AS LEIS DE KEPLER E AS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Renata Piva Gomes

Trabalho de Conclusão do Curso Superior de Licenciatura em Matemática, sob orientação do Prof. Dr. Marco Aurélio Granero Santos

IFSP

SÃO PAULO

2018

RENATA PIVA GOMES

AS LEIS DE KEPLER E AS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Monografia apresentada ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, orientada pelo Prof. Dr. Marco Aurélio Granero Santos, em cumprimento ao requisito para obtenção do grau acadêmico Licenciada em Matemática.

São Paulo

2018

Catalogação na fonte
Biblioteca Francisco Montojos - IFSP Campus São Paulo
Dados fornecidos pelo(a) autor(a)

G633L Gomes, Renata Piva
As leis de kepler e as equações diferenciais ordinárias / Renata Piva Gomes. São Paulo: [s.n.], 2018.
57 f. il.

Orientador: Marco Aurélio Granero Santos

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, IFSP, 2018.

1. Equações Diferenciais. 2. Leis de Kepler. 3. Movimento Planetário. 4. Johannes Kepler. 5. Tycho Brahe. I. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo II. Título.

CDD 510

RENATA PIVA GOMES

AS LEIS DE KEPLER E AS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Monografia apresentada ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, em cumprimento ao requisito exigido para a obtenção do grau acadêmico de Licenciada em Matemática.

APROVADA EM 23/02/2018 **CONCEITO:** Dez

Lucas Casanova Silva

Prof. Me. Lucas Casanova Silva
Membro da Banca

Flávia Milo dos Santos

Profa. Dra. Flávia Milo dos Santos
Membro da Banca

Prof. Dr. Marco Aurélio Granero Santos
Orientador

Renata Piva Gomes

Aluna: Renata Piva Gomes

"We do not ask for what useful purpose the birds do sing, for song is their pleasure since they were created for singing. Similarly, we ought not to ask why the human mind troubles to fathom the secrets of the heavens…The diversity of the phenomena of nature is so great, and the treasures hidden in the heavens so rich, precisely in order that the human mind shall never be lacking in fresh nourishment."[1]

-Johannes Kepler

[1] "Não perguntamos o propósito pelo qual os pássaros cantam, pois, a canção é seu prazer desde que eles foram criados para cantar. Da mesma forma, não devemos perguntar por que a mente humana tem problemas para entender os segredos dos céus... A diversidade dos fenômenos da natureza é tão grande e os tesouros escondidos nos céus são tão ricos, precisamente para que jamais falte alimento fresco para a mente humana." Tradução do autor.

Dedico este trabalho à minha família, aos meus amigos e aos meus professores.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha família e aos meus amigos, em especial, aos meus pais por terem sido meu exemplo e por terem me oferecido apoio em todos os momentos e à Paloma por todas as conversas, palavras de apoio, carinho e amizade desde sempre.

Agradeço aos professores do Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia de São Paulo – Campus São Paulo, em especial ao professor Marco Aurélio Granero Santos, pela amizade, compreensão e paciência na orientação deste trabalho e por todos os ensinamentos divididos; à professora Flávia, pela amizade e por todo o apoio durante a graduação; à professora Gabriela, por todo o carinho e incentivo sempre; ao professor Amari, pela dedicação e amizade não só durante a orientação na monitoria, assim como na graduação; ao professor Lucas, por toda ajuda e dedicação; aos professores Wellington, Traldi, Vânia, Leandro, Sílvio, Carlini, Anderson, Luciano, Alda, Iracema, Henrique e Cesar, por cada ensinamento, por meio dos quais soube o que é ser professora.

Agradeço aos professores e funcionários da Escola Estadual Antônio Alcântara Machado que me deram a oportunidade de realizar o estágio obrigatório em um ambiente acolhedor, em especial, agradeço ao professor José Carlos Suzuki, por me mostrar durante todo o período de estágio como me tornar uma professora e pessoa melhor.

Agradeço aos amigos que fiz durante a graduação e que me deram forças para continuar apesar de todas as adversidades, os quais levarei para toda a vida, em particular, à Thaynara por todos os conselhos, pela ajuda e apoio em todos os momentos; à Priscila por todos os momentos compartilhados, pelas risadas e ensinamentos divididos; à Dayene, por toda sua delicadeza e pelo auxílio no momentos difíceis; ao Phelipe, pelo exemplo de dedicação e amizade; ao Lucas pelas risadas e por estar sempre presente.

Por fim, gostaria de agradecer a todos os amigos e colegas de estágio, cujos nomes não constam nas linhas deste parágrafo, que dividiram diversos momentos dessa fase da minha vida.

x

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo apresentar uma dedução das Leis de Kepler, que regem os movimentos planetários, em sua forma diferencial. No primeiro momento, o contexto histórico no qual as leis se desenvolveram é exposto, juntamente com uma breve biografia dos dois principais astrônomos envolvidos, Johannes Kepler e Tycho Brahe, ilustrando como ocorreu o desenvolvimento das leis. Em seguida, são desenvolvidos alguns conceitos referentes às Equações Diferenciais e como as Leis de Kepler podem ser deduzidas a partir dessas equações. Por fim, são apresentados estudos posteriores, em especial, a Lei da Gravitação Universal e a Teoria da Relatividade, relacionando-os com as leis deduzidas.

Palavras-chave: Equações Diferenciais; Leis de Kepler; Movimento planetário; Johannes Kepler; Tycho Brahe.

ABSTRACT

This study aims to present a deduction of Kepler’s Laws, which govern planetary motion, in their differential form. At a first moment, the historical context in which these laws were developed is exposed, with a brief biography of the two main astronomers involved, Johannes Kepler and Tycho Brahe, as well as the development of these laws. Next, some concepts concerning Differential Equations are developed and how Kepler’s Laws can be deduced by these equations. Finally, later studies are presented, in particular, Law of Universal Gravitation and Theory of Relativity, relating them to the deduced laws.

Keywords: Differential Equation; Kepler’s Laws; Planetary motion; Johannes Kepler; Tycho Brahe.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O interesse do ser humano pelos fenômenos celestes está presente em todo período de registro escrito. Segundo Neves e Arguello (1986), a Astronomia teve importância para cada época, sendo algumas de suas motivações os fatores econômicos, como a navegação e a agricultura; e os fatores religiosos ligados às superstições, como a Astrologia. As observações desses fenômenos foram essenciais para o desenvolvimento de teorias cosmológicas e astrofísicas, cujas leis tentam descrever o comportamento do Universo.

De acordo com Burns (1974, *apud* SILVA, 2014) enquanto os precursores da ciência grega faziam observações e registros para fins místicos (Astrologia) e para a elaboração de calendários que fossem aplicados na agricultura, a Astronomia para os gregos era uma ciência a qual visava o estudo da constituição dos astros celestes e as leis de seus movimentos. Com isso, temos que os modelos cosmológicos e astrofísicos mais antigos, os quais contribuíram para formar a base das teorias atuais, remontam à Astronomia grega.

Muitos foram os estudiosos gregos, conforme aponta Contador (2012), que elaboraram teorias a fim de descrever o que ocorria no Universo. Podemos destacar alguns deles, como, Filolau, Aristóteles, Apolônio, Heráclides, Aristarco, Hiparco e Ptolomeu.

No sistema astronômico de Filolau (por volta de 425 a.C.), apesar de a Terra girar 24 horas não ao redor do Sol, mas sim de uma fogueira estacionária onde os deuses habitavam, nós só não nos queimávamos porque havia um planeta invisível, chamado Antiterra, entre a Terra e o fogo, de acordo com a Figura 1.

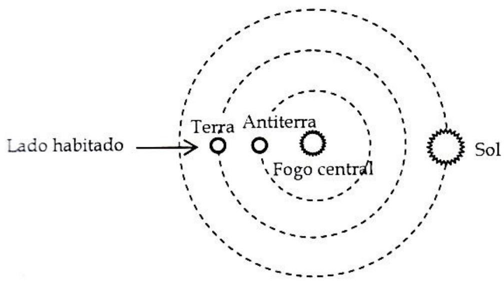

Figura 1: Sistema de Filolau
Fonte: CONTADOR, 2012, p.25

Neste sistema astronômico, o Sol, a Lua e os planetas giravam em órbitas concêntricas em torno do fogo central. Em cima de tudo havia uma esfera com as estrelas e ainda, havia o fogo exterior que era possível ser visto de uma janela na esfera (Sol). Por fim, o dia e a noite eram determinados pela posição da Terra e do Sol em relação ao movimento em torno da fogueira central.

No sistema de Aristóteles (384 a.C. – 322 a.C.), a Terra estava no centro do Universo rodeada por nove esferas concêntricas e transparentes - Lua, Mercúrio, Vênus, Sol, Marte, Júpiter, Saturno, estrelas fixas e deus - e todo movimento era uniforme em velocidade e circular em sua forma.

Apesar de sua complexidade, pois para desenhá-lo era necessário criar um sistema de círculos girando sobre outros círculos, este sistema acabou servindo para a navegação, para a confecção de horóscopos e para prever a posição das estrelas e dos planetas.

Essa concepção Aristotélica do Universo foi predominante por quase dois mil anos mesmo não sendo a forma usada para explicar os movimentos planetários, inicialmente devido à autoridade de Aristóteles na sociedade clássica e, mais tarde, devido à proteção dessa teoria pela igreja católica que via esse modelo cosmológico como a confirmação das interpretações dadas às sagradas escrituras.

Apolônio (262 a.C. – 190 a.C.) desenvolveu nessa área dois sistemas cosmológicos: o epicíclico e o excêntrico. No epicíclico, conforme Figura 2, um planeta movimenta-se uniformemente ao longo de um pequeno círculo, cujo centro movimenta-se sob outro círculo maior com centro na Terra. No excêntrico, conforme Figura 3, um planeta movimenta-se ao longo de um círculo grande cujo centro se move sob um círculo pequeno. Na Matemática, uma das importantes obras desse estudioso foi acerca das secções cônicas, curvas estas que foram essenciais para Kepler e Newton trabalharem com as órbitas planetárias.

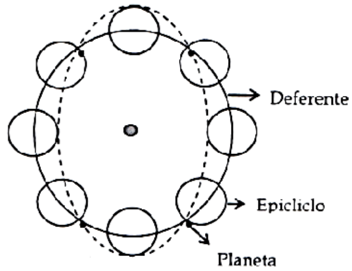

Figura 2: Sistema epicíclico de Apolônio[2]
Fonte: CONTADOR, 2012, p.30

[2] Na figura, o círculo cujo centro se move sob o Deferente chama-se, na verdade, Epiciclo.

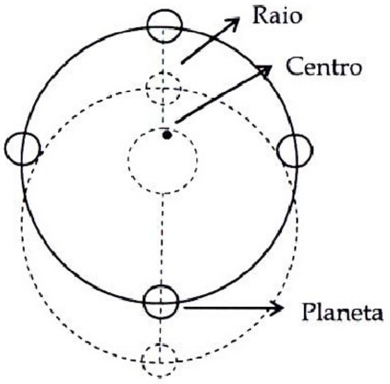

Figura 3: Sistema Excêntrico de Apolônio
Fonte: CONTADOR, 2012, p.30

Heráclides (por volta de 387 a.C.) descartou a ideia do fogo central e da Antiterra do seu contemporâneo Filolau, mas defendeu a rotação da Terra em torno do próprio eixo gerando o dia e a noite. Seu sistema cosmológico, de acordo com a Figura 4, pode ser considerado híbrido, pois os planetas Mercúrio e Vênus girariam em torno do Sol e o restante dos planetas giraria em torno da Terra.

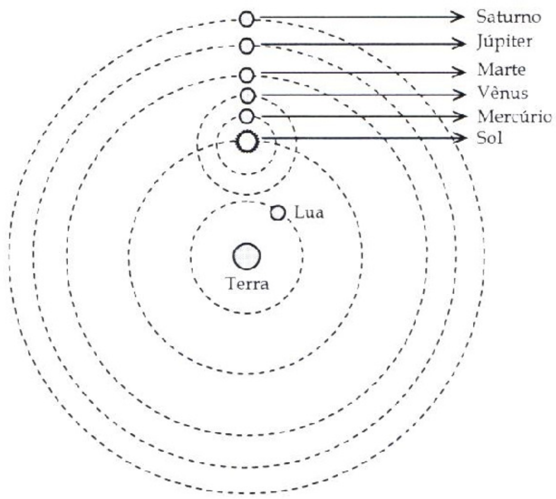

Figura 4: Sistema de Heráclides
Fonte: CONTADOR, 2012, p.32

Aristarco (cerca de 310 a.C. - 230 a.C.), último astrônomo pitagórico, foi o primeiro a colocar o Sol no centro de um sistema cosmológico e a Terra como um planeta girando em torno de si, apenas com as estrelas fixas e a Lua, conforme Figura 5,

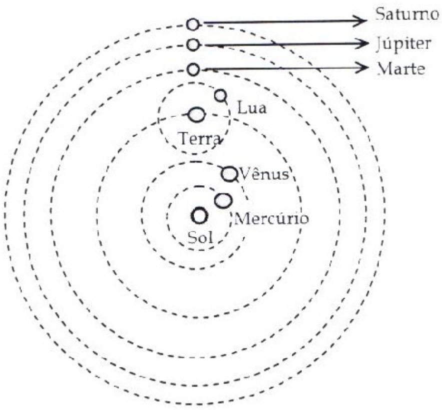

Figura 5: Sistema heliocêntrico de Aristarco
Fonte: CONTADOR, 2012, p.36

Muitos matemáticos e astrônomos foram contra esse sistema, pois acreditavam que a Terra deveria ocupar o centro do Universo inicialmente devido à influência do modelo proposto por Aristóteles e posteriormente pela influência religiosa. Cerca de dois mil anos depois os sistemas heliocêntricos foram estudados novamente pelo monge polonês Nicolau Copérnico.

Hiparco (180 a.C. - 125 a.C.), por sua vez, contribuiu para a determinação dos movimentos planetários; comportamento das estrelas fixas; duração do ano e distâncias da Terra ao Sol e da Terra à Lua, elaborou um catálogo estelar e aprimorou o cálculo do ângulo do plano de órbita da Terra, obtendo assim uma maior precisão em relação à trabalhos anteriores relacionados à Astronomia, facilitando os estudos posteriores de astrônomos como Ptolomeu (90 d.C. – 168 d.C.).

Depois de cerca de 300 anos sem nenhum progresso registrado, surge Ptolomeu com o sistema astronômico geocêntrico, no qual criou a esfera das estrelas fixas que carregava o céu para oeste em volta da Terra.

Dentro dessa esfera estavam os planetas, o Sol e a Lua, todos girando com velocidades variadas de forma mais lenta para leste, cada um em um grande círculo, chamado por ele de deferente. Os planetas giravam em um círculo, chamado de epiciclo, que tinha como centro um ponto que rotacionava no deferente.

Como surgiram alguns problemas, ele criou um círculo cujo centro não coincidia com a Terra, chamado excêntrico. O excêntrico móvel surgiu para corrigir o fato dos planetas ora parecerem grandes e ora parecerem pequenos, não podendo ser sua órbita circular. Após isso, Ptolomeu ainda criou epiciclos menores, que giravam nos epiciclos ou no deferente, e os equantes, pontos de velocidade uniforme fora do círculo.

Esse sistema se mostrou bastante complexo, pelo fato de que cada vez mais eram necessários círculos, epiciclos e equantes, contudo, esse sistema foi aceito durante 1400 anos, perdurando durante todo o período medieval.

A partir do contato com as culturas mesopotâmica e grega, em V a.C. e II d.C., respectivamente, podemos observar um desenvolvimento na Astronomia dos indianos que, ao estudar o modelo de Ptolomeu do movimento planetário, passaram a defender o formato esférico da Terra, a translação ao redor do Sol, as causas dos eclipses, podendo assim prever esses fenômenos.

De acordo com Ronan (1987, *apud* KANTOR, 2012), até meados do século XV, os europeus não tiveram um astrônomo cuja teoria tivesse tamanha importância como a de Ptolomeu. Apenas Nicolau Copérnico (1473-1543), com a chamada Revolução Copernicana, foi quem transformou essa situação ao propor um modelo cósmico heliocêntrico.

Isso porque,

> O avanço da religiosidade cristã sobre a Europa freou o desenvolvimento da Astronomia. [...] A obra dos astrônomos gregos, que não foi continuada pelos centro-europeus, o foi pelos árabes, que, entre os anos 600 e 1000, conquistaram a maior parte do que havia sido antes o mundo civilizado. Assim, acabaram por descobrir e se fascinar pela filosofia e ciências gregas, assimilando-as nas traduções de textos do grego para o árabe, eles não só as reconstruíram como o fizeram sem a influência das autoridades religiosas. (KANTOR, 2012, p. 90-91)

Ainda segundo Kantor (2012) durante o Renascimento as obras dos astrônomos árabes foram percebidas nos locais em que o cristianismo era predominante, isso ocorreu devido ao fato de que os seguidores da Igreja Católica demonstraram o desejo de adquirir novos conhecimentos, mesmo que isso significasse contatar outras religiões.

Nesse período, vários outros astrônomos criaram teorias a respeito do movimento dos planetas e suas posições, como por exemplo, Thomas Digges (c.1546-1595) e Giordano Bruno (1548-1600). Entretanto, foi o trabalho do astrônomo e matemático alemão Johannes Kepler (1571-1630), elaborado com base nas observações do astrônomo dinamarquês Tycho Brahe (1546-1601), que conseguiu aliar Física à Astronomia em três leis que tratam sobre as posições dos planetas e suas órbitas. Essas leis, que são abordadas com maior rigor adiante, foram essenciais para a descrição do Sistema Solar como o conhecemos hoje.

Deste modo, o objetivo deste trabalho é apresentar as deduções das Leis de Kepler em sua formulação diferencial, retomando os métodos utilizados por Johannes Kepler e o contexto histórico de seu desenvolvimento e, para finalizar, apresentar estas leis por meio da correção relativística.

Assim, a estrutura do trabalho conta com três capítulos além desta introdução e das considerações finais.

O primeiro capítulo destina-se ao contexto histórico das Leis de Kepler e o seu desenvolvimento, incluindo uma breve biografia de Tycho Brahe e Johannes Kepler.

O segundo capítulo explora os conceitos de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO), quando surgiram e a existência de suas soluções.

O terceiro capítulo trata das Leis de Kepler em sua formulação diferencial e, ainda, da relação entre as leis e estudos posteriores, em especial a Lei da Gravitação Universal e a Teoria da Relatividade.

2 Contexto Histórico e as Leis de Kepler

Com o declínio da sociedade grega clássica, segundo Contador (2012), Alexandria passou a ser o centro de todo o conhecimento, mesmo com os ataques dos ditos povos bárbaros e com a revolução moral de origem judaica, por meio de sua biblioteca, a qual chegou a reunir cerca de 700 mil manuscritos ou rolos de papiros que foram escritos ou copiados.

Cerca de 100 d.C., os cristãos, que possuíam suas ideias ligadas às escrituras hebraicas, associaram a cultura grega com a imoralidade intelectual, fazendo com que surgissem diversos líderes religiosos, os quais acreditavam que a pesquisa científica era uma farsa e a verdade estava presente somente nas sagradas escrituras. Esses ensinamentos cristãos iam de acordo com as ideias de Ptolomeu, o qual passou a ser o cientista responsável pelo alicerce da igreja em relação à Ciência, isto é, a teoria de Ptolomeu era utilizada como comprovação da doutrina bíblica.

Assim, a oposição cristã às escolas filosóficas se tornou cada vez mais intensa e os filósofos, considerados uma ameaça ao cristianismo, se espalharam por diversos locais levando consigo o que restava de seus estudos. Ainda conforme Contador (2012), esses estudos realizados pelos gregos tiveram sua importância reconhecida pelos árabes por meio da escola científica criada em Bagdá, cuja biblioteca foi muito importante para a disseminação desses conhecimentos. Entretanto, com a invasão árabe à Alexandria, em 10 de dezembro de 641 d.C., a Universidade e sua biblioteca foram incendiadas, destruindo cerca de 600 mil documentos e fazendo com que Alexandria nunca mais se recuperasse.

Assim, iniciou-se a Idade Média, período no qual a Filosofia deu lugar ao dogmatismo religioso; a Matemática passou a ter como utilidade a interpretação dos números; a Medicina deu lugar a amuletos e rezas para que as pessoas se protegessem das doenças produzidas pelos demônios, as quais atingiam quem blasfemasse contra Deus ou por castigo do mesmo; a Astronomia virou Astrologia, baseando-se somente em superstições e a Química deu lugar a alquimistas e mágicos.

> Podemos caracterizar o início do período medieval como um momento em que as glórias da civilização clássica não passavam de uma longínqua lembrança, mas, num determinado momento, o homem medieval passou a necessitar de cultura e conhecimento para o progresso da sociedade, e a recuperação dos trabalhos antigos foi a única saída. (CONTADOR, 2012, p.72)

Com isso, muito dos ensinamentos gregos que foram preservados pelos muçulmanos foi recuperado na Europa medieval, isso por meio dos intercâmbios comerciais entre a Europa e o mundo árabe, os quais favoreceram o contato cultural e assim as traduções dos estudos se intensificaram. Por isso, assim como destaca Contador (2012), as principais contribuições dos árabes para a Ciência como um todo se deram por meio das traduções que possibilitaram a preservação dos escritos gregos.

Entre o fim do século XV e o início do século XVII, a Europa viveu um período de grandes transformações, nas Artes, na Literatura, na Música, na Matemática e, principalmente, na Astronomia, as quais tiveram grande impacto no sistema medieval e nos dogmas eclesiásticos, fazendo com que esse período fosse denominado de Renascimento. Nesta fase, a ciência teve um período de desenvolvimento, no qual a mecânica de Aristóteles e o sistema de esferas celestes de Ptolomeu começaram a ser contestados. Essa mudança na concepção do sistema solar se deu por meio do monge polonês, Nicolau Copérnico.

Nicolau Copérnico viveu entre os anos de 1473 e 1543, nasceu em Torun, na Polônia e morreu em Frombork, também na Polônia (SILVA, 2014, p.40).

De acordo com Contador (2012), Copérnico ficou órfão cedo e foi criado, junto com seu irmão e suas duas irmãs, pelo tio Lucas Waczenrode, o qual era bispo e mantinha um bom relacionamento com os sobrinhos, sendo protetor, empregador e mecenas de Nicolau, seu sobrinho favorito.

Aos dezoito anos foi enviado à Universidade de Cracóvia, famosa, em especial, nas áreas de Matemática e Astronomia. Após seis anos, retornou a Torun tornando-se cônego de Frauenburg, logo em seguida foi enviado para estudar Direito Canônico na Itália.

Quando estava em Bolonha, teve acesso às obras de Cláudio Ptolomeu – *O Almagesto* – e de Aristarco de Samos, que defendia o heliocentrismo (PICAZZIO, 2011, p.42 apud SILVA, 2014, p.40).

Segundo Contador (2012), ao retornar da Itália, Copérnico passou a morar com seu tio no castelo de Heilsberg, onde desenvolveu o *Nicolai Copernici de hypothesibus motuum coelestium a se constitutis commentariolus* (que pode ser traduzido como *Um breve esboço das hipóteses de Nicolau Copérnico sobre os movimentos celestes*), que circulou na forma de manuscrito.

De acordo com Silva (2014), Copérnico acreditava que a estrutura celeste proposta por Ptolomeu era muito complicada, por isso tentou desenvolver um sistema que fosse matemática e fisicamente mais simples.

Conforme aponta Contador (2012), *Commentariolus* foi a primeira tentativa de um sistema copernicano, trabalho que, apesar de não ter a repercussão esperada trouxe certa notoriedade para Copérnico, que apenas em 1540, após grande pressão de seu discípulo Jorge Joaquim (conhecido como Rheticus), decidiu realizar uma nova publicação.

Essa publicação realizada em 1543, ano de sua morte, *De revolutionibus orbium coelestium* (*A revolução das órbitas celestes*), seria, como afirma Contador (2012), o referencial para o cálculo de novas tabelas astronômicas, dado que seu sistema heliocêntrico explicou o aparente movimento diário dos céus derivado da rotação da Terra e o movimento anual do Sol derivado da translação.

Sua grande contribuição ao colocar o Sol no centro do sistema solar com os planetas orbitando em sua volta, inclusive a Terra, foi o rompimento com a estrutura tradicional, possibilitando que outros estudiosos, como Tycho Brahe e Johannes Kepler, desenvolvessem teorias responsáveis pela maneira como enxergamos o sistema solar hoje em dia.

Compreender o contexto histórico no qual se deu o encontro de Tycho Brahe e Johannes Kepler se mostra de extrema importância para a compreensão da formulação das leis que regem o movimento planetário, visto que a época era de grandes conflitos entre católicos e protestantes, e a oposição de ideias entre estudiosos e a igreja católica poderia ser bem complicada. Essa importância é corroborada por Mourão (2003) ao afirmar que para estudar a história da Ciência é preciso compreender a época em que a obra foi escrita e as ideias teológicas predominantes, das quais muitas vezes não é possível se libertar.

Assim, apresentamos dados biográficos dos dois grandes responsáveis pelas leis que regem os movimentos planetários.

2.1 Tycho Brahe

É imprescindível ressaltar que sem os dados observacionais de Tycho Brahe, provavelmente, Kepler não teria conseguido elaborar as três leis do movimento planetário que levam o seu nome.

Conforme aponta Contador (2012),

> Tycho Brahe era o melhor observador da época, mas, apesar de ter feito medições precisas, era incapaz de transformá-las numa teoria coerente do Sistema Solar. Ele sabia que precisava da ajuda do melhor teórico da época, o brilhante Johannes Kepler. Sozinhos, nenhum dos dois conseguiria realizar a síntese que sabiam ser possível. Tycho Brahe, que já havia feito da Astronomia a razão de sua existência, durante os últimos 38 anos de sua vida, produziu mapas celestes com extraordinária precisão. Ninguém no mundo reconheceria mais o valor das observações de Tycho do que Kepler. Para ele, esses dados eram a chave que abriria a porta do Universo, revelando o que ele chamava de *Os segredos dos céus*. (CONTADOR, 2012, p.119)

Em 14 de dezembro de 1546, em Knudstrup, na Dinamarca, nasceu Tycho Brahe, um dos cinco filhos de Otto Brahe (1518-1571) (MOURÃO, 2003, p.74). De acordo com Contador (2012), seu tio George Brahe (? -1565), Vice-Almirante de Frederico II, rei da Dinamarca, foi quem o criou. Isso porque, antes de seu nascimento, Otto combinou com seu irmão, que não possuía filhos, que o seu primogênito seria confiado a ele. Entretanto, quando Tycho nasceu, tanto Otto quanto sua esposa recusaram-se a cumprir a promessa, o que fez com que os irmãos se desentendessem e, um ano depois, quando o segundo filho de Otto nasceu, George sequestrasse Tycho. Como os pais tinham um outro filho, decidiram acabar com os desentendimentos e deixar que George criasse o menino. George incentivou o gosto de Tycho pela cultura clássica e poesia latina, enviando-o aos 12 anos para a Universidade de Copenhague para estudar Retórica e Filosofia.

Em 21 de agosto de 1560, em Copenhague, observou o eclipse parcial do Sol e o fato do homem conseguir prever o que acontece nos céus a partir do conhecimento preciso dos astros e de seus movimentos o impressionou muito.

Com isso, Tycho Brahe deu início às suas leituras em Astronomia, incluindo uma das principais obras de Astronomia da época, o *Almagestum* de Ptolomeu. Entretanto, seu interesse pelos astros não agradou seus familiares, em especial seu tio George. Por esse motivo, aos quinze anos, seu tio o enviou para estudar Direito na Universidade de Leipzig.

De acordo com Mourão (2003), Tycho Brahe fez sua primeira observação em 17 de agosto de 1563, registrando a conjunção de Saturno e Júpiter, com a ajuda de um compasso de braços bastante longos. Com base nesta observação Tycho Brahe percebeu a importância da precisão e sistematização das observações celestes.

Em 29 de dezembro de 1566, num duelo com o nobre Manderup Parsbjerg, perdeu uma parte do nariz e, desde então, passou a usar uma prótese metálica.

Segundo Contador (2012), esse duelo ocorreu devido a um desentendimento de Tycho com o nobre, o qual expôs o colega ao ridículo, após descobrirem um equívoco na previsão da morte do sultão da Turquia realizada pelo astrônomo.

Na noite de 11 de novembro de 1572, Brahe presenciou um acontecimento que chamou a atenção de muitos astrônomos da época e o levou aos estudos astronômicos, o aparecimento de uma estrela observável mais luminosa que o planeta Vênus em seu máximo brilho.

A partir de suas observações, bastante precisas para a época, Tycho Brahe escreveu e publicou o livro *De Nova Stella (Sobre a Estrela Nova),* em meados de 1573. Com essa obra foi possível perceber que o mundo supralunar - região acima da lua - não era imutável e baseado em movimentos circulares, como afirmava a física aristotélica.

Em 1576, o rei Frederico II oferece a Tycho Brahe a ilha de Hveen, com quase 5 quilômetros de comprimento, na qual construiu um castelo, chamado Uraniborg, e um observatório com diversos instrumentos construídos com extrema precisão.

Com suas observações em Hveen, Tycho publicou, em 1588, o livro *De Mundi aetheri recentioribus phaenomenis liber secundus (Sobre o mais recente fenômeno do Mundo etéreo, livro dois)*, expondo pela primeira vez seu sistema. Nesse modelo, conforme Figura 6, os planetas do sistema solar, exceto a Terra, giravam em torno do Sol, e este junto com a lua, giravam em torno da Terra. Já as estrelas ocupavam uma camada fixa periférica.

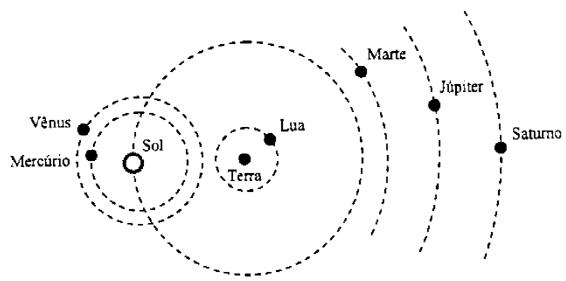

Figura 6: Sistema de Tycho Brahe
Fonte: CONTADOR, 2012, p.120

Em 1588, Frederico II, rei da Dinamarca e protetor de Tycho Brahe faleceu. Seu herdeiro, Cristiano IV, se desentendeu com Tycho, que em 1597 deixou a ilha. Em junho de 1599, foi acolhido na Boêmia pelo imperador romano-germânico

Rodolfo II. A mudança para o castelo de Benatky, próximo a Praga, foi o que possibilitou a aproximação entre Tycho Brahe e Johannes Kepler.

2.2 Johannes Kepler

Johannes Kepler nasceu no dia 27 de dezembro de 1571, na cidade de Weil, Alemanha. Segundo Gleiser (2003) a vida de Kepler foi marcada por disputas religiosas, políticas, doenças e uma dinâmica familiar bastante conturbada. Seu pai, Heinrich, era um mercenário, extremamente violento em casa, que acabou desaparecendo em uma batalha na Holanda. Sua mãe, Katherine, tinha como único interesse o poder curativo e maléfico das ervas e, por isso, foi acusada de bruxaria. Se não fosse Kepler e seu renome na época, Katherine teria terminado na fogueira.

Em 1578, Kepler foi enviado para a escola elementar em Leonberg. Aos treze anos, após obter sucesso no exame de bacharel, Kepler mostrou seu interesse pelos estudos teológicos. Assim, em 1584, entrou para o seminário de Aldelberg, no qual permaneceu até 1589. Ano esse em que começou a estudar teologia na Universidade de Tübingen. Nesse período, o gosto de Kepler pela Astronomia começa a aflorar, devido ao mestre com o qual mais se identificou: Maestlin.

Conforme afirmam Medeiros (2002) e Mourão (2003) Maestlin ministrava em suas aulas regulares a teoria de Ptolomeu, entretanto para seus alunos mais adiantados, como Kepler, ensinava a teoria de Copérnico, devido ao fato do copernicanismo ser visto com desconfiança na época.

Em 1594, com os estudos teológicos finalizados, Kepler deixa Tübingen para assumir os postos de matemático provincial e professor em Graz, onde lecionou Aritmética, Geometria, Retórica e Evangelho.

Publicou, em 1596, o livro intitulado *Mysterium Cosmographicum (Mistério Cosmográfico)*, no qual defendia o modelo copernicano, mas que ao mesmo tempo representasse a harmonia criada por Deus. Neste modelo, proposto por Kepler, o Sol se situa no centro e ao seu redor estão seis esferas concêntricas, sendo que cada uma delas estaria inscrita num sólido platônico e circunscrita a outro.

Segundo Medeiros (2002) o próprio Kepler notou a necessidade de dados mais precisos para aprimorar o seu modelo, dado que havia discrepâncias entre o que era observado e a teoria.

Com a Contra-Reforma, o imperador romano-germânico Ferdinando II, fechou a escola provincial na qual Kepler lecionava, fazendo com que Kepler continuasse trabalhando apenas como astrólogo na cidade.

Apenas em 1600, Kepler deixou Graz, após os protestantes serem intimados a se retirar da cidade ou se converter ao catolicismo.

Nesse período, Kepler teve a oportunidade de trabalhar com o grande astrônomo da época, Tycho Brahe.

2.3 Tycho Brahe e Johannes Kepler

Segundo Farhat (2003) a primeira carta que Kepler escreveu para Tycho Brahe data de 13 de dezembro de 1597. Nessa época, ambos contavam com uma boa reputação entre os astrônomos europeus, Kepler, após a publicação de *Mysterium Cosmographicum*, mostrou que era um astrônomo com grande aptidão matemática e Brahe, reconhecido como um dos maiores astrônomos devido às suas observações precisas e sistemáticas.

Vale ressaltar que, de acordo com Medeiros (2002) e Mourão (2003) a relação entre Tycho Brahe e Kepler foi um tanto conturbada. Brahe temia que Kepler tivesse total acesso às suas observações e as utilizasse em benefício próprio. Por esta razão, Kepler era um mero assistente de Brahe, tendo acesso somente ao que lhe era permitido.

Os modelos cósmicos desenvolvidos por cada um eram bem diferentes, porém, tanto Brahe quanto Kepler sabiam que o outro poderia contribuir muito para o aperfeiçoamento de suas teorias. Como foi visto, Kepler precisava de dados observacionais e Tycho Brahe, por sua vez, precisava da habilidade matemática de Kepler.

Assim, após alguns meses de conciliação, Kepler se mudou para Praga em agosto de 1600. Contudo, a convivência entre esses dois astrônomos renomados não durou muito, em outubro de 1601 Tycho Brahe faleceu devido a uma infecção urinária.

Com a morte de Brahe, uma longa disputa entre seus herdeiros, em especial seu genro Junker Tengnagel, e Kepler foi iniciada. Esta disputa teve um fim apenas em 1609, ano em que Kepler pôde publicar sua obra *Astronomia Nova,* elaborada a partir das observações de Tycho obtidas por meio de uma distração de seus herdeiros e finalizada em 1605, possuindo como autor do prefácio o próprio Tengnagel. Nesse livro, Kepler enunciou suas duas primeiras leis sobre o movimento planetário. Sua terceira lei viria a ser enunciada somente em 1619, no seu livro intitulado *Harmonice Mundi (Harmonia do Mundo).*

O processo científico por meio do qual Kepler obteve suas leis é motivo de discussão entre estudiosos, visto que havia uma enorme quantidade de dados observados com erros de precisão dos instrumentos. Além do mais, o desenvolvimento de ferramentas matemáticas, como por exemplo, as Equações Diferenciais, que ajudariam no rigor das demonstrações das leis, só viria a ocorrer anos depois com Isaac Newton.

2.4 As Leis de Kepler

O trabalho realizado por Kepler para a obtenção das três leis que modelam o movimento planetário mostra sua importância e, ao mesmo tempo, faz com que os estudiosos levantem hipóteses sobre os métodos por ele utilizados. Com isso, nessa seção os métodos utilizados por Kepler para o desenvolvimento de suas leis são descritos.

2.4.1 Primeira lei

"Todo planeta move-se em órbita elíptica com o Sol ocupando um de seus focos."

Segundo Contador (2012), Kepler calculou a distância do Sol a Marte durante dois anos, nos quais a órbita sempre se mostrava uma espécie de oval, parecendo um círculo, mas achatado em seus lados opostos, observando ainda que a distância entre o raio do círculo e o fim do eixo menor do oval, para um círculo de raio um, era igual a 0,00429.

Valor este obtido por meio da relação $e^2/2$, em que $e = CS$ é a distância do centro do círculo ao centro do Sol, conforme Figura 7. Assim, Kepler estabeleceu a relação:

$$\frac{AC}{CR} = \frac{1}{1 - e^2/2}$$

$$\frac{AC}{CR} = \frac{1}{1 - 0{,}00429}$$

$$\frac{AC}{CR} \cong 1{,}0043$$

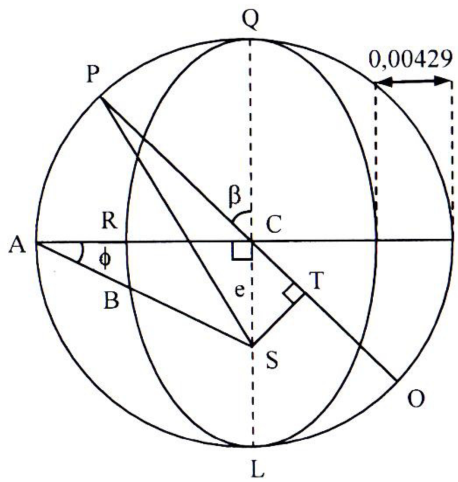

Figura 7: Círculo e a órbita de Marte
Fonte: CONTADOR, 2012, p.172

Ao se deparar com esse número, ainda conforme Contador (2012), Kepler teve receio, pois ele equivale à secante do ângulo ϕ, situado entre AC e AS, em que A é a posição de Marte.

Analisando esse ângulo, formado entre o Sol, Marte e o centro da órbita, Johannes Kepler chegou à relação: $\sec\phi = \frac{1}{\cos\phi} = \frac{1}{AC/AS} = \frac{AS}{AC} = AS$, a partir da qual verificou que existiria uma relação entre o ângulo ϕ e a distância AS, em que o ângulo varia à medida que Marte se move ao longo de sua órbita.

Com isso, Kepler afirmava que quando o ângulo $QCP = \beta \neq 90º$, com Marte em P, a relação entre a distância SP para a nova distância entre o Sol e Marte (AS), na qual Marte está em A, era a proporção de SP para a sua projeção perpendicular PT no diâmetro PO. O que está correto, segundo Contador (2012), pois quando

Marte desloca-se de A para P temos $AS = SP$ e $AC = PT$ e a relação $\frac{AS}{AC}$ passa a ser $\frac{SP}{PT}$.

Entretanto, a distância PT corresponde ao raio da circunferência acrescido de uma outra distância, ou seja, $PT = PC + CT$. O que corrobora com o fato da órbita não ser circular, mas sim elíptica.

Desse modo, Kepler montou a relação $\frac{SP}{AS} = \frac{SP}{PT}$, ou seja, $AS = PT$. Logo, a distância entre Sol e Marte, seria dada por PT, em que $PT = PC + CT$. E ainda, fazendo $PT = \rho$, obtém-se $\rho = 1 + e\cos\beta$.

Contudo, conforme afirma Contador (2012), Kepler não imaginou que a equação encontrada era de uma elipse, a Geometria Analítica não tinha sido desenvolvida, consequentemente, ao tentar construir a órbita de Marte baseado na equação cometeu um pequeno erro de Geometria, obtendo a curva errada e acabando por descartar esta equação.

Com base nas observações que tinha, Kepler acreditava que a órbita de Marte era realmente elíptica, resolveu então construir uma elipse por métodos tradicionais e estudá-la.

Esses métodos, de acordo com Contador (2012), consistiam na construção de uma elipse a partir de um círculo de raio unitário, conforme Figura 8, no qual $a = 1$, $b = 1 - \frac{e^2}{2}$, $e = CS$ e $PS = \rho$.

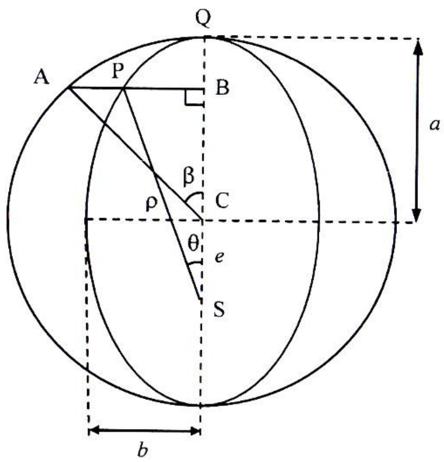

Figura 8: Construção da elipse por meio de uma circunferência
Fonte: CONTADOR, 2012, p. 173

Assim, da elipse é possível obter a relação: $\frac{a}{b} = \frac{AB}{PB} = \frac{sen\,\beta}{\rho sen\,\theta}$, a partir da qual obtém-se:

$$a\rho sen\,\theta = bsen\,\beta$$

Lembrando que $a = 1$, tem-se:

$$\rho sen\,\theta = bsen\,\beta \rightarrow sen\,\theta = \frac{b\,sen\,\beta}{\rho} \tag{2.1}$$

Da Figura 8 é possível ainda obter relação: $\rho\cos\theta = e + \cos\beta$, que elevada ao quadrado resulta em:

$$\rho^2\cos^2\theta = e^2 + 2e\cos\beta + \cos^2\beta \tag{2.2}$$

Utilizando a relação fundamental da trigonometria, a equação (2.2) pode ser reescrita como:

$$\rho^2(1 - sen^2\,\theta) = e^2 + 2e\cos\beta + \cos^2\beta \tag{2.3}$$

Substituindo (2.1) em (2.3), obtém-se:

$$\rho^2 = e^2 + 2e\cos\beta + \cos^2\beta + b^2 sen^2\beta \tag{2.4}$$

Substituindo $b = 1 - \frac{e^2}{2}$ em (2.4) obtém-se:

$$\rho^2 = e^2 + 2e\cos\beta + \cos^2\beta + sen^2\beta - e^2 sen^2\beta + \frac{e^4}{4}\,sen^2\beta$$

Pela relação fundamental da trigonometria, temos que $\cos^2\beta + sen^2\beta = 1$ e, por hipótese, o valor de e é pequeno, de modo que o valor e^4 pode ser desprezado, resultando em:

$$\rho^2 \cong 1 + e^2 + 2e\cos\beta - e^2 sen^2\beta$$

$$\rho^2 = 1 + e^2 + 2e\cos\beta - e^2\,(1 - \cos^2\beta)$$

$$\rho^2 = 1 + e^2 + 2e\cos\beta - e^2 + e^2\cos^2\beta$$

$$\rho^2 = 1 + 2e\cos\beta + e^2\cos^2\beta$$

$$\rho^2 = (1 + e\cos\beta)^2$$

O resultado acima mostra que a equação da elipse pode ser escrita como

$$\rho = 1 + e\cos\beta,$$

mesma equação obtida por Kepler anos antes.

2.4.2 Segunda Lei

"Um planeta varre áreas iguais em tempos iguais."

> Ao mover-se, um planeta varre, em um dado período de tempo, uma área imaginária em forma de cunha. Quando ele está longe do Sol, esta cunha é longa e estreita, e, quando se aproxima, ela é curta e larga. Embora as formas sejam diferentes, Kepler descobriu que suas áreas são sempre iguais. (CONTADOR, 2012, p.181)

Conforme aponta Contador (2012), Kepler sabia que os planetas, inclusive a Terra, não se moviam com velocidade uniforme e acreditava ter provado que a velocidade de cada planeta dependia diretamente de sua distância ao Sol.

Com isso, sua primeira ideia consistia em dividir o círculo orbital em 360º e calcular a distância de cada parte do arco do Sol, pois a soma das distâncias entre dois pontos quaisquer da órbita seria igual ao tempo necessário para o planeta atingir o ponto final.

Entretanto, essa ideia não funcionou, fazendo com que Kepler adotasse a ideia de que a variação de velocidade dos planetas seria inversamente proporcional à sua distância ao Sol. Com isso, Kepler dividiu a órbita da Terra em intervalos, conforme Figura 9, de modo que em cada um deles a velocidade pudesse ser considerada praticamente constante e proporcional à distância do Sol, assim o tempo necessário para o planeta percorrer o intervalo seria proporcional a soma das distâncias dos extremos dos intervalos ao Sol.

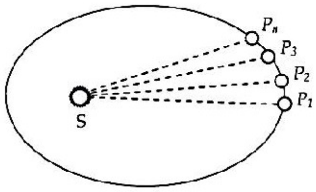

Figura 9: Divisão da órbita da Terra em intervalos
Fonte: CONTADOR, 2012, p.182

E, lembrando-se de Arquimedes com o problema da quadratura do círculo, ainda segundo Contador (2012), Kepler dividiu um intervalo em um número infinito de partes e substituiu a soma infinita das distâncias pela área entre os intervalos, o que gerou a sua segunda lei.

2.4.3 Terceira Lei

“Os quadrados dos períodos dos planetas (o tempo que levam para efetuar uma órbita completa) são proporcionais ao cubo de sua distância média ao Sol.”

Johannes Kepler, assim como apontam Tossato e Mariconda (2010), não escreveu de maneira direta acerca de seus métodos para o desenvolvimento de suas leis, apresentando em seus trabalhos apenas as etapas do seu procedimento.

Além disso, em relação à sua terceira lei, durante a pesquisa bibliográfica feita para a elaboração desse trabalho não foram encontrados tais procedimentos adotados por Kepler, somente a dedução de sua forma diferencial.

Desse modo, a dedução da terceira lei dos movimentos planetários será apresentada na sua forma diferencial na seção 4.3 deste trabalho.

3 Equações Diferenciais Ordinárias

O estudo das Equações Diferenciais teve início no final do século XVII, conforme apontam Figueiredo e Neves (2002), pelos matemáticos responsáveis pela criação do Cálculo, Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), motivados pela Física. Para Alitolef (2011), o maior desafio era encontrar a equação que descrevia o movimento de um corpo com velocidade variável, seja ele acelerado ou não.

Nesse contexto, podemos citar não só Newton e Leibniz, mas também Jakob Bernoulli, Johann Bernoulli, Augustin-Louis Cauchy, Daniel Bernoulli, Leonhard Euler, Joseph-Louis Lagrange, Pierre-Simon de Laplace, Carl Friedrich Gauss e Rudolf Lipschitz, como matemáticos que tiveram grande importância para o desenvolvimento inicial das Equações Diferenciais. Sendo assim, os dados apresentados acerca desses estudiosos nos parágrafos seguintes serão baseados em Boyce e DiPrima (2015).

Isaac Newton não atuou muito em relação às Equações Diferenciais propriamente ditas, mas seus estudos sobre o Cálculo e as leis fundamentais da mecânica, área de maior concentração de suas teorias, foram a base para a aplicação das Equações Diferenciais, principalmente por Euler. Estes estudos datam de 1665, entretanto só foram publicados em 1687, dado seu receio em relação às críticas, com o livro intitulado *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica (princípios Matemáticos da Filosofia Natural).*

Newton tem como principais contribuições a classificação das Equações Diferenciais de primeira ordem em três formas: $\frac{dy}{dx} = f(x)$, $\frac{dy}{dx} = f(y)$ e $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, e ainda, o desenvolvimento de um método para a resolução da última forma no caso em que $f(x, y)$ é um polinômio de x e y, usando séries infinitas.

Gottfried Wilhelm Leibniz, apesar de chegar aos resultados do Cálculo independentemente e um pouco depois de Newton, publicou-os anteriormente em 1684. Leibniz acreditava na importância da notação matemática, por isso introduziu a notação para derivada, $\frac{dy}{dx}$, assim como o sinal para integral, $\int$.

Além disso, descobriu o método de separação de variáveis e a redução de equações homogêneas para equações separáveis em 1691, e ainda, o procedimento para resolver equações lineares de primeira ordem, em 1694. Devido a sua vida de embaixador e conselheiro de famílias reais alemãs, Leibniz viajou muito e manteve contato com diversos matemáticos, em especial com os irmãos Bernoulli.

Jakob (1654-1705) e Johann (1667-1748) Bernoulli tiveram no desenvolvimento de métodos para a resolução de Equações Diferenciais e na ampliação do campo das aplicações suas maiores contribuições.

Através do Cálculo, eles resolveram diversos problemas de mecânica utilizando a formulação de Equações Diferenciais, como por exemplo, a resolução da equação diferencial $y' = \left[\frac{a^3}{(b^2y-a^3)}\right]^{\frac{1}{2}}$ feita por Jakob em 1690, no mesmo artigo em que empregou a palavra integral pela primeira vez no sentido atual, e a resolução da equação $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{ax}$ feita por Johann, em 1694.

Daniel Bernoulli (1700-1782), filho de Johann Bernoulli, se interessou, essencialmente, pelas Equações Diferenciais Parciais e suas aplicações. Desenvolveu a chamada equação de Bernoulli na Mecânica dos Fluidos e ainda, foi o primeiro a estudar as funções que um século mais tarde ficariam conhecidas como Funções de Bessel.

Leonhard Euler (1707-1783) foi aluno de Johann Bernoulli e amigo de Daniel Bernoulli, esteve associado à Academia de São Petersburgo (1727-1741 e 1766-1783) e à Academia de Berlim (1741-1766), tinha interesse em diversas áreas da Matemática e suas aplicações.

> Euler foi, sem dúvida, o maior responsável pelos métodos de resolução usados hoje nos cursos introdutórios sobre equações diferenciais, e até muitos dos problemas específicos que aparecem em livros texto de hoje remontam aos grandes tratados que Euler escreveu sobre o Cálculo – *Institutiones calculi differentialis* (Petersburgo, 1755) e *Institutiones calculi integralis* (Petersburgo, 1768-1770, 3 volumes). (BOYER, 2009, *apud* ALITOLEF, 2011, p.11)

Entre as contribuições de Euler, nos anos de 1734 e 1735, ele identificou a condição para que Equações Diferenciais de primeira ordem sejam exatas e desenvolveu a teoria dos fatores integrantes; em 1743, encontrou a solução geral para equações lineares homogêneas com coeficientes constantes; entre 1750 e 1751, estendeu este último resultado para equações não homogêneas; por volta de 1750, começou a usar séries de potências para resolver as Equações Diferenciais e, entre 1768 e 1769, propôs um procedimento numérico para encontrar uma solução aproximada para as equações. Além disso, contribuiu para o estudo das Equações Diferenciais Parciais e deu o primeiro tratamento sistemático do Cálculo de Variações.

Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), sucessor de Euler na Academia de Berlim em 1766, é conhecido por seu trabalho *Mécanique Analytique (Mecânica Analítica)*, publicado em 1788. Entre 1762 e 1765, mostrou que a solução geral de uma equação diferencial linear homogênea de ordem n é uma combinação linear de n soluções independentes. Entre 1774 e 1775, desenvolveu completamente o método de variação de parâmetros.

Pierre-Simon de Laplace (1749-1827), conforme Capra (2006) *apud* Alitolef (2011), aperfeiçoou os cálculos de Newton de modo que foi capaz de explicar os detalhes que caracterizam o movimento dos planetas e dos cometas, bem como o fluxo das marés e outros fenômenos relacionados à gravidade. Assim, seu trabalho mais importante foi o *Traité de mécanique céleste (Tratado da mecânica celeste),* publicado em cinco volumes entre 1799 e 1825.

A transformada de Laplace, método que permite obter a solução de uma equação diferencial ordinária de coeficientes constantes por meio da resolução de uma equação algébrica, recebeu o nome em sua homenagem, contudo sua utilidade na resolução das Equações Diferenciais só foi reconhecida muito mais tarde.

No final do século XVIII, vários métodos elementares para solucionar Equações Diferenciais Ordinárias já existiam. Assim, no século XIX, o interesse estava em questões relacionadas à unicidade e a existência dessas soluções, bem como o desenvolvimento de métodos não tão elementares como o baseado na expansão em séries de potências.

Com isso, Carl Friedrich Gauss (1777-1855) e Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) tiveram grande contribuição desenvolvendo teorias de funções de variáveis complexas. Gauss acreditava que essas teorias ajudariam a compreender muitos resultados necessários das Equações Diferenciais Aplicadas. Já Cauchy, desenvolveu o método da equação característica, o qual auxilia na análise e na solução de Equações Diferenciais Parciais.

Além desses resultados, em 1876, Rudolf Lipschitz (1832-1903) desenvolveu teoremas de existência para soluções de Equações Diferenciais de primeira ordem.

Nos últimos séculos, o estudo das soluções das Equações Diferenciais se dá por meio de métodos numéricos, com a utilização de computadores, geométricos ou topológicos, a fim de que possamos compreender qualitativamente o comportamento das soluções dos pontos de vista geométrico e analítico.

3.1 Definições e Conceitos

As definições apresentadas nessa seção são baseadas em Boyce e DiPrima (2015).

Os fenômenos do mundo físico podem ser interpretados e deduzidos por meio de leis, ou princípios, envolvendo relações que descrevem a taxa segundo a qual esses fenômenos acontecem. Expressas em linguagem matemática, as relações são equações e as taxas são derivadas. Equações contendo derivadas são **Equações Diferenciais.**

As Equações Diferenciais podem ser classificadas quanto ao tipo, a ordem e a sua linearidade.

3.1.1 Classificação pelo tipo

As Equações Diferenciais podem ser divididas em dois tipos: Ordinárias e Parciais.

Uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) é uma equação diferencial em que a função solução depende de uma única variável independente e, por isso, aparecem somente derivadas totais.

Exemplos:

1) A equação $\frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx} = x$ apresenta duas variáveis dependentes u e v, e apenas uma variável independente;

2) A equação $L\frac{d^2Q(t)}{dt^2} + R\frac{dQ(t)}{dt} + \frac{1}{C}Q(t) = E(t)$, modela a carga $Q(t)$ em um capacitor em um circuito com capacitância C, resistência R e indutância L.

Já uma Equação Diferencial Parcial (EDP) é uma equação diferencial em que as derivadas são derivadas parciais de duas ou mais variáveis independentes.

Exemplos:

1) A equação $\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = xy$ apresenta duas variáveis dependentes u e v, e duas variáveis independentes x e y;

2) A equação $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2 + y^2$ apresenta uma variável dependente z, e duas variáveis independentes x e y.

3.1.2 Classificação pela ordem

A ordem de uma Equação Diferencial é a maior ordem das derivadas que aparecem na equação.

Exemplos:

1) A equação $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial y} - 4\frac{\partial u}{\partial x}$ tem como derivada de maior ordem $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ e, ainda, apresenta duas variáveis independentes. Logo, ela é uma equação diferencial parcial de ordem 2.

2) Na equação $x\frac{d^3 y}{dx^3} + 2\frac{dy}{dx} + y = 0$, podemos observar que a derivada de maior ordem é $\frac{d^3 y}{dx^3}$, logo a equação é uma equação diferencial ordinária de ordem 3.

3.1.3 Classificação pela linearidade

A Equação Diferencial Ordinária $F(t, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ é dita **linear** se F é uma função linear das variáveis $y, y', \dots, y^{(n)}$; uma definição análoga se aplica às Equações Diferenciais Parciais.

Assim, a equação diferencial ordinária linear geral de ordem n é dada por: $a_0(t)y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(t)y = g(t)$

Exemplos:

1) A equação $L\frac{d^2 Q(t)}{dt^2} + R\frac{dQ(t)}{dt} + \frac{1}{C}Q(t) = E(t)$ é uma equação diferencial ordinária linear;

2) A equação $y''' + 2e^t y'' + yy' = t^4$ é uma equação diferencial ordinária não linear, devido à expressão yy'.

3.2 Solução de uma Equação Diferencial Ordinária

> Uma solução para uma equação diferencial é uma função que satisfaz identicamente à equação. A solução mais geral possível que admite uma equação diferencial é denominada solução geral, enquanto que outra solução é chamada solução particular. (SODRÉ, 2003, p.3-4)

De acordo com Boyce e DiPrima (2015), as Equações Diferenciais podem ser usadas para descrever e investigar diferentes tipos de problemas das ciências naturais. Dessa maneira, encontrar uma solução para essas equações e, ainda, saber se essa solução é única se mostra de grande importância para análise desses problemas. Para esse fim, temos o Teorema da Existência e da Unicidade, o qual pode ser enunciado conforme Figueiredo e Neves (2002):

> Seja $f: \Omega \to \mathbb{R}$ uma função contínua definida num aberto Ω do plano (x, y). Suponhamos que a derivada parcial com relação à segunda variável, $f_y: \Omega \to \mathbb{R}$, seja contínua também. Então para cada $(x_0, y_0) \in \Omega$, existem um intervalo aberto I contendo x_0 e uma única função diferenciável $\phi: I \to \mathbb{R}$ com $(x, \phi(x)) \in \Omega$, para todo $x \in I$, que é solução do problema de valor inicial (P.V.I.):
>
> $$y' = f(x, y)$$
> $$y(x_0) = y_0$$
>
> (FIGUEIREDO; NEVES, 2002, p.51)

Conforme evidenciado por essa seção, muitos são os métodos utilizados para a obtenção da solução de uma Equação Diferencial Ordinária (EDO), os quais variam de acordo com o seu tipo, de tal modo que elencar todos eles seria por demasiado longo e fugiria ao escopo deste trabalho.

Entretanto, ao leitor que tiver interesse em pesquisar estes métodos a referência bibliográfica apresenta os títulos de Boyce e DiPrima (2015) e Figueiredo e Neves (2002) para este fim.

4 Leis de Kepler em sua forma diferencial

A utilização de Equações Diferenciais Ordinárias para demonstrar as Leis de Kepler só veio mais tarde, em 1665, com Newton ao formular a Lei da Gravitação Universal. Sendo assim, nesse capítulo apresentamos a dedução das Leis de Kepler por meio das Equações Diferenciais Ordinárias.

Durante a dedução dessas leis utiliza-se o conceito de movimento central, ou seja, o movimento em um campo central de forças, o qual, de acordo com Figueiredo e Neves (2002), é um campo de forças F em $\mathbb{R}^3$ em que a cada ponto $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, onde está definido, F aponta para um ponto fixo chamado de centro do movimento.

Ao escolher a origem como centro do movimento, um campo central pode ser escrito como $F(X) = f(X)X$, onde f é uma função escalar definida nos mesmos pontos X do campo F e, ainda, supomos que F não está definido na origem.

4.1 Primeira lei

Conforme aponta Contador (2012), Kepler descobriu que a órbita planetária era elíptica, entretanto, a demonstração para tal fato só viria a ocorrer com Isaac Newton ao conceber a força da gravidade como a principal responsável pelo formato da órbita, fazendo com que a Lei da Gravitação Universal e a Segunda Lei do Movimento estivessem presentes nessa dedução.

Primeiramente, consideremos o movimento de uma partícula no $\mathbb{R}^3$, dado por: $X(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$. Supondo-se que a partícula tenha massa m e seu movimento seja causado por um campo de forças em $\mathbb{R}^3$, denominado: $F(X) = \big(f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), f_3(x, y, z)\big)$, segundo Figueiredo e Neves (2002), a segunda lei de Newton relaciona a aceleração da partícula, $\ddot{X}(t)$, e a força que produz o movimento, por meio da equação:

$$m\ddot{X} = F \tag{4.1}$$

Essa lei pode ser expressa de modo mais geral ao supor que a massa possa variar com o tempo:

$$\frac{d}{dt}\big(m\dot{X}\big) = F \tag{4.2}$$

Em (4.2), a expressão $m\dot{X}$ é chamada de *quantidade de movimento*.

A primeira lei de Newton, conforme Figueiredo e Neves (2002), diz que, sem a ação de forças, uma partícula não pode mudar seu estado de repouso ou de movimento, sendo assim uma consequência imediata da segunda lei, pois se $F = 0$, ao integrarmos (4.2), obtemos $\dot{X}(t) = C = vetor\ constante$ e então, integrando novamente, $X(t) = Ct + X(0)$. Ou seja, a trajetória da partícula é retilínea e com velocidade constante.

A terceira lei de Newton, ainda de acordo com Figueiredo e Neves (2002), afirma que quando duas partículas exercem forças entre si, essas forças são iguais em módulo, têm a direção da reta que une as partículas e são de sentidos opostos.

A *Lei da Gravitação Universal* estabelece que duas partículas de massa m e m' colocadas a uma distância d, se atraem mutuamente e as forças de atração tem intensidade Gmm'/d^2, onde G é a constante de gravitação universal.

Através da segunda lei de Newton (4.1) e, identificando F como a força de atração gravitacional tem-se que:

$$m\ddot{X} = -\frac{GmM}{X^2}\hat{X}$$

onde m é a massa do planeta e M é a massa do Sol.

Além disso, outro importante conceito é a Lei da Conservação do Momento Angular no Movimento Central, o qual, segundo Figueiredo e Neves (2002), diz que se uma partícula de massa m está em movimento sob ação de um campo de forças $F = (f_1, f_2)$, o momento angular $\hat{h} = m(x\dot{y} - y\dot{x})$ é constante se e só se o campo for central.

Ainda, para deduzir a primeira lei do movimento planetário, serão utilizados resultados obtidos por meio de outros conceitos, como por exemplo, a Fórmula de Binet. Desse modo, esses conceitos serão desenvolvidos a seguir, a fim de facilitar a leitura e compreensão da dedução.

Segundo Figueiredo e Neves (2002), a Fórmula de Binet é obtida a partir da 2ª lei de Newton, na qual as equações do movimento de uma partícula de massa m num campo central $F(X)$ bidimensional podem ser escritas como:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= P\cos\theta \\ m\ddot{y} &= P\,\mathrm{sen}\,\theta \end{aligned} \qquad (4.3)$$

em que $P = P(X) = F(X)|X|$, pois $F(X) = f(X)X = f(X)(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$.

Utilizando as coordenadas polares no movimento central, obtém-se as relações:

$$\dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\, sen\,\theta \tag{4.4}$$

$$\dot{y} = \dot{r}\,\mathrm{sen}\,\theta + r\dot{\theta}\cos\theta \tag{4.5}$$

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 \tag{4.6}$$

$$\ddot{x} = \ddot{r}\cos\theta - 2\dot{r}\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta - r\ddot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta - r\dot{\theta}^2\cos\theta \tag{4.7}$$

$$\ddot{y} = \ddot{r}\,\mathrm{sen}\,\theta + 2\dot{r}\dot{\theta}\cos\theta + r\ddot{\theta}\cos\theta - r\dot{\theta}^2\,\mathrm{sen}\,\theta \tag{4.8}$$

em que v é a velocidade da partícula.

Através das equações (4.7) e (4.8), é possível obter:

$$\begin{gathered} \ddot{x}\cos\theta + \ddot{y}\,\mathrm{sen}\,\theta = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ m\ddot{x}\,\mathrm{sen}\,\theta - \ddot{y}\cos\theta = -2\dot{r}\dot{\theta} - r\ddot{\theta} \end{gathered} \tag{4.9}$$

Combinando (4.3) e (4.9) obtém-se:

$$\begin{gathered} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \frac{P}{m} \\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0 \end{gathered} \tag{4.10}$$

que são, as equações do movimento em coordenadas polares.

Além disso, a segunda equação em (4.10) é equivalente à equação

$$r^2\dot{\theta} = constante \equiv h \tag{4.11}$$

pois, multiplicando-a por r obtém-se: $2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta} = \left(r^2\dot{\theta}\right)' = 0$.

Por meio da conservação do momento angular, a equação (4.11) implica que a função $\theta(t)$ seja estritamente monótona, assim podemos obter a função $t(\theta)$ e, consequentemente, a função $r(\theta) = r\big(t(\theta)\big)$.

Diante disto, pode-se calcular as seguintes derivadas, por meio da regra da cadeia:

$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\dot{r}}{\dot{\theta}r^2} = -\frac{\dot{r}}{h} \tag{4.12}$$

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\ddot{r}}{\dot{\theta}h} \tag{4.13}$$

Isolando o valor de $\ddot{r}$ na expressão (4.13) tem-se: $\ddot{r} = -\dot{\theta}h\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right)$ e da equação (4.11) obtém-se $\dot{\theta} = \frac{h}{r^2}$.

Substituindo esses resultados na primeira expressão de (4.10) resulta em:

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} = -\frac{Pr^2}{mh^2} \qquad (4.14a)$$

A expressão (4.14a) é conhecida como fórmula de Binet, e corresponde à equação diferencial das órbitas $r = r(\theta)$ de uma partícula de massa m num campo central $F = (P(r)\cos\theta\,, P(r)\,\mathrm{sen}\,\theta)$.

No caso da primeira lei de Kepler, acrescentando-se a hipótese de que o movimento central é uma força atrativa inversamente proporcional ao quadrado da distância ao centro, $P(r) = -\frac{\mu}{r^2}$, onde $\mu > 0$ é uma constante, a fórmula de Binet torna-se:

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} = \frac{\mu}{mh^2} \qquad (4.14b)$$

A equação (4.14b) é uma EDO de 2ª ordem, do tipo oscilador harmônico e cuja solução geral é dada por:

$$\frac{1}{r} = \frac{\mu}{mh^2} + A\cos(\theta - \theta_0) \qquad (4.15)$$

onde, A é a amplitude da onda do oscilador harmônico.

Isolando r na equação (4.15) obtém-se uma equação na forma:

$$r = \frac{l}{1 + e\cos\theta} \qquad (4.16)$$

em que,

$$\frac{2mh^2}{\mu} = 2l = corda\ focal \qquad (4.17)$$

e ainda,

$$e = A.l \qquad (4.18)$$

A equação (4.16) é a forma geral de uma cônica em coordenadas polares, representando uma elipse, $e < 1$, uma parábola, $e = 1$ e uma hipérbole se $e > 1$.

Sendo assim, segundo Figueiredo e Neves (2002), ao obtermos a equação (4.16) e, ainda, considerando o movimento dos planetas periódico e o fato de suas órbitas serem fechadas, concluímos que estas órbitas devem ser elípticas.

Fato este que corrobora com a primeira Lei de Kepler, a qual nos diz que as órbitas planetárias são elípticas com o Sol ocupando um dos seus focos.

4.2 Segunda Lei

De acordo com Figueiredo e Neves (2002), a segunda Lei de Kepler decorre apenas do fato de se ter um movimento central. Com isso, para realizar a dedução da lei em sua forma diferencial, são usadas as coordenadas polares no estudo dos movimentos centrais, ou seja, a órbita $\left(x(t), y(t)\right)$ de uma partícula é determinada por $\left(r(t), \theta(t)\right)$.

Substituindo as expressões (4.4), (4.5) e (4.6) na expressão do momento angular, definida por Figueiredo e Neves (2002) como $\hat{h} = m(x\dot{y} - y\dot{x})$, temos:

$$\hat{h} = 2mr^2\dot{\theta} \tag{4.19}$$

Além disso, pela Lei da Conservação do Momento Angular, o termo $r^2\dot{\theta}$ é constante, conforme visto anteriormente, equação (4.11).

Desse modo, a expressão anterior implica que $\theta(t)$ é uma função estritamente monotônica ao longo da órbita, e, portanto, pode-se supor sempre que $h \neq 0$.

Logo, a área entre a curva e dois raios partindo da origem para os pontos $X_0 = \left(r(t_0), \theta(t_0)\right)$ e $X = \left(r(t), \theta(t)\right)$ é dada por:

$$A(t) = \int_{\theta(t_0)}^{\theta(t)} \frac{1}{2} r^2 d\theta \tag{4.20}$$

Dessa forma, a derivada de $A(t)$ em relação à t é, segundo Figueiredo e Neves (2002), chamada *velocidade areolar* e, ainda, por meio das expressões (4.11) e (4.20) obtemos:

$$\dot{A}(t) = r^2\dot{\theta} = constante \tag{4.21}$$

O que demonstra a proposição: “Se F é um campo central de forças, então os raios vetores ligando o centro do movimento à partícula varrem áreas iguais em tempos iguais.” (FIGUEIREDO; NEVES, 2002, p.159), a qual corresponde à segunda Lei de Kepler.

4.3 Terceira Lei

Conforme apontam Figueiredo e Neves (2002), a terceira lei de Kepler é deduzida, em sua forma diferencial, por meio das seguintes etapas.

Inicialmente, podemos observar que a velocidade areolar definida anteriormente é $\dot{A} = \frac{1}{2}h = constante$.

Com isso, o período do movimento é dado por:

$$T = \frac{Área\ da\ elipse}{\dot{A}} = \frac{\pi ab}{\frac{1}{2}h} = \frac{2\pi ab}{h} \tag{4.22}$$

Da elipse, sabe-se que: $a^2 - b^2 = c^2$; $e = \frac{c}{a}$; $l = \frac{b^2}{a}$, onde a e b são os semieixos da elipse e l é o comprimento da corda focal.

Substituindo $l = \frac{b^2}{a}$ em (4.17) e isolando h, tem-se:

$$h = b\sqrt{\frac{\mu}{am}} \tag{4.23}$$

Substituindo (4.23) em (4.22) e elevando ao quadrado, temos que

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3 m}{\mu}$$

Donde segue que:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 m}{\mu} \tag{4.24}$$

No caso do campo gravitacional do Sol $\mu = GmM$, onde m é a massa do planeta, M é a massa do Sol e G é a constante da gravitação.

Portanto,

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 m}{GmM} = \frac{4\pi^2}{GM} \tag{4.25}$$

Com isso, temos que a relação entre o quadrado do período e o cubo do semieixo maior da elipse é equivalente a uma constante, logo, obtemos a terceira Lei de Kepler, que nos diz que os quadrados dos períodos dos planetas são proporcionais ao cubo de sua distância média ao Sol.

4.4 A equação das órbitas planetárias na Teoria Geral da Relatividade

De acordo com Figueiredo e Neves (2002), a equação do movimento planetário, determinada por $\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} = \frac{\mu}{mh^2}$, foi obtida por meio da Lei da Gravitação Universal e das leis da Mecânica Newtoniana.

Entretanto, com o desenvolvimento da Teoria da Relatividade, podemos obter uma equação correspondente, chamada de Equação de Schwarzschild, que fornece uma maior aproximação das órbitas, levando em consideração sua precessão. Essa equação é dada por:

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{r}= \frac{\mu}{mh^2}+\frac{\alpha}{r^2} \tag{4.26}$$

Na qual, o termo relativístico, $\frac{\alpha}{r^2}$, introduz à equação de Schwarzschild um caráter não linear de tal modo que sua resolução é obtida por meio de uma aproximação, tal que o parâmetro α é dado por $\frac{3\mu}{c^2}$ onde c é velocidade da luz.

Sem perda de generalidade, pode-se supor $m = 1$ e, para uma primeira aproximação $\alpha = 0$.

Deste modo, a solução obtida é:

$$\frac{1}{r}=\frac{\mu}{h^2}[1+e\cos(\theta-\theta_0)] \tag{4.27}$$

Em seguida, uma nova aproximação é obtida substituindo-se (4.27) no segundo membro de (4.26), obtendo:

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{r}= \frac{\mu}{h^2}+\frac{\alpha\mu^2}{h^4}[1+e\cos(\theta-\theta_0)]^2 \tag{4.28}$$

A solução da equação $\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{r}= \frac{\alpha\mu^2}{h^4}[1+e\cos(\theta-\theta_0)]^2$ é exatamente:

$$\frac{1}{r}=\frac{\alpha\mu^2}{h^4}\left[\left(1+\frac{e^2}{2}\right)+e\theta\,\mathrm{sen}(\theta-\theta_0)-\frac{1}{6}e^2\cos 2(\theta-\theta_0)\right] \tag{4.29}$$

Sendo assim, conforme apontam Figueiredo e Neves (2002), a solução de (4.28) é obtida ao somar os membros do lado direito de (4.27) e (4.29).

Contudo, analisando o segundo membro de (4.29), temos que o primeiro termo representa uma translação de $\frac{1}{r}$ e seu efeito é pequeno, além do mais, o terceiro termo é periódico e pequeno quando comparado ao segundo termo.

Desta forma, o primeiro e o terceiro termos do segundo membro de (4.29) podem ser desprezados e, com isso, obtemos a equação da órbita:

$$\frac{1}{r}=\frac{\mu}{h^2}[1+e\cos(\theta-\theta_0)]+\frac{\alpha e\mu^2}{h^4}\,\theta\,\mathrm{sen}(\theta-\theta_0)$$

$$\frac{1}{r}=\frac{\mu}{h^2}\left\{1+e\left[\cos(\theta-\theta_0)+\frac{\alpha\mu}{h^2}\,\theta\,\mathrm{sen}(\theta-\theta_0)\right]\right\} \tag{4.30}$$

Por último, temos a aproximação $k\theta = \frac{\alpha\mu}{h^2}\,\theta$, na qual $\cos k\theta \cong 1$ e $\operatorname{sen} k\theta \cong k\theta$, para θ pequeno. Com isso, a equação (4.30) pode ser escrita como:

$$\frac{1}{r} = \frac{\mu}{h^2}[1 + e\cos(\theta - \theta_0 - k\theta)] \qquad (4.31)$$

e, de acordo com Figueiredo e Neves (2002), mostra que a cada instante a coordenada angular do periélio é $\theta_0 + k\theta$.

Com isso, a órbita do planeta pode ser considerada uma elipse cuja linha de apsides[3] gira e sua variação por período é $\Delta\theta = 2k\pi$. Logo,

$$\Delta\theta = \frac{2\pi\alpha\mu}{h^2} = \frac{6\pi\mu^2}{h^2c^2} \qquad (4.32)$$

Como $l = \frac{h^2}{\mu}$, obtemos:

$$\Delta\theta = \frac{6\pi\mu}{c^2 l} = \frac{6\pi\mu}{c^2 a(1-e^2)} \qquad (4.33)$$

Portanto, com essa expressão é possível obter a variação da órbita dos planetas, podendo expressá-las com maior precisão.

Além do mais, podemos calcular o avanço do periélio dos planetas em termos de energia, por meio do potencial gravitacional. Sendo assim, como apontam Arcidiacono, Gomes e Oliveira (2017), obtemos a equação da órbita relativística:

$$\rho = \frac{p}{1 + e\cos(\alpha\varphi)} \qquad (4.34)$$

A partir da qual temos que o raio vetor ρ varia periodicamente entre dois valores ρ' e ρ'', dados por $\rho' = \frac{p}{1+e}$ e $\rho'' = \frac{p}{1-e}$, fazendo com que a trajetória se mantenha tangente às duas circunferências concêntricas de raio ρ' e ρ''.

Podemos observar que o raio da órbita se repete quando $\alpha\varphi = 2\pi$, isto é, $\varphi = 2\pi/\alpha$ e, dado que $\alpha < 1$, temos que φ é maior que 2π.

Assim, o avanço de um periélio é dado por:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\alpha} - 2\pi = 2\pi\frac{1-\alpha}{\alpha} \qquad (4.35)$$

Então, para $\alpha = 1$, temos que $\Delta\varphi = 0$ e voltamos ao caso da órbita elíptica, já para $\alpha \neq 1$, podemos ter dois casos:

---

[3] Apside é o ponto da órbita extremo do eixo maior da elipse, em que um planeta ou satélite se acha mais perto ou mais longe do centro. Linha das apsides é o diâmetro maior da órbita. *apside* in Dicionário Online de Português. Disponível em:< https://www.dicio.com.br/apside/>.

Para $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{n} \Rightarrow \alpha = \frac{n}{n+1} < 1$, onde n é um número inteiro, temos uma roseta de n folhas, conforme Figura 10, na qual a circunferência interna possui raio ρ' e a externa ρ''.

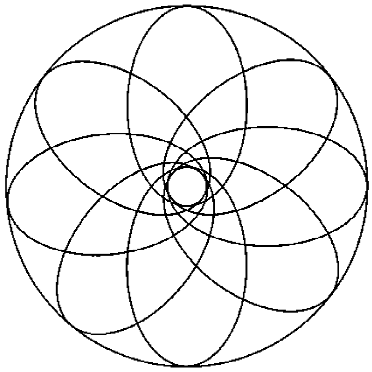

Figura 20: Órbita em roseta
Fonte: ARCIDIACONO;GOMES;OLIVEIRA, 2017, p.141

Esta figura representa o deslocamento da órbita elíptica de um planeta com o passar do tempo. Isso porque, conforme pode ser observado na movimentação planetária, não é apenas o planeta que se desloca na órbita elíptica, mas essa elipse também se movimenta por meio da variação de sua linha de apsides.

Para $\Delta\varphi = 2\pi n \Rightarrow \alpha = \frac{1}{n+1} < 1$, temos que a órbita é dada por dois ramos de espiral. Nesse caso, a órbita não seria uma órbita fechada, o que não corresponde ao que pode ser observado nas órbitas planetárias.

Sendo assim, temos que a correção relativística feita na equação da órbitas planetárias contribui para que consigamos descrever o movimento dos planetas de forma mais realista, nos aproximando cada vez mais do que pode ser observado na movimentação dos corpos celestes.

5 CONCLUSÃO

A busca pela compreensão dos fenômenos celestes está presente no ser humano desde o período clássico, pelo menos, seja por meio da Astronomia ou da Astrologia. Vários modelos cosmológicos e astrofísicos foram desenvolvidos ao longo do tempo, desde Filolau, Aristóteles, Aristarco, Apolônio, Hiparco até Ptolomeu, todos tentando verificar as regularidades desses fenômenos.

Mesmo com o grande interesse em mostrar a natureza de maneira mais racional, os conflitos entre ciência e religião tiveram grande influência na elaboração dos modelos celestes, fazendo com que os estudiosos acabassem se rendendo aos dogmas da igreja ao optarem por modelos geocêntricos no período medieval, nos quais as órbitas eram sempre circulares.

Entretanto, após muitos séculos essa situação começou a mudar com o monge polonês Nicolau Copérnico, o qual apesar de não conseguir abandonar a complexidade dos epiciclos foi o primeiro a romper com a astronomia aceita na época, ao propor um sistema com o Sol na posição central. Os estudos de Copérnico, controversos para muitos de seus contemporâneos, foram a base de muitos outros estudiosos, mas foi o astrônomo Johannes Kepler que, com base nas observações de Tycho Brahe, formulou as três leis acerca dos movimentos planetários, responsáveis pela modificação da compreensão do funcionamento do sistema solar.

O trabalho de Kepler foi essencial para a descrição dos movimentos planetários, contudo ele não conseguiu responder à questão “Por que as órbitas se comportam dessa maneira?”. A solução para esse problema só foi possível anos depois com Isaac Newton, ao desenvolver conceitos como a Lei da Gravitação Universal e as Equações Diferenciais.

Desse modo, o presente trabalho buscou deduzir as leis de Kepler em sua forma diferencial, retomando os métodos utilizados em sua formulação e, ainda, comparando-as com as equações obtidas por meio da correção relativística, afim de que o leitor consiga compreender as transformações científicas e perceber a importância das Equações Diferenciais nesse processo.

Além disso, a partir dos estudos realizados percebeu-se que com o avanço da Física e da Matemática os movimentos dos corpos celestes podem ser representados de maneira mais precisa, fazendo com que a evolução do método científico e a utilização das Equações Diferenciais modificassem a forma como enxergamos o sistema solar.

REFERÊNCIAS

ALITOLEF, S. dos S. **Algumas aplicações das equações diferenciais**. 37 f. Trabalho de conclusão de curso de licenciatura em Matemática – Fundação Universidade Federal de Rondônia - UNIR, Ji-Paraná, 2011.

ARCIDIACONO, G; GOMES, D; OLIVEIRA, E.C. de. **Mecânica, gravitação e cosmologia: uma breve introdução**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2017.

BOYCE, W.E; DIPRIMA, R.C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. Rio de Janeiro: LTC, 2015.

CONTADOR, P.R.M. **Kepler, o legislador dos céus**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2012.

FARHAT, G.M. **Tycho Brahe, grande astrônomo do século XVI e cavaleiro da fé, sob a ótica Kierkegaardiana**. 370 f. Tese (Doutorado em história Social) – Faculdade de Filosofia, Letras e Ciências Humanas da Universidade de São Paulo, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003.

FIGUEIREDO, D. G. de; NEVES, A. F. **Equações Diferenciais Aplicadas.** Rio de Janeiro: IMPA, 2002.

GLEISER, M. **Apresentação**. In: MOURÃO, R. R. de F. **Kepler**- a descoberta das leis do movimento planetário. São Paulo: Odysseus, 2003. 241 p.

KANTOR, C. A. **Educação em Astronomia sob uma perspectiva humanístico-científica**: a compreensão do céu como espelho da evolução cultural. 2012. 142 f. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, Universidade de São Paulo, São Paulo.

MEDEIROS, A. J. G. de. **Entrevista com Kepler: do seu Nascimento à Descoberta das duas Primeiras Leis**. Física na Escola, São Paulo,v.3, n.2, 2002.

MOURÃO, R. R. de F. **Kepler- a descoberta das leis do movimento planetário**. São Paulo: Odysseus, 2003. 241 p.

NEVES, M. C. D.; ARGUELLO, C. A. **Astronomia de régua e compasso: de Kepler a Ptolomeu**. Campinas, São Paulo: Papirus, 1986.

SILVA, C. B. de C. da. **O desenvolvimento das leis de Kepler**. 80 f. Trabalho de conclusão do curso de Física - Universidade Federal de Rondônia, 2014.

SODRÉ, U. **Equações Diferenciais Ordinárias: Computação, Engenharia Elétrica e Engenharia Civil**. 60 f. Notas de aula, 2003. Disponível em :< http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/superior/fourier/edo.pdf>. Acesso em: 20 nov. 2017.

TOSSATO, C. R.; MARICONDA, P. R. **O método da Astronomia segundo Kepler**. scientiæ zudia, São Paulo, v. 8, n. 3, p. 339-66, 2010.