



INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
DE SÃO PAULO
Campus São Paulo

**O USO DA CURVATURA DE GAUSS NA
CLASSIFICAÇÃO DE PONTOS CRÍTICOS DE FUNÇÕES
DE DUAS VARIÁVEIS**

SILAS DE SÁ CAVALCANTI MELO

Trabalho de Conclusão de Curso Superior de Licenciatura em
Matemática, sob a orientação do Prof. Dr. Marco Aurélio Granero
Santos

IFSP
SÃO PAULO
2019

SILAS DE SÁ CAVALCANTI MELO

**O USO DA CURVATURA DE GAUSS NA
CLASSIFICAÇÃO DE PONTOS CRÍTICOS DE FUNÇÕES
DE DUAS VARIÁVEIS**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo – IFSP, em cumprimento ao requisito parcial para obtenção do grau acadêmico de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marco Aurélio Granero Santos

SÃO PAULO

2019


SILAS DE SÁ CAVALCANTI MELO

**O USO DA CURVATURA DE SUPERFÍCIE DE GAUSS NA CLASSIFICAÇÃO
DE PONTOS CRÍTICOS DE FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS**


Monografia apresentada ao Instituto Federal de
Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, em
cumprimento ao requisito exigido para a obtenção do
grau acadêmico de Licenciado em Matemática.

APROVADO EM 05/12/2019

CONCEITO: Very



Prof. Dr. Rogerio Ferreira da Fonseca
Membro da Banca



Prof. Me. Lucas Casanova Silva
Membro da Banca



Prof. Dr. Marco Aurélio Granero Santos
Orientador



Aluno: Silas de Sá Cavalcanti Melo

Dedico este trabalho a todo o povo paraibano. Em especial, dedico à minha avó D. Virgínia que não viveu o bastante para ver o neto se formar.

Agradecimentos

(...) Nada é certo. Em qualquer
hora pode suceder-nos
O que nos tudo mude
Fora do conhecido é estranho
o passo
Que próprio damos.

Fernando Pessoa

Escrever algumas linhas de agradecimentos é uma tarefa ingrata por definição, visto que há dois tipos de limitações: o pequeno arsenal de adjetivos do escritor e o escopo da página que não comporta o número de pessoas elogiadas.

No entanto, é preciso elencar e agraciar alguns personagens da minha trajetória. Primeiramente agradeço aos meus pais e à minha irmã Jessica que forneceram não apenas as condições materiais para a conclusão da graduação, mas também uma formação humana riquíssima.

Embora eu faça parte da grande parcela desfavorecida da sociedade, tive o privilégio de ter professores estupendos. Agradeço a todos, mas em especial ao professor-orientador Marco Aurélio Granero Santos pelas ótimas observações e pela imensa paciência e, sobretudo, ao professor José Ribeiro que ainda no ensino médio apresentou-me às belezas da nossa querida matemática.

Não posso me esquecer de agradecer aos meus amigos Adriano Palharini, Gabriel Chiyoda e Sandriely Reis que me acompanham há mais de 6 anos e que, de certa forma, contribuíram em parte na construção de quem sou e do que penso.

O agradecimento aos colegas do Instituto Federal ultrapassa o âmbito do conhecimento matemático. Sou grato pela diversidade de experiências e contribuições que recebi. Em especial agradeço aos colegas de classe: Alex, Jessica, Lucas, Ramon, Michele e, principalmente, a João Victor Gonçalves pelas inquietações filosóficas e pela insubstituível amizade que sempre guardarei no coração. Ademais, agradeço também ao amigo Marcelo Andrioli Jr. pelo sagaz bom humor e pela inteligência e dedicação que me inspiram a cada dia.

E de antemão agradeço aos meus leitores. Espero que façam bom uso dos poucos apontamentos aqui levantados e, se possível, discutam, corrijam e até reformulem o que acharem necessário; uma vez que o conhecimento só adquire valor quando socializado.

Resumo

Este trabalho é um estudo dos pontos críticos de funções de duas variáveis sob o ponto de vista da Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies. Busca-se compreender a classificação desses pontos em máximo, mínimo ou sela por meio de um efeito geométrico da Curvatura de Gauss nas superfícies descritas por essas funções, relacionando os resultados da Geometria Diferencial com os do Cálculo Diferencial de Funções de Várias Variáveis. Trata-se de uma pesquisa bibliográfica de caráter exploratório e que segue de perto as contribuições de outros autores a respeito da Geometria Diferencial. Como resultado obteve-se uma justificativa matemática que reforça os aspectos visuais e geométricos dessas classificações.

Palavras-chaves: Classificação de Pontos Críticos; Funções de Duas Variáveis; Geometria Diferencial; Curvatura de Gauss; Teste do Hessiano.

Abstract

This research deals with a study of the critical points of two-variable function based on Differential Geometry of Curves and Surfaces. The aim is to understand the classification of these points as maximum, minimum or saddle by means of a geometric effect of the Gauss Curvature on the surfaces described by these functions, relating the results of Differential Geometry with Calculus of Several Variables. This is an exploratory bibliographic research that closely follows the contributions of other authors regarding Differential Geometry. As a result, a mathematical justification was found that reinforces the visual and geometric aspects of these classifications.

Key Words: Critical Points Rating; Two-Variable Function; Differential Geometry; Gauss Curvature; Hessian Test.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Esfera sem um meridiano	28
Figura 2 – Curvas Coordenadas	30
Figura 3 – Plano	32
Figura 4 – Vetor Normal ao plano tangente	33
Figura 5 – Aplicação Normal de Gauss	34
Figura 6 – Seção normal a uma superfície	37
Figura 7 – Catenóide	44
Figura 8 – Seções Normais: Catenárias e Circunferência	46
Figura 9 – Desvio geodésico na esfera	49
Figura 10 – Máximo Local	52
Figura 11 – $f(0, 0)$ não é mais valor máximo	53
Figura 12 – Mínimo Absoluto	54
Figura 13 – Concavidades	58
Figura 14 – Diferença de $f(x)$ e $T(x)$	59
Figura 15 – Ponto Elítico	63
Figura 16 – Curvas determinadas por $f(x, y_0)$ e $f(x_0, y)$	66
Figura 17 – Um ponto hiperbólico de S é um ponto de sela de f	67

Lista de símbolos

\mathbb{R}	Conjunto dos números Reais
\mathbb{S}^2	Conjunto dos pontos sob uma esfera
α	Letra grega Alfa
β	Letra grega Beta
δ	Letra grega minúscula Delta
ε	Letra grega Epsilon
θ	Letra grega Theta
φ	Letra grega minúscula Phi
π	Letra grega Pi
ψ	Letra grega Psi
λ	Letra grega Lambda
\in	Pertence
\cap	Interseção
\langle , \rangle	Produto escalar
\wedge	Produto vetorial
$\ \ $	Norma ou Módulo de um vetor
\circ	Operação de composição de funções

Sumário

1	Introdução	19
1.1	Um breve panorama histórico	19
1.2	Organização do trabalho e Objetivos	22
2	Conceitos Teóricos Preliminares	25
2.1	Superfície Parametrizada Regular	25
2.2	Curvas Coordenadas	29
2.3	Formas Fundamentais e Aplicação Normal de Gauss	30
2.3.1	Primeira Forma Fundamental	31
2.3.2	Aplicação Normal de Gauss	33
2.3.3	Diferencial da Aplicação Normal de Gauss	35
2.3.4	Segunda Forma Fundamental	36
2.3.5	Coeficientes da Segunda Forma Fundamental	38
3	Curvatura de Superfície	41
3.1	Curvatura Normal	41
3.2	Curvatura de Gauss	43
4	Classificação de Pontos Críticos	51
4.1	Máximos e Mínimos	51
4.2	Concavidades e Curvaturas	57
4.3	Da demonstração e entendimento do Teste do Hessiano.	60
4.4	Um efeito geométrico da Curvatura de Gauss	62
	Conclusão	71
	Referências	73

1 Introdução

O estudo das funções de duas ou mais variáveis nas disciplinas de Cálculo dos cursos de Licenciaturas e Bacharelados, por vezes, desperta inquietações a cerca de alguns resultados que, durante o curso, não podem ser demonstrados, ora por apresentar demasiada complexidade ora por inexperiência, por parte do aluno, na compreensão de uma demonstração.

No entanto,

Para o matemático profissional, a demonstração não é apenas um meio de verificação de um resultado já descoberto, mas também muitas vezes um processo de explorar, analisar, descobrir e inventar novos resultados (VILLIERS, 2001, p.33).

Ademais, Alves (2011, p. 209) faz uma crítica ao discutir o papel da visualização na validação do pensamento matemático, porém, o mesmo adverte que “a compreensão intuitiva ensejada pela visualização é necessária à compreensão, mas não é suficiente para a evolução de um raciocínio conceitual posterior relacionado ao mesmo objeto matemático”(ALVES, 2011, p. 51).

Ancorado na perspectiva dos múltiplos papéis da demonstração na matemática, tal como o papel de explicação, este trabalho apresenta uma alternativa às justificativas do *Teste do Hessiano* presentes nos livros didáticos, por meio de conceitos relacionados à Geometria Diferencial, apresentando-se como uma alternativa à explicação desses mesmos conceitos, mas com ênfase nos aspectos visuais.

1.1 Um breve panorama histórico

Determinar o marco inicial de uma teoria matemática é uma tarefa complexa, pois trata-se de uma produção social e histórica e, como tal, pode apresentar múltiplas origens e desenvolvimentos. O mesmo pode ser dito a respeito do surgimento da geometria, ressalta-se que

não existe um consenso entre os historiadores no que se refere a um marco inicial da geometria como área de estudos, entretanto, é inegável que boa parte de suas raízes encontram-se no antigo Egito e na Babilônia (COIMBRA, 2008, p. 3).

Pode-se afirmar também que os registros para essas civilizações “foram aparentemente motivados por problemas práticos de agrimensura” (GORODSKI, 2009, p. 14)¹. Além disso, “formas primitivas de geometria são encontradas também entre os

¹ A palavra geometria derivada do grego e significa *medir a terra*.

hindus, chineses e japoneses” (GORODSKI, 2009, p. 14). Ainda em Gorodski (2009, p. 14) é possível destacar que nesse período de surgimento a geometria era tida como um conjunto de regras empíricas.

No entanto, é preciso ressaltar um importante passo para o estabelecimento da geometria como é conhecida hoje. Com Euclides (365 a.C - 265 a.C) boa parte do saber da área foi compilado na obra “*Os Elementos*”. Ainda, o mérito de Euclides não se resume apenas a um processo de compilação, “mas também à introdução do método lógico-dedutivo no desenvolvimento de uma teoria, isto é, do método axiomático tão conhecido na atual matemática” (COIMBRA, 2008, p. 3).

O desenvolvimento da geometria com o passar dos anos a enquadrou como um dos mais significativos ramos da matemática. Nas décadas iniciais do século XVIII, a partir das aplicações do cálculo diferencial e integral na geometria analítica, surge um campo denominado *Geometria Diferencial*.

Segundo Eves (2004), a geometria diferencial é o estudo de objetos geométricos por meio das técnicas do cálculo diferencial e integral. Entretanto, é preciso diferenciar as contribuições dessa área dos processos infinitesimais que aparecem nas obras de Apolônio e Arquimedes, por exemplo. Coolidge (2013) comenta sobre uma distinção entre métodos infinitesimais na geometria e a geometria diferencial propriamente dita; para ele é mais natural incluir teoremas geométricos deduzidos do estudo de figuras evanescentes como parte de uma geometria infinitesimal (como o princípio de Cavalieri, o trabalho de Arquimedes sobre áreas e volumes e o tratamento de cônicas de Apolônio), enquanto a Geometria Diferencial faz uso de métodos analíticos, excluindo o estudo de propriedades algebricamente invariantes e tornando, assim, os métodos anteriores obsoletos devido ao uso do cálculo.

No entanto, ainda no século XVII, ou seja, antes mesmo do advento do cálculo diferencial e integral, encontra-se um dos primeiros registros de um dos conceitos mais fundamentais da área: o conceito de curvatura de uma curva plana.

O cientista holandês Christiann Huygens (1629-1695) demasiadamente conhecido pelas suas contribuições à ondulatória da luz, pela observação dos anéis de Saturno e pela invenção real do relógio de pêndulo, fez uma grande contribuição a este ramo da geometria: *o conceito de raio de curvatura*, estimulado por problemas práticos.

Logo após o advento do cálculo infinitesimal por Gottfried Leibniz (1646-1716) e Isaac Newton (1649-1727) destaca-se ainda o francês Alexis Clairaut que estudou as curvas no espaço tridimensional, mas “limitou-se às propriedades de primeira ordem, primando-se pelas derivadas primeiras e fazendo um interessante estudo sobre retas tangentes” (COIMBRA, 2008).

Porém para além dessas constatações é imprescindível comentar a respeito de Gaspard Monge (1746-1819) que é considerado um dos expoentes do progresso matemático na época da Revolução Francesa ao lado de nomes como Lagrange, Laplace, Legendre, Carnot e Condorcet, “talvez o mais influente professor de matemática desde os dias de Euclides” (BOYER, 1974, p. 345). No que tange à Geometria Diferencial propriamente dita “Monge vai mais longe e discute os conceitos de curvatura e torção de uma curva no espaço” (GORODSKI, 2009, p. 16). Além de seus esforços como acadêmico suas contribuições à área como professor são também fundamentais,

O ressurgimento da geometria no espaço portanto deveu-se em parte às atividades matemáticas e revolucionárias de Gaspard Monge. Se ele não fosse politicamente ativo a École Polytechnique talvez não tivesse sido fundada; se não fosse professor notável, talvez esse ressurgimento não tivesse lugar (BOYER, 1974, p. 350).

Boyer (1974) destaca ainda que na École Polytechnique Monge ministrou também um curso sobre “aplicação da análise à geometria”. Muito embora o título abreviado “geometria diferencial” não existisse na época, o curso dado por Monge era essencialmente uma introdução a esse campo.

Monge também se destaca como um dos primeiros a incluir um estudo analítico de superfícies. Quanto a isso, pode-se dizer que o estudo da Geometria Diferencial de Superfícies foi inicialmente norteado pelos problemas relacionados a curvas sobre superfícies, ressaltando-se os problemas relacionados à geodésica, uma vez que

a principal propriedade da recta é minimizar a distância entre quaisquer dois dos seus pontos, podemos substituir o conceito de recta pelo conceito de geodésica, definida como uma curva ao longo da superfície que minimiza a distância (medida sobre a superfície) entre quaisquer dois dos seus pontos (NATÁRIO, 2009, p. 41).

Dessa forma, os matemáticos do século XVIII debruçaram-se a fim de determinar as características geométricas das geodésicas. Vale destacar as resoluções de Johannes Bernoulli (1667-1748), bem como os trabalhos de seu célebre aluno: o matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783). Euler contribuiu para a área quando escreveu “sobre o problema da determinação de quando uma superfície pode ser desenvolvida isometricamente, isto é, sem distorcer-se, sobre um plano, como é o caso do cilindro e do cone, o que requer que a superfície seja ‘folheada’ por retas” (COIMBRA, 2008, p. 7).

Vale destacar que atribui-se a Euler “o reconhecimento do fato das coordenadas (x, y, z) dos pontos de uma superfície serem funções de duas variáveis independentes” (GORODSKI, 2009, p. 16). Entretanto, Euler levanta esse ponto como uma mera observação, visto que não chegou a trabalhar com superfícies dessa maneira.

Quem utilizou a representação de superfície como função de duas coordenadas independentes sistematicamente foi o matemático alemão Carl Friedrich Gauss (1777-1855). Pode-se afirmar que

por volta de 1820, Gauss foi chamado pelo governo de Hanover para supervisionar um levantamento topográfico do reino, e vários aspectos dessa tarefa, incluindo exaustivo trabalho de campo e tediosas triangulações, ocuparam-no por vários anos, mas propiciaram o estímulo que o conduziu às ideias de sua obra *Disquisitiones generales circa superficies curvas* (1817) (GORODSKI, 2009, p. 16)

Dessa maneira, assim como os demais campos da geometria, o desenvolvimento da geometria diferencial de superfícies foi motivado pela demarcação de terras, pela agrimensura e pelo mapeamento de determinadas regiões. Algumas dessas regiões exigiam um mapeamento diferente do feito na terraplanagem, isto é, indicavam certas saliências e comportamentos distintos de um plano. Com base nisso, surge a necessidade de se definir a curvatura de superfície.

A partir disso, Gauss introduz a *Primeira Forma Fundamental* que permite exprimir justamente a distância sobre as superfícies em termos de funções E , F e G .

Gauss também introduziu uma outra forma diferencial quadrática, conhecida como *Segunda Forma Fundamental* que, por meio de uma representação ao estudo das superfícies (Aplicação Normal de Gauss) possibilita analisar a curvatura de suas seções normais, levando-o a definir a curvatura total da superfície em um ponto, conhecida como *Curvatura de Gauss*. Assim, pode-se confirmar que Gauss elevou o comentário de Euler a uma teoria consistente que estuda a curvatura de uma superfície por meio de curvas sobre ela.

Uma das mais impressionantes descobertas de Gauss sobre o tema consiste em mostrar que a curvatura gauss de uma superfície é uma propriedade absoluta da superfície, ou seja, não depende da forma com a qual ela está imersa no espaço. Em outras palavras, é possível calcular a mesma curvatura utilizando apenas os coeficientes da Primeira Forma Fundamental.

1.2 Organização do trabalho e Objetivos

Este trabalho estrutura-se de forma semelhante ao desenvolvimento histórico do conceito de curvatura de superfícies, de modo a compreender a classificação dos pontos críticos de uma função de duas variáveis sob o ponto de vista da Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies.

Contudo, vale destacar que ele não pretende realizar uma análise dos livros de cálculo que tratam da classificação de pontos críticos de funções de duas variáveis

(como é feito em Alves (2011)), mas sim discutir e explorar os *aspectos matemáticos* que justificam essa classificação.

No que se refere à coleta de dados e a escolha dos conteúdos presentes nos capítulos posteriores, o estudo recorreu a livros didáticos, artigos científicos, bem como também a dissertações de mestrado e teses de doutorado sobre o tema. Mais precisamente, nas demonstrações dos resultados fundamentais da Geometria Diferencial seguiu-se de perto as contribuições de Carmo (2004), Picado (2006), Araújo (1998) e Tenenblat (2008). E, especificamente, para a composição do Capítulo 4 recorreu-se aos apontamentos e observações de Kaplan (1972), Guidorizzi (1986) e Stewart (2004). Características estas de uma *pesquisa bibliográfica*, uma vez que “foi desenvolvida a partir de material já elaborado, constituído principalmente de livros e de artigos científicos”(GIL, 2008, p. 50).

Entretanto, ao buscar alternativas para a compreensão de resultados da Matemática, este trabalho, acaba por configurar-se como uma *pesquisa exploratória*, visto que os estudos exploratórios “têm como principal finalidade desenvolver, esclarecer e modificar conceitos e ideias, tendo em vista a formulação de problemas mais precisos ou hipóteses pesquisáveis para estudos posteriores” (GIL, 2008, p. 27). Em concordância a isso, acrescenta-se que “o produto final deste processo passa a ser um problema mais esclarecido” (GIL, 2008, p. 27).

Em suma, o presente estudo caracteriza-se como uma pesquisa bibliográfica de caráter exploratório, uma vez que “oferece meios para definir, resolver, não somente problemas já conhecidos, como também explorar novas áreas onde os problemas não se cristalizaram suficientemente” (MANZO, 1973 apud LAKATOS; MARCONI, 2003, p. 183).

Para tanto, tem-se como objetivo geral deste trabalho compreender a classificação de pontos críticos de funções de duas variáveis. Este, por sua vez, ramifica-se nos seguintes objetivos específicos:

- introduzir os conceitos de Curvatura Normal e de Gauss com base nos resultados preliminares da Geometria Diferencial;
- discutir o efeito geométrico da Curvatura de Gauss em superfície imersas no \mathbb{R}^3 ;
- relacionar a classificação de pontos críticos de funções de duas variáveis com a Curvatura de Gauss da superfície descrita pelo gráfico dessas funções.

Para isso, o Capítulo 2 apresenta e discute as noções preliminares da Geometria Diferencial de Superfícies.

Utilizando-se dessas noções, o Capítulo 3 consolida os conceitos de Curvatura Normal e de Gauss.

Por fim, o Capítulo 4 relaciona o problema de classificar a natureza de um ponto crítico com o estudo das curvaturas.

2 Conceitos Teóricos Preliminares

Neste capítulo apresenta-se os conceitos da geometria diferencial necessários para a discussão dos resultados do Cálculo Diferencial de Funções de Várias Variáveis (*CVV*) e do Cálculo de Funções de Uma Variável (*CUV*) presentes no capítulo posterior.

Embora o estudo do *CVV* tenha sua fundamentação formal em \mathbb{R}^n e seja explorado frequentemente em \mathbb{R}^3 , “a percepção e o entendimento a partir da visualização, desses objetos conceituais, pode atuar no sentido de proporcionar uma *transição interna* do *CUV* para o *CVV*, de modo adequado” (ALVES, 2012, p. 7). Ou seja, da mesma forma que convencionalmente os livros de *CVV* estudam as funções de duas variáveis a partir do que se sabe sobre as funções de uma variável, neste capítulo estuda-se os conceitos que permeiam o estudo de superfícies por meio de alguns elementos do estudo de curvas planas.

Sendo assim, considera-se que um “conceito matemático não é um objeto monolítico. Um simples conceito pode ser compreendido a partir de vários pontos de vista e pode apresentar diversas representações, adaptando-se ao local onde o conceito é utilizado”(DOUADY, 1984 apud ALVES, 2011, p.51).

Assim, prezando pela *visualização* de conceitos e pela percepção de elementos comuns entre o *CUV* e o *CVV*, apresenta-se aqui uma gama de concepções da geometria diferencial para que posteriormente seja possível ressignificar conclusões do *CUV* e do *CVV* a partir deles.

2.1 Superfície Parametrizada Regular

Nesta seção define-se superfície parametrizada regular localmente e investiga-se algumas de suas propriedades no espaço euclidiano \mathbb{R}^3 . O conceito de superfície parametrizada se assemelha ao conceito de curva parametrizada.

Tanto Carmo (2004) quanto Picado (2006) entendem uma superfície regular em \mathbb{R}^3 como um subconjunto não vazio do \mathbb{R}^3 formado por abertos do \mathbb{R}^2 deformados e colados entre si por meio de aplicações denominadas parametrizações locais, de tal modo que a figura obtida não apresente autointerseções ou vértices.

No entanto, nesses mesmos trabalhos o conceito de curva é definido não como conjunto, mas sim como uma aplicação. Em Carmo (2004) é ressaltado que as curvas também podem ser entendidas como subconjuntos de \mathbb{R}^3 (ou \mathbb{R}^2) e, de modo análogo, tanto superfícies regulares quanto curvas regulares podem ser tratadas como aplicações, desde que sejam consideradas somente propriedades locais.

Assim, a fim de introduzir uma propriedade local de superfícies regulares (mais precisamente o conceito de curvatura) e entendendo que a ideia de superfície é uma extensão bidimensional daquilo que se compreende como curva, define-se aqui uma superfície parametrizada regular como uma aplicação e não um subconjunto do \mathbb{R}^3 ¹.

Dispondo de um sistema de coordenadas cartesianas do \mathbb{R}^3 e considerando a aplicação $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ de duas variáveis independentes u e v que variam em um subconjunto U aberto do \mathbb{R}^2 que não possa ser dividido em apenas dois subconjuntos fechados que não tenham nenhum ponto comum (diz-se conexo). Dessa forma, a cada ponto (u, v) a aplicação X determina um ponto $X(u, v)$ no \mathbb{R}^3 .

Para que se possa usar as ferramentas do *CVV* assume-se que a função X seja diferenciável, ou seja, que as funções componentes de X possuam derivadas parciais de todas as ordens.

Além disso, para cada $p = (u, v) \in U$ destaca-se que a diferencial de X em p (denotada por dX_p) é uma transformação linear e pode ser representada pela matriz jacobiana $JX(p)$ tal que:

$$JX(p) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(p) & \frac{\partial x}{\partial v}(p) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(p) & \frac{\partial y}{\partial v}(p) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(p) & \frac{\partial z}{\partial v}(p) \end{bmatrix} = \left[\frac{\partial X}{\partial u}(p) \quad \frac{\partial X}{\partial v}(p) \right]. \quad (2.1)$$

Definição 2.1. *Seja a aplicação $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ com $(u, v) \in U$ e U um conjunto aberto. Diz-se que X é uma superfície parametrizada regular se, e só se:*

- (a) X é de classe C^∞ ; e
- (b) $dX_p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetora.

Por outro lado, sejam e_1 e e_2 os vetores da base canônica do \mathbb{R}^2 . Por comodidade, representa-se a diferencial de X em $p = (u_0, v_0)$ para cada um dos parâmetros calculados em e_1 e e_2 , como:

$$\begin{aligned} dX_p(e_1) &= \left(\frac{\partial x}{\partial u}(p), \frac{\partial y}{\partial u}(p), \frac{\partial z}{\partial u}(p) \right) = X_u(p), \\ dX_p(e_2) &= \left(\frac{\partial x}{\partial v}(p), \frac{\partial y}{\partial v}(p), \frac{\partial z}{\partial v}(p) \right) = X_v(p) \end{aligned} \quad (2.2)$$

e por vezes escreve-se somente X_u e X_v . É verificado também que $dX_p(e_1)$ e $dX_p(e_2)$ são as colunas da matriz jacobiana $JX(u_0, v_0)$, vista na equação 2.1 que define a transformação linear dX_p .

¹ Uma abordagem semelhante pode ser encontrada em Tenenblat (2008)

Proposição 2.1.1. *A condição (a) da definição 2.1 é equivalente às seguintes afirmações:*

1. X_u e X_v são linearmente independentes para todo p de U , exceto em $p = (0, 0)$;
2. A matriz $JX(u_0, v_0)$ tem posto 2.

Demonstração:

Sabe-se que a aplicação dX_p é uma aplicação linear e pela condição (b) da definição 2.1 ela é injetora.

Da Álgebra Linear temos que se a transformação linear dX_p é injetora então $N(dX_p) = \{(0, 0)\}$ e vice-versa, sendo N o núcleo da transformação.

Então, para e_1 e e_2 vetores linearmente independentes (*L.I.*) de \mathbb{R}^2 , tomando a equação

$$a dX_p(e_1) + b dX_p(e_2) = (0, 0, 0), \quad a, b \in \mathbb{R} \quad (2.3)$$

como dX_p é linear

$$dX_p(a e_1 + b e_2) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow a e_1 + b e_2 \in N(dX_p) \quad (2.4)$$

e pelo resultado enunciado anteriormente

$$a e_1 + b e_2 = (0, 0). \quad (2.5)$$

Contudo, por hipótese e_1 e e_2 são *L.I.* então $a = b = 0$, logo $dX_p(e_1)$, $dX_p(e_2)$ são *L.I.*, ou seja, X_u e X_v são *L.I.* e a sentença (1) está provada.

Para a sentença (2), tem-se que o posto de uma matriz é definido como o número de linhas ou colunas linearmente independentes da matriz em questão e, como as componentes de X_u e X_v , colunas da matriz jacobiana $JX(u_0, v_0)$, são *L.I.*, o posto de JX é dois. Logo, (1) e (2) são afirmações equivalentes à condição (b) da definição 2.1.

Outra nomenclatura importante é o *traço* de uma superfície X , definido como a imagem da aplicação X .

A partir deste momento trata-se as *superfícies parametrizadas regulares* somente como *superfícies regulares*, visto que a definição dada não difere o conceito de superfície da própria parametrização.

Exemplo 2.1.

A esfera² unitária (a menos de um meridiano) $\mathbb{S}^2 = \{v \in \mathbb{R}^3 / \|v\| = 1\}$ pode ser parametrizada pelas coordenadas esféricas $X(\varphi, \theta) = (\text{sen}(\theta)\cos(\varphi), \text{sen}(\theta)\text{sen}(\varphi), \cos(\theta))$,

² Admite-se aqui uma definição de esfera distinta da definição euclidiana, neste contexto a esfera é entendida como uma região bidimensional e não como um corpo sólido tridimensional.

onde $X :] - \pi, \pi[\times] 0, \pi[\rightarrow \mathbb{R}^3$. As coordenadas θ e φ são conhecidas como co-latitude e longitude, respectivamente.

Devido aos intervalos abertos $] - \pi, \pi[$ e $] 0, \pi[$ o traço da superfície X é a esfera a menos de um de seus meridianos e não a esfera completa, é possível visualizar a ausência desse meridiano na Figura 1 que apresenta uma esfera de raio unitário e centro fixado na origem. Essa restrição se justifica por conta da injetividade da aplicação dX_p . A seguir serão exibidos argumentos com o objetivo de confirmar que X é uma superfície regular.

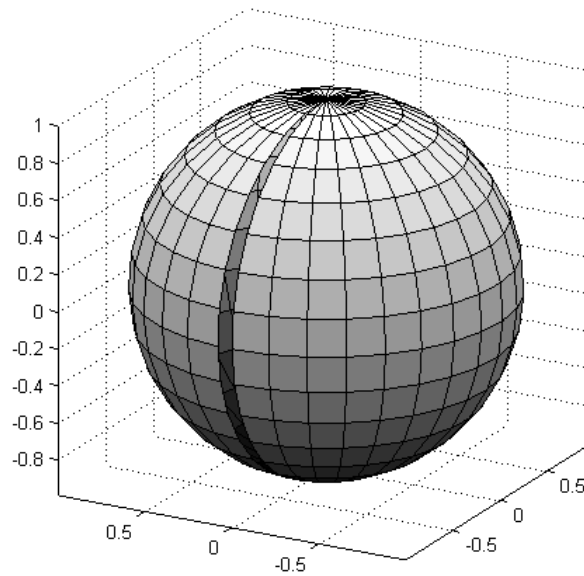


Figura 1 – Esfera sem um meridiano

Primeiramente, as funções $x(\varphi, \theta)$, $y(\varphi, \theta)$ e $z(\varphi, \theta)$ são de classe C^∞ , pois são funções trigonométricas para as quais $\varphi \in] - \pi, \pi[$ e $\theta \in] 0, \pi[$. Por causa disso, $X(\varphi, \theta)$ também é de classe C^∞ . Dessa forma, a condição (a) da definição 2.1 é válida.

Tendo em vista que para qualquer par ordenado (φ, θ) do domínio de X obtém-se $\|X_\varphi \wedge X_\theta\| \neq 0$, então a condição (b) da definição 2.1 será válida. Note que:

$$\begin{aligned} X_\varphi &= (-\operatorname{sen}(\theta)\operatorname{sen}(\varphi), \operatorname{sen}(\theta)\cos(\varphi), 0) , \\ X_\theta &= (\cos(\theta)\cos(\varphi), \cos(\theta)\operatorname{sen}(\varphi), -\operatorname{sen}(\theta)) , \\ \Rightarrow X_\varphi \wedge X_\theta &= -\operatorname{sen}(\theta) \cdot (\operatorname{sen}(\theta)\cos(\varphi), \operatorname{sen}(\theta)\operatorname{sen}(\varphi), \cos(\theta)) . \end{aligned} \quad (2.6)$$

Tomando a norma do produto vetorial tem-se

$$\begin{aligned} \|X_\varphi \wedge X_\theta\| &= \sqrt{\operatorname{sen}^4(\theta)\cos^2(\varphi) + \operatorname{sen}^4(\theta)\operatorname{sen}^2(\varphi) + \operatorname{sen}^2(\theta)\cos^2(\theta)} \\ &= |\operatorname{sen}(\theta)| \sqrt{\operatorname{sen}^2(\theta) \cdot (\cos^2(\varphi) + \operatorname{sen}^2(\varphi)) + \cos^2(\theta)} = |\operatorname{sen}(\theta)| . \end{aligned} \quad (2.7)$$

Como $\theta \in] 0, \pi[$

$$\|X_\varphi \wedge X_\theta\| = |\operatorname{sen}(\theta)| \neq 0, \quad (2.8)$$

ou seja, os vetores X_φ e X_θ são *L.I.* e, pela **Proposição 2.1.1**, isso equivale à condição (b) da definição 2.1.

Proposição 2.1.2. *Seja $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável definida em um conjunto aberto U , então a aplicação $X(u, v) = (u, v, f(u, v))$ é uma superfície regular. Diz-se que X é uma parametrização do gráfico de f .*

Demonstração:

A diferenciabilidade de X é garantida, porque as funções coordenadas u , v e $f(u, v)$ são diferenciáveis. Portanto, a condição (a) da definição 2.1 está verificada.

Seja $(0, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$, constata-se que $(0, 0, 1)$ é *L.I.* em relação aos vetores $X_u = (1, 0, f_u)$ e $X_v = (0, 1, f_v)$. A fim de justificar que X_u e X_v são *L.I.* entre si, mostra-se que a matriz M é inversível para qualquer $p \in U$.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ f_u & f_v & 1 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Repare que $\det(M) = 1 \neq 0$. Isso implica que M é inversível, isto é, os vetores X_u e X_v são *L.I.* Logo, X é uma superfície regular, o que demonstra a proposição.

2.2 Curvas Coordenadas

Definição 2.2.1. *Sejam α e β curvas parametrizadas e diferenciáveis do \mathbb{R}^3 em um ponto $p = (u_0, v_0) \in U \subset \mathbb{R}^2$ fixado tal que:*

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= X(u(t), v_0) , \\ \beta(t) &= X(u_0, v(t)) \end{aligned} \quad (2.10)$$

chamam-se α e β de curvas coordenadas da superfície X em p .

Os vetores $X_u(p)$ e $X_v(p)$ são tangentes a essas respectivas curvas coordenadas. De acordo com a Figura 2, é possível visualizar que uma região do \mathbb{R}^2 se assemelha ao traço $X(U)$ da superfície imersa no \mathbb{R}^3 e, analogamente, retas paralelas aos eixos coordenados do \mathbb{R}^2 se assemelham às curvas α e β no \mathbb{R}^3 .

Definição 2.2.2. *Sejam $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow U \subset \mathbb{R}^2$ uma curva regular (curva que para todos os valores de I a norma de seu vetor derivada será não nula) e $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície regular. A curva $\beta = X \circ \alpha$ tem seu traço contido no traço da superfície X , diz-se que β é uma curva sobre a superfície X .*

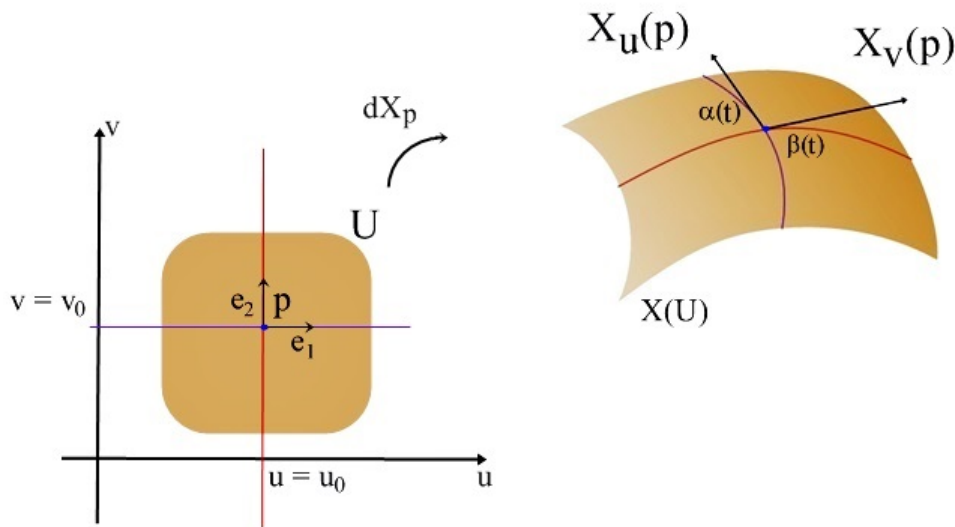


Figura 2 – Curvas Coordenadas

Ademais, β também é regular.³

No que diz respeito ao plano tangente é possível compreendê-lo também como sendo o conjunto de todos os vetores tangentes a X em $p = (u_0, v_0)$ ⁴. Usa-se a notação $T_p X$ para se referir a esse plano.

Dessa forma, $\{X_u, X_v\}$ é uma base de $T_p X$ e, é correto afirmar que

$$\forall w \in T_p X \Rightarrow w = aX_u + bX_v, \quad a, b \in \mathbb{R} \quad (2.11)$$

Entretanto, deve-se observar que o plano tangente é introduzido para um ponto $p \in U$ e não para um ponto $X(p)$ sobre o traço da superfície X , a fim de evitar autointerseções de X .

2.3 Formas Fundamentais e Aplicação Normal de Gauss

Nesta seção serão introduzidas concepções de suma importância para delinear a ideia de curvatura de uma superfície regular. Segundo Natário (2009), a curvatura de uma superfície é a medida do quanto a geometria local de uma superfície difere da geometria de um plano, ou seja, a grosso modo é medir localmente o quanto uma superfície se desvia de um plano tangente. No âmago dessa questão, a curvatura para curvas carece de uma definição que permita que esse conceito seja estendido para superfícies.

³ Uma demonstração para esse resultado pode ser encontrada em Rodrigues e Agustini (2007, p. 112)

⁴ Uma demonstração para essa equivalência encontra-se em Freitas (2017, p. 35)

A curvatura de uma curva plana em um ponto da curva é uma medida numérica de quanto a curva se afasta de ser uma reta numa vizinhança daquele ponto: é a taxa de variação naquele ponto da direção tangente à curva em relação ao comprimento de arco (GORODSKI, 2009, p. 16).

Em Tenenblat (2008) e em Carmo (2004) as curvaturas de uma superfície regular são calculadas por meio de coeficientes relacionados a medidas que dependem ou não da forma como a superfície está imersa no \mathbb{R}^3 .

Nesta seção esses coeficientes aparecerão como elementos de funções denominadas *Primeira e Segunda Formas Fundamentais* e serão estudados em conjunto com a *Aplicação Normal de Gauss*.

2.3.1 Primeira Forma Fundamental

Definição 2.3.1. *Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície regular e $p = (u_0, v_0) \in U$ e a função $I_p : T_p X \rightarrow \mathbb{R}_+$ cuja lei de formação é dada por:*

$$I_p(w) = \langle w, w \rangle = \|w\|^2. \quad (2.12)$$

Essa função é denominada Primeira Forma Fundamental.

Ao desenvolver 2.12 nota-se que ela é uma forma quadrática:

$$\begin{aligned} I_p &= \langle w, w \rangle = \langle aX_u + bX_v, aX_u + bX_v \rangle \\ &= a^2 \langle X_u, X_u \rangle + ab \langle X_u, X_v \rangle + ba \langle X_v, X_u \rangle + b^2 \langle X_v, X_v \rangle \\ &= a^2 \langle X_u, X_u \rangle + 2ab \langle X_u, X_v \rangle + b^2 \langle X_v, X_v \rangle. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Os termos $\langle X_u, X_u \rangle$, $\langle X_u, X_v \rangle$ e $\langle X_v, X_v \rangle$ surgem neste estudo com determinada frequência e são conhecidos como os *Coefficientes da Primeira Forma Fundamental*. Por convenção define-se:

$$\begin{aligned} E(u_0, v_0) &= \langle X_u, X_u \rangle(p), \\ F(u_0, v_0) &= \langle X_u, X_v \rangle(p), \\ G(u_0, v_0) &= \langle X_v, X_v \rangle(p). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Embora seja possível construir fórmulas para realizar medidas em uma superfície usando as funções E , F e G , esses coeficientes serão utilizados mais adiante no cálculo de curvatura de uma superfície X .

Exemplo 2.3.1.

A superfície regular $X(u, v) = (ux_1 + vx_2, uy_1 + vy_2, uz_1 + vz_2) + (a, b, c)$ é um plano onde $X(0, 0) = (a, b, c)$. A Figura 3 ilustra um plano para o caso em que $a = b = c = 0$.

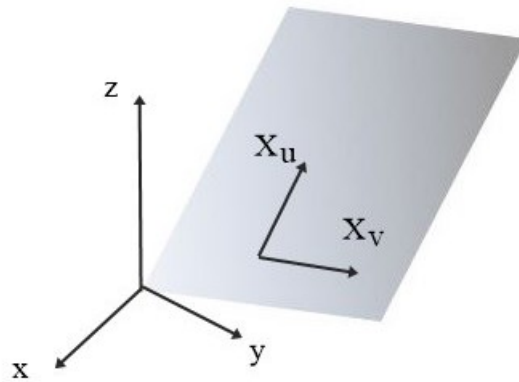


Figura 3 – Plano

O plano X é gerado pela base ortonormal $\{(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)\}$ de vetores cujas componentes são escalares reais. Tomando a diferencial de X em um ponto p , tem-se que:

$$\{(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)\} = \{X_u, X_v\}. \quad (2.15)$$

De acordo com as equações 2.11 e 2.14 e ao perceber que $\{X_u, X_v\}$ é ortonormal, obtém-se os *Coefficientes da Primeira Forma Fundamental* para X :

$$\begin{aligned} E(u_0, v_0) &= \langle X_u, X_u \rangle(p) = 1, \\ F(u_0, v_0) &= \langle X_u, X_v \rangle(p) = 0, \\ G(u_0, v_0) &= \langle X_v, X_v \rangle(p) = 1 \end{aligned} \quad (2.16)$$

e condizente a (2.14):

$$I_p(w) = a^2 + b^2 = \|w\|^2. \quad (2.17)$$

Esse resultado equivale ao Teorema de Pitágoras da Geometria Plana que coincide com o quadrado da distância de um ponto do \mathbb{R}^2 à origem do sistema de coordenadas na Geometria Analítica.

Aponta-se ainda que a *Primeira Forma Fundamental* está relacionada à Geometria Intrínseca da superfície analisada. Isso significa que os valores dos coeficientes não dependem de isometrias locais⁵ ou da forma como a superfície está imersa no \mathbb{R}^3 .

Proposição 2.3.1. *Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície regular, então os coeficientes da Primeira Forma Fundamental obedecem à relação $EG - F^2 > 0$.*

Demonstração:

⁵ Segundo Araújo (1998), isometrias podem ser entendidas como transformações sobre figuras (traços de curvas, traços de superfícies, etc) que mantém a distância entre os pontos dessas figuras.

Como X_u e X_v não são nulos $\forall p \in U$ (caso contrário não formariam uma base de $T_p X$) então $\|X_u \wedge X_v\|^2 > 0$, além disso:

$$\begin{aligned} \|X_u \wedge X_v\|^2 &= \|X_u\|^2 \|X_v\|^2 \operatorname{sen}^2(\theta) \\ &= \|X_u\|^2 \|X_v\|^2 (1 - \operatorname{cos}^2(\theta)) \\ &= \langle X_u, X_u \rangle \langle X_v, X_v \rangle (1 - \operatorname{cos}^2(\theta)) \\ &= EG (1 - \operatorname{cos}^2(\theta)) = EG - EG \operatorname{cos}^2(\theta). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Percebe-se que $EG \operatorname{cos}^2(\theta) = \|X_u\|^2 \|X_v\|^2 \operatorname{cos}^2(\theta) = (\langle X_u, X_v \rangle)^2 = F^2$, logo,

$$EG - F^2 > 0, \quad (2.19)$$

o que demonstra a proposição.

2.3.2 Aplicação Normal de Gauss

Em virtude dos levantamentos acerca da definição de curvatura presentes no início desta seção, é razoável que para medi-la em uma superfície faz-se necessário compreender o comportamento dos planos tangentes a ela. A partir dessa necessidade, surge também uma estratégia para tal. Primeiramente, determina-se um campo vetorial que associa os pontos de uma superfície regular X a vetores normais e unitários nesses pontos, visto que para cada vetor normal é possível determinar um plano tangente à superfície dada.

Definição 2.3.2. *Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície regular, tomando um ponto $p = (u_0, v_0) \in U$, para se obter um vetor N normal a X em p é preciso encontrar N ortogonal ao $T_p X$, como está representado na Figura 4.*

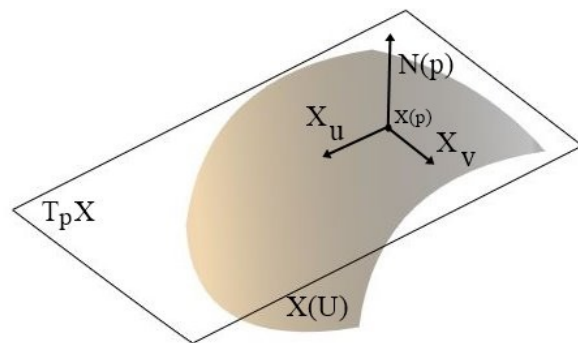


Figura 4 – Vetor Normal ao plano tangente

Isso equivale a encontrar um vetor normal aos vetores X_u e X_v da seguinte maneira:

$$N(p) = \frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|}(p), \quad (2.20)$$

e variando $(u, v) \in U$, tem-se a aplicação $N : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada pela lei:

$$N(u, v) = \frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|}(u, v). \quad (2.21)$$

O campo de vetores normais N é denominado *Aplicação Normal de Gauss*.

Além disso, a imagem dessa aplicação está contida na esfera de raio um e centro fixado na origem, uma vez que se pode, para cada N normal à X e de norma unitária, encontrar um representante do vetor N fixado na origem, conforme indica a Figura 5. Essa é uma forma de entender a *Aplicação Normal de Gauss* como um mapeamento do comportamento dos planos tangentes à X .

Por mais que se defina a aplicação N tomando valores de um conjunto aberto U que é domínio de uma superfície X , por uma questão de exatidão é importante destacar que foi convencionado acima que $N(u, v) = N \circ X(u, v)$, em outras palavras, N de fato está definida a partir de uma operação de composição com $N \circ X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$.

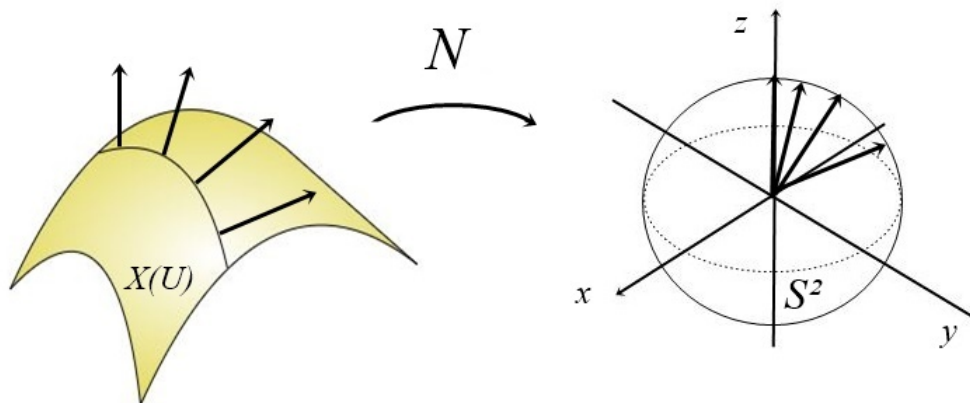


Figura 5 – Aplicação Normal de Gauss

Além do mais, esse campo de vetores N também é chamado de orientação de uma superfície X . Araújo (1998) diz que uma superfície é orientável quando for possível, para um observador tridimensional, distinguir o lado de cima do lado de baixo de seu traço.

Admite-se que nos demais resultados presentes neste trabalho serão analisadas somente superfícies conexas orientáveis, ou seja, superfícies que têm exatamente duas orientações distintas ⁶:

$$N(u, v) = \pm \frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|}(u, v). \quad (2.22)$$

⁶ Ver mais considerações em Araújo (1998, p.56)

2.3.3 Diferencial da Aplicação Normal de Gauss

Uma vez que foi introduzido um campo de vetores normais a uma superfície regular que, por sua vez, oferece uma maneira de localizar os planos tangentes a essa superfície, é preciso agora entender o comportamento desses planos em uma vizinhança de um ponto da superfície. De forma mais precisa, estuda-se a variação dessa aplicação, ou melhor, deve-se analisar as derivadas parciais da aplicação N .

Definição 2.3.3. *Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície regular, o campo de vetores normais $N : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ a X determina para todo $p \in U$ um vetor $N(p)$ unitário e ortogonal ao $T_p X$ gerado por X_u e X_v e, a base $\{X_u, X_v, N\}$ é uma base positivamente orientada do \mathbb{R}^3 . O operador linear $dN_p : T_p X \rightarrow T_p X$ é denominado Diferencial da Aplicação Normal de Gauss ou **Aplicação de Weingarten**.*

Vale ressaltar que dN_p pode também ser definido como $dN_p : T_p X \rightarrow T_{N(p)}\mathbb{S}^2$, mas $T_p X$ e $T_{N(p)}\mathbb{S}^2$ são planos paralelos e, em termos de espaços vetoriais, são o mesmo subespaço de \mathbb{R}^3 . Pode-se dizer ainda que dN_p mede a variação de $N(p)$. Ademais, analogamente à equação 2.2 e, visto que X_u e X_v são vetores tangentes às curvas coordenadas de X e formam uma base de $T_p X$ tem-se:

$$\begin{aligned} dN_p(X_u) &= N_u \\ dN_p(X_v) &= N_v. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Proposição 2.3.2. *O operador $dN_p : T_p X \rightarrow T_p X$ é autoadjunto, isto é, $\langle X_u, dN_p(X_v) \rangle = \langle dN_p(X_u), X_v \rangle$.*

Demonstração:

Sabe-se que $N(p)$ é ortogonal simultaneamente a X_u e a X_v , ou seja,

$$\begin{aligned} \langle X_u, N \rangle &= 0 \\ \langle X_v, N \rangle &= 0, \end{aligned} \tag{2.24}$$

derivando os elementos em ambas igualdades a fim de surgirem os termos N_u e N_v obtêm-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle X_u, N \rangle}{\partial v} &= \langle X_{uv}, N \rangle + \langle X_u, N_v \rangle = 0 \\ \frac{\partial \langle X_v, N \rangle}{\partial u} &= \langle X_{vu}, N \rangle + \langle X_v, N_u \rangle = 0, \end{aligned} \tag{2.25}$$

e, reordenando os termos:

$$\begin{aligned} \langle X_{uv}, N \rangle &= -\langle X_u, N_v \rangle \\ \langle X_{vu}, N \rangle &= -\langle X_v, N_u \rangle. \end{aligned} \tag{2.26}$$

O Teorema de Clairaut-Schwarz estabelece que $X_{uv} = X_{vu}$, implicando em:

$$\langle X_{uv}, N \rangle = \langle X_{vu}, N \rangle \Leftrightarrow -\langle X_u, N_v \rangle = -\langle X_v, N_u \rangle. \quad (2.27)$$

Permitindo concluir que $\langle X_u, N_v \rangle = \langle X_v, N_u \rangle$ e, conforme às equações em 2.23 tem-se que $\langle X_u, dN_p(X_v) \rangle = \langle dN_p(X_u), X_v \rangle$, o que prova a proposição.

De acordo com o segundo membro das igualdades em 2.26 e por uma questão de convenção com a orientação escolhida do campo de vetores N , usa-se a aplicação $-dN_p$. No entanto, o resultado da **Proposição 2.3.2** ainda é válido mesmo com a troca de sinal.

Como consequência imediata deste resultado é importante destacar o Teorema Espectral da Álgebra Linear, que garante que: “Para T_pX um espaço vetorial de dimensão finita sobre \mathbb{R} , munido do produto interno usual $\langle \cdot, \cdot \rangle$, dizer que $-dN_p : T_pX \rightarrow T_pX$ é um operador autoadjunto equivale a dizer que existe uma base de T_pX formada por autovalores de $-dN_p$, dois a dois ortogonais”.

Em razão disso, dado $\{w_1, w_2\} \subset T_pX$ tal que:

$$\begin{aligned} -dN_p(w_1) &= k_1 w_1 \\ -dN_p(w_2) &= k_2 w_2, \end{aligned} \quad (2.28)$$

é possível também representar o operador $-dN_p$ pela matriz quadrada:

$$-dN_p = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}. \quad (2.29)$$

O fato de $-dN_p$ ser um operador autoadjunto auxilia na permutação entre as operações de derivação, quando se tratar do produto interno entre elementos de T_pX .

2.3.4 Segunda Forma Fundamental

Definição 2.3.4. *Sejam $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície regular e $p \in U$, a função $\Pi_p : T_pX \rightarrow \mathbb{R}$, cuja lei de formação é dada por $\Pi_p(w) = \langle -dN_p(w), w \rangle$ é chamada de Segunda Forma Fundamental.*

Para α uma curva sobre a superfície X tal que $\alpha'(t_0) = w$ e $p = (u_0, v_0) = (u(t_0), v(t_0))$, tem-se que:

$$\begin{aligned} \Pi_p(w) &= \langle -dN_p(\alpha'(t_0)), \alpha'(t_0) \rangle \\ &= -\langle N(u_0, v_0), \alpha''(t_0) \rangle \end{aligned} \quad (2.30)$$

e, englobando as duas possíveis orientações do vetor N :

$$\Pi_p(w) = \pm \langle \alpha''(t_0), N \rangle. \quad (2.31)$$

Como a *Segunda Forma Fundamental* está definida algebricamente, torna-se preciso apresentar uma interpretação geométrica a ela. A priori, é escolhida uma seção plana de X que passe por um ponto p e que contenha $N(p)$ determinando uma curva $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow X(U)$ parametrizada por comprimento de arco, ou seja, $\forall t \in I$, $\|\alpha'(t)\| = 1$.

Essa escolha é possível devido a duas constatações: toda curva sobre uma superfície regular é regular e uma curva é regular se e só se possui uma reparametrização por comprimento de arco⁷. Resta agora analisar a curvatura da curva α .

Seja \vec{n} um vetor unitário e ortogonal a α em uma seção plana conveniente onde $\vec{n} = \pm N(p)$ (chama-se de seção normal), com $w \in T_p X$, tal como ilustrado na Figura 6 (alterando a seção plana pode ocorrer $\vec{n} \neq \pm N(p)$), considerando também $\vec{T} = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}$ e a partir da definição de curvatura para curvas planas tem-se:

$$\vec{T}' = k(t_0)\vec{n}. \quad (2.32)$$

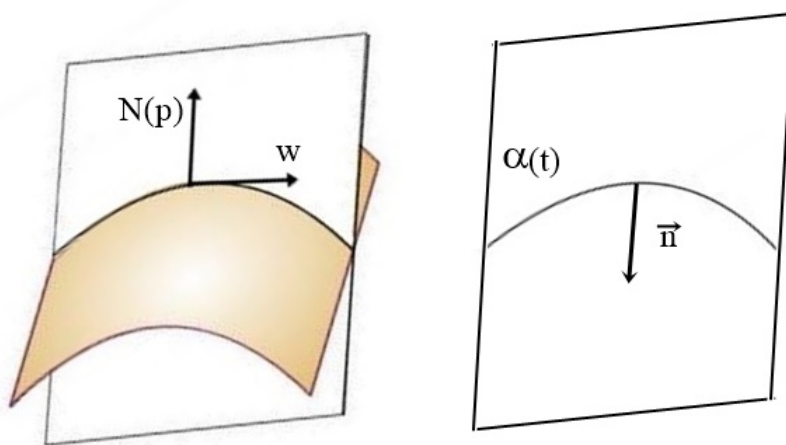


Figura 6 – Seção normal a uma superfície

No entanto, é necessário elucidar o significado dessa equação. De acordo com Araújo (1998), estudar a primeira derivada de uma curva nada revela sobre a forma da curva, para prosseguir é preciso levar em conta a sua segunda derivada. Já Picado (2006) elenca elementos necessários para definir curvatura: ser um valor (escalar) inalterável por mudança de parâmetro, ser nula para uma reta e ser constante e positiva para uma circunferência.

⁷ Ver outras considerações em Picado (2006, p. 16)

Em razão disso, define-se curvatura para uma curva parametrizada por comprimento de arco como sendo o número real $\|\alpha''(t)\|$. A partir disso, é coerente o comentário de Araújo (1998) em relação ao de Picado (2006), visto que se uma curva α possuir $\|\alpha''(t)\| = 0$, então em t o traço da curva coincide como uma linha reta (a equação vetorial de uma reta é vista como uma curva regular cuja segunda derivada é sempre nula). Porém, o termo $\|\alpha''(t)\|$ dependerá da parametrização de α , mais precisamente, dependerá do módulo do vetor derivada como indica a equação 2.32, contrariando o primeiro elemento descrito por Picado (2006).

Para evitar essa contradição, justifica-se a necessidade de se definir a curvatura para curvas parametrizadas por comprimento de arco. Porém, como nem sempre é viável encontrar explicitamente a reparametrização de α , é importante dispor de fórmulas para determinar k em termos de α e t . Neste caso, como consequência de 2.32:

$$k(t) = \pm \langle \vec{T}', \vec{n} \rangle = \pm \langle \vec{T}', N \rangle. \quad (2.33)$$

É possível visualizar também a curvatura k como fator do vetor \vec{n} , ou melhor, se a primeira derivada é entendida como sendo a velocidade de deslocamento do vetor posição, então a curvatura é o fator k que indica a intensidade da aceleração do vetor posição. Além disso, como α é parametrizada por comprimento de arco $\vec{T}' = \alpha''(t)$, isto é,

$$k(t) = \pm \langle \alpha''(t), N \rangle. \quad (2.34)$$

Em outras palavras, a *Segunda Forma Fundamental* determina a curvatura de uma curva regular parametrizada por comprimento de arco que tem seu traço obtido pela seção plana de X por um plano que contenha o vetor N . Sendo assim, a menos de um sinal pode-se escrever:

$$k(t) = \Pi_p(w). \quad (2.35)$$

2.3.5 Coeficientes da Segunda Forma Fundamental

Tal como à *Primeira Forma Fundamental* é válido incorporar a este estudo coeficientes relacionados à *Segunda Forma Fundamental*.

Tomando uma superfície regular $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, uma curva regular $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ sobre essa superfície, tal que, para um vetor $w \in T_p X$ tenha-se que $\alpha'(t_0) = w$ e um ponto $p = (u(t_0), v(t_0))$.

Aplicando o operador $-dN_p$ à equação 2.11 tem-se:

$$-dN_p(\alpha'(t_0)) = -dN_p(u'(t_0)X_u(p) + v'(t_0)X_v(p)), \quad (2.36)$$

como já é conhecido que o operador $-dN_p$ é linear e usando a notação em 2.23, é possível escrever:

$$\begin{aligned} -dN_p(u'(t_0)X_u(p) + v'(t_0)X_v(p)) &= u'(t_0)(-dN_p(X_u)) + v'(t_0)(-dN_p(X_v)) \\ &= u'(t_0)(-N_u) + v'(t_0)(-N_v) = a(-N_u) + b(-N_v). \end{aligned} \quad (2.37)$$

Ressalta-se que a equação acima está de acordo com o seguinte resultado da Álgebra Linear: se $T : V \rightarrow W$ é uma transformação linear e $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ gera o espaço V , então $\{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)\}$ gera a imagem da transformação T .

De acordo com esse resultado, tomando $T = -dN_p$, então o conjunto $\{-N_u, -N_v\}$ gera a imagem da transformação $-dN_p$. Desta maneira, dada uma orientação:

$$\begin{aligned} \Pi_p(w) &= \langle -dN_p(w), w \rangle = \langle a(-N_u) + b(-N_v), aX_u + bX_v \rangle \\ &= a^2 \langle -N_u, X_u \rangle + ab \langle -N_u, X_v \rangle + ba \langle -N_v, X_u \rangle + b^2 \langle -N_v, X_v \rangle. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Veja ainda que devido à **Proposição 2.3.2**:

$$\begin{aligned} \langle -N_u, X_v \rangle &= \langle N, X_{uv} \rangle = \langle X_{uv}, N \rangle, \\ \langle -N_v, X_u \rangle &= \langle N, X_{vu} \rangle = \langle X_{vu}, N \rangle \end{aligned} \quad (2.39)$$

e como consequência do Teorema de Clairaut-Schwarz, $\langle X_{uv}, N \rangle = \langle X_{vu}, N \rangle$.

Então:

$$\Pi_p(w) = a^2 \langle X_{uu}, N \rangle + 2ab \langle X_{uv}, N \rangle + b^2 \langle X_{vv}, N \rangle. \quad (2.40)$$

Ademais, tal como foi destacado em 2.14, nomea-se:

$$\begin{aligned} e(u_0, v_0) &= \langle X_{uu}, N \rangle(p), \\ f(u_0, v_0) &= \langle X_{uv}, N \rangle(p), \\ g(u_0, v_0) &= \langle X_{vv}, N \rangle(p). \end{aligned} \quad (2.41)$$

As funções contínuas e , f e g são chamadas de *Coefficientes da Segunda Forma Fundamental*.

3 Curvatura de Superfície

*Se conhecemos um objeto apenas qualitativamente,
nós o conhecemos apenas de maneira vaga.
Se o conhecemos quantitativamente - entendendo alguma medida numérica que o
distingue de um número infinito de outras possibilidades -,
começamos a conhecê-lo profundamente.
– Carl Sagan, *Bilhões e Bilhões*.*

Neste capítulo será consolidado o conceito de curvatura para superfícies regulares, visto que no capítulo anterior as *Formas Fundamentais* foram introduzidas e discutidas para essa finalidade.

3.1 Curvatura Normal

Inicialmente é preciso advertir que por mais que “historicamente, a definição de curvatura de uma superfície surgiu a partir da definição de curvatura de uma curva.” (NATÁRIO, 2009, p. 42), para todos os efeitos, a definição de curvatura de superfície não é única como a definição para curvas. Em geral, a ideia de curvatura se ramifica em dois conceitos substanciais: a **Curvatura de Gauss** e a **Curvatura Média** que serão apresentados na seção posterior.

Além disso, no capítulo anterior foram discutidas algumas das exigências citadas por Picado (2006) para definir curvatura de uma curva. A primeira dessas exigências, aquela que diz respeito ao fato de que a curvatura de uma curva deva ser um escalar real, também se aplica para superfícies. Enquanto as duas outras exigências também encontram similaridades na generalização do conceito para superfícies: a curvatura de uma reta é nula, tal como para um plano, e a curvatura de uma circunferência é constante e positiva; o que também é válido para uma esfera. Logo, os aspectos discutidos neste capítulo mostrarão que a possibilidade de realizar essa extensão de conceitos não é mera casualidade.

Definição 3.1.1. *Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície regular e $p \in U$. A função Curvatura Normal em p é a aplicação $k_n : T_p X - \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ que, para cada vetor $w \in T_p X$, associa*

$$k_n(w) = \frac{\Pi_p(w)}{I_p(w)} = \frac{a^2 e(u_0, v_0) + 2abf(u_0, v_0) + b^2 g(u_0, v_0)}{a^2 E(u_0, v_0) + 2abF(u_0, v_0) + b^2 G(u_0, v_0)} \quad (3.1)$$

Ainda, segue da interpretação geométrica dada na seção *Segunda Forma Fundamental* que k_n corresponde à curvatura da seção normal à superfície X em p . De modo preciso, a lei de formação 3.1 corresponde para uma curva cujo traço é uma seção normal à superfície regular X o que a lei 2.33 corresponde para uma curva regular plana.

Proposição 3.1.1. *Sejam α e β curvas sobre uma superfície X regular tais que sejam tangentes uma a outra em $\alpha(t_0) = \beta(t_0) = p_0$ então $k_n(\alpha'(t_0)) = k_n(\beta'(t_0))$. Isso equivale a afirmar que a Curvatura Normal k_n em $\alpha(t)$ depende apenas da direção tangente à curvatura em t .*

Demonstração:

A princípio, constata-se que $N \circ \alpha(t) = N(u(t), v(t))$ é ortogonal ao vetor $w \in T_p X$. Dessa forma, pode-se representar $w = \alpha'(t)$ e ainda $\langle \alpha'(t), N(u(t), v(t)) \rangle = 0$. Derivando ambos os membros da igualdade, tem-se:

$$\begin{aligned} \langle \alpha''(t), N(u(t), v(t)) \rangle + \langle \alpha'(t), dN_p(u(t), v(t)) \rangle &= 0, \\ k_n(\alpha'(t)) \|\alpha'(t)\|^2 + \langle \alpha'(t), dN_p(u(t), v(t)) \rangle &= 0, \\ k_n(\alpha'(t)) &= \frac{\langle \alpha'(t), -dN_p(u(t), v(t)) \rangle}{\|\alpha'(t)\|^2}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Repare ainda que k_n depende somente do valor de α' em um ponto t . Fixando $t = t_0$, então para $\alpha(t_0) = \beta(t_0) = p_0$ implica que $k_n(\alpha'(t_0)) = k_n(\beta'(t_0))$, encerrando a demonstração.

Proposição 3.1.2. *Sejam $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície regular e a função Curvatura Normal k_n de X em $p = (u_0, v_0) \in U$. Então existem vetores $w_1, w_2 \in T_p X$ unitários e ortogonais tais que $k_1 = k_n(w_1)$ e $k_2 = k_n(w_2)$ são os valores mínimo e máximo da função k_n .*

Demonstração:

Sendo $\alpha(t) = X((u(t), v(t)))$ uma curva sobre a superfície X onde tem-se um ponto fixo $p = \alpha'(t_0)$, note que é possível escrever $w = \alpha'(t_0)$.

Pela proposição 2.3.2, $-dN_p$ é um operador autoadjunto, então segundo o Teorema Espectral, existem vetores $w_1, w_2 \in T_p X$ unitários e ortogonais entre si, tais que $k_1 w_1 = -dN_p(w_1)$ e $k_2 w_2 = -dN_p(w_2)$.

Pela equação 2.11 $w = \alpha'(t_0) = a w_1 + b w_2$ de forma que $\|w\|^2 = a^2 + b^2 = 1$.

Diante do exposto, tem-se que k_n pode ser expresso como:

$$k_n(\alpha'(t_0)) = \langle -dN_p(\alpha'(t_0)), \alpha'(t_0) \rangle = \langle -dN_p(a w_1 + b w_2), a w_1 + b w_2 \rangle, \quad (3.3)$$

e, como $-dN_p$ é um operador linear, resulta em:

$$\begin{aligned} k_n(\alpha'(t_0)) &= \langle a[-dN_p(w_1)] + b[-dN_p(w_2)], aw_1 + bw_2 \rangle \\ &= a^2 \langle k_1 w_1, w_1 \rangle + b^2 \langle k_2 w_2, w_2 \rangle \\ &= k_1 a^2 + k_2 b^2, \end{aligned} \quad (3.4)$$

bastando agora verificar que k_1 e k_2 são os valores máximos e mínimos.

Para o caso em que $k_1 = k_2$ tem-se k_n como uma função constante. Neste caso, é admissível escrever $k_1 = k_1(a^2 + b^2) \leq k_1 a^2 + k_2 b^2 \leq k_2(a^2 + b^2) = k_2$, o que prova a proposição para esse caso.

Para o caso $k_1 \neq k_2$ restam duas possibilidades: $k_1 < k_2$ ou $k_2 < k_1$. Tomando o caso $k_1 < k_2$, multiplicando a^2 e somando o termo $k_2 b^2$ em ambos os membros obtém-se:

$$\begin{aligned} k_1 a^2 &< k_2 a^2 \\ k_1 a^2 + k_2 b^2 &< k_2(a^2 + b^2) = k_2. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Realizando o mesmo processo, primeiro multiplicando os dois membros da desigualdade por b^2 e somando o $k_1 a^2$ a ambos os membros, obtém-se:

$$\begin{aligned} k_1 b^2 &< k_2 b^2 \\ k_1 = k_1(a^2 + b^2) &< k_1 a^2 + k_2 b^2. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Combinando 3.5 e 3.6 tem-se que:

$$k_1 = k_1(a^2 + b^2) < k_1 a^2 + k_2 b^2 = k_1 a^2 + k_2 b^2 < k_2(a^2 + b^2) = k_2, \quad (3.7)$$

que finaliza a demonstração para o caso $k_1 < k_2$.

A demonstração para $k_2 < k_1$ é a mesma, a menos de uma troca de índices. Deste modo, para todos os casos:

$$\begin{aligned} k_1 = k_1(a^2 + b^2) &\leq k_1 a^2 + k_2 b^2 \leq k_2(a^2 + b^2) = k_2, \\ k_1 &\leq k_n(w) \leq k_2, \forall w \in T_p X - \{(0, 0)\}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Logo, está provada a proposição, isto é, as curvaturas normais cobrem todo o intervalo $[k_1, k_2]$ e, pelas equações 2.28, para o caso em que $k_1 < k_2$, o mínimo é atingido somente quando $\alpha'(t_0) = \pm w_1$ e o máximo só é atingido quando $\alpha'(t_0) = \pm w_2$.

A propósito, os autovalores k_1 e k_2 são chamados de *curvaturas principais* da superfície X no ponto p e o vetores w_1 e w_2 são as *direções principais*.

3.2 Curvatura de Gauss

Definição 3.2.1. *Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície regular, a **Curvatura de Gauss** de uma superfície em um ponto $p \in U$ é definida como $K(p) = k_1(p)k_2(p)$,*

onde k_1 e k_2 são as curvaturas principais. Enquanto a **Curvatura Média** é dada pela média aritmética dos autovalores $H(p) = \frac{k_1(p)+k_2(p)}{2}$.

A Curvatura de Gauss e a Curvatura Média, $K(p)$ e $H(p)$ podem ser entendidas, respectivamente, como o determinante da matriz que define a transformação dN_p em 2.29 e, a metade da soma dos elementos da diagonal principal (metade do traço) dessa matriz.

Exemplo 3.2.1.

A superfície regular X em que $X(u, v) = (u, 10 \cosh(\frac{u}{10}) \cos(v), 10 \cosh(\frac{u}{10}) \sin(v))$, cujo traço está descrito na Figura 7, é denominada de *Catenóide* e pode ser obtida pela rotação da curva regular $\alpha(t) = (t, \cosh(\frac{u}{10}), 0)$ em torno do eixo Oz .

Estudando as curvaturas das seções normais em $p = (0, 0)$, determinam-se os vetores que geram o T_pX , a saber $X_u(0, 0) = (1, 0, 0)$ e $X_v(0, 0) = (0, 0, 10)$. Podendo-se ainda calcular os coeficientes da *Primeira Forma Fundamental*:

$$\begin{aligned} E(0, 0) &= 1 \\ F(0, 0) &= 0 \\ G(0, 0) &= 100. \end{aligned} \tag{3.9}$$

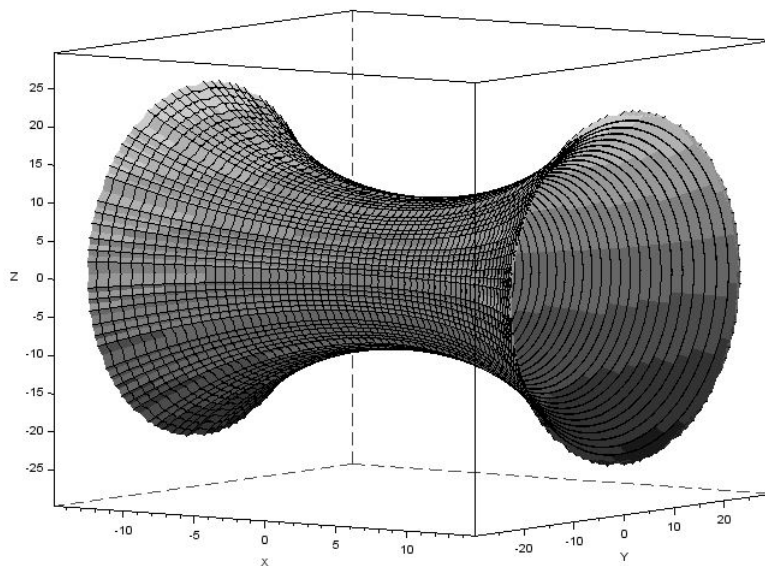


Figura 7 – Catenóide

De maneira semelhante para a *Segunda Forma Fundamental*:

$$\begin{aligned} N(0, 0) &= (0, -1, 0), \\ e(0, 0) &= -\frac{1}{10}, \\ f(0, 0) &= 0, \\ g(0, 0) &= 10 \end{aligned} \tag{3.10}$$

e pela **definição 3.1.1**:

$$\begin{aligned} k_n(aX_u(p) + bX_v(p)) &= \frac{\mathbb{I}_p(aX_u(p) + bX_v(p))}{I_p(aX_u(p) + bX_v(p))}, \quad a, b \in \mathbb{R} \\ &= \frac{-\frac{a^2}{10} + 2ab0 + 10b^2}{a^2 + 2ab0 + 100b^2} = \frac{-a^2 + 100b^2}{10a^2 + 1000b^2}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Graças à **Proposição 3.1.2** a função *Curvatura Normal* tem sua imagem limitada pelos autovalores k_1 e k_2 .

De acordo com a expressão obtida em 3.11, k_n assumirá valor máximo para $a = 0$ e $b = 1$ e mínimo para $a = 1$ e $b = 0$, para verificar isso basta tomar o mesmo raciocínio usado nas desigualdades presentes em 3.5 e 3.8. Por consequência:

$$\begin{aligned} k_n(1X_u(p) + 0X_v(p)) &= -\frac{1}{10} = k_1 \\ k_n(0X_u(p) + 1X_v(p)) &= \frac{1}{10} = k_2. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Porém, nem sempre será factível determinar as curvaturas principais somente analisando a lei de formação de k_n , visto que os vetores X_u e X_v que formam a base de T_pX podem assumir valores que tornam a lei de formação k_n mais sofisticada e, conseqüentemente, tornam a tarefa de encontrar k_1 e k_2 mais complexa.

Nota-se que as seções normais de X determinam traços de curvas cujas curvaturas têm sinais opostos no ponto p . Devido à **Proposição 3.1.1** é possível visualizar isso independentemente da seção plana tomada no ponto p , desde que as direções tangentes sejam as mesmas.

Logo, como ilustrado na Figura 8, os vetores que representam as segundas derivadas dessas curvas estão apontados para direções opostas em relação às retas r e s tangentes no ponto p , ou melhor, se as curvas fossem colocadas no mesmo plano, os vetores estariam apontando para lados distintos¹.

Teorema 3.2.1. *Seja $X(u, v)$ uma superfície regular. Se $p = (u_0, v_0)$, então*

$$K(p) = \frac{e_0g_0 - f_0^2}{E_0G_0 - F_0^2} \tag{3.13}$$

¹ Aqui faz-se uso de uma facilitação linguística: o termo "lados distintos" refere-se intuitivamente a semiplanos distintos.

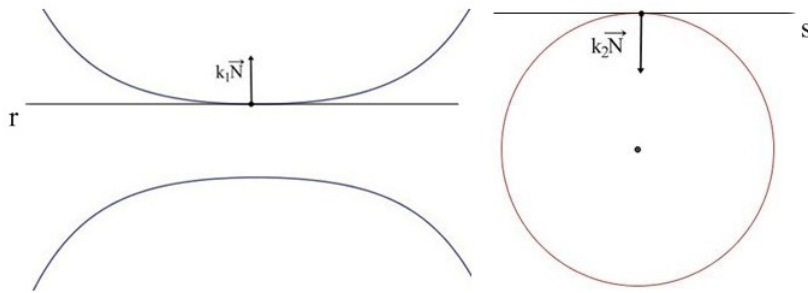


Figura 8 – Seções Normais: Catenárias e Circunferência

onde E_0, F_0 e G_0 são os coeficientes da Primeira Forma Fundamental em p e e_0, f_0 e g_0 são coeficientes da Segunda Forma Fundamental em p .

Demonstração:

Dada uma parametrização de $X(u, v)$, a fim de obter uma fórmula para $K(p)$ em função dos coeficientes das *Primeira e Segunda Formas Fundamentais*, é imprescindível então encontrar uma matriz do operador $-dN_p$ relativamente à base $\{X_u, X_v\}$.

Entretanto, a matriz dessa transformação em 2.29 está determinada em relação à base $\{w_1, w_2\}$ formada por autovalores de $-dN_p$ e seu determinante coincide com a definição dada para $K(p)$.

A matriz relativa a base $\{X_u, X_v\}$ será escrita de forma genérica como:

$$[a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad (3.14)$$

enquanto a matriz do operador $-dN_p$ relativa à base de autovalores será escrita como $[-dN_p]$, onde $\det[a_{ij}] = \det[-dN_p]$, pois as matrizes $[a_{ij}]$ e $[-dN_p]$ são semelhantes.

Recordando que $\{-N_u, -N_v\}$ gera a imagem do operador $-dN_p$ ($Im(-dN_p)$) e que ela, por sua vez é um subconjunto de T_pX , onde $\{X_u, X_v\}$ é base, então os vetores $-N_u$ e $-N_v$ podem ser escritos como:²

$$\begin{aligned} -N_u &= a_{11}X_u + a_{12}X_v \\ -N_v &= a_{21}X_u + a_{22}X_v. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Tanto para a primeira equação em 3.15 quanto para a segunda, calcula-se o

² Por mais que seja possível escrever essa combinação linear, note que isso não significa que $-N_u$ e $-N_v$ serão sempre *L.I.*, por exemplo, basta tomar o plano como superfície regular. Decorre que nesse caso a aplicação N será constante para todo ponto p da superfície. Portanto $-dN(p) = 0$, ou melhor, a imagem de $-dN_p$ será um espaço vetorial de dimensão nula.

produto interno em relação a X_u

$$\begin{aligned} -\langle X_u, N_u \rangle &= a_{11}\langle X_u, X_u \rangle + a_{12}\langle X_u, X_v \rangle \\ &= \langle X_{uu}, N \rangle = e_0 = a_{11}E_0 + a_{12}F_0, \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} -\langle X_u, N_v \rangle &= a_{21}\langle X_u, X_u \rangle + a_{22}\langle X_u, X_v \rangle \\ &= \langle X_{uv}, N \rangle = f_0 = a_{21}E_0 + a_{22}F_0, \end{aligned} \quad (3.17)$$

representando como produtos de matrizes, tem-se:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_0 \\ F_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_0 \\ f_0 \end{bmatrix}. \quad (3.18)$$

Utilizando o mesmo procedimento, mas agora com o produto interno em relação a X_v , tem-se:

$$\begin{aligned} -\langle X_v, N_u \rangle &= a_{11}\langle X_v, X_u \rangle + a_{12}\langle X_v, X_v \rangle \\ &= \langle X_{uv}, N \rangle = f_0 = a_{11}F_0 + a_{12}G_0, \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} -\langle X_v, N_v \rangle &= a_{21}\langle X_v, X_u \rangle + a_{22}\langle X_v, X_v \rangle \\ &= \langle X_{vv}, N \rangle = g_0 = a_{21}F_0 + a_{22}G_0, \end{aligned} \quad (3.20)$$

novamente, atribuindo uma representação matricial, tem-se:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_0 \\ G_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 \\ g_0 \end{bmatrix}. \quad (3.21)$$

Resta unir as duas representações matriciais em 3.18 e em 3.21:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_0 & F_0 \\ F_0 & G_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_0 & f_0 \\ f_0 & g_0 \end{bmatrix}. \quad (3.22)$$

Seja $[I] = \begin{bmatrix} E_0 & F_0 \\ F_0 & G_0 \end{bmatrix}$ e $[II] = \begin{bmatrix} e_0 & f_0 \\ f_0 & g_0 \end{bmatrix}$, como o determinante de um produto é o produto dos determinantes, então:

$$\begin{aligned} \det[a_{ij}] \det[I] &= \det[II] \\ \det[a_{ij}] &= \frac{\det[II]}{\det[I]} \\ \det[a_{ij}] &= \det[-dN_p] = K(p) = \frac{e_0g_0 - f_0^2}{E_0G_0 - F_0^2}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Devido à **Proposição 2.3.1** o termo $E_0G_0 - F_0^2$ nunca será nulo, eliminando a possibilidade de indeterminação no denominador da expressão obtida. Em razão disso, o Teorema está provado.

O **Teorema 3.2.1** demonstrado é de grande valor para o cálculo da Curvatura de Gauss, já que a fórmula que utiliza o produto das Curvaturas Principais é pouco prática, devido ao trabalho requerido em encontrar as direções principais para cada caso.

Ao fazer uso somente dos coeficientes das *Formas Fundamentais* para esse cálculo, apresenta-se uma forma mais imediata de encontrar a Curvatura de Gauss em um ponto, em razão de que esses coeficientes dependem da superfície regular, suas derivadas parciais de primeira e segunda ordens e a Aplicação Normal de Gauss, elementos esses que, como já mostrado anteriormente neste capítulo, dispõem de fórmulas práticas para serem obtidos.

Vale ressaltar que a Curvatura de Gauss tem papel essencial no capítulo subsequente, tendo mais destaque que a Curvatura Média para as justificativas posteriores. Porém, no que diz respeito à Curvatura Média em um ponto é também exequível encontrar uma fórmula em função dos coeficientes E_0, F_0, G_0, e_0, f_0 e g_0 , bastando multiplicar em ambos os membros da igualdade em 3.22 a inversa da matriz $[II]$ à direita e encontrar $[a_{ij}]$ pelo método da Eliminação de Gauss.

Como o traço de uma matriz é igual a soma de seus valores próprios, então a Curvatura Média (metade do traço da matriz $[-dN_p]$) será metade do traço da matriz $[a_{ij}]$. Segue diretamente desse processo que:

$$H(p) = \frac{1}{2} \frac{e_0 G_0 - 2f_0 F_0 + E_0 g_0}{E_0 G_0 - F_0^2}. \quad (3.24)$$

Exemplo 3.2.2.

Seja $X(\varphi, \theta) = (R \operatorname{sen}(\theta) \cos(\varphi), R \operatorname{sen}(\varphi) \operatorname{sen}(\theta), R \cos(\theta))$ uma esfera de raio R tal como discutido no **Exemplo 2.1**, com $R = 1$. Apresenta-se agora o cálculo de $K(p)$, $\forall p = (\varphi, \theta)$ utilizando a fórmula demonstrada no **Teorema 3.2.1**.

Conforme as equações em 2.6:

$$\begin{aligned} E(p) &= \langle X_\varphi, X_\varphi \rangle = R^2 \operatorname{sen}^2(\theta), \\ G(p) &= \langle X_\theta, X_\theta \rangle = R^2. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Por 2.8, $\|X_\varphi \wedge X_\theta\|^2 = R^4 \operatorname{sen}^2(\theta)$ e por 2.18 $R^4 \operatorname{sen}^2(\theta) = E(p)G(p) - F(p)^2$, tem-se que, $F(p) = 0$.

Uma vez que a Aplicação Normal de Gauss associa vetores de X a uma esfera de raio unitário, é de se esperar que, para X sendo uma esfera a aplicação N percorra

toda a esfera, onde $N(\varphi, \theta) = (\text{sen}(\theta)\cos(\varphi), \text{sen}(\varphi)\text{sen}(\theta), \cos(\theta))$. Por isso:

$$\begin{aligned} e(p) &= \langle X_{\varphi\varphi}, N \rangle = -R\text{sen}^2(\theta), \\ f(p) &= \langle X_{\varphi\theta}, N \rangle = 0, \\ g(p) &= \langle X_{\theta\theta}, N \rangle = -R, \end{aligned} \quad (3.26)$$

então pelo **Teorema 3.2.1**:

$$K(p) = \frac{e(p)g(p) - f(p)^2}{E(p)G(p) - F(p)^2} = \frac{R^2\text{sen}^2(\theta)}{R^4\text{sen}^2(\theta)} = \frac{1}{R^2}. \quad (3.27)$$

Esse resultado comprova que a Curvatura de Gauss de uma esfera é constante e sempre positiva. Tomando a definição de curvatura como sendo um valor que indica o quanto uma superfície se “dobra” em relação a um plano tangente fixo em um ponto, percebe-se que a esfera se “dobra” uniformemente e com a mesma intensidade para todos os seus pontos ³.

Exemplo 3.2.3.

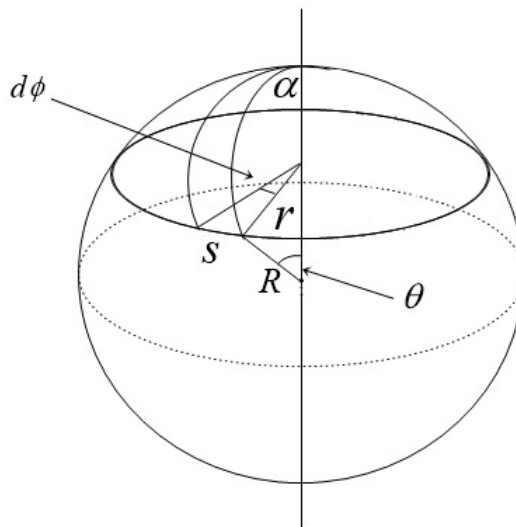


Figura 9 – Desvio geodésico na esfera

Uma forma de perceber a Curvatura de Gauss de uma superfície na física é estudar na esfera como dois meridianos afastam-se ou aproximam-se um do outro. Ohanian (1976) esclarece que para a Relatividade Geral essa tendência de objetos recuarem ou se aproximarem enquanto se movem sob a ação de um campo gravitacional é conhecida como *Desvio Geodésico*.

³ Vale considerar que para cada curva sobre a esfera o vetor da segunda derivada apontará sempre para o centro.

Considera-se neste exemplo a superfície terrestre como uma esfera de raio R e $\alpha(t)$ uma curva parametrizada por comprimento de arco sobre essa esfera que descreve um dos meridianos. Tendo em vista isso, a distância do traço de α a outro meridiano é S e u é o comprimento dos dois arcos que esses meridianos determinam. Observando a Figura 9 nota-se que o comprimento S pode ser escrito como:

$$S = r d\phi. \quad (3.28)$$

Observando o triângulo retângulo de hipotenusa R e vértice no centro da esfera, tem-se:

$$S = r d\phi = R \operatorname{sen}(\theta) d\phi = R \operatorname{sen}\left(\frac{u}{R}\right) d\phi. \quad (3.29)$$

Ainda em Ohanian (1976), pode-se entender que o *Desvio Geodésico* descreve uma aceleração de um objeto que se locomove do meridiano α a outro em relação ao comprimento u . Desta maneira, derivando em relação a u duas vezes:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 S}{du^2} &= -\frac{d\phi}{R} \operatorname{sen}\left(\frac{u}{R}\right), \\ -\frac{R}{R^2} \operatorname{sen}\left(\frac{u}{R}\right) d\phi &= -\frac{S}{R^2}, \end{aligned} \quad (3.30)$$

e por 3.23 é possível escrever:

$$\frac{d^2 S}{du^2} = -K.S. \quad (3.31)$$

A equação 3.31 é conhecida como **Equação de Jacobi**, sendo válida para qualquer superfície regular, dado que basta variar o valor de K . Dessa maneira, nota-se que a aceleração obtida é diretamente proporcional à Curvatura de Gauss da superfície. Ainda,

A partir do seu Princípio de Equivalência, Einstein concluiu que a gravidade não é uma força, como Newton acreditava, mas sim a curvatura do espaço-tempo. A fonte desta curvatura é a matéria. Tal como um ímã cria um campo magnético no espaço circundante, um objeto material cria campos gravitacionais que distorcem ou curvam o espaço-tempo ao redor (FABER, 1983, p. 175; tradução nossa)

Portanto, é possível a partir deste princípio criar uma analogia entre a esfera descrita como a superfície terrestre e um campo gravitacional que age sob um objeto que se movimenta de um meridiano a outro, uma vez que essa aceleração está relacionada a um efeito secundário da ação da gravidade. Faber (1983) reforça também que muito embora seja razoável visualizar a gravidade como curvatura, deve-se ainda haver ponderação nesta analogia, pois o espaço-tempo é quadridimensional e não bidimensional como o traço de uma superfície.

4 Classificação de Pontos Críticos

O estudo de pontos críticos de funções de duas variáveis aparece em diversos materiais do *CVV* e a relevância da classificação desses pontos é grande na resolução de problemas práticos envolvendo otimizações: minimizar custo, maximizar rendimento, etc. Além disso, conforme Kaplan (1972), a determinação de pontos críticos e suas classificações em máximos, mínimos ou sela, são fases importantes para a construção do gráfico de uma função e, sobretudo, do entendimento das propriedades locais desses objetos.

Ainda em Kaplan (1972), é possível destacar que o autor parte da noção de ponto crítico em funções de uma variável real e o estende para funções de duas variáveis. Nessa perspectiva, analisar um ponto crítico em um ponto (x_0, y_0) equivale a analisar as funções $f(x, y_0)$ e $f(x_0, y)$ que dependem somente de uma variável cada. Em geral, estudar um ponto crítico de uma função de duas variáveis demanda conhecimento das curvas de nível da função.

Na essência dessa discussão, o conceito de Curvatura de Gauss da geometria diferencial traz respostas consistentes para essas classificações, em razão de que pode-se entender o gráfico de uma função diferenciável de uma variável como o traço de uma curva regular e, da mesma maneira, entende-se o gráfico de uma função diferenciável de duas variáveis como o traço de uma superfície regular ¹.

Neste capítulo será retomada uma gama de resultados essenciais do estudo de máximos e mínimos de funções de uma ou duas variáveis com o objetivo de que a partir de uma problematização das abordagens mais frequentes relacionadas ao conteúdo de identificação de pontos críticos, possa-se discutir uma alternativa diferenciada de visualizar esse resultado: será mostrado que na maioria dos casos a Curvatura de Gauss é um invariante geométrico que coleta justamente as informações necessárias para investigar a natureza de um ponto crítico.

4.1 Máximos e Mínimos

O máximo ou mínimo de uma função de duas variáveis pode ocorrer na fronteira ou no interior de seu domínio. Os resultados posteriores discutirão o caso em que os máximos e mínimos encontram-se no interior de uma região, uma vez que as técnicas discutidas são válidas para funções diferenciáveis cujos domínios são subconjuntos abertos do \mathbb{R}^2 .

¹ Ver Proposição 2.1.2

Definição 4.1.1. Seja $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de duas variáveis. Diz-se que:

1. Um ponto (x_0, y_0) é um ponto de mínimo local de f se existe uma bola aberta B^2 com centro (x_0, y_0) , tal que $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ para todo $(x, y) \in B \cap A$;
2. Um ponto (x_0, y_0) é um ponto de máximo local de f se existe uma bola aberta B com centro (x_0, y_0) , tal que $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ para todo $(x, y) \in B \cap A$.

Em ambos os casos (x_0, y_0) é dito também um extremante ou ainda um extremo relativo ou local de f .

Exemplo 4.1.1.

A função $f(x, y) = -(x^2 + y^2)\text{sen}(x^2 + y^2)$ admite um máximo local na origem.

De fato: $f(0, 0) = 0$ e, por outro lado, tem-se $x^2 + y^2 \geq 0 \Rightarrow -x^2 - y^2 \leq 0$. Tomando como restrição de domínio o círculo de centro fixado na origem e raio $r = 1$ que é denominado como $\lambda \subset D_f$, tem-se $-1 < -x^2 - y^2 \leq 0$, então:

$$\text{sen}(x^2 + y^2) \geq 0 \Rightarrow -(x^2 + y^2)\text{sen}(x^2 + y^2) = f(x, y) \leq 0 = f(0, 0). \quad (4.1)$$

Em linhas gerais, para todo par ordenado $(x, y) \in \lambda$, $f(x, y) \leq f(0, 0)$, como pode ser observado na Figura 10 onde o gráfico de f é descrito dentro da região determinada por um quadrado de lado 2 e centro fixado na origem (repare que a região λ está contida neste quadrado).

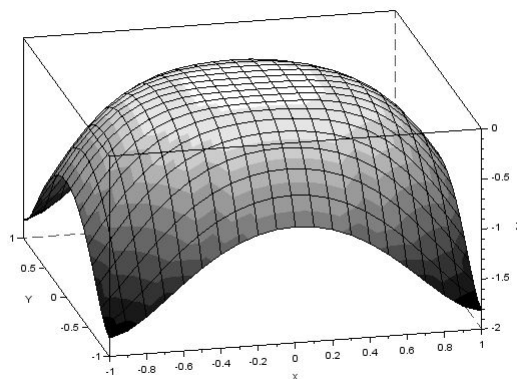


Figura 10 – Máximo Local

² Em Domingues (1982, p. 50), uma bola aberta do \mathbb{R}^2 de centro p e raio r pode ser entendida como um subconjunto de pontos do \mathbb{R}^2 cuja distância euclidiana a p é estritamente menor que r . Ainda, adiciona-se que o papel desse conceito é fundamental, ou melhor, “esse papel é o mesmo dos intervalos do tipo $]p - \varepsilon, p + \varepsilon[$ no estudo da análise na reta. Em suma, elas têm uma atuação equivalente à dos ‘ ε ’ e dos ‘ δ ’ do cálculo ou da análise real.” (DOMINGUES, 1982, p. 50).

Todavia, ampliando o domínio de f para, por exemplo, a região determinada por um quadrado de lado 4 e centro fixado na origem, percebe-se que $f(0, 0)$ não é mais valor máximo, como indica a Figura 11.

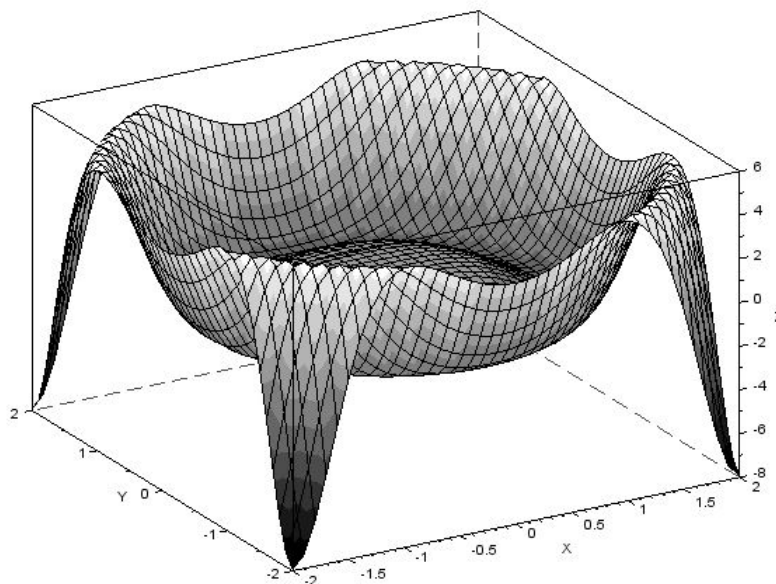


Figura 11 – $f(0, 0)$ não é mais valor máximo

Definição 4.1.2. Seja $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de duas variáveis. Diz-se que:

1. Um ponto (x_0, y_0) é um ponto de mínimo absoluto ou global de f se para todo ponto $(x, y) \in A$, $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$;
2. Um ponto (x_0, y_0) é um ponto de máximo absoluto ou global de f se para todo ponto $(x, y) \in A$, $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$.

Exemplo 4.1.2.

A função $f(x, y) = \tanh(x^2 + y^2)$ tem um ponto de mínimo absoluto em $f(0, 0)$, como é possível observar na Figura 12.

Por definição a tangente hiperbólica em um número u é dada como:

$$\tanh(u) = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}}.$$

Dessa forma, tomando $u = x^2 + y^2$, tem-se:

$$\tanh(x^2 + y^2) = \frac{e^{x^2+y^2} - e^{-x^2-y^2}}{e^{x^2+y^2} + e^{-x^2-y^2}}. \quad (4.2)$$

Ainda, $x^2 + y^2 \geq 0$ então $e^{x^2+y^2} \geq 1$ e $e^{-x^2-y^2} \leq 1$. Desse modo, $e^{x^2+y^2} - e^{-x^2-y^2} \geq 0$ e como $e^{x^2+y^2} + e^{-x^2-y^2} > 0$, obtém-se:

$$\frac{e^{x^2+y^2} - e^{-x^2-y^2}}{e^{x^2+y^2} + e^{-x^2-y^2}} = \tanh(x^2 + y^2) \geq 0 = f(0, 0). \quad (4.3)$$

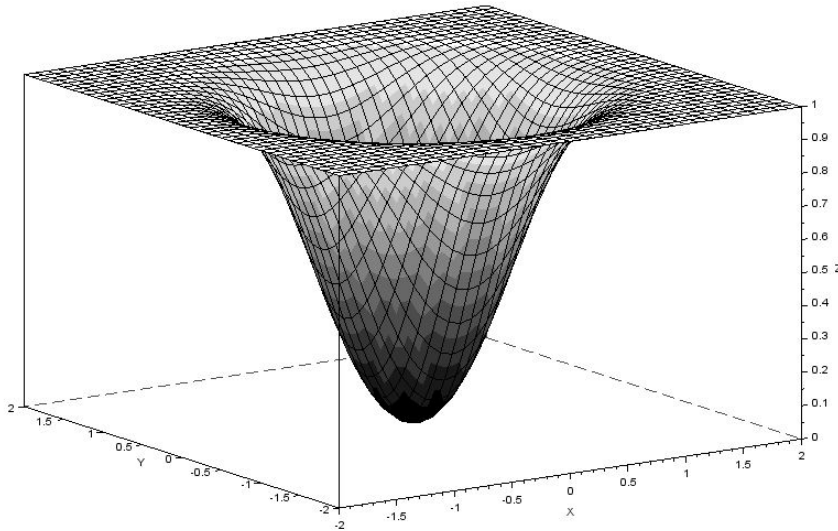


Figura 12 – Mínimo Absoluto

No entanto, há funções de duas variáveis que não possuem pontos de máximo ou de mínimo, por exemplo, basta tomar uma função de duas variáveis cujo gráfico descreve um plano não paralelo ao plano $z = 0$.

Diante das demasiadas situações em que se pode encontrar pontos de máximo ou mínimo surge então a necessidade de conhecer as condições necessárias para que eles existam.

Teorema 4.1.1. *Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ (com n natural) um conjunto aberto e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável que tem máximo (ou mínimo) local em um ponto $p \in A$. Se as derivadas parciais de primeira ordem de f existem então todas elas são iguais a zero em p . Em outras palavras, o gradiente $\nabla f(p) = (0, 0, \dots, 0)$.*

Demonstração:

Demonstra-se aqui o caso em que p é um ponto onde f assume máximo local; para o caso de mínimo local a demonstração é análoga, basta assumir uma função $g = -f$. Como A é um subconjunto aberto do \mathbb{R}^n e p é um ponto de máximo local então, por definição, existe uma bola aberta B do \mathbb{R}^n centrada em p de raio $\delta > 0$ tal que para todo $a \in B \cap A$ temos $f(a) \leq f(p)$.

Assim, sendo e_i um vetor de \mathbb{R}^n que possui a i -ésima coordenada igual a 1 e as restantes iguais a zero (por exemplo, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$), pode-se então definir uma função $\psi :] - \delta, \delta[\rightarrow \mathbb{R}$ de uma variável tal que $\psi(t) = f(p + t.e_i)$. Repare que ψ é uma função diferenciável (pois f é diferenciável) que associa valores de um segmento de reta à bola aberta B . Além disso, $\psi(t) = f(p + t.e_i) \leq f(p) = \psi(0)$, isto é, o fato de $f(p)$ ser máximo local de f implicará que $\psi(0)$ será máximo local de ψ . Tomando a derivada de ψ quando $t = 0$, tem-se:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\psi(t) - \psi(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p + t.e_i) - f(p)}{t} = \frac{\partial f(p)}{\partial x_i}. \quad (4.4)$$

Deve-se provar agora que: se para um ponto t_0 (neste caso $t_0 = 0$) um ponto de máximo local de uma função de uma variável ψ então $\psi'(t_0) = 0$.

Como t_0 é ponto de máximo local $\psi(t) \leq \psi(t_0) \Leftrightarrow \psi(t) - \psi(t_0) \leq 0$ então para valores de t suficientemente próximos de t_0 , restam dois casos: quando $t < t_0 \Leftrightarrow t - t_0 < 0$, obtém-se a desigualdade:

$$\frac{\psi(t) - \psi(t_0)}{t - t_0} \geq 0, \quad (4.5)$$

dessa forma,

$$\lim_{t \rightarrow t_0^-} \frac{\psi(t) - \psi(t_0)}{t - t_0} \geq 0. \quad (4.6)$$

Quando $t > t_0 \Leftrightarrow t - t_0 > 0$, obtém-se a outra desigualdade:

$$\frac{\psi(t) - \psi(t_0)}{t - t_0} \leq 0, \quad (4.7)$$

dessa forma,

$$\lim_{t \rightarrow t_0^+} \frac{\psi(t) - \psi(t_0)}{t - t_0} \leq 0. \quad (4.8)$$

Sendo ψ diferenciável em uma vizinhança de t , então o limite em 4.4 existe, ou seja, os limites laterais são iguais:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{t \rightarrow t_0^+} \frac{\psi(t) - \psi(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0^-} \frac{\psi(t) - \psi(t_0)}{t - t_0} \\ &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\psi(t) - \psi(t_0)}{t - t_0}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

e das desigualdades 4.6 e 4.8, $L \geq 0$ e $L \leq 0$ então $L = 0$, isto é, $\psi'(t_0) = 0$.

Aplicando esse resultado para a situação descrita em que $t_0 = 0$ o ponto de máximo local, então

$$\psi'(0) = \frac{\partial f(p)}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.10)$$

Portanto, o teorema está provado, pois $\nabla f(p) = (0, 0, \dots, 0)$.

Observe também que o teorema diz que se, em uma função de duas variáveis, (x_0, y_0) é um extremo local então o plano tangente à superfície cujo traço coincide com o gráfico da função é paralelo ao plano xOy (plano horizontal).

Os pontos do domínio de f para os quais as derivadas parciais da função se anulam ou não existem são chamados de *Pontos Críticos* da função. Vale ressaltar que o **Teorema 4.1.1** é uma condição necessária, mas não suficiente para determinar pontos de máximo e mínimo, isto é, foi provado que se p é ponto de máximo ou mínimo então ele é ponto crítico, mas a recíproca não necessariamente é verdadeira.

Definição 4.1.3. *Ao se tratar de funções diferenciáveis de duas variáveis, um ponto crítico que não é máximo local nem mínimo local é chamado ponto de sela.*

Exemplo 4.1.3.

Seja a função $f(x, y) = x^2 - y^2$. O gradiente de f se anula em $(0, 0)$. Porém, por mais que $(0, 0)$ seja ponto crítico, para todo $\delta > 0$ tem-se $f(0, \delta) < f(0, 0) < f(\delta, 0)$. Sendo assim, $(0, 0)$ é um ponto de sela.

Já para o caso em que há máximos e mínimos e esses se encontram na fronteira do domínio de uma função será enunciado a seguir (sem demonstrar) um teorema que garante em quais condições uma função atinge seu máximo e mínimo.

Teorema 4.1.2. *Se f é uma função contínua em um conjunto fechado e limitado $D \subseteq \mathbb{R}^n$, onde n é natural, então f assume um valor máximo absoluto e um valor mínimo absoluto em pontos de D .*

O teorema acima tem grande relevância, posto que um ponto é crítico ou quando as derivadas se anulam nele ou quando não há derivadas. Essa segunda situação pode parecer escassa de ferramentas para a investigação, visto que se recorre quase sempre à operação de derivação para realizar as análises.

Contudo, existe um método para determinar os valores extremos de uma função f em um conjunto fechado e limitado D (diz-se conjunto compacto).

Este método consiste em primeiramente determinar os valores de f nos pontos críticos de f no interior de D . Após isso, faz-se necessário encontrar também os valores extremos de f na fronteira de D .

Por fim, resta comparar os valores de f em cada uma das situações: o maior dos valores será o máximo absoluto, o menor será o mínimo absoluto e a existência deles está garantida pelo teorema acima.

4.2 Concavidades e Curvaturas

Nos Capítulos 2 e 3 foi aprofundado o conceito de curvatura para superfícies regulares a partir do que se compreende como curvatura para uma curva regular plana. Da mesma maneira, partindo do objetivo de conectar elementos do *CVV* com elementos da geometria diferencial, é importante à discussão a respeito das condições necessárias e suficientes para determinação da natureza de um ponto crítico de uma função de duas variáveis reais e que estejam claras quais são as ferramentas imprescindíveis para realizar as classificações quando a função tratada é de uma variável real.

Ademais, é compreensível que, dada uma função f diferenciável em um intervalo aberto $I \subset D_f$ e uma curva diferenciável $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\alpha(x) = (x, f(x))$; α será uma curva regular, já que $\|\alpha'(x)\| = \sqrt{1 + f'(x)^2} \neq 0$ para todo $x \in I$. Então pode-se entender o traço de α como o gráfico da função f .

Discute-se brevemente a seguir resultados conhecidos do *CUV* sob um aspecto voltado à geometria diferencial. Essa gama de resultados depende de um conceito conhecido como **concavidade de uma função** em um ponto $p \in I$.

Definição 4.2.1. Diz-se que f tem a concavidade:

1. Para cima no intervalo I se $f(x) > f'(p)(x - p) + f(p)$.
2. Para baixo no intervalo I se $f(x) < f'(p)(x - p) + f(p)$.

Denota-se $f'(p)(x - p) + f(p) = T(x)$ tal que T descreve a reta tangente a f em p . No primeiro caso f tem concavidade para cima no intervalo I se, e somente se, para todo ponto interior a I diferente de p a imagem de f nesses pontos for sempre maior que a imagem de T .

Enquanto para o segundo caso, a imagem de f nos pontos de I diferentes de p deve ser menor que a imagem de T , estando o gráfico de f abaixo da reta descrita por T , como mostra a Figura 13 onde apresenta-se duas funções com concavidades para cima e para baixo.

Quando existirem números reais a e b tais que $p \in]a, b[= I \subset D_f$ e f apresentar concavidades de nomes contrários em $]a, p[$ e $]p, b[$ diz-se que p é um *ponto de inflexão* de f .

Da maneira como foi definida curvatura é de se esperar que haja uma relação entre essa ideia e o conceito de concavidade.

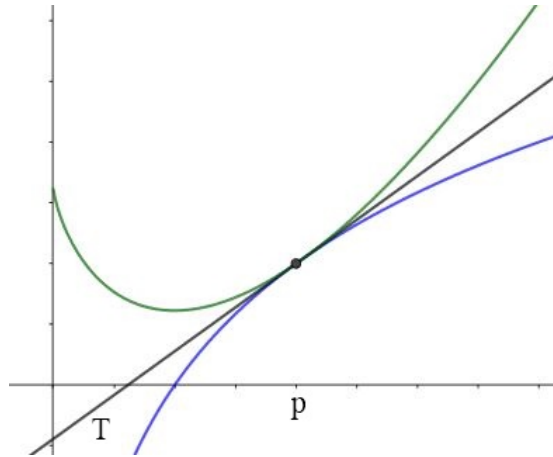


Figura 13 – Concavidades

Teorema 4.2.1. *Sejam f uma função que admite derivada até a 2ª ordem no intervalo aberto I , a curva regular $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\alpha(x) = (x, f(x))$ cujo traço descreve o gráfico de f e k a curvatura da curva α . Assim,*

1. *Se $k(x) > 0$ para $x \in I$, então f terá concavidade para cima em I ; e*
2. *Se $k(x) < 0$ para $x \in I$, então f terá concavidade para baixo em I .*

Demonstração:

A curvatura k em um ponto $x \in I$ pode ser obtida pela equação 2.33, porém o vetor normal \vec{n} precisa ser pré-determinado. Posto que \vec{n} é unitário e ortogonal ao vetor tangente $\alpha'(x)$ então considere \vec{n} como o versor de um vetor $\vec{N} = (x_n, y_n)$ onde:

$$\begin{aligned} \langle \vec{N}, \alpha'(x) \rangle &= 0, \\ \langle (x_n, y_n), (1, f'(x)) \rangle &= 0 \\ \Rightarrow x_n &= -y_n f'(x). \end{aligned} \tag{4.11}$$

É identificado que $\vec{N} = (y_n f'(x), y_n)$ e como $y_n \neq 0$ já que α é regular, então:

$$\vec{n} = \frac{\vec{N}}{\|\vec{N}\|} = \left(\frac{-f'(x)}{\sqrt{1 + f'(x)^2}}, \frac{1}{\sqrt{1 + f'(x)^2}} \right), \tag{4.12}$$

por causa disso e como $\alpha''(x) = (0, f''(x))$, tem-se:

$$k(x) = \frac{\langle (0, f''(x)), (-f'(x), 1) \rangle}{\sqrt{(1 + f'(x)^2)^3}} = \frac{f''(x)}{\sqrt{(1 + f'(x)^2)^3}}. \tag{4.13}$$

O denominador da equação 4.13 será sempre positivo para todo $x \in I$, fazendo o sinal da curvatura de α ser determinada pela segunda derivada da função f em x . Chega-se então a uma reformulação do teorema, isto é, se a segunda derivada de f

em x é positiva então a concavidade da função será para cima e, da mesma maneira, se for negativa então a concavidade da função será para baixo.

Logo, para o primeiro caso deve-se mostrar que ao tomar um p qualquer em I então para todo x em I , $x \neq p$ obtém-se $f(x) > T(x)$, como indica a Figura 14.

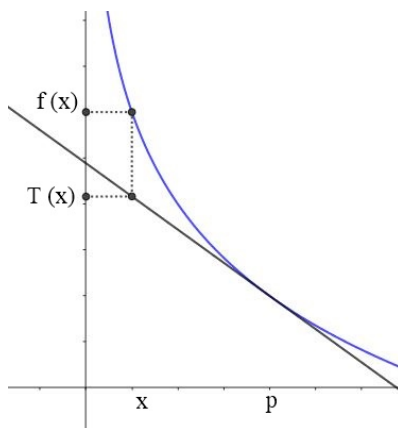


Figura 14 – Diferença de $f(x)$ e $T(x)$

A demonstração para a concavidade para baixo é análoga, basta mostrar que $f(x) < T(x)$. Define-se uma função $\varphi(x) = f(x) - T(x)$ e será mostrado que ela será estritamente positiva para todo x em I diferente de p . Reforça-se que φ também é diferenciável em I , porque sua lei de formação é a diferença entre valores das funções diferenciáveis f e T , então derivando φ temos $\varphi'(x) = f'(x) - T'(x)$.

Repare que $T'(x) = f'(p)$, deste modo $\varphi = f'(x) - f'(p)$ para todo x em I . Por definição, a segunda derivada é a derivada da função derivada, denota-se por $f''(x) = (f'(x))'$ e, por hipótese, $f''(x) > 0$; sendo assim o *Teorema do Intervalo de Crescimento ou Decrescimento* do cálculo diferencial garante que: se a derivada de uma função for positiva no interior de I então a função é estritamente crescente em I (analogamente válido para estritamente decrescente para derivada negativa). Com isso, está provado que f' é estritamente crescente em I e conseqüentemente $\varphi'(x) = f'(x) - f'(p)$ é positiva para $x > p$ e negativa para $x < p$.

Com essa afirmação, pode-se aplicar novamente o *Teorema do Intervalo de Crescimento ou Decrescimento*, mas agora em φ' e nota-se que φ será estritamente decrescente para valores de $x < p$ e estritamente crescente para valores de $x > p$, ou melhor, para $x < p$ temos $\varphi(x) > \varphi(p) = 0$ e para $x > p$ tem-se $\varphi(x) > \varphi(p) = 0$. De todo modo: $\varphi(x) > 0$, o que prova o teorema.

Está garantido assim que o sinal da curvatura da curva α que parametriza o gráfico de f revela justamente como é a concavidade de f e ainda que, investigar o sinal da segunda derivada de uma função equivale a investigar para qual sentido a curva que parametriza seu gráfico deixa de ser uma reta em uma vizinhança do ponto

analisado. Usa-se esse resultado para a próxima demonstração que propicia uma maneira de classificar um ponto crítico de uma função de uma variável sob determinadas condições.

Teorema 4.2.2 (Teste da Segunda Derivada). *Sejam f uma função que admite derivada de 2ª ordem contínua no intervalo aberto I e $p \in I$.*

1. *Se p é um ponto crítico de f e $f''(p) > 0$ então p é ponto de mínimo local.*
2. *Se p é um ponto crítico de f e $f''(p) < 0$ então p é ponto de máximo local.*

Demonstração:

Para o primeiro caso em que f'' é positiva em p é relevante salientar que como p é ponto crítico de f então a reta tangente a f em p é paralela ao eixo das abscissas (coeficiente angular nulo), denota-se $T(x) = f(p)$. Devido ao **Teorema 4.2.1** f tem concavidade para cima, ou seja, pela definição de concavidade no intervalo aberto I obtém-se $f(x) > T(x) = f(p)$ para todo x de I , exceto p . Logo, isso corresponde justamente à definição de ponto de mínimo local.

Similar a essa constatação, no caso em que f'' é negativa em p é perceptível que f tem concavidade para baixo e, conseqüentemente, $f(x) < T(x) = f(p)$ para todo x de I , exceto p . Por isso, p é ponto de máximo local, o que prova o teorema.

Em suma, esse resultado oferece uma condição suficiente sob determinadas condições para classificar um ponto crítico de uma função de uma variável em máximo local ou mínimo local fazendo uso da ideia de curvatura para uma curva. Considerando isso, é compreensível que as condições suficientes para a classificação de um ponto crítico de uma função de duas variáveis devam envolver a ideia de curvatura para uma superfície.

4.3 Da demonstração e entendimento do Teste do Hessiano.

Há um teste conhecido do *CVV* que fornece uma condição suficiente para se decidir se um ponto crítico é máximo local, mínimo local ou ponto de sela. O teste é denominado *Teste do Hessiano* e será enunciado para o caso de funções de duas variáveis. No entanto, o teste pode ser generalizado para funções de mais de duas variáveis.

Definição 4.3.1. *Seja $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 definida em um conjunto*

aberto $A \subset \mathbb{R}^n$. A matriz hessiana de f em um ponto $p \in A$ é definida como:

$$Hess(p) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(p)}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(p)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(p)}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f(p)}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}. \quad (4.14)$$

Denota-se $\det(Hess(p)) = He(p)$ que é denominado de Hessiano de f em p .

Teorema 4.3.1 (Teste do Hessiano). *Seja $f : U \subset \mathbb{R}^2$ uma função de duas variáveis de classe C^2 definida em um conjunto aberto U . Se p é um ponto crítico de f então*

1. *se $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p) > 0$ e $He(p) > 0$ então p é um ponto de mínimo local de f ;*
2. *se $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p) < 0$ e $He(p) > 0$ então p é um ponto de máximo local de f ;*
3. *se $He(p) < 0$ então p é um ponto de sela de f ;*
4. *se $He(p) = 0$ não se pode afirmar nada sobre a natureza do ponto crítico p .*

No que diz respeito ao como o **Teste do Hessiano** aparece na bibliografia disponível, Alves (2011) em sua tese analisa os trabalhos de Stewart (2004), Guidorizzi (1986) e Leithold (1999), visando propor uma atividade baseada nas conclusões feitas. Ainda, ele assegura que:

O conteúdo relacionado à identificação de pontos extremantes apresenta características geométricas pouco exploradas pelos livros didáticos. Em geral no seu estudo, dada à complexidade intrínseca da demonstração propriamente dita do teorema chamado de teste da hessiana ou teste da 2ª derivada, a atividade dos estudantes se restringe à verificação das condições descritas nos itens (...) ³ (ALVES, 2011, p. 209).

Deste modo, é verificado que, convencionalmente, o uso do *Hessiano* para a classificação de pontos críticos nesses materiais não recorre a uma justificativa baseada nos conceitos mais básicos do *CUV* e *CVV*. Ademais, nesses materiais são feitas referências a outros textos mais elaborados. Como consequência, encara-se a demonstração desse resultado somente como um processo de validação e de sistematização, excluindo seu sentido de explicação.

Dessa forma, pode-se afirmar que:

Embora por meio de verificações quase-empíricas (por exemplo, construções e medições rigorosas, substituições numéricas, e outras) seja possível atingir de fato um alto nível de confiança na validade de uma conjectura, estes processos não fornecem em geral uma explicação satisfatória da razão pela qual pode ser verdadeira. (VILLIERS, 2001, p. 33).

³ Refere-se aqui aos itens da tese do *Teste do Hessiano*

Porém, essa caracterização não é unânime: de acordo com Alves (2011), a abordagem de Kaplan (1972) em relação ao conteúdo difere da dos demais autores, porque em sua demonstração e exposição o autor faz uso de uma linguagem que permite uma discussão mais intuitiva e não estritamente formal do teorema. Mais precisamente, Kaplan (1972) discute a natureza desses pontos críticos a partir da análise da concavidade de algumas seções planas da superfície descrita pela função de duas variáveis.

Tendo em vista essas considerações e partindo dos conceitos da geometria diferencial discutidos nos capítulos anteriores, mostra-se a seguir uma demonstração do *Teste do Hessiano* que busca possibilitar uma visualização menos estritamente analítica desse resultado do *CVV*, garantindo também um entendimento sobre as propriedades locais de algumas superfícies imersas no espaço euclidiano \mathbb{R}^3 .

4.4 Um efeito geométrico da Curvatura de Gauss

Ao calcular a *Curvatura de Gauss* e a *Curvatura Média* em um ponto de uma superfície regular dá-se um nome específico para esses pontos dependendo dos valores de K e H . Esta classificação é motivada pelo efeito geométrico que cada um desses valores representa na superfície analisada e, de acordo com Picado (2006), para a maioria dos casos é possível identificar qual a classificação de um ponto apenas olhando para o gráfico da superfície.⁴

Sejam $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície regular tal que U é um conjunto aberto e um ponto $p \in U$, diz-se que p é:

- **elítico**, se $K(p) > 0$.
- **hiperbólico**, se $K(p) < 0$.
- **parabólico**, se $K(p) = 0$ e $H(p) \neq 0$.
- **planar**, se $K(p) = 0$ e $H(p) = 0$.

Em um ponto elítico, as curvaturas principais k_1 e k_2 terão o mesmo sinal. Ainda, entendendo as curvaturas principais como curvaturas de curvas sobre a superfície e conforme o **Teorema 4.2.1**, é natural agora conjecturar que, as concavidades das curvas sobre a superfície estejam voltadas para o mesmo semi-espaço determinado pelo $T_p X$. Porém, em um ponto hiperbólico, as curvaturas principais k_1 e k_2 têm sinais opostos, o que implica que existem curvas sobre a superfície cujas concavidades estão voltadas para os dois semi-espaços determinados por $T_p X$. Os resultados destas conjecturas são enunciados pelo seguinte teorema.

⁴ Ver Picado (2006, p. 127)

Teorema 4.4.1. *Sejam $X(u, v)$, $(u, v) \in U \subset \mathbb{R}^2$, uma superfície regular e $p = (u_0, v_0)$.*

1. *Se p é um ponto elítico, então existe uma vizinhança W de p , $W \subset U$, tal que $X(W)$ está contida em um dos semi-espacos fechados determinados por $T_p X$.*
2. *Se p é um ponto hiperbólico, então toda vizinhança W de p , $W \subset U$, existem p_1 e p_2 , tais que $X(p_1)$ e $X(p_2)$ pertencem a semi-espacos distintos determinados por $T_p X$.*

Demonstração:

Partindo da hipótese de que p é um ponto elítico é necessário encontrar uma forma de localizar pontos $X(u, v)$ da superfície X em relação ao plano tangente a X em p .

Para isso, tanto Carmo (2004) quanto Tenenblat (2008) definem uma função f como:

$$f(u, v) = \langle X(u, v) - X(p), N(p) \rangle = \|X(u, v) - X(p)\| \cdot \|N(p)\| \cdot \cos(\theta), \quad (4.15)$$

tal que $N(p)$ é a Aplicação Normal de Gauss calculada em p e θ o ângulo formado entre os dois vetores. De acordo com a Figura 15 é concebível que o sinal de f determinará qual o semi-espaço determinado por $T_p X$ o ponto $X(u, v)$ estará e isso pode ser observado pela restrição da medida que o ângulo θ pode assumir. Além disso, sem perda de generalidade é possível tomar $p = (0, 0) \in U$.

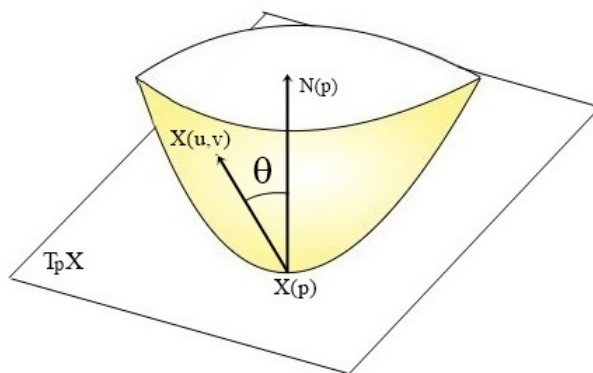


Figura 15 – Ponto Elítico

Em outras palavras, o sinal de f é determinado por θ : se $0 < |\theta| < \frac{\pi}{2}$ geometricamente nota-se que um ponto $X(u, v)$ genérico estará no mesmo semi-espaço que $N(p)$. Por isso, $\cos(\theta) > 0 \Rightarrow f(u, v) > 0$ ou $\cos(\theta) < 0 \Rightarrow f(u, v) < 0$. Então,

basta mostrar que se $K(p) > 0$ a função f será estritamente positiva ou estritamente negativa em uma vizinhança do ponto p . De fato, como X é analítica, ou seja, é de classe C^∞ , então para cada ponto $p \in U$ existe uma vizinhança $W \subset U$ de p tal que: ⁵

$$\begin{aligned} X(u, v) &= X(p) + uX_u(p) + vX_v(p) + \\ &+ \frac{1}{2}(u^2X_{uu}(p) + 2uvX_{uv}(p) + v^2X_{vv}(p)) + R(u, v), \end{aligned} \quad (4.16)$$

em que $R(u, v)$ é um polinômio de grau maior ou igual a 3. Ainda, repare que:

$$\lim_{(u,v) \rightarrow (0,0)} \frac{|R|}{u^2 + v^2} = 0. \quad (4.17)$$

Substituindo 4.16 em 4.15, tem-se:

$$\begin{aligned} f(u, v) &= u\langle X_u(p), N(p) \rangle + v\langle X_v(p), N(p) \rangle \\ &+ \frac{1}{2}(u^2\langle X_{uu}(p), N(p) \rangle + 2uv\langle X_{uv}(p), N(p) \rangle + v^2\langle X_{vv}(p), N(p) \rangle) + \langle R, N(p) \rangle. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Como $X_u(p)$ e $X_v(p)$ são ortogonais a $N(p)$ e denotando os coeficientes da *Segunda Forma Fundamental* como $e(0, 0) = e_0$, $f(0, 0) = f_0$ e $g(0, 0) = g_0$ e $\langle R, N(p) \rangle = R^*$ então:

$$f(u, v) = \frac{1}{2}(u^2e_0 + 2uvf_0 + v^2g_0) + R^*, \quad (4.19)$$

por 2.40 e 3.1:

$$f(u, v) = \frac{1}{2} \Pi_p(w) + R^* = \frac{1}{2}k_n(w) \|w\|^2 + R^*, \quad (4.20)$$

tal que $w = uX_u(p) + vX_v(p)$ e, para todo (u, v) suficientemente próximo de $(0, 0)$ tem-se $\lim_{(u,v) \rightarrow (0,0)} R^* = 0$. Isso implica que o termo R^* é pequeno em relação a $\frac{1}{2} \Pi_p(w) = \frac{1}{2}k_n(w) \|w\|^2$.

Tendo em vista que $K(p) > 0$ então k_1 e k_2 têm o mesmo sinal. Deste modo, graças à **Proposição 3.1.2** $k_n(w) \subset [k_1, k_2]$, isto é, o sinal de k_n é estritamente positiva ou estritamente negativo. Está provado que existe uma vizinhança W de p tal que $X(W)$ está toda contida em um dos semi-espacos determinados por T_pX .

Tomando como hipótese p sendo um ponto hiperbólico ($K(p) < 0$), pode-se também compreender geometricamente a restrição do ângulo θ . Se $0 < \theta < 2\pi$ implica que f muda de sinal, ou seja, há pontos tanto em um semi-espaco quanto no outro. Resta então mostrar que f pode assumir valores negativos ou positivos em qualquer que seja a vizinhança de p .

Por 4.20 o sinal de f é determinado por k_n e, como $k_1 k_2 < 0$, isso significa que existem vetores não nulos $w_1 = u_1X_u(p) + v_1X_v(p)$ e $w_2 = u_2X_u(p) + v_2X_v(p)$ tais que

⁵ Em Kaplan (1972, p. 414) há uma discussão mais detalhada a respeito da expansão por série de Taylor para funções de várias variáveis. O termo "funções analíticas" refere-se às funções que podem ser reescritas por essa série.

$k_n(w_1) < 0$ e $k_n(w_2) > 0$. Note ainda que para toda vizinhança W de p existe um δ não-nulo suficientemente próximo de 0 tal que $k_n(\delta w_1) = k_n(w_1) < 0 \Rightarrow f(\delta u_1, \delta v_1) < 0$ e $k_n(\delta w_2) = k_n(w_2) > 0 \Rightarrow f(\delta u_2, \delta v_2) > 0$ ⁶. Assim, conclui-se de 4.20 que: $X(\delta u_1, \delta v_1)$ e $X(\delta u_2, \delta v_2)$ pertencem a semi-espacos distintos determinados por $T_p X$, o que prova o teorema.

Vale ressaltar que, no caso em que p é um ponto parabólico ou planar da superfície X , tomando pontos (u, v) próximos a p , não se pode determinar a posição de $X(u, v)$ em relação ao plano tangente, pois a função k_n será nula e por 4.20 obter-se-ia $f(u, v) = R^*$. Porém, a única informação que se tem de R^* é que para pontos (u, v) suficientemente próximos de p , R^* tenderá a zero; podendo haver pontos $X(u, v)$ em semi-espacos distintos, ou em um único semi-espaco ou até mesmo sob o plano (quando a superfície é o próprio plano).

Um caso particular é quando dado de uma sistema de coordenadas cartesianas (x, y, z) do \mathbb{R}^3 e, levando em consideração uma função diferenciável $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que U é um conjunto aberto e $S(x, y) = (x, y, f(x, y))$ é uma superfície regular que parametrizada o gráfico de f ⁷, então para um ponto crítico $p = (x_0, y_0)$ sabe-se que o plano tangente a S em p (denotado como $T_p S$) é dado por:

$$z - f(p) = f_x(x - x_0) + f_y(y - y_0), \quad (4.21)$$

mas como p é ponto crítico:

$$z = f(p). \quad (4.22)$$

Se a Curvatura de Gauss de S em p for positiva, pelo **Teorema 4.4.1** existe uma vizinhança W de p onde $S(W)$ está toda contida em um dos semi-espacos fechados determinados por $T_p S$, são eles: o semi-espaco de pontos cuja cota z é superior a $f(p)$ e o semi-espaco de pontos cuja cota z é inferior a $f(p)$, ou seja, são os pontos que estão ou acima ou abaixo do referido plano.

Como $K(p) = k_1(p) k_2(p)$ então tem-se dois casos: $k_1(p) > 0$ e $k_2(p) > 0$ ou $k_1(p) < 0$ e $k_2(p) < 0$. As curvaturas principais indicam as curvaturas de curvas sobre a superfície S e, como discutido no **Teorema 4.2.1**, deve-se ter necessariamente que:

$$\begin{aligned} k_1(p) > 0 &\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p) > 0, \\ k_1(p) < 0 &\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p) < 0. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Sem perda de generalidade poder-se-ia utilizar na equação 4.23 $k_2(p)$ e a derivada parcial de segunda ordem com respeito a y , uma vez que $k_1(p)$ e $k_2(p)$ têm o

⁶ Para constatar isso basta substituir na equação 3.1 w por δw .

⁷ Neste momento usa-se S para a superfície ao invés de X a fim de evitar confusão com a variável independente x .

mesmo sinal. Tal como discutido no **Teorema 4.2.2** para funções de uma variável: se as derivadas parciais de segunda ordem em p são positivas, então $S(W)$ estará contido no semi-espaço de pontos cuja cota z é superior a $f(p)$, pois todas as curvas sobre a superfície em W indicam funções com concavidade para cima. Analogamente, se as derivadas de segunda ordem em p são negativas, então $S(W)$ está contido no semi-espaço de pontos cuja cota z é inferior a $f(p)$.

A Figura 16 mostra essa situação para curvas coordenadas que determinam funções $f(x, y_0)$ e $f(x_0, y)$ tais que as curvaturas k_1 e k_2 são positivas ou negativas.

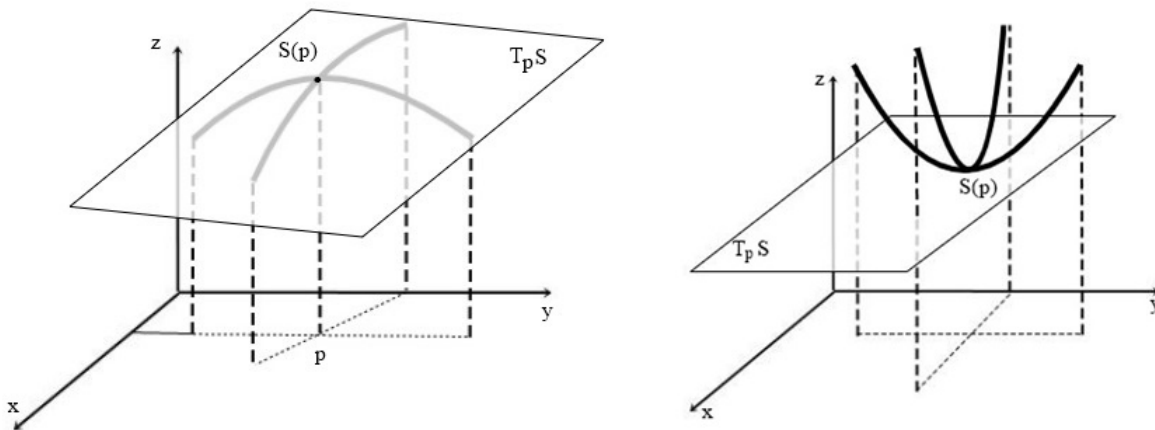


Figura 16 – Curvas determinadas por $f(x, y_0)$ e $f(x_0, y)$

Em outras palavras, como a coordenada z de S é dada por $f(x, y)$, então afirmar que os pontos de $S(W)$ estão acima do plano $z = f(p)$ equivale a afirmar que: para todo $(x, y) \in W \cap U$ tem-se que $f(x, y) \geq f(p)$. Isso coincide exatamente com a definição de mínimo local⁸. Enquanto afirmar que os pontos de $S(W)$ estão abaixo do plano $z = f(p)$ equivale a afirmar que: para todo $(x, y) \in W \cap U$ tem-se que $f(x, y) \leq f(p)$, que coincide com a definição de máximo local.

Se a Curvatura de Gauss em p for negativa, então pelo **Teorema 4.4.1** para toda vizinhança W de p existem pontos p_1 e p_2 tais que $S(p_1)$ e $S(p_2)$ pertencem a semi-espaços distintos determinados por $T_p S$. Novamente, reforça-se que $T_p S$ é o plano de equação $z = f(p)$ e, como S tem coordenada z dada por f , então para p_1 no semi-espaço cujos pontos têm cota inferior a z tem-se $f(p_1) < f(p)$ e, para p_2 no semi-espaço cujos pontos têm cota superior a z tem-se $f(p_2) > f(p)$, ou seja, $f(p_1) < f(p) < f(p_2)$.

Neste caso p representa um ponto de sela, conforme ilustrado na Figura 17 que representa um caso em que as curvas coordenadas determinam funções $f(x, y_0)$ e $f(x_0, y)$ com concavidades voltadas para semi-espaços distintos.

⁸ Para escrever $f(x, y) < f(p)$ deve-se ter pontos $(x, y) \in (W - \{p\}) \cap U$

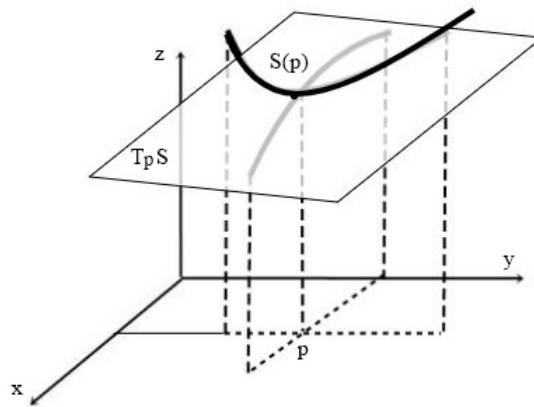


Figura 17 – Um ponto hiperbólico de S é um ponto de sela de f

Note ainda que essas estratégias não conseguem determinar o comportamento de S para o caso em que $K(p) = 0$ e, conseqüentemente, com essas condições não se pode classificar o ponto crítico p . Contudo, em algumas situações há ainda a possibilidade de estudar a natureza de p quando a Curvatura de Gauss de S é nula: deve-se analisar o sinal das derivadas parciais de ordens superiores a 2.

Em suma:

1. se $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p) > 0$ e $K(p) > 0$ então p é um ponto de mínimo local de f ;
2. se $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p) < 0$ e $K(p) > 0$ então p é um ponto de máximo local de f ;
3. se $K(p) < 0$ então p é um ponto de sela de f ; e
4. se $K(p) = 0$ não se pode afirmar nada sobre a natureza do ponto crítico p .

Comparando essas conclusões com o enunciado do **Teste do Hessiano** é natural conjecturar que haja uma relação entre a Curvatura de Gauss $K(p)$ e o Hessiano $He(p)$.

Proposição 4.4.1. *Seja $p = (x_0, y_0)$ um ponto crítico da função $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável no conjunto aberto U e $S(x, y) = (x, y, f(x, y))$ a superfície que parametriza o gráfico de f , então*

$$K(p) = He(p) \quad (4.24)$$

Tal que $K(p)$ é o valor da Curvatura de Gauss de S em p e $He(p)$ é o Hessiano de f em p .

Demonstração:

Sabe-se que a matriz hessiana de f em p é dada por

$$Hess(p) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(p) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p) \end{bmatrix} \Rightarrow He(p) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p) - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(p) \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(p). \quad (4.25)$$

Além disso, pelo Teorema de Clairaut-Schwarz as derivadas parciais $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(p)$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(p)$ são iguais e, usando a notação de subíndice para as derivadas, tem-se

$$He(p) = f_{xx}f_{yy}(p) - (f_{xy})^2. \quad (4.26)$$

Resta encontrar uma fórmula para a Curvatura de Gauss da superfície S .

Pelo **Teorema 3.2.1** é preciso determinar os coeficientes da *Primeira e Segunda Formas Fundamentais* e, observando-se que $S_x = (1, 0, f_x)$ e $S_y = (0, 1, f_y)$, tem-se:

$$\begin{aligned} E_0 &= \langle S_x, S_x \rangle = 1^2 + 0^2 + (f_x)^2 \\ F_0 &= \langle S_x, S_y \rangle = f_x f_y \\ G_0 &= \langle S_y, S_y \rangle = 0^2 + 1^2 + (f_y)^2 \end{aligned} \quad (4.27)$$

enquanto Aplicação Normal de Gauss de S é dada por

$$\frac{S_x \wedge S_y}{\|S_x \wedge S_y\|} = \frac{(f_x, f_y, -1)}{\sqrt{(f_x)^2 + (f_y)^2 + 1}}. \quad (4.28)$$

Obtém-se as derivadas de segunda ordem de S como $S_{xx} = (0, 0, f_{xx})$, $S_{xy} = (0, 0, f_{xy})$ e $S_{yy} = (0, 0, f_{yy})$. Por causa disso,

$$\begin{aligned} e_0 &= \langle S_{xx}, N \rangle = \frac{-f_{xx}}{\sqrt{(f_x)^2 + (f_y)^2 + 1}} \\ f_0 &= \langle S_{xy}, N \rangle = \frac{-f_{xy}}{\sqrt{(f_x)^2 + (f_y)^2 + 1}} \\ g_0 &= \langle S_{yy}, N \rangle = \frac{-f_{yy}}{\sqrt{(f_x)^2 + (f_y)^2 + 1}}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

A Curvatura de Gauss em p será dada por:

$$K(p) = \frac{e_0 g_0 - f_0^2}{E_0 G_0 - F_0^2} = \frac{\frac{[f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2]}{(f_x)^2 + (f_y)^2 + 1}}{(1 + (f_x)^2)(1 + (f_y)^2) - (f_x f_y)^2}. \quad (4.30)$$

No entanto, a expressão pode ser simplificada, devido ao fato de p ser um ponto crítico, ou seja, $f_x = f_y = 0$, então o denominador equação 4.30 é igual à 1, o que resulta em:

$$K(p) = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2, \quad (4.31)$$

e, por 4.26 tem-se:

$$K(p) = He(p), \quad (4.32)$$

demonstrando a proposição.

Conforme o **Teorema 4.4.1**, as considerações a respeito desse caso particular discutido e a **Proposição 4.4.1**, pode-se concluir que obtém-se então uma justificativa matemática para o **Teste do Hessiano** a partir de um efeito geométrico da Curvatura de Gauss. Na verdade, ao analisar a equação 4.30 a Curvatura de Gauss da superfície S tem o mesmo sinal que o Hessiano mesmo em pontos que não são críticos, visto que para um ponto $(x_0, y_0) \in U$ tem-se

$$K(x_0, y_0) = \frac{He(x_0, y_0)}{(|\nabla f(x_0, y_0)|^2 + 1)^2}. \quad (4.33)$$

Conclusão

Com o desenvolvimento desta pesquisa foi possível notar que há sim alternativas de compreender o resultado que garante a classificação de pontos críticos de funções de duas variáveis utilizando elementos da Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies. A justificativa apresentada neste trabalho é um exemplo dessa constatação, pois recorre à relação entre os conceitos de curvatura e concavidade para fundamentar um resultado do CVV. Dessa forma, pode-se concluir que o objetivo geral da pesquisa foi alcançado.

No entanto, por mais que seja possível encontrar uma justificativa matemática que reforça os aspectos visuais e geométricos dessas classificações, ela não se mostrou mais prática que as encontradas nos livros didáticos de CVV. Isso se dá devido ao fato de que foi necessário introduzir conceitos que muitas vezes fogem do conteúdo convencionalmente abordado nesses livros, por exemplo o conceito de curvatura de superfície. Assim, o ganho obtido com essa justificativa diz respeito muito mais ao entendimento do Teste do Hessiano como um fenômeno geométrico das superfícies descritas por funções de duas variáveis, que um ganho no procedimento.

Além disso, é razoável constatar que a pesquisa também levantou diferenças notáveis entre os conceitos de curvatura e concavidade: enquanto a primeira indica um valor quantitativo relacionado às curvas ou às superfícies a segunda indica um valor qualitativo. Ainda, nota-se que toda a análise realizada neste trabalho levou em conta apenas o sinal da Curvatura de Gauss em um ponto, de certa forma considerou-se o valor qualitativo desse conceito. A percepção deste fato extrapola os objetivos do trabalho e, por essa razão, é cabível discorrer mais sobre isso em trabalhos futuros.

Em suma, essa pesquisa direcionou-se muito mais à demonstração do Teste do Hessiano como um processo de entendimento do conteúdo matemático relacionado aos pontos críticos do que à demonstração como um processo de validação. Não por acaso, ao concluir a demonstração referiu-se a ela como uma “justificativa matemática” a fim de evidenciar os diferentes papéis de uma demonstração matemática, como é feito em Villiers (2001).

Referências

- ALVES, F. R. V. *Aplicações da Sequência Fedathi na promoção do raciocínio intuitivo no Cálculo a Várias Variáveis*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Ceará, Fortaleza/CE, 2011. Citado 5 vezes nas páginas 19, 23, 25, 61 e 62.
- ALVES, F. R. V. Transição interna do cálculo: uma discussão do uso do geogebra no contexto do cálculo a várias variáveis. *Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo*, ISSN 2237- 9657, v. 1, n. 2, p. 5–19, 2012. Citado na página 25.
- ARAÚJO, P. V. *Geometria Diferencial*. 1. ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1998. Citado 5 vezes nas páginas 23, 32, 34, 37 e 38.
- BOYER, C. B. *História da Matemática*. 1. ed. São Paulo: Editora Edgar Blücher Ltda., 1974. Citado na página 21.
- CARMO, M. P. do. *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*. 3. ed. São Paulo: Unicamp, 2004. Citado 4 vezes nas páginas 23, 25, 31 e 63.
- COIMBRA, J. de R. V. *Uma introdução à Geometria Diferencial*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2008. Citado 3 vezes nas páginas 19, 20 e 21.
- COOLIDGE, J. L. *A history of Geometrical Methods*. 1. ed. Mineola, New York: Dover Publications, 2013. Citado na página 20.
- DOMINGUES, H. H. *Espaços métricos e introdução à topologia*. 1. ed. São Paulo: Atual, 1982. Citado na página 52.
- DOUADY, R. *Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement de mathématiques*. 245 p. Tese (Doutorado) — Université Paris VII, Paris, 1984. Citado na página 25.
- EVES, H. *Introdução à História da Matemática*. 3. ed. São Paulo: Unicamp, 2004. Citado na página 20.
- FABER, R. L. *Differential Geometry and Relativity Theory*. 1. ed. New York and Basel: Marcel Dekker inc, 1983. v. 1. Citado na página 50.
- FREITAS, A. dos Santos de. *Uma abordagem de pontos críticos e as funções de Morse*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista “Julio Mesquita Filho”, Rio Claro, 2017. Citado na página 30.
- GIL, A. C. *Métodos e técnicas de pesquisa social*. 6. ed. São Paulo: Atlas, 2008. Citado na página 23.
- GORODSKI, C. Um breve panorama histórico da geometria. *Matemática Universitária*, Rio de Janeiro, n. 44, p. 14–29, 2009. Citado 5 vezes nas páginas 19, 20, 21, 22 e 31.

- GUIDORIZZI, H. *Um curso de cálculo*. 1. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1986. v. 2. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 61.
- KAPLAN, W. *Cálculo avançado*. 1. ed. São Paulo: Editora Edgar Blücher, Ed. da Universidade de São Paulo, 1972. v. 1. Citado 4 vezes nas páginas 23, 51, 62 e 64.
- LAKATOS, E. M.; MARCONI, M. de A. *Fundamentos de metodologia científica*. 5. ed. São Paulo: Atlas, 2003. Citado na página 23.
- LEITHOLD, L. *O cálculo*. 3. ed. São Paulo: Editora Harbra, 1999. v. 2. Citado na página 61.
- MANZO, A. J. *Manual para la preparación de monografías: una guía para presentar informes y tesis*. 2. ed. Buenos Aires: Humanitas, 1973. Citado na página 23.
- NATÁRIO, J. O que é a curvatura de uma superfície? *Gazeta de Matemática - Sociedade Portuguesa de Matemática*, v. 1, n. 159, p. 41–43, 2009. Citado 3 vezes nas páginas 21, 30 e 41.
- OHANIAN, H. C. *Gravitation and Spacetime*. 1. ed. New York and London: W. W. Norton & Company, 1976. v. 1. Citado 2 vezes nas páginas 49 e 50.
- PICADO, J. *Apontamentos de Geometria Diferencial*. 1. ed. Coimbra: Departamento de Matemática - Universidade de Coimbra, 2006. Citado 6 vezes nas páginas 23, 25, 37, 38, 41 e 62.
- RODRIGUES, L. B.; AGUSTINI, E. Um texto sobre superfícies parametrizadas regulares. *FAMAT em Revista*, v. 1, n. 09, p. 95–146, 2007. Citado na página 30.
- STEWART, J. *Cálculo*. 4. ed. São Paulo: Pioneira Thompson Learning, 2004. v. 2. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 61.
- TENENBLAT, K. *Introdução à Geometria Diferencial*. 2. ed. São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda., 2008. Citado 4 vezes nas páginas 23, 26, 31 e 63.
- VILLIERS, M. D. de. Papel e funções da demonstração no trabalho com o sketchpad. *Revista Educação e Matemática*, v. 1, n. 63, p. 31–36, 2001. Citado 3 vezes nas páginas 19, 61 e 71.