = 3^x \Leftrightarrow x = 0$.

$$\therefore S = \{0\}$$

4.3 Limites de alguns métodos apresentados

Apesar dos métodos apresentados terem o potencial de resolver inúmeras classes de equações, é relevante a ciência do leitor quanto aos limites de alguns métodos que foram apresentados no Capítulo 3.

Iremos apresentar algumas dessas limitações, como por exemplo, não ser possível a determinação de todas as soluções de uma equação dada, ou existir condições especiais em que se aplica o método, entre outros.

Exemplo 4.3.1: (RAMOS, 2013 , adaptado) Determine as soluções reais de:

$$\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{x}{2}} = \frac{x^2}{8} + \sqrt[3]{\frac{4}{x^2}} \tag{1}$$

Comentários: Veja que (1) admite uma expressão de raiz cúbica em um de seus termos, com raíz quadrada em outro. Será dificultoso demais lidar com operações algébricas obtidas por uso de potenciação inteira em ambos os membros.

O uso da monotonia será provavelmente inconclusivo, pois a função poderá não ser adaptável para que possamos ajustá-la e que ainda satisfaça o método da monotonia. Se possível por equações funcionais, em particular, não será trivial devido à diferença estrutural dos termos, um dentro de uma raiz quadrada e o outro em uma raiz cúbica.

Portanto, iremos por tentativa utilizar o método da mudança de variáveis:

Resolução: Para $D = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$, pela mudança de variável $z^6 = \frac{x}{2}$ em (1), temos:

$$\frac{1}{2z^6} + z^3 = \frac{z^{12}}{2} + \frac{1}{z^4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z^{18} - 2z^9 + 2z^2 - 1 = 0 \tag{2}$$

Como $P(z) = z^{18} - 2z^9 + 2z^2 - 1$ é tal que $P(1) = 0$, logo $z = 1 \Rightarrow \frac{x}{2} = 1 \Rightarrow$ $x = 2$.

Na divisão de $P(z)$ por $z - 1$, temos como quociente:

$$Q(z) = z^{17} + z^{16} + \cdots + z^9 - z^8 - z^7 - \cdots - z^2 + z + 1 \tag{3}$$

RAMOS (2013, p. 31) destaca que a raiz $x = 2$ foi obtida de tal equação anos depois de ter proposto inicialmente em sala de aula para os seus alunos e ter tido insucesso na sua determinação por um método que não envolvesse aproximação ou tentativas numéricas.

Uma das raízes a ser encontrada, no caso $x = 2$, somente ocorreu a partir de uma resolução advinda de um professor pesquisador em Álgebra, que utilizou métodos analíticos não numéricos para deduzir uma das raízes de tal equação (RAMOS, 2013, p. 31) Contudo, e se o problema for achar todas as possibilidades de solução? Como encontrar todas as possibilidades para o polinômio (3), que pode ter até 17 raízes reais distintas?

Exemplo 4.3.2: (IME, 2001) Resolva a equação $\sqrt{5 - \sqrt{5 - x}} = x$ sabendo-se que $x > 0$. [11]

Comentários:

O método da equação funcional para f estritamente crescente não irá funcionar aqui, pois $f = f(x) = \sqrt{5 - x}$ é estritamente decrescente em $D = \{x \in \mathbb{R}: 0 < x \leq 5\}$.

Ainda assim, segue que $h(x) = \sqrt{5 - \sqrt{5 - x}}$ é estritamente crescente em D, e como $g(x) = x$ também o é, o estudo da monotonia restrito aos casos analisados nesse trabalho não é conveniente para determinar sua raiz.

[11] Sigla IME utilizada no Exemplo 4.3.2 = Instituto Militar de Engenharia.

Resolução: Poderemos tentar a resolução ao usar o parâmetro $t = 5$. Elevando ao quadrado a equação transformada, veja que:

$$\sqrt{t - \sqrt{t - x}} = x \implies \left(\sqrt{t - \sqrt{t - x}}\right)^2 = x^2 \implies$$

$$\implies \mp\left(t - \sqrt{t - x}\right) = x^2$$

A partir daí, temos dois casos a analisar. O primeiro caso será a equação paramétrica $t - \sqrt{t - x} = x^2$ e o segundo caso será $\sqrt{t - x} - t = x^2$.

Manipulando o primeiro caso, teremos $\sqrt{t - x} = t - x^2$, e de modo análogo para o segundo caso, $\sqrt{t - x} = t + x^2$.

Consideremos o primeiro caso e obteremos as seguintes implicações:

$$\sqrt{t - x} = t - x^2 \implies \left(\sqrt{t - x}\,\right)^2 = (t - x^2)^2 \implies \mp(t - x) = (t - x^2)^2$$

Analogamente em termos de raciocínio para o segundo:

$$\sqrt{t - x} = t + x^2 \implies \left(\sqrt{t - x}\,\right)^2 = (t + x^2)^2 \implies \mp(t - x) = (t + x^2)^2$$

Para a análise de todos os casos possíveis, teremos que analisar as quatro equações a seguir:

$$\begin{cases} (t - x) = (t - x^2)^2 & (1) \\ -(t - x) = (t - x^2)^2 & (2) \\ (t - x) = (t + x^2)^2 & (3) \\ -(t - x) = (t + x^2)^2 & (4) \end{cases}$$

Analisemos a primeira equação da lista acima (equação (1)):

$$(t - x^2)^2 = t - x \iff$$

$$\iff t^2 + (-1 - 2x^2)t + (x^4 + x) = 0 \qquad (5)$$

Pela fórmula resolvente em (5), segue:

$$t = \frac{2x^2 + 1 \mp \sqrt{(-1 - 2x^2)^2 - 4(x^4 + x)}}{2} \iff$$

$$\iff t = \frac{2x^2 + 1 \mp \sqrt{4x^2 - 4x + 1}}{2} \iff$$

$$\Leftrightarrow\ t = \frac{2x^2 + 1 \mp \sqrt{(2x-1)^2}}{2}$$

Portanto, para $2x - 1 \geq 0$, segue que $\sqrt{(2x-1)^2} = 2x - 1$, logo:

$$t = \frac{2x^2 + 1 + (2x-1)}{2}$$

De outra forma, para $2x - 1 < 0$, iremos concluir que:

$$t = \frac{2x^2 + 1 - (2x-1)}{2}$$

Após simplificarmos, temos para $t = 5$ os dois casos a seguir :

$$\left| \begin{array}{ll} x^2 + x = 5 & (6) \\ \\ x^2 - x + 1 = 5 & (7) \end{array} \right.$$

com (6) válida para $2x - 1 \geq 0$ e (7) válida segundo a condição $2x - 1 < 0$. Ao resolver os dois casos anteriores, com base nas restrições, seguem as possibilidades:

$$\mathrm{x} \in \left\{ \frac{-1+\sqrt{21}}{2}, \frac{1-\sqrt{17}}{2} \right\}$$

Como ainda, $0 < x \leq 5$, temos que $x = \frac{-1+\sqrt{21}}{2}$.

Vejamos o dimensionamento desse problema para a equação (3):

$$(t + x^2)^2 = t - x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t^2 + (2x^2 - 1)t + (x^4 + x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ t = \frac{-2x^2 + 1 \mp \sqrt{(-1 + 2x^2)^2 - 4(x^4 + x)}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ t = \frac{-2x^2 + 1 \mp \sqrt{-4x^2 - 4x + 1}}{2}$$

Para $t = 5$, temos: $2x^2 + 9 = \mp\sqrt{-4x^2 - 4x + 1}$, equações muito trabalhosas.

O Método do parâmetro nesse caso tornou o problema mais complicado, expandiu sua dimensionalidade. Esse método pode resolver esse problema de determinação, mas segundo uma linha analítica completa, a um alto custo.

A abordagem do primeiro método também será exaustiva, por análise de até quatro casos, porém após alguns passos em sua utilização, equações algébricas não triviais aparecem. Vejamos um subcaso da resolução pelo método de equivalências ou implicações lógicas:

$$\sqrt{5-\sqrt{5-x}} = x \Rightarrow (5-x^2)^2 = 5-x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^4 - 10x^2 + x + 20 = 0$$

A menos que a última equação do quarto grau fosse resolvida, teríamos um novo problema talvez mais complexo que o original, dificultando a nossa resolução.

Exemplo 4.3.3: Determine todas as raízes reais de $(x+1)^6 = x^6$.

Comentários: Segundo a expressão analítica de $(x+1)^6 = x^6$, que chamaremos de (1), teremos duas metodologias que possam ser aplicadas : utilizar as equações funcionais ou equivalências.

Resolução:

Iremos fatorar (1) para tentar obtermos conclusões sobre o caso:

$$(x+1)^6 = x^6 \Leftrightarrow (x+1)^6 - x^6 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow ((x+1)^3)^2 - (x^3)^2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow ((x+1)^3 - x^3)((x+1)^3 + x^3) = 0 \qquad (2)$$

Tendo em vista que:

$$(x+1)^3 - x^3 = ((x+1)-x)((x+1)^2 + x(x+1) + x^2) =$$
$$= 3x^2 + 3x + 1 \qquad (3)$$
$$(x+1)^3 + x^3 = ((x+1)+x)((x+1)^2 - x(x+1) + x^2) =$$
$$= (2x+1)(x^2 + x + 1) \qquad (4)$$

Por isso, obtemos por (2),(3) e (4) que (1) pode ser expressa pela fatoração:

$$(2x+1)(3x^2+3x+1)(x^2+x+1) = 0$$

Como $\Delta < 0$ para os polinomios $3x^2 + 3x + 1$ e $x^2 + x + 10$ (ou seja, eles não têm raízes reais), concluímos que $(x+1)^6 = x^6 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$.

Por outro lado, esse mesmo caso pode ser expresso como $f(x+1) = f(x)$ para $f(x) = x^6$. Logo, obtemos a equivalência $x + 1 = x$, sem solução nos reais. Houve uma contradição?

Com efeito, isso ocorreu pois f não é estritamente monótona em $\mathbb{R}$. Por isso, verifiquemos quais dos intervalos o resultado vale. Veja que para $x > 0$ a interseção da imagem de $g(x) = x$ e $h(x) = x + 1$ é o intervalo $(1, +\infty)$ e para $x < -1$, o intervalo $(-\infty, -1)$. Nesses intervalos, f é monótona nas imagens de ambas funções e vale a equivalência que nos leva a sentença aberta $x + 1 = x$ sem validade para qualquer real.

No intervalo $[-1,0]$ o resultado não será válido em particular pois a interseção das imagens da g e da h é o conjunto $\{0\}$. Por isso, por verificação, é possível encontrar $f(-\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2})$ para $x = -\frac{1}{2}$.

Pelo uso da monotonia, é possível mostrar a unicidade dessa raiz, devido ao fato de $u(x) = (x+1)^6$ ser estritamente crescente e $v(x) = x^6$ ser estritamente decrescente em $[-1,0]$ com $u(-1) < v(-1)$ e $u(0) > v(0)$. Mais ainda, $u(x)$ e $v(x)$ são estritamente crescentes em $(0, +\infty)$ com $u(0) > v(0)$. De modo similar, $u(x)$ e $v(x)$ são ambas estritamente decrescentes em $(-\infty, -1)$ com $u(-1) < v(-1)$.

Exemplo 4.3.4: (POSSANI, 1990) Determine as soluções reais de $\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{x-1} = 1$.

Comentários: Esse exemplo está presente no artigo da Revista do professor de Matemática número 19. Iremos ressaltar a solução efetuada pelo professor Sidney Luiz Cavallanti a Cláudio Possani.

Basicamente na solução do professor Sidney foi utilizada a equivalência $x^n = y^n \Leftrightarrow x = y$ para n ímpar. A equação foi elevada a potências ímpares e obteve-se no final uma falsa raiz, que surpreendeu os solucionadores. Um processo ilícito foi realizado nas passagens da resolução dessa equação (POSSANI, 1990).

Resolução:

Eleva-se a equação ao cubo e obtemos:

$$2x-1+3\sqrt[3]{x-1}\cdot\left(\sqrt[3]{2x-1}\right)^2+3\left(\sqrt[3]{x-1}\right)^2\cdot\sqrt[3]{2x-1}+\ x-1=1 \Leftrightarrow \tag{1}$$

$$\Leftrightarrow 3-3x=3\sqrt[3]{x-1}\cdot\left(\sqrt[3]{2x-1}\right)^2+3\left(\sqrt[3]{x-1}\right)^2\cdot\sqrt[3]{2x-1} \Leftrightarrow \tag{2}$$

$$\Leftrightarrow 3-3x=3\sqrt[3]{x-1}\cdot\sqrt[3]{2x-1}\ \cdot(\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1}) \tag{3}$$

Substituindo $\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1}=1$ em (3) e simplificando, segue que :

$$1-x=\sqrt[3]{x-1}\cdot\sqrt[3]{2x-1}\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1-x)^3=(x-1)(2x-1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1-x^3+3x^2-3x=2x^2-3x+1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^3-x^2=0 \tag{4}$$

Ou seja, as raízes de (4) são $x=0$ ou $x=1$. Por outro lado, como citado por Possani (1990), e possível de ser verificado, $\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1}=1$ não tem $x=0$ como solução.

Possani (1990) enfatiza no seu artigo que o processo de resolução de uma equação pode incluir essas falsas raízes de acordo com o procedimento adotado. De fato, a passagem de (3) para (4) não gera uma equivalência, isto é, (3) $\Longrightarrow$ (4), mas não vale a recíproca. Isso complementa a definição de Delfino de equações consequentes, presente no Capítulo 3.

Possani (1990) ainda evidencia em seu artigo o cuidado que se deve obter no processo de resolução de equações, segundo o uso de processos analíticos que não geram equivalências, como a seguir:

$$\begin{cases} 2=x \\ \text{e} \\ x=2 \end{cases}$$

$$\therefore x=x$$

Substituir $2=x$ em $x=2$ gerou a sentença aberta $x=x$, válida para qualquer número real, gerando um problema de equivalência lógica entre as sentenças. Segundo Possani (1990): “Assim, o aparecimento de uma raiz falsa não está ligado ao fato de a equação ser irracional nem às potências que tomamos, e sim ao procedimento da resolução. ”

Exemplo 4.3.5: Qual número real x que garante a igualdade (1) abaixo?

$$\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2^{x+1}+3}+3}+3} = 2^x \tag{1}$$

Comentários:

Nesse exemplo mostraremos como o método pode ser ampliado, no sentido de incluir logaritmos, tema abordado na Educação Básica.

De outro modo, esse exemplo foi criado pelo autor para simplesmente impressionar o leitor, se for possível. Além disso, é mais um exemplo que utiliza um ou mais dos métodos expostos ao longo da trajetória de nosso trabalho.

Fato é que em alguns tipos de equações, digamos as mais complicadas, um ou mais métodos podem ser utilizados para extrair suas raízes. Para o autor, encontrar esse método que venha elucidar nosso problema é gratificante.

Resolução : Façamos a substituição $y = 2^x$, e reescreveremos (1) como:

$$\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2y+3}+3}+3} = y \tag{2}$$

Considere $f(y) = \sqrt{2y+3}$ estritamente crescente em $\mathbb{R}$ com domínio $y \geq -\frac{3}{2}$. Utilizando equações funcionais e seu método, poderemos escrever que:

$$f\Big(f\big(f(y)\big)\Big) = y \iff f(y) = y \tag{3}$$

Por isso, basta resolvermos:

$$\sqrt{2y+3} = y \iff y^2 = 2y+3 \iff y = 3 \text{ ou } y = -1$$

Como $y > 0$, segue que:

$$2^x = 3 \tag{4}$$

Observe que para (4) temos que $x = \log_2 3$.

$$\therefore S = \{\log_2 3\}$$

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Apresentamos nessa pesquisa alguns métodos para a resolução de certas equações. Esses foram selecionados, de modo cauteloso, para que garantam um recorte das possíveis classes de equações que podemos resolver com eles. Não iremos lograr com qualquer tipo de problema de determinação de incógnita com os métodos mostrados.

Por outro lado, trabalhamos ao longo da trajetória desse trabalho com a dimensão das possibilidades resolutivas que esses métodos podem trazer. Mais precisamente, quais tipos e estilos de equações serão abrangidas pelos métodos mencionados.

De fato, utilizamos esses métodos, com discussão e comentários sobre cada um deles, na sequenciação do trabalho em que envolve a parte dos exemplos. Sejam das obras consultadas, sejam de autoria, ou de reelaboração por alguma fonte, procuramos mostrar a multiplicidade de se resolver algumas equações, independentemente da dificuldade, por uma variedade de métodos, acarretando nas mesmas soluções quando aplicados segundo as particularidades de cada um.

O desenvolvimento histórico na resolução de equações, principalmente no enfoque das algébricas, não pode ser ignorado. Esses métodos, assim como as equações, têm o seu valor histórico. Não somente circunscritos pela analiticidade na busca de raízes das equações algébricas, como também desenvolvidos para outras de estruturas e naturezas diferentes.

Na introdução de nossa temática, expomos o questionamento referente ao leitor ou um profissional da Educação, de ter ferramentas para resolver problemas do tipo $2 + 3^{x+2} = x + 9^x$. Procuramos de certa forma, apresentar algumas saídas para esse impasse que possa acontecer, seja a partir de uma reflexão individual, seja a partir da dúvida de um aluno questionador, entre outros.

Ramos (2013) foi quem descreveu um professor que propôs uma equação em sala de aula, a qual não conseguiria resolver, inclusive diante das dificuldades e dos esforços que seriam empreendidos para solucioná-la. O professor não previamente quantificou o esforço que seria utilizado para resolver aquela equação, e se vê diante de um impasse conforme a dúvida de um de seus alunos questionadores.

Uma das motivações deste trabalho foi o estudo de equações de uma variável real e de métodos para buscar resolvê-las por diversas formas ou estratégias envolvendo análise matemática. Para a decolagem desse trabalho, principalmente o livro do V.P. Suprún (2009) e seu método por equações funcionais, assim como o artigo do Ramos (2013).

Procuramos buscar suprir a carência de pesquisas, artigos acadêmicos e trabalhos acadêmicos que tangenciam o tema abordado de modo mais amplo. É preciso, segundo o autor, dispor de mais material em termos acadêmicos que tratam de temas da Matemática que suscitam nos leitores a curiosidade, a descoberta e a motivação.

Esperamos que o conhecimento desenvolvido por esse tema possa servir de base para pesquisas futuras neste campo, além da elaboração de novos materiais que visam buscar outras formas alternativas de se resolver equações diversas, possibilitando uma melhor investigação e detalhamento sobre esse fantástico e relevante objeto matemático.

Reconhecemos, em certo sentido, de que talvez uma abordagem mais ampla, com mais exemplos das equações a serem resolvidas pelos métodos expostos, ou ainda, com mais estratégias, sejam algébricas, sejam gráficas ou geométricas na determinação das raízes incógnitas de tipos de equações não elementares e os quais suscitem espanto e curiosidade.

Mais ainda, acreditamos que é possível uma extensão do estudo desenvolvido ao longo desse trabalho quanto a esse objeto de pesquisa em outras oportunidades no futuro. Isso se trata de uma sugestão.

Para finalizar, esse tema foi desenvolvido por muito interesse do autor em ampliar esse campo de estudo na teoria sobre equações. A elaboração desse Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) contou com muita colaboração, do orientador, do orientando, e de muitas outras pessoas (amigos, professores, bibliografia recomendada). Houve desafios e dificuldades ao longo do processo de elaboração desse trabalho de conclusão, por outro lado, o que importa é que nosso objetivo seja cumprido com êxito.

REFERÊNCIAS

ALVES, F. G. **Soluções gerais de equações do terceiro e quarto graus e a relação entre números complexos e equações cubicas**. Dissertação (Mestrado Profissional em Rede Nacional – PROFMAT) – Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 2015. 89 p.

AMARAL, J. T. **Método de Viète para resolução de equações do 2º Grau.** In Revista do Professor de Matemática, [s.l.], n°.13, SBM , 1988, p.18-20.

BERNARD, J.E.; COHEN, M.P. **Uma integração dos métodos de resolução de equações numa seqüência evolutiva de aprendizado.** In: COXFORD, A. F.; SHUTTLE, A. P. (org). As idéias da álgebra. Traduzido por Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual Editora, 1994. p.111-126.

BOYER, C. B. **História da matemática.** Traduzido por Elza F. Gomide. 3. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2010. 496 p.

CAPUTI, A; MIRANDA, D. **Bases Matemáticas.** v. 13. Santo André: [s.n], 2017.

CONTINUIDADE e Teorema do Valor Intermediário. Disponível em: < >. Acesso em 25/11/17.

DELFINO, B.C. **Proposta de métodos para resolução de equações irracionais.** [s.d.]. Disponível em: <http://br.monografias.com/trabalhos3/proposta-metodos-resolucao-equacoes-irracionais/proposta-metodos-resolucao-equacoes-irracionais.shtml >. Acesso em 25/11/2017.

EVES, H. **Introdução à história da Matemática.** Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp: 2004. 844 p.

EXISTE Solução analítica? Revista do Professor de Matemática, n°. 84, SBM, 2014, p. 58-59.

GARBI, G.G. **O Romance das Equações Algébricas.** 3. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009. 240 p.

GUIDORIZZI, H.L. **Um Curso de Cálculo.** v. 1. São Paulo: Editora Livros Técnicos e Científicos, 1987.

IEZZI, G. e MURAKAMI, C. **Fundamentos da Matemática Elementar – Conjuntos, Funções.** 8. ed. v. 1. São Paulo: Atual, 2011.

IEZZI, G. **Fundamentos da Matemática Elementar – Complexos, Polinômios, Equações.** 7.ed. v. 6: São Paulo: Atual, 2011.

JUNIOR, F. M. **Métodos de Resolução de Equações do Segundo e do Terceiro grau**. Campo Grande: Dissertação (Mestrado) em Rede Nacional – PROFMAT – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2013.

KOERICH, A.C. **Um estudo sobre polinômios e sua abordagem no ensino.** Trabalho de Conclusão de Curso – Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Departamento de Matemática, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2000.

LIMA, E.L. **Meu Professor de Matemática e outras histórias.** Rio de Janeiro: SBM, 1991. 206p.

LIMA, E.L. et al. **A Matemática do Ensino Médio.** 6. ed. v. 3. Rio de Janeiro: SBM, 2006. 249p.

LIMA, P.C.de. **Fundamentos de Análise II**. Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2013. p. 13-21.

LOBO, F. C. G. D. **Números complexos, polinômios e equações algébricas.** 2017 . 74 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2017.

LOPES, H.B. **A resolução de equações.** Disponível em: < www.ipv.pt/millenium/ Millenium29/28.pdf>. Acesso em 15/10/17.

MARQUES, C. M. **Introdução à Teoria de Anéis.** Belo Horizonte: UFMG, 1999. p.34-38.

MILIES, C.P.**Breve História da Álgebra Abstrata.** In: II Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática, 2., 2004, Salvador. Textos (minicurso) ... Salvador: Universidade Federal do Salvador, 2004, p. 1-58.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático**. Traduzido e Adaptado por Heitor Lisboa Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1995. 196p.

POSSANI, C. **Uma equação interessante.** In Revista do Professor de Matemática, Rio de Janeiro, n°. 19, SBM, 1990, p.15.

RAMOS, J. I. da S.**Uma certa equação irracional.** Elementos Revista de Ensino e Pesquisa em Classes, Operações e Propriedades de Estruturas Algébricas (Edufac), Rio Branco, 3. ed., v. 2, n. 3, p. 26-34, jan. /dez. 2013.

SAHA, R. et al. **Functional Equations.** Disponível em: < https://brilliant.org/wiki/functional-equations/ >. Acesso em 25/11/17.

SILVA, M. H. M.; REZENDE, W. M. **Análise histórica do conceito de função.** Caderno Dá Licença, v. 2, p. 28-33, 1999.

SUPRÚN, V.P. **Métodos No Estándares Para La Resolución De Ecuaciones y Desigualdades.** Tradução de C.D.N. Hernández e J.E.P.Pérez. [S.l.]: URSS Moscú, 2009. 310p.

VALE, A. F. A. do. **As diferentes estratégias de resolução da equação do segundo grau.** 2013. 76 p. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal Rural do Semiárido Campus Mossoró (UFERSA), Rio Grande do Sul, 2013.