INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA

UMA PROPOSTA DE ENSINO DE EQUAÇÕES DIOFANTINAS LINEARES NO ENSINO BÁSICO UTILIZANDO A METODOLOGIA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Rafael Prado dos Santos

Trabalho de Conclusão do Curso Superior de Licenciatura em Matemática, orientado pela Profª. Ma. Valéria Ostete Jannis Luchetta.

IFSP
São Paulo
2014

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Santos, Rafael Prado.
Uma Proposta de Ensino de Equações Diofantinas Lineares no Ensino Básico Utilizando a Metodologia de Resolução de Problemas/ Rafael Prado dos Santos - São Paulo: IFSP, 2014.
78f

Trabalho de Conclusão do Curso Superior de Licenciatura em Matemática - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo
Orientadora: Valéria Ostete Jannis Luchetta

1. Resolução de Problemas. 2. Equações Diofantinas Lineares. 3. Sequência Didática. 4. Contextualização. 5. Linguagem Matemática I. Título do trabalho.

"O sucesso é ir de fracasso em fracasso sem perder entusiasmo".

Winston Churchill, estadista britânico.

À Minha Filha Débora,

por ser o anjo que me guia.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, meus pais por todo o apoio durante o curso, sem eles eu não me tornaria o profissional que sou hoje.

Minha namorada Pamela Pinheiro e nossa filha Débora Prado, por todos os bons momentos que me propuseram, pela assistência em decisões difíceis, pelo apoio em momentos não tão simples que passei durante o curso e durante a minha carreira. Ambas me deram forças para não desistir e lutar pelo meu sonho.

Meus colegas de faculdade Aline, Carol, Luana, Orlando, Elígio, Anderson (Perucão), Wilian (Bomba), Thais e Thalita que me ajudaram muito durante todo o curso e, apesar das poucas disciplinas juntas no final do meu ciclo, sempre estiveram presentes. Agradeço em especial André Rosale e Leonardo Cáscio, por todas as madrugadas de sexta-feira que passamos estudando pesado, por todas as dificuldades que superamos juntos durante o curso.

Aos meus professores que tanto me ensinaram, que tanto me aconselharam, que sempre estiveram presentes sanando cada dúvida que eu tinha. Pela enorme contribuição à minha formação, pela inspiração, enfim, por tudo.

A minha orientadora Profª. Ma. Valéria Ostete Jannis Luchetta que me ajudou muito neste trabalho, me guiou desde as minhas dúvidas com relação ao tema, que mesmo durante sua licença para o doutorado se reunia comigo todas as semanas.

O Prof. Me. Henrique Marins de Carvalho por toda a assistência durante as disciplinas TC1M7 e TC2M8. Foram muitas dúvidas sanadas, excelentes conselhos, um auxílio que com certeza fez este trabalho mais eficiente.

A Profª Dra. Cristina Lopomo Defendi por ter me auxiliado quanto à gramática.

A Profª Dra. Graziela Marchi Tiago e Prof. Me. Ronaldo Barros Órfão por contribuírem com a avaliação e sugestões para este trabalho.

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo mostrar como o conceito de equações diofantinas lineares pode ser abordado no ensino básico por meio da metodologia de resolução de problemas. Baseamo-nos nos *PCN* (BRASIL, 1998), *PCNEM* (BRASIL, 2000) e nas competências da *Matriz de Referência para o ENEM* (BRASIL, 2009) para justificar as contribuições que o conceito de equações diofantinas lineares pode trazer aos alunos da educação básica e, além disso, apoiamo-nos, também, em Pommer (2013) que defende o estudo dessas equações nesse estágio. Relatamos a importância do ensino por meio da metodologia de resolução de problemas utilizando um roteiro composto por nove passos desenvolvido por Onuchic e Allevato (2011) e o quanto um aluno pode aprender um novo conceito de uma forma mais eficaz por meio desta metodologia. Propomos uma sequência didática para o ensino de equações diofantinas lineares baseada na metodologia de resolução de problemas, uma proposta que caberá ao professor aplicar o roteiro de Onuchic e Allevato (2011) com o objetivo de levar o aluno a desenvolver o conceito das equações diofantinas lineares por meio dos problemas. Por fim, aplicamos o jogo “Escova Diofantina” mostrando que há a possibilidade da união do conceito de equações diofantinas lineares com a metodologia proposta. Com este trabalho, procuramos justificar que o conceito de equações diofantinas lineares pode ser aplicado ao ensino básico e mostrarmos o quanto é importante um aluno desenvolver um novo conceito por meio de um problema e, assim, exemplificar que o conceito de equações diofantinas lineares pode ser desenvolvido por meio da metodologia de resolução de problemas.

Palavras-chave: Resolução de Problemas, Equações Diofantinas Lineares, Sequência Didática, Contextualização, Linguagem Matemática.

A TEACHING PROPOSAL OF LINEAR DIOPHANTINE EQUATIONS USING THE METHODOLOGY OF PROBLEM SOLVING

ABSTRACT

This work aims to show how the concept of linear diophantine equations can be approached in the basic education through the methodology of problem solving. We base it on *PCN* (BRASIL, 1998), *PCNEM* (BRASIL, 2000) and on the competencies of the *Matriz de Referência para o ENEM* (BRASIL, 2009) to justify the contributions that the concept of linear diophantine equations can bring to the students of basic education and, in addition, we support on Pommer (2013) who defends the study of these equations in basic education. We report the importance of teaching through methodology of problem solving using a script consisting in nine steps developed by Onuchic and Allevato (2011) and how much a student can learn a new concept in a more effective way through this methodology. We propose a didactical sequence for teaching linear diophantine equations based on the methodology of problem solving, a proposal that should be up to the teacher to apply the script of Onuchic and Allevato (2011) with the objective of take the student to develop the concept of linear diophantine equations through the problems. Finally, we apply the game "Escova Diofantina" showing that there is the possibility of the union of the concept of linear diophantine equations with the methodology proposed. With this work, we try to justify that the concept of linear diophantine equations can be applied to basic education and show how important is a student develop a new concept through a problem and so, exemplify that the concept of linear diophantine equations can be developed through the methodology of problem solving.

Keywords: Problem Solving, Linear Diophantine Equations, Didactical Sequence, Contextualization, Mathematical Language.

LISTA DE FIGURAS

Pág.

LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

EDL	Equações Diofantinas Lineares
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
GTERP	Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas
MDC	Máximo Divisor Comum
PCN+	Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PCNEM	Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio

LISTA DE SÍMBOLOS

R	Conjunto dos Números Reais
R^*	Conjunto dos Números Reais Não Nulos
Z	Conjunto dos Números Inteiros
$\subset$	Contido
$\mid$	Divide
†	Não Divide
$\in$	Pertence

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Neste trabalho, discorreremos sobre dois temas: resolução de problemas e equações diofantinas lineares (EDL) voltadas ao ensino básico. Nosso propósito é criar uma conexão entre os temas mostrando a importância de cada um e a possibilidade de se trabalhar simultâneamente com eles.

Temos como objetivo mostrar como o conceito de EDL pode ser trabalhado de uma forma a ampliar as possibilidades de estratégias dos alunos quanto a determinados problemas do ensino básico, desenvolvendo sua capacidade de raciocínio e seu pensamento matemático. Queremos mostrar que ao resolvermos um problema, é possível que haja várias estratégias de resolução e que os alunos podem ser capazes de resolver o problema ou uma parte do problema cujo conceito ainda não foi visto.

O interesse pelo tema surgiu após uma aula ministrada pelo professor Rafael Prado dos Santos em uma turma de 7º ano do ensino fundamental de uma escola pública estadual, situada em Carapicuíba/SP, cujo tema era sistemas lineares de primeiro grau no qual era trabalhado um sistema com duas equações polinomiais de primeiro grau e duas incógnitas. Ao resolver um problema de sistemas lineares, foi concluído que o sistema é SPI (sistema possível e indeterminado) e uma aluna questionou a possibilidade de prosseguir no problema, pois se ele é possível, então significa que há soluções. Um sistema possível e indeterminado é dado quando após o desenvolvimento do sistema nos deparamos com apenas uma equação e duas incógnitas cujos coeficientes são não nulos. O termo indeterminado significa que o sistema tem infinitas soluções no conjunto dos números reais. Mas se procurarmos apenas as soluções inteiras podemos utilizar o conceito de EDL. Ele nos permite determinar, caso a equação tenha solução, todas essas soluções inteiras e, apesar de ser um conceito visto apenas em nível superior, pode ser muito bem trabalhado no ensino básico, pois explora conceitos que já são vistos neste nível de ensino.

Após a decisão de propor esse novo conceito junto ao ensino básico, não tínhamos a intenção de que ele apenas fosse acrescentado aos alunos como um novo conceito. Pensamos em trabalhá-lo explorando outros quesitos como o pensamento matemático do aluno, a sua curiosidade e a capacidade de investigação.

Então decidimos utilizar a metodologia de resolução de problemas, na qual, por meio de um problema cujo conceito ainda não foi estudado, o aluno deverá desenvolvê-lo com base nos conceitos previamente vistos e com a devida orientação do professor que não participará como o transmissor do conhecimento, mas sim como o orientador da produção de significado desse conhecimento.

Para a construção deste trabalho, nos basearemos nas seguintes questões: é viável a aplicação de EDL no ensino básico? Qual a importância de ensinar matemática pelo método de resolução de problemas? É possível ensinar EDL utilizando a métodologia de resolução de problemas?

Para responder a essas questões, dividimos este trabalho da seguinte forma:

No capítulo 2, apresentamos os autores nos quais iremos basear o nosso trabalho e expomos um pouco sobre seu currículo e contribuições para o nosso tema.

No Capítulo 3, descrevemos a metodologia de resolução de problemas e sua importância para o ensino de Matemática, o papel do professor e a importância de um problema contextualizado.

No capítulo 4, discorremos sobre as EDL, começando com uma nota histórica envolvendo Diofante de Alexandria e sua ligação com as equações indeterminadas. Mostramos as contribuições que as EDL podem trazer com relação ao ensino de matemática para um aluno do ensino básico.

No capítulo 5, propomos uma sequência didática para o ensino de EDL baseda na metodologia de resolução de problemas. Definimos os conceitos e expomos algumas proposições e teoremas necessários para a proposta da sequência didática. Iniciamos com problemas de conceitos básicos necessários tais como divisibilidade, máximo divisor comum (MDC) e equações polinomiais de 1º grau. Posteriormente, propomos os problemas de EDL.

No capítulo 6, relatamos uma experiência realizada utilizando a metodologia de resolução de problemas e o jogo *Escova Diofantina*. Nossa proposta geral deste trabalho é incluir o conceito de EDL no ensino básico, assim fizemos uma experiência com alunos do ensino superior que ainda não tiveram contato com EDL para inferirmos se é possível trabalhar com as EDL por meio da metodologia de resolução de problemas. Nosso objetivo era, também, verificar o desenvolvimento com relação ao conceito de EDL para melhor propormos o jogo a uma turma de ensino básico. Relatamos o andamento da atividade conforme o jogo avançava, o pensamento dos alunos quanto ao novo conceito, as perguntas e conclusões.

No capítulo 7, apresentamos as considerações finais, respondendo às questões propostas na pesquisa.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Como nosso trabalho envolve dois temas, nossa fundamentação teórica tem como base dois autores no que diz respeito à metodologia de resolução de problemas e um autor cujo trabalho envolve EDL aplicadas no ensino básico. Para o tema resolução de problemas baseamo-nos em Lourdes de la Rosa Onuchic e Nora Suely Gomes Allevato com o artigo *Pesquisa em Resolução de Problemas: Caminhos, Avanços e Novas Perspectivas* (2011). Com relação às EDL, trabalharemos com Wagner Marcelo Pommer e sua obra *Equações Diofantinas Lineares no Ensino Básico: Uma abordagem didático-epistemológica* (2013).

2.1. Lourdes de la Rosa Onuchic e Nora Suely Gomes Allevato

Em 1954, Onuchic[1] concluiu sua graduação no curso de Bacharelado e Licenciatura em Matemática pela Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da USP/SP. Posteriormente, em 1971, realizou seu mestrado em Matemática pela Escola de Engenharia de São Carlos (USP). Em 1978, fez seu doutorado em Matemática pelo Instituto de Ciências Matemática de São Carlos (USP). Possui experiência na área de educação, mais precisamente em educação matemática, seus principais temas de trabalho e pesquisa são: resolução de problemas, educação matemática, metodologia de ensino, formação de professores e ensino-aprendizagem-avaliação de matemática. Onuchic é coordenadora do Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas (GTERP) que tem suas atividades desenvolvidas no Departamento de Matemática da UNESP, campus Rio Claro. O foco do grupo tem sido a produção científica e atividades de aperfeiçoamento na linha de resolução de problemas. O GTERP[2] tem como membros alunos e ex-alunos do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (PGEM) com interesse em obterem aprofundamento nos conhecimentos, porém alunos especiais também são aceitos, desde que busquem amadurecimento de seus projetos futuros assim como professores que visam o aprimoramento de sua prática docente.

[1] Dados retirados do Curriculo Lattes, disponível em: http://lattes.cnpq.br/8641323605322627. Acesso em: 06 set. 2014.
[2] Dados referentes à GTERP estão disponíveis em: http://www2.rc.unesp.br/gterp/?q=quem-somos. Acesso em: 02 nov. 2014.

Em 1985, Allevato[3] terminou sua graduação no curso de Licenciatura e Bacharelado em Matemática pela Universidade Estatudal de Londrina (UEL) onde também fez seu mestrado em Matemática Pura em 1991. Seu doutorado foi em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, em 2005 onde, atualmente, é membro associado. Allevato tem experiência na docência em educação superior na própria área de educação, com ênfase em educação Matemática. Seus principais temas de atuação são: educação matemática, resolução de problemas, computadores, matemática e ensino-aprendizagem. Assim como Onichic, Allevato também é membro do GTERP.

Como mencionado acima, as duas autoras têm linhas de pesquisa que desenvolvem o tema resolução de problemas. Podemos associar suas contribuições em resolução de problemas com uma metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação, como uma metodologia pós-Polya que em sua obra *A Arte de Resolver Problemas* (2006) determinou quatro passos para a resolução de um problema. Onuchic e Allevato, junto a GTERP, refinaram tais passos da obra de Polya e desenvolveram um roteiro com nove passos visando a melhoria na aplicação da metodologia em sala de aula. Para melhor entendimento, vamos expor a seguir os quatro passos de Polya, extraídos de sua obra citada acima e posteriormente apresentaremos o roteiro com os nove passos desenvolvidos por Onuchic e Allevato junto a GTERP.

Os Quatro Passos de Polya

Passo um: compreensão do problema. Para iniciar o caminho em busca da resolução de um problema é preciso ter o domínio do problema, entender tudo o que o problema exige. Nesse caso é necessário verificar a incógnita, os dados que o problema oferece, tentar encontrar uma ligação entre esses dados e a incógnita, se os dados são suficientes ou insuficientes para determinar a incógnita, traçar uma figura se for conveniente.

Passo dois: estabelecimento de um plano. É preciso verificar se o problema já foi visto anteriormente mesmo que de uma forma diferente. Verificar se é de

[3] Dados retirados do Currículo Lattes, disponível em: http://lattes.cnpq.br/9614794595123496. Acesso em: 09 set. 2014.

conhecimento um problema parecido onde tenha a mesma incógnita, ou mesmo um outro problema que possa ser útil ao atual. Se tal problema for encontrado e que já foi resolvido, é preciso verificar se o plano estabelecido para ele pode ser utilizado no problema atual, ou em parte do problema atual, quem sabe até criar uma incógnita auxiliar. Se caso não souber resolver o problema atual, é necessário resolver problemas parecidos, problemas mais fáceis, mais específicos, problemas onde talvez apenas uma parte dos dados do problema atual são necessários, problemas que possam ser úteis para solucionar uma incógnita criada ao longo do problema atual para que se possa chegar à incógnita exigida.

> “Realmente, o principal feito na resolução de um problema é a concepção da idéia de um plano. Esta idéia pode surgir gradualmente ou, então, após tentativas infrutíferas e um período de hesitação, aparecer repentinamente, num lampejo, como uma “idéia brilhante”” (POLYA, 2005, p.7)

Passo três: execução do plano. No momento em que o plano é executado, é preciso verificar cada passo, demonstrá-los se possível, um detalhe incorreto e o problema poderá ser direcionado a uma solução indesejada.

> “O plano proporciona apenas um roteiro geral. Precisamos ficar convictos de que os detalhes inserem-se nesse roteiro e, para isto, temos de examiná-los, um após o outro, pacientemente, até que tudo fique perfeitamente claro e que não reste nenhum recanto obscuro no qual possa ocultar-se um erro.” (POLYA, 2006, p. 10)

Passo quatro: retrospecto. Neste último passo, é necessário verificar a possibilidade de se confirmar o resultado ou o argumento. Se é possível chegar à mesma solução por meio de outro caminho, e se é possível enxergar esse possível outro caminho rapidamente. Também é preciso verificar a possibilidade de utilizar a solução ou plano do problema em outro problema.

> “Até mesmo alunos razoavelmente bons, uma vez chegados à solução do problema e escrita a demonstração, fecham os livros e passam a outro assunto. Assim fazendo, eles perdem uma fase importante e instrutiva do trabalho da resolução. Se fizerem uma reflexão da resolução completa, reconsiderando e reexaminando o resultado final e o caminho que levou até este, poderão consolidar o seu conhecimento e aperfeiçoar a sua capacidade de resolver problemas”. (POLYA, 2006, p. 14).

Roteiro Desenvolvido por Onuchic e Allevato

O roteiro composto por nove passos foi retirado do artigo publicado pelas duas autoras entitulado *Pesquisa em Resolução de Problemas: Caminhos, Avanços e Novas Perspectivas* (2011), são eles:

Passo um: preparação do problema. É necessário saber escolher ou construir um problema visando o desenvolvimento de um novo conceito, tal problema será chamado de problema gerador. Devido a sua finalidade, é preciso que o conceito não tenha sido trabalhado em sala de aula anteriormente.

Passo dois: leitura individual. Depois de escolhido o problema, é preciso distribuir uma cópia desse problema para cada aluno para que possa ser feito a leitura.

Passo três: leitura em conjunto. Após a leitura individual, grupos serão formados para uma nova leitura em conjunto. Caso haja dificuldades referente ao entendimento do texto do problema, o professor poderá ler para os alunos. Caso a dificuldade seja em alguma palavra do texto, poderá utilizar um dicionário com os alunos.

Passo quatro: resolução do problema. Após o entendimento do problema, sem qualquer dúvida quanto ao enunciado (após o passo um de Polya), os alunos deverão, em seus grupos, buscar um meio de resolver o problema de uma forma cooperativa e colaborativa, sendo eles os responsáveis pelo desenvolvimento do conceito.

Passo cinco: observar e incentivar. Este passo é fundamental para o aluno como construtor do conceito e para o professor como o orientador. O professor deverá observar como cada grupo está se desenvolvendo em busca da resolução, incentivando o trabalho colaborativo, se preciso questionando os alunos de uma forma que eles avancem sobre suas próprias respostas. Como orientador, o professor precisa saber enxergar as dificuldades dos alunos para melhor formular essas questões motivadoras, saber ajudar os alunos em problemas secundários e na tradução para a linguagem matemática, nunca esquecendo que ele não é o transmissor do conhecimento, e sim o guia. Em geral, sua função é fazer o trabalho dos alunos ter uma continuidade.

Passo seis: registro das resoluções na lousa. Um representante de cada grupo deve ir à lousa mostrar como foi o andamento da resolução independente de estar correto ou incorreto, cada desenvolvimento de cada grupo deverá ser discutido.

Passo sete: plenária. Neste passo acontece as discussões referentes aos registros feitos na lousa, todos os alunos serão envolvidos na discussão, cada um defendendo seu ponto de vista. O professor deverá ser o guia da discussão, incentivando todos os alunos a participarem ativamente.

Passo oito: busca do concenso. É o momento onde, após todas as dúvidas dos alunos terem sido esclarecidas, o professor e os alunos procuram entrar em um acordo sobre o resultado correto dentre todos os propostos pelos grupos.

Passo nove: formalização do conteúdo. Neste útimo passo, o professor irá apresentar o conteúdo do problema formalmente na lousa, padronizado, com base em linguagem matemática baseado em toda construção realizada durante a resolução do problema. Serão destacadas as devidas demonstrações das propriedades e as diferentes técnicas operatórias.

> "[…] o ensino-aprendizagem de um tópico matemático começa com um problema que expressa aspectos-chave desse tópico, e técnicas matemáticas devem ser desenvolvidas na busca de respostas razoáveis ao problema dado. A avaliação do crescimento dos alunos é feita continuamente, durante a resolução do problema." (ALLEVATO e ONUCHIC, 2009)

2.2. Wagner Marcelo Pommer

Em 1983, Pommer[4] graduou-se em Engenharia Mecânica pela Univesidade Presbiteriana Mackenzie e, em 1996, concluiu o bacharelado em Física pela Pontifícia Universidade Católica/SP (PUC/SP). Na Universidade São Judas Tadeu, Pommer fez uma especialização em Matemática no ano de 1995. Seu mestrado em

[4] Dados retirados do Currículo Lattes, disponível em: http://lattes.cnpq.br/4262149292744127. Acesso em: 20 set. 2014.

Educação Matemática foi realizado no ano de 2008 também na PUC/SP. Em 2012, concluiu o doutorado em Educação pela Faculdade de Educação da USP. Sua pesquisa é voltada para a área de educação envolvendo Teoria Elementar dos Números sendo que seus principais temas são equações diofantinas lineares, frações contínuas e números irracionais. Vamos citar alguns trabalhos de Pommer que envolvem o tema abordado: *Equações Diofantinas Lineares: Um Desafio Motivador para Alunos do Ensino Médio.* (2008), *As Equações Diofantinas Lineares e o Novo Ensino Médio* (2011), *Equações Diofantinas Lineares: Um tema para articular conhecimentos matemáticos no ensino básico* (2013).

Em sua *obra Equações Diofantinas Lineares no Ensino Básico: Uma abordagem didático-epistemológica* (2013), Pommer levanta a questão sobre a pertinência em trabalhar EDL no ensino básico, e para responder essa questão, ele toma como base as competências propostas pela *Matriz de Referência para o ENEM* (BRASIL, 2009), entre essas competências está a conciliação de conteúdos e, com base nessa linha de raciocínio, as EDL têm muito a acrescentar, pois abrangem conceitos matemáticos vistos no ensino básico como MDC e equações polinomiais de 1º grau. Dessa forma, uma conexão entre conceitos podem ser trabalhados com este tema.

Com relação à pertinência de se estudar EDL no ensino básico, Pommer diz:

> Um estudo envolvendo a natureza do conhecimento envolvendo o tema das Equações Diofantinas Lineares revela a possibilidade de exploração de diversas estratégias de resolução, que possibilitam ao aluno a mobilização de competências essenciais. (POMMER, 2013, p. 8).

Pommer destaca a importância do repertório de estratégias envolvido em um problema tematizado sobre EDL, também destaca que através desse tipo de problema, um aluno poderá compreender o papel da escrita algébrica. É possível “desenvolver no aluno a capacidade de negociar significados aos conhecimentos matemáticos” (POMMER, 2013, p. 8).

Em geral, a obra de Pommer (2013) que usaremos como fundamentação teórica mostra as EDL de uma forma que permita enxerga-lás inseridas nas prerrogativas essenciais da Matemática no ciclo básico ao possibilitar a participação do aluno como argumentador com relação às linguagens matemáticas. Em frente a um problema matemático, o aluno terá possibilidades diversas para a resolução, poderá debater sobre qual a melhor estratégia. Nossa intenção ao propor as EDL no ensino básico vai de encontro com essa idéia de Pommer, fazer com que o aluno tenha outros pontos de vista à frente do problema.

3 METODOLOGIA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Acreditamos que o aluno quando desenvolve um conceito matemático por meio de suas próprias tentativas, tem a possibilidade de absorver e compreender o conceito de uma forma mais eficaz, não recorrendo às tecnicas de memorização. Queremos mostrar que o tema de EDL pode ser trabalhado no ensino básico, mas não temos a intenção de propor a inclusão deste conteúdo como sendo um conceito a mais dentre tantos outros. Nosso propósito é trabalhar o conceito no ensino básico como um recurso matemático possível que acrescente pontos de vista aos alunos, de forma que eles sejam capazes de utilizar o conceito para outros eventuais problemas. Logo, não se trata apenas de ver e sistematizar o conceito das EDL, mas sim entender quando será possível utilizar essa ferramenta, aumentando as possibilidades de estratégias dos alunos na resolução de problemas. Para isso, propomos que o aluno desenvolva o conceito por meio de um problema, compreendendo cada passo do conceito, diferentemente da metodologia tradicional, que encaminha o aluno à memorização no qual passam a decorar as resoluções, não desenvolvendo suas habilidades matemáticas, não se questionando quanto ao conceito, não criando curiosidades sobre os acontecimentos, não investigando, logo não obtendo um entendimento que poderia ampliar os conceitos matemáticos.

Dessa forma, vemos a metodologia de resolução de problemas como um método mais apropriado, em que o aluno desenvolve os conceitos por meio da resolução do problema, instigando sua curiosidade, questionando a si mesmo sobre as possíveis estratégias. Nesse caso, o professor tem o papel de guiar o aluno com questões ao invés de propor soluções e, com isso, após a resolução do problema o aluno terá adquirido um novo conceito ou uma parte do novo conceito no qual ele mesmo foi o responsável por desenvolver.

Polya faz uma observação sobre o ensino por meio da resolução de problemas em sua obra *A Arte de Resolver Problemas* (2006), onde relata sobre a importância da descoberta, sobre a importância de se resolver um problema mesmo que modesto:

> Uma grande descoberta resolve um grande problema, mas há sempre uma pitada de descoberta na resolução de qualquer problema. O problema pode ser modesto, mas se ele desafiar a curiosidade e puser em jogo as faculdades inventivas, quem o resolver, por seus próprios meios, experimentará a tensão e gozará o triunfo da descoberta. Experiências tais, numa idade susceptível, poderão gerar o gosto pelo trabalho mental e deixar, por toda a vida, a sua marca na mente e no caráter. (POLYA, 2006, p.v)

É cômodo encarar que o ensino, o aprendizado e a avaliação possam ser tratados como situações diferentes, porém ao encará-los simultaneamente segundo a proposta de Onuchic e Allevato (2011) da forma ensino-aprendizagem-avaliação, acredita-se que durante o processo de ensino, a aprendizagem é efetuada assim como a avaliação, os três processos ocorrendo ao mesmo tempo. Enquanto o aluno desenvolve ativamente o conceito por meio do problema utilizando e praticando o pensamento matemático, o professor o observa colaborando com as devidas orientações assim que necessário, dessa forma as duas partes avaliam o que está acontecendo. O professor, que na metodologia de ensino tradicional se encontra no centro das atividades, precisa se descentralizar, colocando os alunos no centro das atividades por meio desta metodologia, mas cabe ao professor acompanhar o crescimento e o desenvolvimento dos alunos durante as atividades de ensino. São mudanças necessárias que ambos precisam compreender e realizar.

O ensino-aprendizado-avaliação por meio da resolução de problemas (ALLEVATO e ONUCHIC, 2009) não vai de encontro a idéia da memorização, essa metodologia "reflete uma tendência de reação a caracterizações passadas como um conjunto de fatos, domínio de procedimentos algorítmicos ou um conhecimento a ser obtido por rotina ou por exercício mental" (ONUCHIC, 1999, p. 203 *apud* ONUCHIC e ALLEVATO, 2009, p. 6).

Quando se trata de resolução de problemas, o professor tem um papel fundamental com relação a orientação do aluno durante a resolução. Segundo Polya (2006), é importante que o professor se coloque no lugar do aluno e tente ver aquilo que o aluno está vendo para melhor orientá-lo. Caso haja a percepção de que o aluno não esteja avançando no problema, é necessário um questionamento que partirá do professor, uma indicação ou sugestão, de forma que guie o aluno na estratégia determinada. Por isso é necessário que o professor “veja” através dos “olhos” do aluno, para que essa questão ou indicação seja algo que o próprio aluno poderia ter pensado. Porém, dependendo dessa indicação ou sugestão (VAN DE WALLE, 2009) o aluno não precisa se sentir obrigado a adotá-la, poderá simplesmente refletir sobre ela, sem encarar tal sugestão como único meio.

Não se deve confundir auxílio com solução, (BUSCHMAN, 2003 *apud* VAN DE WALLE, 2009) é fato que o professor quer ajudar um aluno com dificuldades, mas é preciso ser cauteloso, antes de sugerir ao aluno um possível caminho à resolução, o professor deve se preocupar com relação ao porque da dificuldade do aluno já que a dificuldade pode ser em relação a compreensão do problema ou mesmo com relação a algum conceito mais simples. O professor precisa compreender o quanto é importante o seu papel e o quanto o aluno tem a ganhar quando esse papel é feito da melhor forma possível.

Se o professor (POLYA, 2006) deseja que seus alunos tenham o entusiamo quanto a resolver problemas, é preciso cativá-los a isso, atraí-los, mostrar inúmeras vezes como se deve fazer, como se deve pensar, deixá-los praticar. Várias são as perguntas idênticas que o professor irá fazer aos alunos para auxiliá-los em um problema, como por exemplo “qual é a incógnita?”. Dessa forma é interessante que à necessidade de refazer a pergunta, faça de uma forma diferente como “o que é que se deve procurar?”, sempre de forma natural. Quando estamos resolvendo um problema para o aluno, mostramos como deve se fazer. É preciso que o professor faça a si mesmo os mesmos questionamentos que faria ao aluno no momento de auxiliá-lo no problema.

> O estudante deve adquirir tanta experiência pelo trabalho independente quando lhe for possível. Mas se ele for deixado sozinho, sem ajuda ou com auxílio insuficiente, é possível que não experimente qualquer progresso. O professor deve auxiliar, nem demais nem de menos, mas de tal modo que ao estudante caiba uma *parcela razoável de trabalho*. (POLYA, 2006, p. 1)

Um problema cujo conceito ainda não foi estudado, trará junto com a sua resolução (RIBEIRO, 2010) um aprendizado baseado em tentativas em que o solucionador irá traçar planos, supor caminhos, às vezes frustrar-se com o caminho optado e, posteriormente, refletir sobre os seus indevidos passos até que alcance um plano correto que possa o levar à resolução do problema ou à resolução de um problema criado por ele dentro do problema inicial. O conhecimento adquirido dessa forma é visto como um conhecimento desenvolvido, sem a necessidade de ter decorado passos de resolução.

Errar faz parte do aprendizado, se o aluno estiver “imerso” no problema, de uma forma que ele precise (para si) resolvê-lo, fará com que ele tenha um bom aproveitamento mesmo ao errar algum passo, principalmente no momento da percepção do erro. Saber que o passo está equivocado o levará a retroceder no problema, e isso não será tempo perdido pois no momento desse passo o aluno estava pensando matematicamente, raciocinando em um plano para resolver o problema, e isso requer ferramentas matemáticas que serão postas em treinamento.

A resolução de um problema (BRANCA, 1997 *apud* RIBEIRO, 2010) não tem como objetivo verificar se o aluno aprendeu ou não o conteúdo, mas sim, levar o aluno à construção do conceito através do desenvolvimento do pensamento matemático, ao contrário da metodologia tradicional na qual o professor testa os alunos com problemas geralmente correlatos aos problemas resolvidos em sala. Com a metodologia tradicional, ao enfrentar um problema não correlato, o aluno, geralmente aquele que não se sente confortável com a Matemática, pode não conseguir desenvolvê-lo pois está acostumado a ter os passos memorizados.

De acordo com Ribeiro (2010), um problema matemático não precisa, necessariamente, ser um problema complicado no qual se gastará horas para resolver. Podemos trabalhar com um problema simples retirado de um livro do 5º ano do ensino fundamental por exemplo, algo que possa ser solucionado rapidamente contanto que esteja coerentemente contextualizado e, também, de forma que ajude o solucionador a aumentar seus conceitos matemáticos por meio do problema.

Quando falamos sobre contextualização de um problema, queremos mostrar que um problema não contextualizado pode não gerar a devida curiosidade ou entusiasmo de ser resolvido pelo aluno, principalmente se o aluno não se sente confortável com

Matemática. Segundo o PCN+ (BRASIL, 2002) existem bons pontos de partida para a construção da nova escola, porém esses pontos de partida encontram obstáculos, e um desses obstáculos citados por Brasil (2002) é a descontextualização de um problema, que gera o desinteresse por parte do aluno e o desentendimento do conceito. O seguinte excerto discorre sobre a importância da contextualização de um problema no ensino de Matemática:

> Aprender Matemática de uma forma contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos traz em si o desenvolvimento de competências e habilidades que são essencialmente formadoras, à medida que instrumentalizam e estruturam o pensamento do aluno, capacitando-o para compreender e interpretar situações, para se apropriar de linguagens específicas, argumentar, analisar e avaliar, tirar conclusões próprias, tomar decisões, generalizar e para muitas outras ações necessárias à sua formação. (BRASIL, 2002, p. 111)

Um aluno que se sente confortável com a disciplina e que tem um pensamento matemático um pouco mais desenvolvido, vai sentir a curiosidade de resolver qualquer tipo de problema, contextualizado ou não. Por isso, para que o problema atraia os alunos com mais dificuldade à resolução, é preciso instigar sua curiosidade, deixá-lo mais à vontade com o ambiente, logo contextualizar o problema é importante e necessário, principalmente se o aluno for desenvolver o conceito matemático com esse problema. Porém, precisamos ficar atentos ao fato do que é contexto, pois um problema pode ser interessante a um determinado grupo de estudantes e não ser para outro grupo, é necessário muita atenção quanto a isso.

Suponhamos um aluno do sétimo ano do ensino fundamental que está prestes a estudar equações polinomiais de 1º grau. Vamos supor dois exemplos de problemas com a mesma solução e verificar em qual deles a probabilidade do aluno se sentir curioso a solucionar é maior:

a) Resolva em $\mathbb{R}$ a equação:

   $x + 20 = 30;$

b) Pedro quer comprar um jogo que custa 30 reais para usar em seu novo video game. Porém ele possui apenas 20 reais no bolso e decide pedir dinheiro a seu pai. Quantos reais Pedro precisará pedir para poder comprar o jogo?

Segundo discurso oficial (BRASIL, 2002), o exemplo do item *b*, por se tratar de um problema contextualizado, pode gerar uma curiosidade maior no aluno e é, no entanto, mais apropridado do que o problema do item *a*. Claro que o item *a* pode instigar inúmeros alunos, mas de uma forma geral, a escolha do item *b* seria mais adequada e, também, mais apropriada para a nossa proposta neste trabalho. Queremos que o aluno entenda como utilizar o conceito de EDL, e assim é importante que haja um problema onde o aluno possa criar um ambiente, quem sabe até se imaginar dentro do problema.

O assunto resolução de problemas (VAN DE WALLE, 2009) é muito discutido quanto ao seu uso no ensino de Matemática, porém nem sempre há clareza do que venha a ser um problema. Segundo Van de Walle (2009), um problema é uma atividade ou tarefa na qual, no momento, não se possui um modo de resolução pré definida, algo pronto em que se pede apenas a reprodução, também não se tem conhecimento se há um método específico de resolução do problema.

Para Onuchic e Allevato, um problema é “tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em fazer” (ONUCHIC e ALLEVATO, 2011, p. 81). Iremos trabalhar com esta definição em nosso trabalho.

Já para Ribeiro, um problema é “uma situação não resolvida, para a qual devemos encontrar alguma forma de solução e reconhecer que esse mesmo problema, que para nós é um problema, pode não ser um problema para outro” (RIBEIRO, 2010, p. 116).

Na sala de aula, sempre nos deparamos com alunos que questionam “para que serve esse conceito?”. Vários são os conceitos matemáticos (RIBEIRO, 2010) que foram estudados ou desenvolvidos a partir de uma necessidade, de um problema do cotidiano, em que o solucionador precisou de curiosidade, dúvida e vontade para resolver. E com esse problema foi desenvolvido o conceito ou uma parte do conceito que até hoje estudamos. Ribeiro faz uma excelente colocação sobre este pensamento:

> (…) na História da Matemática, vários momentos em que a construção de conhecimento se deu a partir da busca pela solução de um problema específico, sem o que estes não poderiam ter sido alcançados sem a pertinácia e a criatividade de alguns seres humanos movidos pela dúvida, pela curiosidade e pela obstinação em resolvê-lo. (RIBEIRO, 2010, p. 114)

Vamos levar em consideração que nem sempre um aluno poderá resolver um problema proposto, pois é necessário ter conhecimentos prévios dependendo do conceito que o problema exige. Por exemplo, nesse trabalho, apresentaremos problemas preliminares que serão utilizados nas resoluções dos problemas principais envolvendo EDL. Caso um aluno do ensino básico queira solucionar um problema sobre EDL, ele necessariamente precisa já ter compreendido o conceito de MDC para entender o algoritmo, por exemplo.

A linguagem matemática também é necessária para a interpretação total do problema. Sem a interpretação completa do problema em questão (POLYA, 2006), o aluno pode não determinar a estratégia mais correta para a resolução, ele não estará imerso totalmente à questão, e mesmo que consiga de certa forma resolvê-lo, poderá deixar de obter algum ponto do conceito desenvolvido. Um aluno que compreende o problema por completo tem a possibilidade de absorver tudo o que o problema tem a oferecer e, segundo Polya é o primeiro passo para a resolução de um problema:

> "É uma tolice responder a uma pergunta que não tenha sido compreendida. É triste trabalhar para um fim que não se deseja. Estas coisas tolas e tristes fazem-se muitas vezes, mas cabe ao professor evitar que elas ocorram nas suas aulas." (POLYA, 2006, p.5)

4 EQUAÇÕES DIOFANTINAS LINEARES E O ENSINO BÁSICO

4.1. Nota Histórica

Figura 4.1 - Diofante de Alexandria.
Fonte: http://www.famous-mathematicians.com/diophantus/

O adjetivo “diofantinas” se dá devido a um grande algebrista grego chamado Diofante de Alexandria e seu interesse por problemas indeterminados. Diofante viveu por volta de 250 d.C. e não se sabe muito sobre sua vida, o que é de conhecimento referente a sua vida pessoal é devido a uma coleção de problemas encontrada na chamada *Antologia Grega* do quinto ou sexto século.

> Deus lhe concedeu ser menino pela sexta parte de sua vida, e somando sua duodécima parte a isso, cobriu - lhe as faces de penugem. Ele lhe acendeu a lâmpada nupcial após uma sétima parte, e cinco anos após seu casamento concedeu-lhe um filho. Ai! Infeliz criança; depois de viver a metade da vida de seu pai, o Destino frio o levou. Depois de se consolar de sua dor durante quatro anos com a ciência dos números ele terminou sua vida. (BOYER, 2010, p.121).

Segundo Boyer (2010), se o problema é historicamente exato, Diofante viveu oitenta e quatro anos, mas esse problema não deve ser considerado como um problema típico que interessava a Diofante, já que equações de primeiro grau não recebiam tanta atenção por ele.

De acordo com Boyer (2010) e Eves (2011), enquanto os matemáticos babilônicos se preocupavam com soluções aproximadas de equações determinadas de até terceiro grau, a obra *Arithmetica* de Diofante dava ênfase às soluções exatas de problemas indeterminados. A *Arithmetica* foi a obra mais importante de Diofante e é composta por 13 livros dos quais remanesceram apenas 6, dentre estes encontramos a resolução de 130 problemas.

No primeiro livro são encontradas equações determinadas em uma incógnita e nos demais são encontradas equações indeterminadas de segundo grau ou grau superior em duas ou três incógnitas. Diofante se interessava por soluçoes racionais positivas, logo os problemas algébricos indeterminados em que se devem encontrar apenas soluções racionais passaram a ser conhecidos como *problemas diofantinos*. Apesar desse interesse de Diofante por soluções racionais, as equações indeterminadas de primeiro grau que admitem apenas soluções inteiras (equações diofantinas a serem vistas neste trabalho), por extensão aos problemas diofantinos, também homenageiam o algebrista grego. Milies e Coelho (2006) alegam que a homenagem deveria ser feita a Fermat[5] por ter sido o primeiro a chamar atenção quanto às soluções estritamente inteiras em 1657.

4.2. Inclusão do Conceito no Ensino Básico

Segundo Milies e Coelho (2006) uma equação diofantina linear é uma equação do tipo $ax + by = c$, em que a, b e c são números inteiros, e a e b não são ambos nulos. Neste trabalho, buscaremos encontrar apenas as soluções inteiras positivas de uma EDL.

Embora seja um tema trabalhado apenas no ensino superior, geralmente em um curso de Teoria dos Números, vemos a aplicação do conceito de EDL, no ensino básico, como forma de estimulação ao desenvolvimento matemático dos alunos, ou

[5] Pierre de Fermat foi um matemático francês nascido em Beamount de Lomagne em 1601, sua mais importante contribuição para a matemática é a fundação da moderna teoria dos números. É provável que sua atenção à teoria dos números se deve à tradução latina de *Arithmetica* de Diofante. (EVES, 2011).

seja, é um momento onde os alunos poderão trabalhar com uma linguagem matemática apropriada para resolver, por exemplo, equações do tipo $ax + by = c$. Para justificar a inclusão de EDL no ensino básico, nos baseamos nos seguintes documentos: PCN (BRASIL, 1998), PCNEM (BRASIL, 2000) e as competências propostas pela Matriz de Referência para o ENEM (BRASIL, 2009).

Em Brasil (1998), é relatada a importância da Matemática em desempenhar seu papel na formação de capacidades intelectuais, além de também ser importante no desenvolvimento do raciocínio rápido do aluno e da possibilidade de sua aplicação em problemas envolvendo a vida cotidiana.

Em Brasil (2000), são encontradas competências e habilidades a serem desenvolvidas no aluno como: (i) “representação e comunicação” em que é necessário que o aluno tenha a capacidade de ler e interpretar um problema matemático, além de utilizar representações matemáticas (gráficos, por exemplo) e transcrever um problema matemático da linguagem corrente para a linguagem simbólica (equação); (ii) “investigação e compreensão” em que o aluno precisará formular hipóteses e prever resultados, selecionar estratégias para a resolução de problemas e produzir argumentos convincentes; e (iii) “contextualização sócio-cultural”, em que o aluno aplicará conhecimentos matemáticos em situações reais.

No capítulo 5, em que trabalharemos com problemas envolvendo as EDL, resolveremos o seguinte problema:

Lucas vai sacar R$ 300,00 num caixa eletrônico que tem notas de R$ 2,00 e de R$ 5,00. De quantas maneiras diferentes ele pode receber o valor?

Neste problema que envolve a vida cotidiana, o papel da Matemática proposto por Brasil (1998) e as competências e hábilidades propostas por Brasil (2000) poderão ser cumpridos. Temos um problema que exige uma interpretação por parte do aluno, em que ele precisará ler e transcrever para a linguagem matemática e, assim, iniciar sua resolução que admite mais de uma estratégia de resolução possível. Com isso, tem-se a possibilidade de desenvolver no aluno a capacidade de decidir qual a melhor estratégia. Logo, o aluno poderá tomar essa decisão mais rapidamente, com uma devida argumentação matemática para cada passo da resolução.

Com relação a Brasil (2009), são vistas competências que, segundo Pommer (2013), estabelecem uma primeira argumentação positiva para a inclusão das EDL no ensino básico. O autor tem como base de seu argumento os três eixos cognitivos apresentados em Brasil (2009), associando-os a duas competências (*construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais* e *modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas*) das sete da matriz de Referência de Matemática e suas Tecnologias. Os três eixos cognitivos em questão são: dominar linguagens, compreender fenômenos e enfrentar situações-problemas.

> Dos três eixos cognitivos, as Equações Diofantinas Lineares permitem o trabalho com diversas linguagens, o que contribuição para aprimorar o ‘domínio de linguagem’, assim como apresentar o assunto por meio da metodologia de problemas, o que contribui para o eixo cognitivo ‘enfrentar situações-problema’. (POMMER, 2013, p.19)

Na competência “construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais”, Pommer (2013), baseado em Brolezzi (1996), afirma que as EDL permitem uma conexão entre Matemática Discreta, em que são referenciados os números inteiros, e a Matemática do Contínuo, em que são referenciados os números reais.

Segundo Brolezzi (1996), não se pode enxergar o discreto e o contínuo como realidades disjuntas, pois com isso o ensino de Matemática acaba sendo gravemente prejudicado. O autor relata a existência de uma falácia dentro do ensino de Matemática por não trabalhar com o discreto e o contínuo de forma unida, optanto ou pelo discreto ou pelo contínuo.

Apresentamos as definições de Brolezzi (1996) quanto a *discreto*:

> De modo geral, discreto é aquilo que exprime objetos distintos, que se revela por sinais separados, que se põe à parte. Vem do latim discretus, particípio passado do verbo discernere (discernir), que significa discriminar, separar, distinguir, ver claro. Etimologicamente, discernere vem de cernere, que quer dizer passar pelo crivo, joeirar, decidir. Da mesma fonte derivam as palavras segredo, secreto, certo,

> discrição. Desse sentido de ser separado, distinto, vem o uso de discreto referindo-se a quem sabe guardar um segredo, é prudente, circunspecto, recatado, modesto, não se faz sentir com intensidade, é pequeno. (BROLEZZI, 1996, p.1)

E quanto a *contínuo*:

> Já contínuo vem de con-tenere (ter junto, manter unido, segurar). Contínuo é o que está imediatamente unido a outra coisa. Da mesma origem vem conter, conteúdo, continente, contente (o que cabe em si, e não cobiça alargar-se). (BROLEZZI, 1996, p.1)

Para Pommer, a Matemática discreta não recebe a ênfase necessária no ensino básico.

> A possibilidade da busca de soluções inteiras contrapõe a tendência do atual ensino em privilegiar temas no âmbito dos números Reais. Vale lembrar que a resolução no âmbito dos números Inteiros permite aflorar características próprias que permitem destacar importantes conceitos e propriedades do campo da Aritmética, geralmente tratados no começo do Ensino Fundamental e depois gradualmente minimizadas em situações de ensino no ciclo médio. (POMMER, 2013, p. 20)

Quanto à competência “modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas”, Pommer (2013) relata a total possibilidade de se trabalhar situações-problema envolvendo EDL e, também, suas diversas possibilidades de resolução (estratégias). Notamos aqui, a possibilidade de tratar EDL por meio do uso de gráficos cartesianos, onde é possível determinar algumas soluções da equação construindo, no plano cartesiano, o gráfico que a representa.

Com base nos trabalhos de Capilheira (2012), Pommer (2013) e nos PCN (BRASIL, 1998, 2000), concluímos que basicamente todas as ferramentas matemáticas necessárias ao estudo de EDL já são vistas no próprio ensino básico. Referimo-nos ao estudo de múltiplo, divisor, MDC, equações polinomiais de 1º grau, dentre outros. Com isso, acreditamos que os alunos da educação básica são capazes de compreender o conceito tomando como base o que já estudaram conforme o passar dos anos letivos.

Pommer (2013), com relação às razões em inserir situações-problema envolvendo as EDL no ensino básico, afirma:

> A aquisição de um repertório de estratégias através de situações-problema tematizadas nas Equações Diofantinas Lineares, permite ao aluno compreender o papel da escrita algébrica como agente otimizador, desenvolver no aluno a capacidade de negociar significados aos conhecimentos matemáticos. (2013, p. 8)

Alguns problemas interessantes e importantes, devidamente contextualizados (CAPILHEIRA, 2012) e que são facilmente compreensíveis, podem resultar em uma equação polinomial de1º grau com duas incógnitas e admitir soluções inteiras. Assim, podem ser desenvolvidas e solucionadas com o método de tentativa e erro que, de fato, é o método legítimo utilizado no ensino básico para a resolução dessas equações. Neste caso, nosso objetivo é que ao invés de sugerir valores inteiros para uma incógnita com a finalidade de encontrar valores inteiros para a outra incógnita, que segundo Oliveira (2008, *apud* CAPILHEIRA, 2012, p. 19) faz com que o desenvolvimento da resolução fique "sem explicação sobre algumas das afirmações feitas", o aluno deva utilizar o conceito de EDL onde ele poderá determinar diretamente as soluções (além de determinar se a equação possui ou não soluções inteiras) com uma melhor argumentação matemática, poderá ampliar suas possibilidades de resolver um mesmo problema além de ser capaz de determinar quando uma equação tem ou não soluções inteiras, lembrando que o conceito das EDL basicamente não exige de um aluno do ensino básico ferramentas que vão além do que já foi estudado.

Com relação a argumentação matemática citada no parágrafo acima, Brasil (1998) relata que "a argumentação está fortemente vinculada à capacidade de justificar uma afirmação e, para tanto, é importante produzir alguma explicação, bem como justificá-la." (BRASIL, 1998, p. 70). Com isso, é indispensável a um aluno ser capaz de argumentar sobre um problema matemático utilizando, neste caso, uma linguagem matemática.

Com base na resolução de uma EDL pelo método de tentativa e erro ou pelo próprio conceito de EDL, Capilheira (2012) destaca:

> Embora não faça parte dos conteúdos abordados nos Ensinos Fundamental e Médio, nossa tese afirma que a teoria das equações diofantinas pode ser introduzida aos alunos do ensino Médio, capacitando-os com uma maneira sistemática de resolução desses problemas, que é muito mais eficaz do que a estratégia de solução por tentativa e erro apresentada costumeiramente. (CAPILHEIRA, 2012, p. 14)

Dessa forma, concluímos que o desenvolvimento de um problema envolvendo uma equação polinomial de primeiro grau com duas incógnitas é mais construtivo (não necessariamente mais fácil, isso depende do problema) através do conceito de EDL do que através do método por tentativa e erro.

Nosso trabalho foca a aplicação do conceito de EDL no ensino fundamental. Já foram citados, neste capiítulo, alguns conceitos necessários para o estudo de EDL e podemos acrescentar outros conceitos para seu estudo tais como sistemas lineares 2x2, equação da reta, progressão aritmética, estudo de gráficos de funções lineares, entre outros. Com isso, o conceito de EDL pode ser trabalhado a partir e por meio de vários conceitos vistos no ensino fundamental e médio, o que nos mostra o quanto vem a ser importante a aplicação deste conceito com os alunos destes ciclos.

5 SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Nesta seção, apresentaremos uma sequência didática para o ensino de equações diofantinas lineares ao ensino básico (a partir do 7° ano). Nossa proposta é apresentar dois problemas contextualizados de cada conceito básico necessário para o estudo das equações diofantinas lineares e, posteriormente, apresentar dois problemas de equações diofantinas lineares. Nosso objetivo é que, ao aplicá-los em sala de aula, os problemas devam ser desenvolvidos por meio do roteiro de Onuchic e Allevato (2011).

Os conceitos básicos necessários que foram mencionados são: divisibilidade, MDC e equações polinomiais de 1º grau. Antes dos problemas, iremos definir os conceitos, expor algumas propriedades bem como proposições, com o objetivo de fundamentar os conceitos que serão trabalhados pelo professor no decorrer da sequência didática. Também iremos definir o algoritmo da divisão, algoritmo de Euclides e o Teorema de Bezout. As definições, propriedades, proposições e teoremas a seguir não devem ser inicialmente apresentadas aos alunos já que a formalização dos conceitos deve ser realizada após a resolução dos problemas.

As resoluções deverão ser baseadas nos passos desenvolvidos por Onuchic e Allevato (2011), porém não iremos desenvolvê-los durante a resolução dos problemas, ficando a cargo do professor seguir passo a passo durante a aplicação em sala de aula.

Com relação ao passo um do roteiro (*escolha do problema*), vamos expor o objetivo geral do problema, ou seja, o que se espera do aluno durante e após o problema. Dentre os passos dois e oito deixaremos como sugestão à aplicação em sala de aula. Finalizando, o passo nove (*formalização*) apresentaremos a resolução do problema já com a linguagem matemática apropriada.

5.1. Definições, Proposições e Teoremas

Utilizaremos como bibliografia básica para esta subseção as obras *Números: Uma Introdução à Matemática* (MILIES e COELHO, 2001) e *Álgebra Moderna* (DOMINGUES e IEZZI, 2003).

Divisibilidade

Definição 1: Sejam a e b números inteiros. Diz-se que b divide a (ou que b é um divisor de a ou, ainda, que a é um múltiplo de b) se existe um inteiro c tal que $bc = a$.

Algoritmo da Divisão

Definição 2: Sejam a e b inteiros, com $b \neq 0$. Então, existem inteiros q e r, únicos, tais que $a = bq + r$ e $0 \leq r < |b|$.

Máximo Divisor Comum (MDC)

Um inteiro c diz-se um divisor comum de a e b se $c \mid a$ e $c \mid b$. O conjunto $D\,(a,b)$ de todos os divisores comum de a e b é limitado superiormente (pois se $a \neq 0$, para todo elemento $c \in D\,(a,b)$ temos que $c \leq |a|$). Consequentemente, $D(a,b)$ tem máximo.

Definição 3: Chama-se *máximo divisor comum* (MDC) de a e b o maior de seus divisores comum, isto é,

$$mdc\,(a,b) = max\,D\,(a,b)$$

Teorema de Bezout

Teorema 1: Sejam a, b inteiros e $d =$ mdc (a, b). Então, existem inteiros r e s tais que $d = ra + sb$.

Algoritmo de Euclides

Com relação ao Algoritmo de Euclides, é necessário que façamos sua demonstração pois iremos utilizar os passos desta demonstração nos problemas envolvendo o conceito de MDC.

Teorema 2: Sejam a, b inteiros, $b \neq 0$, e sejam q, r inteiros, sendo q o quociente e r o resto da divisão de a por b, respectivamente. Então $D\ (a,b) = D\ (b,r)$; temos também que $mdc\ (a,b) = mdc\ (b,r)$.

Demonstração do Teorema 2: Queremos mostrar que $D\ (a,b) = D\ (b,r)$, ou seja, $D\ (a,b) \subset D(b,r)$ e $D\ (b,r) \subset D(a,b)$.

Podemos escrever $a = bq + r$.

Vamos provar que $D\ (a,b) \subset D(\ b,r)$:

Seja $x \in D\ (a,b)$. Então $x|a$ e $x|b$. Mas $r = a - bq$ e como x divide cada um dos somandos temos, então, que $x|r$.

Como $x|b$ e $x|r$, segue que $x \in D\ (b,r)$.

A inclusão contrária segue de forma análoga.

Logo, $D\ (a,b) = D\ (b,r)$.

Se os conjutos são iguais, seus máximos também coincidem, isto é, $mdc\ (a,b) = mdc\ (b,r)$. ■

Do teorema 2, temos que o problema de encontrar o $mdc\ (a,b)$ se reduz a encontrar o $mdc\ (b,r)$.

Naturalmente, pode-se repetir esse processo. Fazendo divisões sucessivas, teremos:

$$a = bq + r_1,\ 0 \leq r_1 < |b|$$

$$b = r_1 q_2 + r_2,\ 0 \leq r_2 < |r_1|$$

$$r_1 = r_2 q_3 + r_3,\ 0 \leq r_3 < |r_2|$$

....

$$r_{n-2} = r_{n-1} q_n + r_n,\ 0 \leq r_n < |r_{n-1}|$$

$$r_{n-1} = r_n q_{n+1}$$

Como o resto diminui a cada passo, o processo não pode continuar indefinidamente, e alguma das divisões deve ser exata. Suponhamos então que r_{n+1} seja o primeiro resto nulo, como está indicado anteriormente. Do teorema 2, temos que,

$$mdc\ (a,b) = mdc\ (b,r_1) = mdc\ (r_1,r_2) = mdc\ (r_2,r_3) = \cdots = mdc\ (r_{n-1},r_n)$$

Finalmente, como $r_n |\ r_{n-1}$, é fácil ver que $mdc\ (r_{n-1},r_n) = r_n$, logo $mdc\ (a,b) = r_n$. Demonstramos, assim, que neste processo, o máximo divisor comum de a e b é o último resto diferente de zero.

Equações Polinomiais de 1º Grau

Definição 4: Uma equação é uma igualdade entre duas expressões chamadas de membros. Uma equação válida apenas para alguns valores das variáveis envolvidas (algumas vezes chamadas indeterminadas) é chamada de equação *condicional* ou simplesmente *equação* (SPIEGEL e MOYER, 2004). Uma equação polinomial de 1º grau é uma sentença equivalente a $ax + b = 0$, com $a \in R^*$ e $b \in R$.

Equações Diofantinas Lineares

Definição 5: É toda sentença escrita na forma $ax + by = c$ onde a, b e c são inteiros, e a e b não são ambos nulos[6].

Proposição 1: Uma equação diofantina linear $ax + by = c$ tem solução inteira se, e somente se, $d = mdc(a,b)$ é divisor de c.

Proposição 2: Se a equação diofantina $ax + by = c$ e $d = mdc\ (a,b)$ divide c. Escrevendo d, de acordo com o teorema 1, na forma $d = ra + sb$, com $r, s \in Z$, temos que $x = r \cdot \frac{c}{d}$, $y = s \cdot \frac{c}{d}$ é uma solução da equação $ax + by = c$.

Toda outra solução é da forma:

---

[6] Neste trabalho, vamos estudar apenas as EDL com duas incógnitas.

$$S = \left\{\left(x_0 + \left(\frac{b}{d}\right) t, y_0 - \left(\frac{a}{d}\right) t\right) / \ t \in Z\right\}$$

5.2. Problemas Propostos

Problema 1 – Divisibilidade

Lúcia comprou 20 pirulitos para distribuir entre seus 3 filhos de forma que cada um receba a mesma quantidade. É possivel que todos os filhos de Lucia recebam a mesma quantidade de pirulitos de modo que não sobre nenhum?

- *Qual o objetivo geral do problema?*

Verificar a possibilidade de Lúcia dividir todos os pirulitos comprados, em partes iguais, entre seus 3 filhos.

- *Quais são dos dados?*

20 pirulitos e 3 filhos.

Resolução – Problema 1

Temos que

$$\begin{array}{r|l} 20 & 3 \\ \cline{2-2} -\,18 & 6 \\ \cline{1-1} 2 & \end{array}$$

ou seja, da definição 2, podemos escrever a divisão da forma:

$$20 = 3 \cdot 6 + 2$$

Com isso, da definição 1, temos que $3 \dagger 6$.

Assim, Lúcia não poderá distribuir todos os pirulitos de forma que cada filho receba o mesmo número. Com a resolução, percebemos que ela poderá distribuir 6 pirulitos para cada filho de forma que ainda sobrem 2.

Problema 2 – Divisibilidade

Uma escola recebeu 70 livros para serem distribuídos entre os 35 alunos de um de seus sextos anos do ensino Fundamental. Sabendo que cada aluno terá que receber a mesma quantidade de livros que os demais, é possível que todos os livros recebidos sejam distribuídos?

- *Qual o objetivo geral do problema?*

Formalizar o conceito de divisibilidade de forma que os alunos notem que se o resto da divisão de a por b for zero, então b divide a.

- *Qual a incógnita ou o que se deve ser encontrado?*

Verificar a possibilidade de todos os livros recebidos serem distribuídos aos alunos em quantidades iguais de forma que não sobre nenhum.

Resolução – Problema 2

Temos que

$$\begin{array}{r|l} 70 & 35 \\ \cline{2-2} -70 & 2 \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

ou seja, da definição 2, podemos escrever da forma:

$$70 = 35 \cdot 2 + 0$$

Logo, pela definição 1, temos que $35|70$.

Com isso, temos que é possível dividir todos os livros entre os alunos de forma que cada um receba a mesma quantidade e que nenhum livro fique sobrando. Cada aluno receberá 2 livros.

Problema 3 – Máximo Divisor Comum (MDC)

Um comerciante quer distribuir 84 maçãs e 70 laranjas entre várias sacolas para doar para pessoas carentes de forma que cada pessoa receba uma sacola. Sabendo que cada sacola deva ter o mesmo e o maior número possível de um mesmo tipo de fruta, quantas pessoas o comerciante poderá ajudar?

- *Qual o objetivo geral do problema?*

Formalização do conceito de MDC. É necessário que os alunos percebam que a solução do problema se dá pelo maior divisor comum entre 84 e 70. Além de desenvolverem o método de resolução utilizando o algoritmo de Euclides

- *Qual a incógnita ou o que deve ser encontrado?*

Descobrir quantas pessoas irão receber as frutas, ou seja, determinar quantas sacolas serão necessárias para que todas as frutas sejam divididas em partes iguais, de forma que cada sacola tenha o maior número de frutas possíveis e, também, que cada sacola tenha apenas um tipo de fruta.

- *Quais os dados?*

84 Maças e 70 laranjas.

<u>*Resolução – Problema 3*</u>

Podemos decompor o número 84 e o número 70 em fatores primos, da seguinte forma:

$$84 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$$

$$70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$$

Podemos notar que $(2 \cdot 7)|\ 84$ e $(2 \cdot 7)|70$ e, de acordo com a definição 3, temos que o $mdc\ (84, 70) = 2 \cdot 7 = 14$.

Observamos que o método acima é utilizado no ensino básico, porém quando se trata de números muito grandes, pode não ser fácil encontrar a decomposição. No nosso estudo de EDL utilizaremos o algoritmo de Euclides(teorema 2) para o cálculo de MDC, que envolve apenas divisões sucessivas.

Assim, utilizando a definição 2, podemos escrever a divisão de 84 por 70 da seguinte maneira:

$$84 = 70 \cdot 1 + 14$$

Com isso, seguindo a demonstração do teorema 2, temos que,:

$$70 = 14 \cdot 5 + 0$$

Logo o $mdc\ (84, 70) = mdc\ (70, 14) = 14$. Assim, temos que cada sacola terá 14 frutas. Para determinar o número de sacolas basta dividir 84 e 70 por 14 e somar os quocientes.

$$80 = 14 \cdot 6 + 0$$

$$74 = 14 \cdot 5 + 0$$

Com a soma dos quocientes, temos que:

$$6 + 5 = 11$$

Portanto, o comerciante poderá dividir as frutas em 11 sacolas e, assim, ajudará 11 pessoas.

Problema 4 – Máximo Divisor Comum (MDC)

Uma empresa de logística é composta de duas áreas: administrativa e operacional. A área administrativa é composta de 30 funcionários e a operacional de 48. Ao final do ano, a empresa realiza uma integração entre as duas áreas, de modo que todos os funcionários participem ativamente. Devem ser formadas várias equipes com o maior número de funcionários possíveis de forma que todas as equipes tenham o mesmo número de funionários. Determine quantos funcionários devem participar de cada equipe e o número possível de equipes.

- *Qual o objetivo geral do problema?*

Perceber que o número de funcionários que irá compor as equipes no final do ano se dá pelo máximo divisor comum entre 48 e 30. Desenvolver estratégias para o cálculo.

- *Qual a incógnita ou o que deve se encontrado?*

Quantos funcionários irão compor as equipes de forma que cada equipe tenha o maior e o mesmo números de funcionários. Determinar o número de equipes que serão formadas.

- *Quais os dados?*

30 funcionários da área adiminstrativa e 48 da área operacional.

<u>Resolução – Problema 4</u>

Da divisão de 48 por 30, por meio da definição 2, temos que:

$$48 = 30 \cdot 1 + 18$$

Utilizando a demonstração do teorema 2, obtemos:

$$30 = 18 \cdot 1 + 12$$

E assim,

$$18 = 12 \cdot 1 + 6$$

$$12 = 6 \cdot 2 + 0$$

Logo, utilizando o algoritmo de Euclides, temos que o $mdc\,(48{,}30) = mdc\,(30{,}18) = mdc\,(18{,}12) = mdc\,(12{,}6) = 6$.

Com isso, cada equipe terá 6 funcionários. Para determinar o número de equipes, assim como no problema 3, basta dividir 48 e 30 por 6 e somar os respectivos quocientes.

$$48 = 6 \cdot 8 + 0$$

$$30 = 6 \cdot 5 + 0$$

Com a soma dos quocientes, temos que:

$$8 + 5 = 13$$

Portanto, poderão ser formadas 13 equipes com 6 funcionários cada.

Problema 5 – Equações Polinomiais de 1º Grau

Lúcia vai à padaria comprar alguns pães para seus filhos. Cada pão custa 50 centavos e Lúcia está levando 3 reais. Quantos pães poderão ser comprados?

Qual o objetivo geral do problema?

Formalizar o conceito de equações polinomiais de 1º grau. É necessário que os alunos desenvolvam estratégias para determinar quantos pães Lúcia pode comprar, utilizando as informações do enunciado.

Qual a incógnita ou o que deve ser encontrado?

A quantidade de pães que Lúcia pode comprar.

Quais os dados?

Cada pão custa 50 centavos. Lúcia tem 3 reais.

Resolução – Problema 5

Pela definição 4, chamaremos a quantidade de pães que Lúcia pode comprar de x, assim

$$0{,}5 \cdot \mathrm{x} = 3$$

Observamos que $0{,}5 = \frac{1}{2}$. Logo, temos

$$\frac{1}{2} \cdot x = 3$$

Multiplicando ambos os lados por 2, temos

$$x = 6$$

Portanto, Lúcia pode comprar 6 pães.

<u>Problema 6 – Equações Polinomiais de 1º Grau</u>

Mariana é operadora de caixa de um supermercado e, ao registrar a compra, registrou por engano 4 vezes uma determinada mercadoria. O valor da compra foi de 120 reais mas se não tivesse registrado a determinada mercadoria, a compra teria um valor de 44 reais. Assim, qual o valor que, de fato, deveria ter sido cobrado pela compra?

- *Qual o objetivo geral do problema?*

Assim como o problema 5, o objetivo é a formalização do conceito de equações polinomiais de 1º grau. Os alunos devem desenvolver estratégias para determinar o valor correto da compra que Mariana fez utilizando as informações dadas pelo enunciado.

- *Qual a incógnita ou o que deve ser encontrado?*

O valor correto da compra.

- Quais os dados?

A operadora de caixa passou 4 vezes um mesmo produto. O valor cobrado pela compra foi de 120 reias. Antes de passar o produto equivocadamente 4 vezes, o valor da compra estava em 44 reais.

<u>Resolução – Problema 6</u>

Chamaremos o valor da mercadoria de x e, utilizando a definição 4, assim:

$$44 + 4 \cdot \mathrm{x} = 120$$

Subtraindo 44 de ambos os membros da equação, temos que:

$$4 \cdot \mathrm{x} = 76$$

Dividindo ambos os membros por 4:

$$x = 19$$

Com isso, temos que o valor da mercadoria é de 19 reais. E, assim, para determinarmos o valor correto da compra, devemos fazer o seguinte cálculo:

$$44 + 19 = 63$$

Portanto, o valor da compra deve ser 63 reais.

Problema 7 – Equações Diofantinas Lineares

Lucas vai sacar R$ 300,00 num caixa eletrônico que tem notas de R$ 2,00 e de R$ 5,00. De quantas maneiras diferentes ele pode receber o valor?

- *Qual o objetivo geral do problema?*

Formalizar o conceito de equações diofantinas lineares além de compreender quando uma equação admite solução inteira. É necessário que os alunos, utilizando as informações do enunciado, desenvolvam estratégias para determinar de quantas maneiras diferentes Lucas poderá sacar 300 reais.

- *Qual a incógnita ou o que deve ser encontrado?*

De quantas formas diferentes Lucas poderá sacar 300 reais.

- *Quais os dados?*

Lucas quer sacar 300 reais. Notas R$ 2,00 e R$ 5,00.

Resolução – Problema 7

Vamos, primeiramente, utilizar os problemas 5 e 6 para equacionar o problema nos atentando às duas incógnitas. Atribuímos a x o número de notas de R$ 5,00 e a y o número de notas de R$ 2,00. Dessa forma, temos que:

$$5x + 2y = 300$$

Com base nos problemas 3 e 4, vamos calcular o $mdc\ (5,2)$:

$$5 = 2 \cdot 2 + 1$$

$$2 = 2 \cdot 1 + 0$$

Assim, o $mdc\ (5,2) = mdc\ (2,1) = 1$ e, por meio dos problemas 1 e 2, temos que

$$300 = 1 \cdot 300 + 0$$

Logo, $1|300$. Portanto, pela proposição 1, temos que a equação possui solução inteira.

Vamos, então, determinar uma solução particular da equação utilizando o teorema 1:

$$5 = 2 \cdot 2 + 1$$

Subtraindo $2 \cdot 2$ de ambos os lados, temos que:

$$5 - 2 \cdot 2 = 1$$

Multiplicando por 300, encontramos:

$$5 \cdot (300) + 2 \cdot (-600) = 300$$

Com isso, temos a solução particular $x_0 = 300$ e $y_0 = -600$.

Podemos, então, calcular todas as soluções por meio da proposição 2:

$$x = 300 + 2t, t \in Z$$

$$y = -600 - 5t, t \in Z$$

Para solucionar nosso problema, precisamos determinar as soluções encontradas no conjunto dos números naturais, então para os valores de x, temos:

$$300 + 2t \geq 0$$

Subtraindo 300 de ambos os membros da desigualdade, obtemos:

$$2t \geq -300$$

Dividindo ambos os membros da desigualdade por 2, encontramos:

$$t \geq -150.$$

Para os valores de y:

$$-600 - 5t \geq 0$$

Adicionando 600 em ambos os membros da desigualdade, temos que:

$$-5t \geq 600$$

Dividindo ambos os membros da desigualdade por −5, obtemos:

$$t \leq -30$$

Portanto, temos que $-30 \geq t \geq -150$. Assim, a quantidade de valores possíveis para t é a solução do problema. Com isso, Lucas poderá sacar o R$ 300,00 de 121 maneiras diferentes.

Problema 8 – Equações Diofantinas Lineares

João é dono de uma fábrica de perfumes. Marcelo, um de seus funcionários, saiu para vender perfumes de dois tipos diferentes, A e B. O do tipo A por R$ 18,00 e o do tipo B por R$ 12,00. Marcelo volta à fábrica e disse a João que arrecadou R$ 400,00 com as vendas dos perfumes. Se Marcelo disse a verdade, quantos perfumes de cada tipo foram vendidos? **(Adaptato – COSTA, 2007)**

- *Qual o objetivo geral do problema?*

Determinar quando uma equação diofantina linear não tem solução inteira, ou seja, é preciso que os alunos notem que, por meio do fato de o mdc (18,12) não dividir 400, a equação não tem solução no conjunto dos números inteiros.

- *Qual a incógnita ou o que deve ser encontrado?*

Determinar quantos perfumes de cada tipo foram vendidos por Marcelo.

- *Quais os dados?*

O perfume do tipo A custa R$ 18,00. O perfume do tipo B custa R$ 12,00. Marcelo arrecadou R$ 400,00.

<u>Resolução – Problema 8</u>

Com base nos problemas 5 e 6, vamos equacionar nosso problema atual da seguinte forma:

$$18\text{x} + 12\text{y} = 400$$

Temos que x é o número de perfumes do tipo A vendidos e y o número de perfumes do tipo B vendidos.

Vamos calcular o $mdc\ (18{,}12)$ utilizando os problemas 3 e 4:

$$18 = 12 \cdot 1 + 6$$

$$12 = 6 \cdot 2 + 0$$

Assim, temos que o $mdc\ (18{,}12)\ =\ mdc\ (12{,}6)\ =\ 6$.

Como $6\ \dagger\ 400$, temos que a EDL não possui soluçao inteira pela proposição 1 e, consecutivamente, não possui solução natural. Com isso, o problema não tem solução, ou seja, Marcelo não disse a verdade, ele não pode ter arrecadado R$ 400,00 com as vendas dos perfumes do tipo A e do tipo B.

6 JOGO "ESCOVA DIOFANTINA"

O jogo tem como objetivo estudar algumas equações diofantinas lineares de uma maneira dinâmica e divertida, de forma que os alunos compreendam o que é uma equação diofantina linear e quando ela tem solução inteira.

Fizemos, então, um experimento em uma instituição de ensino superior com alunos de uma turma de Licenciatura em Matemática que não tiveram contato com a disciplina Teoria dos Números, ou seja, não estudaram as EDL. Nosso objetivo era verificar como seria, de fato, a aplicação da metodologia de resolução de problemas no conteúdo de EDL para melhor prepará-la para o ensino básico.

O jogo foi desenvolvido em apenas um dia, seguindo o roteiro de Onuchic e Allevato (2011), com o objetivo de verificar se os alunos conseguiam perceber quando uma equação diofantina linear tem solução inteira.

Retiramos o jogo da dissertação de Capilheira (2012) e fizemos algumas alterações quanto às regras.

Material Necessário

Um baralho comum no qual serão retirados as figuras (rei, dama e valete) dos quatro naipes e também os curingas para que se tenha um baralho com 40 cartas composto por quatro sequências de Ás a 10.

Procedimentos

Após embaralhar as cartas, distribuir 3 para cada jogador. Abrir as próximas 4 cartas e colocá-las no centro da mesa mostrando os números. O monte restante é posto de lado. O objetivo é jogar uma carta de modo que a soma do seu valor com o valor de uma ou mais cartas da mesa dê 15, utilizando no máximo dois valores de carta diferentes. O jogador coloca à sua frente as cartas retiradas da mesa, assim como a carta de sua mão que permitiu a soma de 15, com a face voltada para baixo. Caso ele não consiga pegar nenhuma carta da mesa, deve simplesmente descartar na mesa uma das cartas de sua mão e o jogo prossegue. Se o jogador conseguir pegar todas as cartas restantes na mesa de uma única vez, o jogador fez uma escova diofantina. Quando os jogadores tiverem utilizado suas 3 cartas, uma nova mão de 3 cartas é distribuída, utilizando o monte que havia sido posto de lado. A partida prossegue da mesma maneira até que o monte de cartas termine. Aí é feita a contabilização dos pontos.

Pontuação

Um ponto por cada combinação resultante em 15. Cinco pontos por cada escova diofantina.

6.1. Desenvolvimento da Aplicação do Jogo

A turma foi composta por 6 alunos que chamaremos[7] Júlio, Bruno, Henrique, Carlos, Paola e Débora.

Uma cópia das regras foi entregue a cada aluno para uma leitura individual. Posteriormente formaram-se 3 duplas: Júlio e Bruno (dupla 1), Henrique e Débora (dupla 2), Carlos e Paola (dupla 3).

Durante a leitura em grupo, várias perguntas foram feitas quanto às regras e decidimos fazer uma simulação com o aluno Carlos, que as entendeu perfeitamente, com o objetivo dos demais alunos serem capazes de ter o mesmo domínio sobre elas.

Nosso objetivo inicial era a construção de algumas equações e, a partir delas desenvolver o conceito matemático de combinação linear.

Após o entendimento do jogo, entregamos um baralho para cada dupla junto com uma tabela (figura 6.1) para que fossem registradas as jogadas.

[7] Os nomes foram trocados para preservar a identidade dos alunos que participaram da oficina.

REGISTRO DAS JOGADAS				
1ª carta	Quantidade da 1ª carta	2ª carta	Quantidade da 2ª carta	Soma (registrar o cálculo)

Figura 6.1 – Registro das Jogadas.
Fonte: Capilheira (2012)

Minutos depois do início do jogo, após as duplas construírem algumas equações, entregamos uma segunda tabela com a finalidade de construirem equações com uma determinada carta. Por exemplo, a dupla Júlio e Bruno ficou responsáveis pela carta “Ás” (1), ou seja, eles deveriam escrever equações combinando a carta Ás com a carta 2, a carta Ás com a carta 3, a carta Ás com a carta 4 e assim sucessivamente até a carta 10, de forma que o resultado seja sempre 15. Caso fosse impossível a soma resultar 15, anotar o valor da combinação linear mais próximo de 15, lembrando que estamos trabalhando com um único baralho, ou seja, há apenas 4 cartas de cada naipe.

Depois de escreverem as combinações lineares, um integrante de cada dupla foi à lousa para registrar as equações obtidas, dessa forma tivemos três colunas: uma com as combinações com a carta Ás, outra com as combinações com a carta 2 e outra com as combinações com a carta 3.

Foi realizado um pequeno debate sobre porque algumas equações tinham solução e porque outras não tinham. Henrique, cuja dupla era responsável pelas combinações com a carta 2, disse que haviam poucas equações que resultavam 15 devido ao 2 ser um número par. Um número par somado a outro número par, de fato, não resulta em um número ímpar[8], porém deixamos essa discussão de lado pois nossa ênfase era justificar que a equação não tinha solução inteira por meio da proposição 2.

Com as equações postas na lousa, foi verificado que uma possibilidade de se escrever o 15 era $4 \cdot 2 + 7 \cdot 1$, ou seja, podemos escrever um número utilizando números diferentes através da soma e multiplicação entre esses número, com isso definimos o conceito de combinação linear. No exemplo a cima temos que o 15 pode ser escrito como combinação linear entre 4 e 7.

Na próxima etapa, pedimos aos alunos que modelassem a equação do jogo, primeiramente escrevemos várias possibilidade de obtermos 15 como combinações lineares entre o número 4 e o número 7 pensando no conjunto dos números naturais, e foi pedida a equação que modela essa combinação linear. A dupla 3 não demorou para dizer $1 \cdot a + 2 \cdot b = 15$. Tomamos a lilberdade de trocar as letras a e b por x e y, assim a equação foi dada como $1 \cdot x + 2 \cdot y = 15$.

Após a equação construída, pedimos aos alunos a equação que modela o jogo, e não apenas uma combinação linear específica. Após um período de trabalho em dupla, a dupla 2 disse $a \cdot x + b \cdot y = 15$, e concluímos que a e b são os números das cartas do baralho, e x e y a quantidade dessas cartas. Pedimos então para os alunos construírem uma equação que modelasse de uma forma geral o jogo não apenas para resultar em 15, mas qualquer outro número, e não foi difícil para os alunos afirmarem $a \cdot x + b \cdot y = c$.

Temos que $a \cdot x + b \cdot y = c$ é uma equação diofantina linear, onde a, b e c são números inteiros além de a e b não serem ambos nulos. Podemos ter vários pares ordenados (x,y) que são soluções para uma determinada equação, mas estamos interessados apenas nas soluções inteiras.

Prosseguindo com o jogo, entregamos aos alunos outras duas tabelas idênticas (figura 6.2) que continham todas as equações possíveis encontradas no jogo.

---

[8] Um número par é escrito da forma 2k, com $k \in Z$. A soma de dois números par é dada por $2k_1 + 2k_2 = 2(k_1 + k_2) = 2q$, onde $q = k_1 + k_2 \in Z$. Logo, a soma de um número par com outro número par resulta em um número par.

Pedimos a eles que destacassem, na primeira tabela, todas as equações que tinham solução no nosso jogo, e na segunda tabela pedimos a eles que destacassem todas as equações que tinham solução com infinitos baralhos, ou seja, que tinham solução dentro do conjunto dos números inteiros não negativos.

Nosso objetivo era a discussão sobre a questão acima envolvendo uma equação diofantina linear e as possibilidades de obter solução inteira.

1x+2y=15	1x+3y=15	1x+4y=15	1x+5y=15	1x+6y=15	1x+7y=15	1x+8y=15	1x+9y=15	1x+10y=15
2x+1y=15	2x+3y=15	2x+4y=15	2x+5y=15	2x+6y=15	2x+7y=15	2x+8y=15	2x+9y=15	2x+10y=15
3x+1y=15	3x+2y=15	3x+4y=15	3x+5y=15	3x+6y=15	3x+7y=15	3x+8y=15	3x+9y=15	3x+10y=15
4x+1y=15	4x+2y=15	4x+3y=15	4x+5y=15	4x+6y=15	4x+7y=15	4x+8y=15	4x+9y=15	4x+10y=15
5x+1y=15	5x+2y=15	5x+3y=15	5x+4y=15	5x+6y=15	5x+7y=15	5x+8y=15	5x+9y=15	5x+10y=15
6x+1y=15	6x+2y=15	6x+3y=15	6x+4y=15	6x+5y=15	6x+7y=15	6x+8y=15	6x+9y=15	6x+10y=15
7x+1y=15	7x+2y=15	7x+3y=15	7x+4y=15	7x+5y=15	7x+6y=15	7x+8y=15	7x+9y=15	7x+10y=15
8x+1y=15	8x+2y=15	8x+3y=15	8x+4y=15	8x+5y=15	8x+6y=15	8x+7y=15	8x+9y=15	8x+10y=15
9x+1y=15	9x+2y=15	9x+3y=15	9x+4y=15	9x+5y=15	9x+6y=15	9x+7y=15	9x+8y=15	9x+10y=15
10x+1y=15	10x+2y=15	10x+3y=15	10x+4y=15	10x+5y=15	10x+6y=15	10x+7y=15	10x+8y=15	10x+9y=15

Figura 6.2 – Todas as EDL Encontradas no Jogo.
Fonte: Capilheira (2012)

Posteriormente, entregamos duas folhas com esboços de planos cartesianos (figura 6.3) para cada dupla e pedimos a eles que escolhessem uma equação que tinha solução inteira com infinitos baralhos e uma equação que não tinha solução no conjunto dos números inteiros com infinitos baralhos e construíssem seus respectivos gráficos. Os alunos verificaram que no gráfico da equação que tinha solução era encontrada uma solução inteira no quarto quadrante, ou seja, com x positivo e y negativo, além da solução com x e y positivos. Com isso concluímos que a equação diofantina linear escolhida admitia soluções inteiras, não somente naturais. Já a outra equação escolhida não tinha nenhuma solução inteira.

Equação 1:

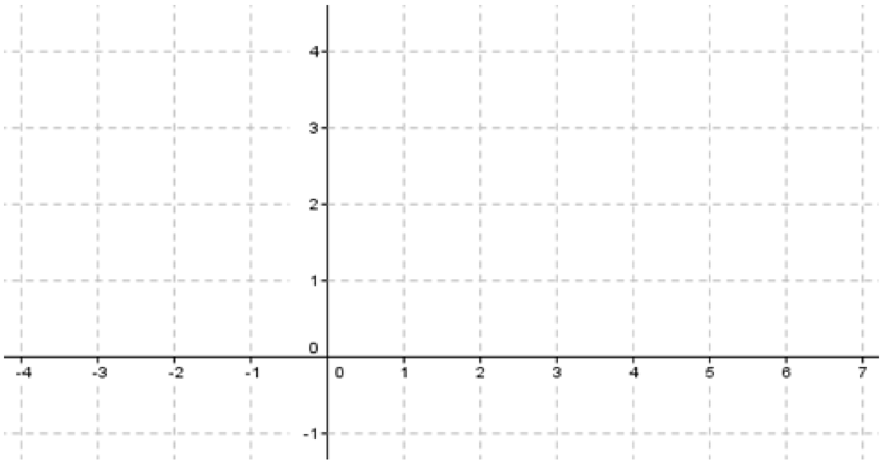

Figura 6.3 – Plano Cartesiano Para a Construção do Gráfico da Equação Linear.

Pretendíamos então que os alunos tomassem as equações com soluções e as equações sem solução (no conjunto dos números inteiros) e trabalhassem envolvendo o conceito de divisor e máximo divisor comum. O objetivo era criar uma relação entre o $mdc(a, b)$ e o resultado da equação, no caso do jogo o resultado é 15. Como eles estavam muito focados à questão de que se a e b fossem ambos números pares a equação não teria solução inteira, então perguntamos se a equação $7x + 7y = 15$ tem solução. Depois de um pequeno período de discussões, a dupla formada por Carlos e Paola disse que não, e mais uma vez pedimos o raciocínio envolvendo o $mdc(a, b)$ e c. Bruno, sem pensar muito, perguntou se é preciso o $mdc(a, b)$ ser igual a c, Carlos imediatamente disse que não é necessário tomando como exemplo a equação do jogo que estava na lousa $1 \cdot (1) + 2 \cdot (7) = 15$, onde $mdc(2,1) = 1$ e $c = 15$. Carlos perguntou se quando uma equação diofantina tem solução inteira, o mdc(a,b) deveria necessariamente dividir c, ele tomou as equações vistas durante o desenvolvimento do jogo com solução inteira e sem solução inteira e verificou que todas se adequavam a esse raciocínio. Dessa forma, pedimos aos alunos que pensassem se o que Carlos havia dito era mesmo uma condição. Depois de alguns minutos de raciocínio, as duplas afirmaram que sim, todas as equações com soluções inteiras tinham que o mdc(a,b) dividia c.

A partir desse concenso, formalizamos a *Proposição 1* mencionada no capítulo anterior.

Após o jogo, concluímos que é possível trabalhar o conceito de EDL por meio da metodologia de resolução de problemas utilizando o roteiro de Onuchic e Allevato (2011). Conseguimos formalizar a condição de existência de soluções inteiras de uma EDL.

Acreditamos que essa aplicação no ensino básico gastará um pouco mais de tempo do que na turma em que aplicamos, porém sabemos que o jogo poderá ser desenvolvido por meio da metodologia proposta, cabe ao professor responsável pela aplicação seguir os passos e orientar os alunos do ciclo básico no jogo.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Por meio deste trabalho, justificamos a importância do conceito de EDL aos alunos do ensino básico e mostramos o quanto este conceito permite ao aluno aumentar suas possibilidades de estratégias para a resolução de uma equação $ax + by = c$, utilizando uma devida argumentação matemática e não apenas o método de tentativa e erro, usualmente utilizado. Expomos, também, que ao estudar EDL, o aluno terá contato com outros conceitos matemáticos, o que segue as propostas dos PCN (BRASIL, 1998, 2000). Dessa forma, respondemos à questão inicial envolvendo a viabilidade da aplicação de EDL no ensino básico.

Além dos conceitos matemáticos vistos junto a uma EDL citados neste trabalho, percebemos a possibilidade de o aluno também ter contato com outros conceitos matemáticos, conceitos que podem ser vistos por meio do estudo de EDL como por exemplo progressão aritmética (para alunos do ensino médio), equação da reta e sistemas lineares 2x2 (já vistas no ensino fundamental). É nosso objetivo aprofundar a relação entre esses conceitos e as EDL em trabalhos futuros.

Apresentamos, também, a importância de estudar um determinado conceito por meio da metodologia de resolução de problemas, o quanto um aluno pode produzir significado para os conceitos descobrindo-os por meio de um problema em um contexto real. Mostramos o quanto essa metodologia é importante e como pode ser aplicada em sala de aula junto a um roteiro composto por nove passos desenvolvidos por Onuchic e Allevato (2011), que se inicia na escolha de um problema ideal e é finalizado pela formalização do conceito. Entre este início e fim, temos o aluno como investigador, motivado a resolver um problema envolvendo um conceito que ainda não foi visto, e temos o professor como guia destes processos, aquele que orienta o aluno à resolução e à descoberta. Assim, fomos capazes de responder outra questão do nosso trabalho, além de nos basearmos no artigo de Onuchic e Allevato (2011), também nos baseamos no PCN+ (BRASIL, 2002) para justificar a importância da metodologia de resolução de problemas.

Nesta pesquisa, apresentamos uma proposta de sequência didática que engloba os conceitos de EDL e a metodologia de resolução de problemas. Porém, para fins deste trabalho atual, fica a cargo do professor aplicar o conceito de EDL utilizando a metodologia de resolução de problemas conforme o roteiro de Onuchic e Allevato (2011), lembrando que as definições dos conceitos, propriedades, proposições e teoremas colocados na sequência didática não devem ser apresentados aos alunos antes da resolução do problema.

Com base em nossa proposta, fizemos a ligação entre o conceito de EDL e a metodologia de resolução de problemas por meio do jogo *Escova Diofantina*.

Conseguimos alcançar nosso objetivo com este trabalho respondendo a nossas questões iniciais, relatamos a conveniência de se estudar EDL no ensino básico, discorremos sobre a importância da metodologia de resolução de problemas ao se ensinar um novo conceito, e mostramos que há a possibilidade de ensinar EDL com esta metodologia.

REFERÊNCIAS

ALLEVATO, Nora Suely Gomes; ONUCHIC, Lourdes de la Rosa. Ensinando matemática na sala de aula através da resolução de problemas. **Boletim GEPEM**, Rio de Janeiro, Ano XXXIII, n.55, p.1- 19, jul./dez. 2009.

BOYER, Carl Benjamin. **História da matemática**. Tradução de Elza F. Gomide. 3 ed. São Paulo: Blücher, 2010.

BRASIL. Secretaria de Educação e Tecnologia do Ministério da Educação. **Parâmetros curriculares nacionais**. Matemática, terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.

______. Secretaria de Educação e Tecnologia do Ministério da Educação. **Parâmetros curriculares nacionais para o ensino médio.** Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC, 2000.

______. Secretaria de Educação e Tecnologia do Ministério da Educação. **Orientações educacionais complementares aos parâmetros curriculares nacionais para o ensino médio**. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, 2002.

______. Secretaria de Educação e Tecnologia do Ministério da Educação. **Matriz de referência para o ENEM**. Brasília: MEC, 2009.

BROLEZZI, Antonio Carlos. **A tensão entre o discreto e o contínuo**. 92f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1996.

CAPILHEIRA, Bianca Herreira. **Equações diofantinas lineares**: uma proposta para o ensino médio. 148f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012.

COSTA, Eduardo Sad da. **Equações diofantinas lineares e o professor do ensino médio**. 119f. Dissertacão (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

DOMINGUES, Hygino Hugueros; IEZZI, Gelson. **Álgebra moderna**. 4. ed. São Paulo: Atual, 2003.

EVES, Howard. **Introdução a história da matemática**. Tradução de Higyno H. Domingues. 5. ed. Campinas, SP: Unicamp, 2011.

MILIES, Francisco César Polcino; COELHO, Sonia Pitta Coelho. **Números**: uma introdução à matemática. São Paulo: EDUSP, 2001.

ONUCHIC, Lourdes de la Rosa; ALLEVATO Nora Suely Gomes. Pesquisa em resolução de problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **Bolema**, Rio Claro, SP, v. 25, n 41, p.73-98, dez. 2011.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas**. Tradução de Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

POMMER, Wagner Marcelo. **Equações diofantinas lineares**: uma abordagem didático-epistemológico. São Paulo: Edição do autor, 2013.

RIBEIRO, Marcos Vinícius. **O ensino do conceito de integral, em sala de aula, com recursos da história da matemática e da resolução de problemas**. 324 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, SP, 2010.

SPIEGEL, Murray Ralph; MOYER, Robert E. **Teoria e problemas de álgebra**. Tradução de Cydara Cavedon Ripolli. 2. ed. Porto Alegre: Bookman, 2004.

VAN DE WALLE, John. **Matemática no ensino fundamental**: formação de professores e aplicação em sala de aula. Tradução de P. H. Colonese. 6 ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.