Análise de um Livro Didático de Cálculo Diferencial e Integral a partir da Teoria de Alan J. Bishop

Thalita Martins Doretto

Trabalho de Conclusão do Curso Superior de Licenciatura em Matemática, orientado pelo Prof. Dr. Armando Traldi Jr.

IFSP
São Paulo
2014

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Doretto, Thalita Martins.
Análise de um livro didático de Cálculo Diferencial e Integral a partir da teoria de Alan J. Bishop / Thalita Martins Doretto - São Paulo: IFSP, 2014.
80f

Trabalho de Conclusão do Curso Superior de Licenciatura em Matemática - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo
Orientador: Armando Traldi Júnior

1. Livro-didático 2. Enculturação Matemática 3. Derivadas 4. Currículo 5. Bishop I. Análise de um livro didático de Cálculo Diferencial e Integral a partir da teoria de Alan J. Bishop

THALITA MARTINS DORETTO

ANÁLISE DE UM LIVRO DIDÁTICO DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL A PARTIR DA TEORIA DE ALAN J. BISHOP

Monografia apresentada ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, em cumprimento ao requisito exigido para a obtenção do grau acadêmico de Licenciada em Matemática.

APROVADA EM 03/07/2014 **CONCEITO:** 10,0

Valéria Ostete Jannis Luchetta

Profa. Me. Valéria Ostete Jannis Luchetta
Membro da Banca

amlmarq

Profa. Dra. Amanda Cristina Teagno Lopes Marques
Membro da Banca

Prof. Dr. Armando Traldi Júnior
Orientador

Thalita Martins Doretto

Aluna: Thalita Martins Doretto

“Estar vivo é assumir a educação do sonho cotidiano. Ensinar e aprender são movidos pelo desejo e pela paixão... é preciso educar o medo e a coragem. Medo e coragem em ousar. Medo e coragem em assumir a solidão de ser diferente. Medo e coragem em romper o velho. Medo e coragem em construir o novo... este é o drama de permanecer vivo... fazendo EDUCAÇÃO.”

Madalena Freire

Aos Meus Familiares e Amigos

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, preciso agradecer a Deus, o qual preparou desde o ingresso e a permanência no curso até a realização do presente trabalho. Lutas não faltaram, mas a parte importante consiste em ter chegado até aqui. Senhor Deus,

Obrigada pela oportunidade...
Obrigada pela força...
Obrigada por me capacitar...
Obrigada por proporcionar momentos felizes...
Obrigada por todo amor...

Aos meus familiares e amigos – professores, não os citei como tais, pois os considero meus amigos – meu muito obrigada de coração, palavras não expressam tamanha gratidão, palavras não são suficientes. Horas de dedicação, amor incondicional de mãe, pai, irmãos, tias, avós e amigos. Em homenagem a todos vocês dedico ao menos duas linhas do meu texto em silêncio profundo, se soubesse representar o silêncio em forma de texto o faria, pois só esse pode ilustrar o quanto admiro, considero e quero bem a todos. Mesmo que nem todos contribuíram, diretamente, com a elaboração do Trabalho de Conclusão do Curso, ou seja, não opinaram nem ajudaram corrigir o texto, foi graças a um grupo de pessoas que pude o concretizar, grupo esse que me auxiliou no caminho até aqui. Obrigada, corpo docente, discente, familiares e amigos. Desejo tudo de bom a vocês, muita saúde e paz.

Em especial, quero agradecer o meu orientador Prof. Dr. Armando Traldi Jr. por toda ajuda, paciência e dedicação. A você, Professor Traldi, o meu sincero *muito obrigada.*

Agradeço também à CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) e ao Instituto Federal pela oportunidade de participar do projeto PIBID (Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência), o qual possibilitou a realização de um sonho, publicar um artigo, cujo tema diz respeito a um relato de experiência referente à influência do PIBID na formação inicial do professor de Matemática.

Agradeço por fim, novamente ao Instituto Federal, também por ter me proporcionado uma excelente formação. Dedicar-me-ei ao máximo, com o intuito de corresponder às expectativas atuando como professora de Matemática.

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo principal analisar um livro de Cálculo Diferencial e Integral (CDI) segundo a teoria de Alan Bishop, a fim de identificar elementos que fazem parte de um currículo enculturador. A escolha do livro adotado foi intencional, uma vez que faz parte da bibliografia básica da disciplina de CDIM3 do curso de Licenciatura em Matemática. Além disso, o foco central da presente pesquisa está no estudo das derivadas, mais especificamente os tópicos 2.7 e 2.8 do livro, cujos títulos são: *Derivadas e taxas de variação* e, *A derivada como uma função*. Apoiando-nos na teoria de Alan J. Bishop que propõe uma perspectiva diferente para o currículo de matemática ao abordá-lo sob um aspecto cultural, a metodologia utilizada foi do tipo qualitativa, pelo fato de ter sido baseada em uma análise bibliográfica. Sendo assim, uma das contribuições do presente trabalho é provocar reflexões acerca do currículo do curso, visando analisar o que está sendo trabalhado na disciplina de CDI. Nesse sentido, a intenção é pensar sobre nossa própria formação, buscando uma formação mais crítica.

Palavras-chave: Livro didático; Enculturação Matemática; Derivadas; Currículo; Bishop.

ANALYSIS OF A TEXTBOOK OF DIFFERENTIAL AND INTEGRAL CALCULUS BY ALAN J. BISHOP THEORY

ABSTRACT

This work aims to analyse a textbook on Differential and Integral Calculus, based on Alan Bishop's theory, trying to identify components which are part of a enculturation curriculum. The choice of the book was intentional since it's part of the basic bibliography used in the subject CDIM3 of the degree course of math. Besides, this work is mainly focused on the study of the derivatives, more specifically the topics 2.7 and 2.8 of the book, whose titles are: *Derivatives and Rates of Change*, and *The Derivative as a function*. Supporting Alan J. Bishop's theory, who suggests a different perspective for the math curriculum, facing it under a cultural aspect, the methodology used was a qualitative one, based on a bibliographical analysis. Thus, one contribution of this work, is to cause reflections about the curriculum of the course, aiming to analyse what's being worked in Differential and Integral Calculus. This way, the intention is thinking about our own academic formation, looking for a more critical formation.

Keywords: Textbook; Mathematical Enculturation; Derivatives; Curriculum; Bishop.

LISTA DE FIGURAS

<u>Pág.</u>

SUMÁRIO

Pág.

1. INTRODUÇÃO

Com base na experiência enquanto estudante de Licenciatura em Matemática e tendo cursado a disciplina de Cálculo Diferencial Integral (CDI), posso relatar o quanto essa disciplina despertou meu interesse antes mesmo de começar a cursá-la. Um dos motivos, por exemplo, eram os comentários compartilhados entre colegas que estavam cursando, ou que haviam reprovado, ou que já tinham concluído tal disciplina. Ora as reclamações eram pela dificuldade em entender o conteúdo, ora pela forma como a disciplina era ensinada, entre outras. No mínimo, fiquei preocupada, uma vez que era considerada pelos colegas uma das disciplinas que mais reprovava.

Com relação ao índice de reprovação, pude confirmar por meio de estudos realizados a veracidade de tal fato. Barufi (1999), em sua tese, examina dados na Universidade de São Paulo, entre 1990 e 1995, sobre o aproveitamento do curso, identificando um número elevado de alunos que reprovaram na disciplina Cálculo. Além disso, exemplifica a situação do IME – Instituto de Matemática e Estatística, desta universidade.

> De fato, verificamos que no ano de 1995, a taxa de não aprovação – isto é, reprovação por nota ou por falta, ou desistência em MAT 135 (Cálculo para Funções de uma Variável Real) foi de 66,9 %, e, em MAT 131 (Cálculo Diferencial e Integral), de 43,8% (BARUFI, 1999, p. 3).

Mesmo que seja um problema localizado, não quer dizer que em outras universidades ou institutos o mesmo não ocorra. Por exemplo, no Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia de São Paulo – *campus* São Paulo – por experiência própria, por contato com colegas que já cursaram e professores que ministram tal disciplina, é possível afirmar que CDI é uma disciplina que tem grande índice de reprovação. Basta continuar coletando dados e “não tardará muito para percebermos que os índices acima têm se mantido com uma preocupante regularidade” (OLIMPIO, 2006, p. 2).

Há outros estudos, porém, cujo foco não é a questão da reprovação em Cálculo, mas sim a importância dessa disciplina na formação do futuro professor de Matemática, como no caso do estudo de Traldi (2006). Segundo as ideias discutidas ao longo do trabalho, o autor menciona a existência de pesquisas que salientam a área de Cálculo Diferencial Integral, como:

> [...] a) rica em noções, ora em conformidade e ora em contradição com as ideias intuitivas dos alunos, o que deve ser levado em conta no seu ensino sob a pena de causar obstáculos; b) que apresenta uma diversidade de registros de representações em que seus conceitos são apresentados; c) que tem um caráter unificador que se manifesta, desde que sua abordagem no ensino leve em conta as diversas dimensões Matemáticas de um dado conceito (no quadro da álgebra, da geometria, da geometria analítica); d) que aborda noções que são estudadas na educação básica, número real, infinito, continuidade, limite, função; e) que tem aplicações em outras áreas do conhecimento, segundo Cornu (1991), Sierpinska (1985), Tall(1991), Azcárate e outros (1996) e Vinner (1991) (TRALDI, 2006, p.27).

Dessa forma, essa área pode apresentar contribuições significativas para o futuro professor de matemática, uma vez que permite a inserção do aluno em situações que irão se apresentar ao longo de sua carreira docente. Assim sendo, a questão da reprovação passa a ser apenas um dos obstáculos presentes nesta disciplina.

Nesse mesmo estudo realizado por Traldi (2006), ele ainda afirma que o material didático mais utilizado pelos professores para elaborarem suas aulas é o livro didático e que todos os professores de Cálculo Diferencial e Integral analisados por ele em sua investigação utilizam o livro didático como a única fonte de consulta para elaboração das aulas.

Sendo assim, julgamos relevante fazer um estudo que tenha como foco compreender a forma como o livro didático de Cálculo Diferencial e Integral propõe a abordagem dos conteúdos.

A escolha do livro que será analisado na presente pesquisa não foi aleatória, pois faz parte da bibliografia básica (conforme ementa no anexo I) da disciplina de Cálculo do curso de Licenciatura em Matemática. O livro selecionado foi *Cálculo - Volume 1* de James Stewart, tradução da 6ª edição norte-americana, CENGAGE Learning, 2010.

O fato de analisar o livro didático, como um dos intervenientes curriculares, está baseado nos estudos realizados por Sacristán (2000), que propõe os materiais e livros didáticos como um dos níveis de construção curricular, tratados pelo autor como *Currículo Apresentado*.

Ao todo, são seis os níveis por ele propostos: *Currículo Prescrito, Currículo Apresentado, Currículo Moldado, Currículo em Ação, Currículo Realizado e Currículo Avaliado.* Cada um deles possui características distintas, isto é, preocupam-se com partes específicas que compõem o currículo, mas que de uma forma ou de outra estão diretamente relacionadas.

Para fazer tal análise, fomos buscar critérios que a fundamentassem, tendo a seguinte preocupação, como analisar um livro didático na perspectiva de currículo apresentado? E ainda, qual teórico utilizar para dar o suporte necessário a este trabalho? Neste caminho, nos deparamos com a teoria de Alan J. Bishop (1999), que discute, entre outros aspectos, o enfoque cultural do Currículo de Matemática, cuja estrutura deve contemplar cinco princípios: a *representatividade,* o *formalismo,* a *acessibilidade,* o *poder explicativo* e a *concepção ampla e elementar*. Além de três componentes primordiais: o *componente simbólico,* o *componente social* e o *componente cultural.* O primeiro componente, especificamente, estrutura-se a partir de seis atividades: contar, medir, desenhar, localizar, jogar e explicar, as quais também auxiliam na organização do currículo matemático.

A escolha de um livro didático voltado para o ensino superior foi, em primeiro lugar, sugestão do professor orientador, por conta da experiência com a disciplina de CDI e pela familiaridade com o tema. Além disso, outro ponto importante foi à vontade de contribuir para o currículo do curso, uma vez que os professores que ministrarão essa disciplina poderão utilizar o livro do Stewart (2010) com uma perspectiva diferente, atentando para os aspectos discutidos no presente trabalho.

Porém, ao optar pela análise do livro didático de CDI, tivemos que fazer outra escolha, pois esta disciplina é composta por diferentes conteúdos, como Limites, Derivadas, Integrais e Aplicações. Nesta escolha, optamos pelo assunto *Derivadas*, pois além de possibilitar diferentes relações com a Educação Básica, ao fazer o estudo das funções e suas variações, há a possibilidade de diferentes abordagens metodológicas.

A partir disso, é possível enunciar o objetivo de pesquisa deste estudo que é verificar quais são os tipos de atividades[1] propostas em um livro didático de Cálculo Diferencial Integral adotado no curso de Licenciatura em Matemática, à luz da teoria de Alan J. Bishop.

Para alcançar tal objetivo geral, temos como objetivos específicos:

[1]Vale argumentar aqui, que o vocábulo *atividade* será utilizado ao longo do presente trabalho para referir-se aos exemplos e exercícios propostos no livro analisado, além da forma como Stewart (2010) aborda o conteúdo. Interpretamos a teoria apresentada, também como uma *atividade*.

(i) Analisar as atividades propostas no capítulo que tem como foco o estudo das Derivadas, em relação aos componentes: cultural, simbólico e social presentes no currículo enculturador proposto por Bishop.

(ii) Analisar também nesse capítulo as mesmas atividades, porém identificando os cinco princípios: representatividade, formalismo, acessibilidade, poder explicativo e, concepção ampla e elementar referentes à proposta curricular de enculturação matemática.

(iii) Articular os dois objetivos específicos anteriores, buscando compreender as atividades propostas no capítulo sobre Derivadas em relação à teoria de Bishop.

Com relação à questão de pesquisa, a presente investigação visa analisar se o livro didático adotado contempla os componentes e princípios propostos por Bishop (1999) respondendo quais são as atividades relacionadas a eles, mais especificamente no capítulo 2 do livro de *Cálculo - Volume 1*, nos tópicos 2.7 e 2.8.

No capítulo 2, apresentamos a fundamentação teórica e metodológica da pesquisa em questão, no que se refere ao currículo, ao livro didático, à teoria de Alan J. Bishop e à metodologia de pesquisa. No primeiro, trazemos algumas definições de currículo tanto no sentido amplo da palavra, pois não é definida unicamente, quanto no que tange ao currículo apresentado proposto por Sacristán (2000) que é o livro didático. Ressaltamos que o mesmo autor defende que o professor não deve somente apoiar-se no livro, mas sim em um conjunto de fontes que melhor compõe a estrutura curricular do curso.

No capítulo 3, analisamos o livro didático adotado em relação aos componentes propostos por Bishop (1999). As seções escolhidas para esta análise foram a 2.7 e 2.8, “Derivadas e taxa de variação” e “A derivada como uma função”, respectivamente. Tal análise foi dada por identificar em cada seção, tanto na conceitualização e exemplificação quanto nos exercícios propostos, os componentes simbólico, social e cultural. A verificação se deu minuciosamente, procuramos no texto dessas seções, cada detalhe que relacionava as características presentes no livro didático com a teoria de Alan J. Bishop, no quesito componentes.

No capítulo 4, a análise do livro didático adotado ocorreu de forma distinta da análise feita ao identificar os componentes. Enquanto no capítulo 3 passamos por todo texto das seções, no presente capítulo, primeiramente, discutimos cada um dos princípios propostos por Bishop (1999) explicando suas características, para depois exemplificar de acordo com o conteúdo e exercícios presentes no livro, em quais partes tais princípios aparecem.

Sendo assim, conforme a organização dos capítulos e a análise proposta, a tentativa é caracterizar o livro didático adotado – ou de acordo com Sacristán (2000), o currículo apresentado – como um currículo enculturador, que segundo Bishop (1999) precisa apresentar tanto os componentes, quanto os princípios já mencionados.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA E METODOLÓGICA

2.1 Currículo

Do ponto de vista etimológico, a palavra currículo tem origem latina e significa correr em um determinado trajeto, caminho. Portanto, uma das interpretações possíveis para tal vocábulo consiste em “um percurso a ser trilhado pelo aluno no processo educativo vivenciado no interior da escola” (ASSUMPÇÃO *et al.*, 2008, p.12).

Entretanto, em uma perspectiva histórica, considerando meados do século XX e, a partir de uma resenha sobre a obra intitulada “O Currículo” de John Franklin Bobbitt (1918), o termo currículo apresenta um significado diferente. O autor, partindo da ideia de que a educação deveria seguir os moldes de uma indústria ou uma empresa, argumenta,

> à metáfora da escola como uma fábrica e do currículo como processo de produção, em que as crianças eram vistas como ‘matérias primas’ e os professores como controladores do processo de produção, assegurando que os ‘produtos’ eram construídos de acordo com as especificações meticulosamente traçadas e com o mínimo de desperdício, como também permite ainda compreender verdadeira raiz de muitas das teorias e práticas curriculares que se foram impondo como hegemônicas ao longo de todo o século XX e que provavelmente se encontram mais poderosas do que outrora neste dealbar do novo milênio, onde as políticas sociais neoliberais parecem continuar apostadas em não fornecer nenhuma outra alternativa à escolarização que não seja o da assunção dos modelos do mercado (BOBBIT *apud* PARASKEVA, 2005, p.2).

Portanto, mesmo com uma visão um tanto capitalista, Bobbit trata o currículo como algo fundamental para a organização escolar e, por isso, deve ser planejado e bem estruturado, afinal é um dos responsáveis por direcionar a educação dos indivíduos.

No dicionário Houaiss, por exemplo, o termo currículo é definido como “programação de um curso ou de matéria a ser examinada” (HOUAISS, 2008, p. 206). Enquanto pode significar também, segundo o Dicionário Interativo da Educação Brasileira:

> Conjunto de disciplinas sobre um determinado curso ou programa de ensino ou a trajetória de um indivíduo para o seu aperfeiçoamento profissional. Também pode ser entendido como um documento histórico na medida em que reflete expectativas, valores, tendências etc. de um determinado grupo ou tempo (MENEZES; SANTOS, 2002[2]).

Ou seja, mesmo com ideias que se entrelaçam e talvez queiram dizer a mesma coisa, encontrar as palavras certas para definir o termo currículo não é algo trivial. O fato de ter adquirido, com o passar do tempo, diferentes significados, pode ser uma das hipóteses sobre a dificuldade em defini-lo de uma forma mais sucinta, e não tão abrangente como é feito.

Então, talvez melhor que tentar encontrar uma definição para a palavra currículo seja "saber quais questões uma teoria do currículo ou um discurso curricular busca responder" (SILVA, 2010, p.14). Além disso, segundo o autor, a questão central que está por detrás de qualquer ideia de currículo é a de saber qual conhecimento deve ser ensinado. Em seu livro *Documentos de identidade – Uma introdução às teorias do currículo* argumenta,

> O currículo é sempre o resultado de uma seleção: de um universo mais amplo de conhecimentos e saberes seleciona-se aquela parte que vai constituir, precisamente, o currículo. As teorias do currículo, tendo decidido quais conhecimentos devem ser selecionados, buscam justificar por que "esses conhecimentos" e não "aqueles" devem ser selecionados (SILVA, 2010, p.15).

Em conformidade com a ideia acima citada e, segundo as sugestões mencionadas por Sacristán (2000) sobre como conceituar o termo currículo, é que este vocábulo será fundamentado ao longo do trabalho. De maneira resumida, esse autor concorda com o fato de o currículo ser uma construção cultural, um modo de organizar uma série de práticas pedagógicas. (SACRISTÁN, 2000, p.14).

Além disso, propõe "um modelo de interpretação do currículo como algo construído no cruzamento de influências e campos de atividade diferenciados e inter-relacionados" (SACRISTÁN, 2000, p. 104). Conforme ilustrado na figura a seguir:

---

[2] Disponível em: <http://www.educabrasil.com.br/eb/dic/dicionario.asp?id=349>. Acesso: 08/04/2014.

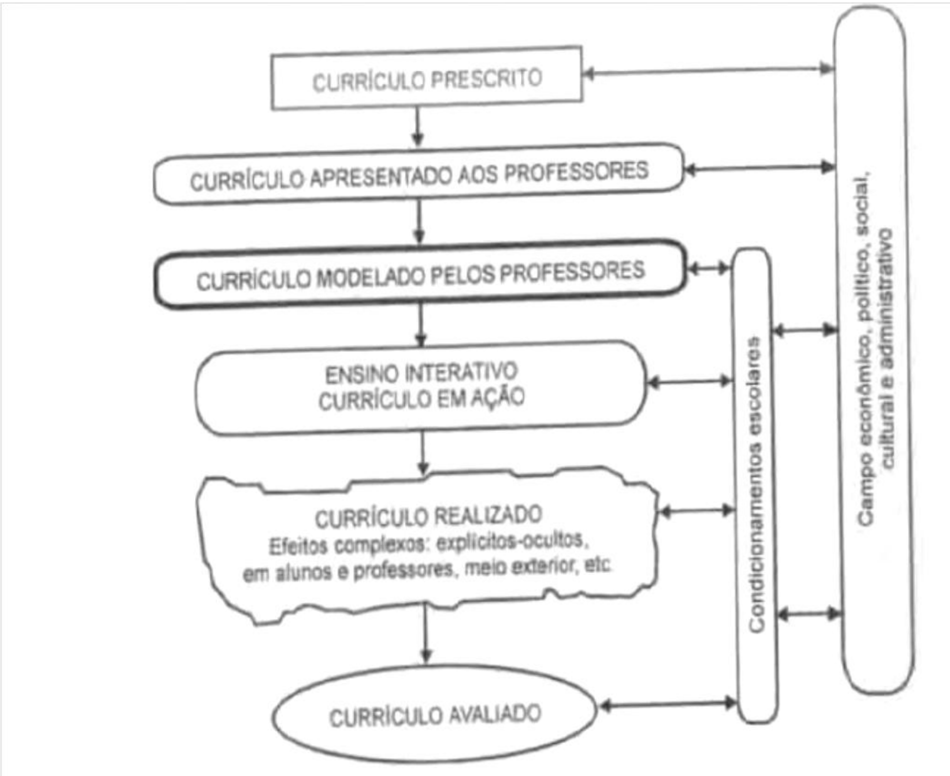


Figura 1 – “A objetivação do currículo no processo de seu desenvolvimento”.
Fonte: SACRISTÁN (2000, p. 105).

Portanto, para Sacristán (2000), o processo de construção curricular se dá nesses seis momentos: currículo prescrito; currículo apresentado; currículo moldado; currículo em ação; currículo realizado; e, currículo avaliado.

Currículo prescrito ou *currículo oficial* é aquele que prevê o conteúdo trabalhado proposto pelo sistema de educação, como as Leis de Diretrizes e Bases (LDB) e os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), sendo referência na ordenação de novos currículos.

Currículo apresentado aos professores é aquele presente em materiais e livros didáticos, que trazem assuntos já estabelecidos, uma vez que traduzem os conteúdos e significados do currículo prescrito.

Currículo moldado é aquele modificado pelo professor a partir de sua interpretação do currículo prescrito ou do apresentado, e também conforme sua prática.

Currículo em ação é aquele praticado dentro da sala de aula, em que o professor, junto com os alunos, discute e trabalha os conteúdos.

Currículo realizado é aquele adquirido pela consequência da prática pedagógica, que pode apresentar tanto resultados positivos quanto negativos.

Já o *currículo avaliado* é aquele presente em avaliações e se caracteriza, de maneira geral, por impor aos professores o que ensinar e aos alunos o que aprender.

Sendo assim, no presente trabalho o foco está no interveniente currículo apresentado aos professores, já que a proposta é analisar um livro didático de Cálculo Diferencial Integral. Nesse sentido, cabe mencionar, conforme as ideias de Sacristán, a importância da existência de um material de apoio que norteie as aulas do professor e forneça estratégias de ensino que estruturem sua prática pedagógica e, portanto, o currículo. Nas palavras do autor, “é conhecida a dependência do professorado de algum material que estruture o currículo” (SACRISTÁN, 2000, p. 150).

2.2 Livro Didático

Conforme analisado por Sacristán (2000), a importância do livro didático, principalmente em auxiliar a prática docente, é notória. Todavia, outros documentos e autores também relatam a necessidade desse material de apoio, tanto para os alunos quanto para os professores.

Devido à constância do termo livro didático durante este texto, existiu, portanto, uma preocupação em defini-lo respeitando o propósito de esclarecer os objetivos a ele atrelados e sua importância.

Segundo o dicionário Houaiss, livro didático[3] significa “aquele adotado em estabelecimento de ensino, cujo texto se enquadra nas exigências do programa escolar; livro de texto”. Além disso, nessa mesma bibliografia, livro de texto ou livro-texto[4], sinônimos para livro didático, significa “livro adotado como texto básico de determinado curso”.

Dessa forma, de acordo com tais definições, o livro de Cálculo a ser analisado nesse trabalho, é considerado um livro didático. Portanto, assim como outros livros, direciona as aulas do professor e o estudo dos alunos; serve como fonte de consulta para quem ensina e, também para quem aprende. Cabe salientar então, que

[3] Disponível em: <http://houaiss.uol.com.br/busca?palavra=livro>. Acesso: 07/04/2014.
[4] Disponível em: <http://houaiss.uol.com.br/busca?palavra=livro-texto>. Acesso: 07/04/2014.

> a realidade da maioria das escolas mostra que o livro didático tem sido praticamente o único instrumento de apoio do professor e que se constitui numa importante fonte de estudo e pesquisa para os estudantes. Assim, faz-se necessário que **professores estejam preparados para escolher adequadamente o livro didático a ser utilizado em suas aulas**, pois ele será auxiliador na aprendizagem dos estudantes (FRISON *et al*., 2009, p. 3, grifo nosso).

Considerando o fato da escolha do livro didático, como destacado na citação acima, uma curiosidade que vale a pena ser mencionada diz respeito a uma entrevista[5] divulgada na revista Cálculo, em que Stewart – autor do livro analisado – compartilha alguns fatos sobre a elaboração do livro que se transformou num best-seller, além de explicar o que o motivou a escrevê-lo. James ministrava aulas de cálculo e certo dia em uma de suas aulas, duas alunas sugeriram que escrevesse um livro de Cálculo baseando-se em suas próprias notas de aula. De acordo com uma das alunas "as notas que você escreve no quadro-negro são muito melhores que o livro didático que você nos recomendou" (REVISTA CÁLCULO, 2012, p. 19). Conforme o autor, ele nunca havia pensado sobre isso, mas passado algum tempo começou a escrever o tal livro e só parou quando terminou. Na verdade, escreveu na intenção de usar o material para consulta em suas próprias aulas e também para os alunos. Mas, deu tão certo que o livro é adotado hoje por diversas universidades: americanas, canadenses e brasileiras, por exemplo.

Dessa forma, em relação à escolha do livro a ser analisado, além do fato de fazer parte da bibliografia básica (ANEXO I) do Curso de Licenciatura em Matemática, esse livro foi escolhido também pela estrutura que possui. Quando apresenta os conceitos, o autor se preocupa em abrangê-los, se possível, de três formas, geométrica, numérica e algebricamente, a chamada "*Regra dos Três*" (STEWART, 2010, p. V).

No prefácio do livro, Stewart traz um tópico chamado "Filosofia do Livro", em que explica como gostaria de atingir os estudantes com o livro que elaborou. Nas palavras do autor, "... meu objetivo foi mostrar ao estudante a utilidade do cálculo e desenvolver competência técnica, mas ao mesmo tempo desejei transmitir a beleza intrínseca à matéria" (STEWART, 2010, p. V).

---

[5] Entrevista encontrada na Revista Cálculo: Matemática para todos – Edição 15, ano 2012, p. 18 – também disponível em <http://www.revistacalculo.com.br/2012/04/20/escrever-e-bom-para-aprender-e-enriquecer/>. Acesso: 14/04/2014.

Sendo assim, levando em consideração os detalhes discutidos até agora acerca de livro didático e, mais especificamente, o livro didático de Cálculo de James Stewart, cabe destacar a importância que esse instrumento assume, portanto. Ambos, professores e alunos o utilizam como apoio, fonte de pesquisa para alcançar o aprendizado, afinal não só o aluno, mas também o professor ora ensina, ora aprende. Stewart demonstrou na elaboração do livro a boa intenção em fazer o aluno aprender, uma vez que aprendeu e precisa ensinar também.

2.3 Teoria de Alan J. Bishop

Na busca de uma aprendizagem mais significativa e a fim de educar matematicamente usando uma abordagem também cultural, que leve em conta o conhecimento já adquirido do indivíduo, deparamo-nos com as ideias do teórico Alan J. Bishop. Algumas são as propostas acerca do currículo de Matemática para esse autor, porém com um enfoque cultural.

Para entender um pouco melhor sobre o que Bishop considera em sua teoria, refletir sobre o vocábulo cultura se torna pertinente. Conforme o dicionário da língua portuguesa Houaiss cultura[6] significa, no sentido figurado "o cabedal de conhecimentos, a ilustração, o saber de uma pessoa ou grupo social" e, em termos de antropologia significa "conjunto de padrões de comportamento, crenças, conhecimentos, costumes etc. que distinguem um grupo social". Dessa forma, é possível compreender melhor o que o autor prioriza com relação ao ensino da Matemática ao considerá-la como um produto cultural.

Bishop (1999) defende um fenômeno chamado *Enculturação Matemática*, o qual é explorado amplamente em sua obra, *Enculturación matemática: La educación matemática desde una perspectiva cultural*. Segundo o autor, esse processo consiste em inserir o indivíduo na cultura matemática, uma vez que os alunos precisam entrar em contato com valores, conceitos e simbolizações dela provenientes. Assim, para que a enculturação ocorra, os indivíduos precisam relacionar-se uns com os outros.

---

[6] Disponível em: <http://houaiss.uol.com.br/busca?palavra=cultura>. Acesso: 06/05/2014.

Outro processo considerado por este teórico é a *Aculturação*, que acaba contribuindo com a enculturação, pois pode se estabelecer a partir do conflito entre duas ou mais culturas gerando o aprendizado. Segundo Bishop (1999) *apud* Santana (2012), como cultura, a Matemática possui características próprias: valores, uma linguagem própria e símbolos específicos, sendo que o aprendizado dos estudantes a respeito de tais características será considerado um processo enculturador.

Na concepção do autor mencionado a enculturação matemática não aborda apenas o conteúdo curricular, mas também trata de outros processos. Todavia, como o foco da presente pesquisa está no interveniente currículo, nossa preocupação está em identificar elementos no livro didático adotado que o caracterizam como um currículo enculturador. Para isso, é necessário entender os princípios e componentes propostos por Bishop (1999), os quais atribuem ao currículo de Matemática um enfoque cultural.

Nos próximos tópicos desta seção 2.3, apresentaremos tanto os princípios, quanto os componentes propostos por Bishop (1999) destacando exemplos que caracterizam um currículo enculturador. Esses princípios e componentes nos fornecerão uma base para a análise do livro didático adotado, *Cálculo - Volume 1*, do autor James Stewart.

2.3.1 Princípio da representatividade

Este princípio está associado com a representação propícia da cultura matemática. Conforme Bishop (1999), não se deve apenas apropriar-se da tecnologia simbólica da matemática, ou seja, as atividades contar, medir, localizar, desenhar, jogar e explicar, mas também, há a importância de operar com os valores explícitos e formais da cultura matemática.

Em outras palavras, tal princípio procura incorporar e explicitar os conceitos matemáticos em situação de aprendizagem, então a partir do momento que o aluno assimila determinado conteúdo, este conhecimento torna-se mais significativo e, assim o estudante é capaz de transitar em diferentes representações do mesmo objeto matemático. No livro didático adotado para a análise, podemos exemplificar a presença desse princípio ao observar que o autor, primeiramente, nos fornece uma noção intuitiva do fenômeno estudado, no caso, as derivadas.

Não se apropria apenas do simbolismo matemático, mas traz explicações mais detalhadas sobre o conteúdo exemplificando-o de acordo com a cultura na qual o assunto está envolvido, por exemplo, trazendo a ideia da velocidade instantânea num ponto dado com a inclinação da reta tangente neste ponto, ideia esta pioneira no estudo de Newton, por exemplo. Nesse sentido, James Stewart não apresenta os conteúdos como um tratado fechado e pronto do conhecimento matemático, ao contrário disso, procura facilitar para o leitor a compreensão na prática do assunto. Podemos notar que há uma abertura[7] na conceitualização de derivada e não uma apresentação da definição sem uma abordagem intuitiva e prática que caracterizaria o mistério.

2.3.2 Princípio do formalismo

Com relação a este princípio, Bishop (1999) reforça a ideia de que é necessária uma ligação entre o nível informal e formal da conceitualização do conhecimento matemático estudado. É importante ressaltar que neste princípio não se pode dar primazia para apenas uma das formas, ou seja, informal ou formal. As atividades propostas devem introduzir os conceitos matemáticos tanto com terminologia informal quanto técnica. Stewart (2010) traz isso em sua abordagem do assunto derivadas.

Por exemplo, o aluno que está estudando esse assunto provavelmente possui a ferramenta da física referente ao estudo da velocidade média de um corpo em movimento e sabe-se que, geometricamente, representa a inclinação da reta secante ao gráfico da função, isto é, a reta que passa por dois pontos pertencentes ao gráfico. A partir de termos como “então fazemos Q aproximar-se de P ao longo da curva C” (STEWART, 2010, p. 130) chega-se a definir que “A reta tangente a $y = f(x)$ em $\big(a, f(a)\big)$ é a reta que passa em $\big(a, f(a)\big)$, cuja inclinação é igual $f'(a)$, a derivada de f em a” (STEWART, 2010, p. 133).

Notamos uma preocupação de apresentar termos menos técnicos e, com o entendimento da noção intuitiva, apresentar a formalização do conceito do

[7] No livro, *Enculturación matemática: La educación matemática desde una perspectiva cultural,* Bishop dedica um capítulo inteiro para explicar, *Los valores de la cultura Matemática*, dentre eles estão, o racionalismo e o objetivismo, o controle e o progresso e, a abertura e o mistério, considerados nessa ordem valores ideológicos, sentimentais e sociológicos. Vale mencionar aqui tais valores e destacá-los, pois estão relacionados não apenas com os princípios propostos por este autor, mas também com os componentes.

fenômeno. Stewart, ao apresentar situações reais para exemplificar o conceito de derivada, enquadra-se indiretamente no que Bishop discute em relação ao fato de que a Matemática “debería reflejar las conexiones entre las Matemáticas y la sociedad actual” (BISHOP, 1999, p. 128). Isso fica evidenciado no livro do Stewart (2010), exemplo 7, apresentado na figura abaixo:

EXEMPLO 7 Seja $D(t)$ a dívida pública bruta canadense no instante t. A seguinte tabela dá os valores aproximados dessa função, fornecendo as estimativas da dívida, em meados do ano, em bilhões de dólares, no período de 1994 a 2002. Interprete e estime os valores de $D'(1998)$.

t	$P(t)$
1994	414,0
1996	469,5
1998	467,3
2000	456,4
2002	442,3

Figura 2 – Exemplo para o princípio do formalismo.
Fonte: STEWART (2010, p. 135).

2.3.3 Princípio da acessibilidade

Para ser acessível aos alunos, a Matemática abordada tem que ser nivelada de maneira a apresentar conceitos mais básicos e, assim, ir aumentando o nível de dificuldade da aprendizagem. Isso vem ao encontro do que Bishop (1999) relata sobre o assunto a ser ensinado, pois o que ocorre muitas vezes é uma apresentação do conteúdo de cima para baixo, deixando os estudantes em desvantagem para entenderem, progredirem e aprofundarem seus estudos matemáticos.

Para ser enculturador, em relação ao princípio da acessibilidade, o currículo de matemática deve fornecer acesso à aprendizagem dos alunos. Para que isso seja possível, um dos caminhos percorridos pelos livros didáticos, por exemplo, é o de explorar noções intuitivas do assunto abordado, até chegar, finalmente, nas definições formais necessárias.

Em se tratando de situações cotidianas, Stewart (2010), em seu prefácio sobre o tema *Características*, traz um tópico chamado *Dados Reais.* Lá explica que ele e seus assistentes contataram até “agências governamentais e [ficaram] procurando na internet por dados do mundo real para introduzir, motivar e ilustrar os conceitos do cálculo" (STEWART, 2010, p.VII).

Ainda nesse mesmo tópico, o autor indica algumas figuras e exercícios do livro para ilustrar o uso de dados reais durante a explicação dos conteúdos ao longo dos capítulos. Na seção 1.1, por exemplo, Stewart apresenta em uma figura os sismogramas de um terremoto que abalou Northbridge, Los Angeles, em 1994 (vide figura 3) e, mostrando tal gráfico busca introduzir maneiras de representar uma função intuitivamente, não partindo, portanto, de uma definição formal. Isso aponta mais um indício de que o autor do livro se preocupa em fazer com que o conteúdo seja mais acessível aos alunos.

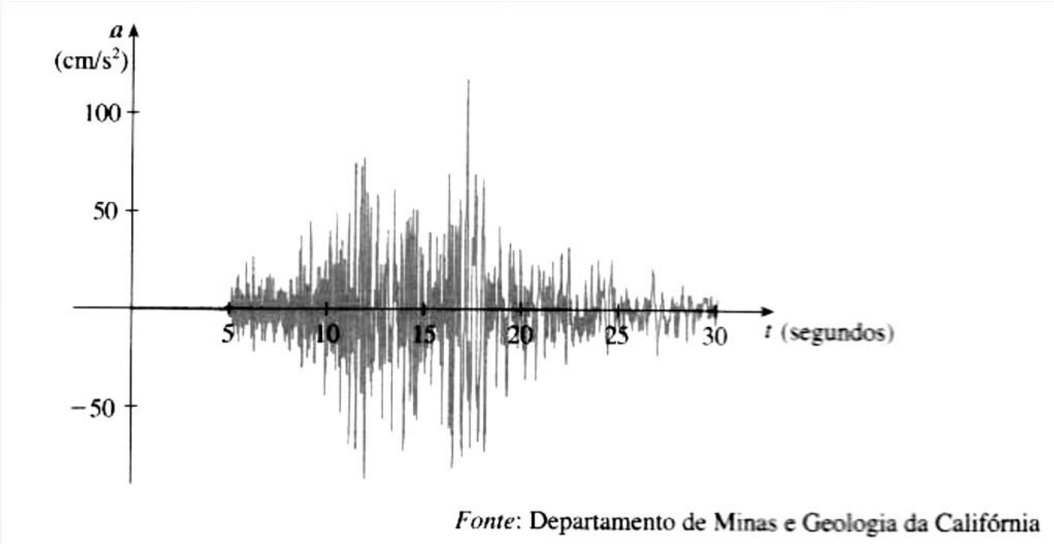


Figura 3 – Gráfico gerado pela atividade sísmica durante o terremoto.
Fonte: STEWART (2010, p. 03).

2.3.4 Princípio do poder explicativo

Este princípio promove nos alunos o poder de argumentar suas ideias exercitadas. O poder explicativo é uma consequência imediata do princípio da acessibilidade, pois, a partir do acesso que os alunos adquirem em relação ao conteúdo matemático, e de acordo com o seu progresso referente ao fenômeno estudado, podem explicar a matemática envolvida e fornecer significado a tais conceitos. Novamente, isso está de acordo com as ideias discutidas por Bishop (1999), já que afirma: "para que el poder explicativo se transmita, los fenómenos que hay explicar deben ser acessibles para todos los niños, deben ser ‹‹conocidos›› por todos ellos y deben estar sin explicar hasta entonces” (BISHOP, 1999, p. 129).

Podemos observar o fato descrito acima em alguns exercícios propostos por Stewart (2010), basta prestar atenção no seguinte enunciado:

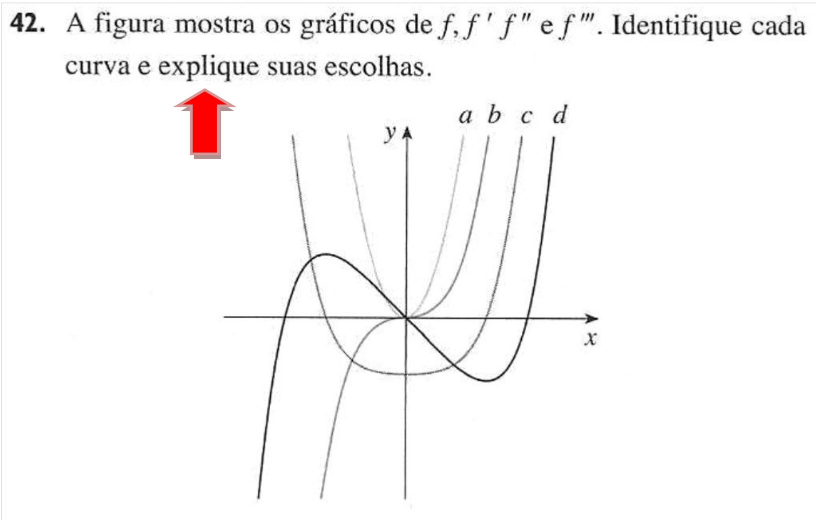


Figura 4 – Exercício referente ao tópico 2.8: *A derivada como uma função*.
Fonte: STEWART (2010, p. 150).

Observe que ao final do enunciado, ele solicita a explicação das escolhas feitas pelo aluno. Indiretamente, o autor busca no estudante o entendimento do conceito de derivada e, nesse caso, também a interpretação geométrica do assunto. Esse tipo de exercício fornece então, uma abertura para que o aluno exponha a construção e apropriação do conhecimento adquirido surgindo, assim, a oportunidade de institucionalização das ideias num contexto social.

2.3.5 Princípio da concepção ampla e elementar

Para Bishop (1999), este princípio é uma consequência direta do princípio do poder explicativo, pois o aluno pode explicar as ideias absorvidas a partir de diferentes concepções e contextos. Nesse sentido, o mesmo autor defende que “limitarse a ofrecer un mero ejemplo de una aplicación algorítmica dada puede conservar la pureza Matemática, pero no ayuda a explicar” (BISHOP, 1999, p. 130).

No quesito exemplos, Stewart (2010) traz uma diversificação de concepções e contextos para tratar a conceitualização de derivada tanto a partir de aplicações em outras áreas do conhecimento – Química, Física, Economia e Biologia – quanto aplicações dentro da própria Matemática. A figura abaixo mostra dois exemplos que retratam tal aspecto:

EXEMPLO 3 Suponha que a bola foi abandonada do posto de observação da torre, 450 m acima do solo.
(a) Qual a velocidade da bola após 5 segundos?
(b) Com qual velocidade a bola chega ao solo?

EXEMPLO 6 Um fabricante produz peças de fazenda com largura fixa e o custo da produção de x metros desse material é $C = f(x)$.
(a) Qual o significado da derivada $f'(x)$? Quais suas unidades?
(b) Em termos práticos, o que significa dizer que $f'(1\,000) = 9$?
(c) O que você acha que é maior, $f'(50)$ ou $f'(500)$? E $f'(5\,000)$?

Figura 5 – Exemplos contextualizados em diferentes áreas do conhecimento.
Fonte: STEWART (2010, p. 132 a 134).

Observe que, no primeiro exemplo, Stewart (2010) traz uma aplicação no contexto da Física. Já no segundo, exibe uma aplicação referente ao custo e à produção de peças que acaba se encaixando bem nas áreas de Economia e Ciências Contábeis, por exemplo.

Essa concepção de abertura, ao introduzir um conceito matemático, fazendo uma abordagem de acordo com vários campos do conhecimento e ao mesmo tempo partindo de ideias básicas (elementares), vem ao encontro do princípio da concepção ampla e elementar no sentido de enfatizar a presença das aplicações em um contexto cotidiano do aluno, evitando assim, inquietações do tipo “para que serve esse conceito?” , “professora, onde usarei isso?”.

2.3.6 Componente simbólico

Segundo Bishop (1999), esse componente enculturador do currículo de Matemática está organizado em torno de seis atividades: *contar*, *localizar*, *medir*, *desenhar*, *jogar* e *explicar*. A ideia é que esse currículo proponha ações que se relacionem com tais atividades interligando-as em diferentes áreas do saber matemático. No que se refere à estrutura curricular, Bishop (1999) acredita que ao identificar as seis atividades acima mencionadas, independente dos conceitos tratados, haverá uma representação de diferenças e similaridades de ideias matemáticas presentes em outras culturas.

Para Bishop, *contar* está associado a quantificadores discretos do sistema posicional tanto no que tange contar com os dedos quanto nas operações aritméticas com os números. O fato de *medir* está conectado a quantificadores contínuos, como tempo, área, volume, velocidade, entre outros exemplos. Com relação à atividade *localizar*, Bishop (1999) associa uma estrutura geométrica-espacial referente ao posicionamento de um objeto seja ele físico ou matemático.

Em relação a um objeto físico, podemos citar a localização de um móvel em um sistema de coordenadas presentes em mapas e um objeto matemático pode ser as coordenadas do centro de uma circunferência. Já a atividade *desenhar* trata de maneira geral do formato dos objetos, as formas geométricas bidimensionais e tridimensionais, as figuras, os gráficos e, de acordo com Bishop, "la actividad de diseñar en general quizá se la más poderosa para transmitir valores relacionados con la interacción Matemáticas/entorno" (BISHOP, 1999, p. 135).

Pelo fato de ser considerada uma atividade regida por regras, *jogar* está diretamente associado à interação social. Também é passível de entendimento quando cita que nessa atividade há a presença de estratégias, planos e procedimentos, como no caso das soluções de exercícios desafiadores para os alunos, criados para exercitar a parte cognitiva e estimulá-los vencer obstáculos. Como em um jogo qualquer, a competição promove a tentativa de querer vencer e uma das estratégias utilizadas ao *jogar* é o raciocínio lógico.

Por fim, a atividade *explicar* se relaciona com a explicação propriamente dita dos fenômenos matemáticos estudados. Bishop (1999) exemplifica algumas maneiras de explicar, por exemplo, explicações de relatos, explicações linguísticas (demonstrações matemáticas), explicações simbólicas (funções) e explicações figurativas (gráficos, diagramas e tabelas). O aluno, ao estar familiarizado com o fenômeno matemático estudado, é capaz de socializá-lo diante do público, explicando-o.

2.3.7 Componente social

Este componente tem como principal característica a exemplificação de como a sociedade faz uso das explicações matemáticas permitindo, assim, que o aluno adquira uma consciência crítica dos saberes matemáticos e de como a Matemática pode ser usada na sociedade (BISHOP, 1999). Para o autor, é importante que o aluno crie ligações entre as sociedades do passado, presente e futuro.

Como o componente social é baseado em currículos que estimulam projetos, então, para Bishop (1999), há três aspectos de projetos que, por terem um valor especial, destacam-se em tal componente, são eles:

(1) o ensino individualizado e personalizado está ausente nos projetos curriculares de Matemática, então há a necessidade de elaboração de projetos que permitam a participação pessoal neste aspecto, pois situações obtidas de forma individual geram a socialização do fenômeno;

(2) neste outro ponto, destacamos projetos em que o aluno possa adquirir progresso em seu aprendizado de acordo com a interpretação e a explicação de situações cotidianas vivenciadas por ele. Isso é possível quando o próprio aluno busca e pesquisa ideias matemáticas presentes em diversos tipos de materiais, por exemplo, internet, revistas, livros, filmes, etc.;

(3) o fato de o aluno participar de projetos faz com que a exercitação se dê em um nível maior de reflexão do fenômeno estudado. Assim, com o apoio do docente, analisa as relações entre ideias aplicadas à Matemática e aquelas existentes em um modelo concreto para então ocorrer o processo de análise crítica tão necessária em um currículo enculturador de Matemática.

2.3.8 Componente cultural

De acordo com Bishop (1999), esse é um componente baseado em investigações, ou seja, um currículo enculturador de acordo com o componente cultural[8] deve proporcionar ao aluno atividades que promovam análises investigativas referentes a uma problemática proposta. Nesse componente surge a necessidade de responder a questões do tipo “como as ideias matemáticas surgiram?” ou “por que as ideias matemáticas surgiram?”, pois, segundo Bishop (1999), enquanto os componentes simbólico e social evidenciam a importância de conhecer e utilizar os saberes matemáticos, o cultural tem como premissa ir além e descobrir o real sentido do surgimento das ideias matemáticas.

[8] É importante comentar nesse momento sobre a questão cultural considerada por Bishop (1999), para evitar uma interpretação incorreta, uma vez que para ele a cultura pode ou não estar relacionada com aspectos históricos. O autor considera a cultura da própria Matemática, que independe de fatos históricos.

É possível interpretar esse componente na questão do aprofundamento e abstração matemática, de acordo com o surgimento dos conceitos matemáticos necessários à sociedade, sejam eles do passado ou do presente. Tendo a ferramenta matemática em mãos, o próximo passo é formalizá-la, integrando-a entre os três componentes apresentados. De fato, a investigação do aluno e seu crescente senso crítico em relação ao fenômeno matemático estudado, proporciona um maior aprendizado.

2.4 Metodologia de Pesquisa

De acordo com o objetivo do estudo, a metodologia de pesquisa que fundamentou esta investigação foi do tipo qualitativa, uma vez que a partir de outros estudos realizados e obras consultadas é que se concretizou. Segundo Neves (1996), na pesquisa qualitativa o investigador busca compreender o fenômeno estudado a partir do levantamento de dados referentes a cada participante que, neste caso, é o livro didático Cálculo Volume 1 de James Stewart e a teoria de Alan Bishop e, assim, entender e interpretar a problemática estudada expondo-a em um contexto social. O pesquisador, ao consultar e analisar os fenômenos que o interessam, precisa formular uma interpretação que melhor represente aquilo que pensa sobre o objeto de estudo.

Além disso, cabe observarmos também que a metodologia de pesquisa pode ser realizada utilizando diferentes estratégias, no entanto, para o presente trabalho a proposta é um estudo de cunho bibliográfico. De acordo com Fonseca (2002), tal estudo é realizado por meio de referências levantadas em relação ao problema de pesquisa por meio de teorias já publicadas em diversas fontes, ou seja, livros, artigos, acervos virtuais, bibliotecas, entre outros. Desta forma, a leitura do livro didático adotado nos fez identificar e verificar os princípios e componentes propostos por Bishop (1999) nos seguintes segmentos: teorização, exemplificação e exercitação do livro analisado.

A pesquisa bibliográfica nos permitirá progredir em conhecimento tanto na teoria de Alan J. Bishop quanto na análise do livro didático *Cálculo, volume 1* de James Stewart. Isso não quer dizer que outras referências bibliográficas estão descartadas para o objeto de pesquisa deste trabalho. Este tipo de pesquisa nos proporcionará uma análise de diferentes autores com relação à teoria de Alan J. Bishop e o conteúdo do fenômeno pesquisado, ou seja, as derivadas.

A análise bibliográfica propiciará a verificação de que o livro didático de CDI contém ou não os componentes e princípios propostos por Bishop (1999), no que tange um currículo de Matemática enculturador.

Em relação à pesquisa qualitativa, Bogdan e Biklen (1994) nos apresentam características essenciais deste tipo de pesquisa, sendo tais:

1. *a pesquisa qualitativa tem o ambiente natural como fonte direta de dados*: aqui o pesquisador despende bastante tempo com o ambiente e a problemática estudada, sendo que, frequentemente estão nos locais de estudo por se preocupar com o contexto da situação. A fonte mais confiável de observação, interpretação e análise, neste caso, é o próprio livro.
2. *a pesquisa qualitativa é descritiva:* prevalecem aqui os dados em forma de palavras, escritas ou em áudio e, pode ou não apresentar dados numéricos ou estatísticos. A descrição interpretada dos dados terá papel fundamental, sendo que esta interpretação está baseada nos documentos que foram investigados pelo pesquisador.
3. *interesse mais pelo processo do que pelos resultados ou produtos*: aqui há uma forte ligação com o item a seguir. O processo de pesquisa é mais importante, pois o investigador não está preocupado em colher provas para confirmar hipóteses construídas.
4. *tendência de analisar os dados de forma indutiva*: seguindo a linha do item anterior, por não partir de hipóteses estabelecidas, o interesse está em questões amplas da situação. O exemplo disso está presente neste trabalho, ou seja, investigar os componentes propostos por Bishop (1999) presentes no livro didático escolhido, Cálculo Volume 1, James Stewart. Fica aqui evidenciado que não estamos partindo de questões prioritárias, mas sim das construções de investigações e das abstrações a partir dos dados coletados desenvolvendo a teoria conforme a coleta e exame de dados.
5. *o significado é de importância vital*: aqui há a importância de que o pesquisador qualitativo aprenda com as diferentes perspectivas, estabelecendo "estratégias e procedimentos que lhes permitam tomar em consideração as experiências do ponto de vista do informador" (Bogdan; Biklen, 1994, p. 50).

Sendo assim, tratando-se de uma pesquisa qualitativa, procuramos entender o objeto de estudo de acordo com os participantes da situação, ou seja, a conceitualização do estudo das derivadas trazido por Stewart (2010) relacionando-o com os princípios e componentes propostos por Bishop (1999). E, como consequência disso, interpretar o fenômeno estudado com relação à definição de currículo apresentada anteriormente.

Escolhemos para análise, em particular, no capítulo 2 do livro adotado, os tópicos: 2.7 *Derivadas e taxas de variação* e, 2.8 *A derivada como uma função*, pois tais conteúdos, ao serem abordados, indicam a presença dos aspectos discutidos por Bishop (1999), necessários para caracterizar um currículo enculturador.

Os capítulos a seguir irão apresentar a análise do livro didático adotado, em relação aos tópicos acima citados à luz teoria de Alan J. Bishop referente aos *componentes*: simbólico, social e cultural e aos *princípios* propostos: representatividade, formalismo, acessibilidade, poder explicativo e concepção ampla e elementar.

3. ANÁLISE DO LIVRO DIDÁTICO ACERCA DOS COMPONENTES

A presente análise será iniciada, a partir do capítulo 2 do livro adotado – *Cálculo Volume 1* de James Stewart – cujo título é *Limites e Derivadas*, especificamente, nos tópicos:

- 2.7 *Derivadas e taxas de variação*.
- 2.8 *A derivada como uma função*.

A escolha em especificar tal capítulo se deve à familiaridade com o assunto derivadas e à identificação de elementos que possibilitam relacioná-lo com a teoria estudada, tais como a forma com que o autor apresenta o conteúdo e se preocupa não apenas em definir os objetos matemáticos, mas também em explorar as ideias de forma intuitiva, apresentar suas aplicações e ainda exercícios contextualizados.

3.1 Análise do tópico: *Derivadas e taxas de variação*.

Neste tópico, antes de definir formalmente logo de início o conceito de derivada, Stewart (2010) apresenta quatro seções, iniciando com “Tangentes” e “Velocidades”. Somente após essas discussões ele discorre sobre as “Derivadas”, em que mostra a definição de derivada em um ponto e, por fim, uma seção chamada “Taxas de Variação”.

Na primeira – Tangentes – o autor mostra como obter o coeficiente angular da reta tangente em um dado ponto de uma curva apenas utilizando os conceitos apresentados sobre limites de funções, sem mencionar o termo derivada conforme a figura abaixo:

TANGENTES

Se uma curva C tiver uma equação $y = f(x)$ e quisermos encontrar a tangente a C em um ponto $P(a, f(a))$, consideramos um ponto próximo $Q(x, f(x))$, onde $x \neq a$, e calculamos a inclinação da reta secante PQ:

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Então fazemos Q aproximar-se de P ao longo da curva C ao obrigar x tender a a. Se m_{PQ} tender a um número m, então definimos a *tangente t* como a reta que passa por P e tem inclinação m. (Isso implica dizer que a reta tangente é a posição-limite da reta secante PQ quando Q tende a P. Veja a Figura 1.)

1 DEFINIÇÃO A **reta tangente** a uma curva $y = f(x)$ em um ponto $P(a, f(a))$ é a reta por P que tem a inclinação

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

desde que esse limite exista.

Figura 6 – Introdução do conceito de derivada de acordo com o tópico 2.7.
Fonte: Stewart (2010, p. 130)

Observe que, primeiramente, o autor faz menção de como encontrar a reta tangente em um dado ponto, a partir da inclinação da reta secante e ilustra como isso ocorre de acordo com os gráficos a seguir:

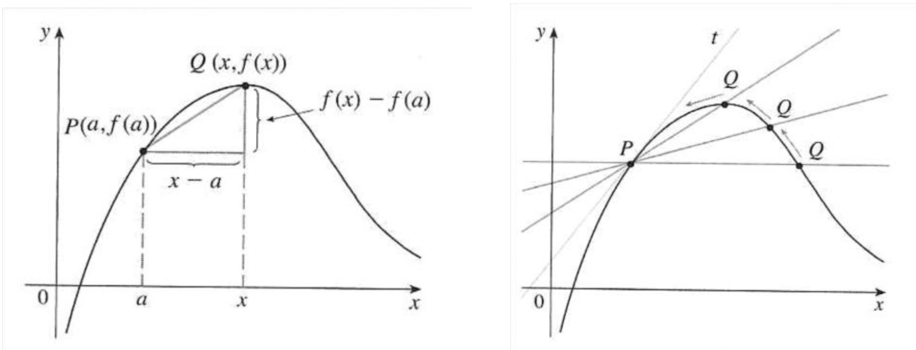


Figura 7 – Aproximação à reta tangente a partir do limite das retas secantes.
Fonte: Stewart (2010, p. 130)

Dessa maneira, como acabamos de detalhar a forma como o autor introduz o assunto, é possível identificar neste momento a presença do *componente social* proposto por Bishop, uma vez que Stewart se preocupa em desenvolver o conhecimento do aluno estimulando-o a progredir, construir o conhecimento, não apenas decorar um conceito, por exemplo. Além disso, pelo uso de gráficos, podemos identificar também as atividades *localizar e desenhar* presentes no *componente simbólico*, pois explica geometricamente e, também, intuitivamente, o limite das retas secantes, isto é, a aproximação do ponto Q ao ponto P o qual indicará a inclinação da reta tangente e a posição dessa reta.

Após a discussão sobre tangentes, há dois exemplos que exploram como encontrar a equação da reta tangente a uma curva num dado ponto, fazendo o cálculo em duas etapas. Na primeira, calcula-se o coeficiente angular da reta tangente por meio do limite da função que determina a taxa de variação média e, na segunda etapa, utiliza-se a equação da reta dada por $y - y_1 = m(x - x_1)$ e substituindo os dados – ponto fornecido e coeficiente calculado – apresenta-se a equação da reta tangente no ponto (x_1, y_1). As figuras a seguir mostram os exemplos comentados.

EXEMPLO 1 Encontre uma equação da reta tangente à parábola $y = x^2$ no ponto $P(1, 1)$.

SOLUÇÃO Temos aqui $a = 1$ e $f(x) = x^2$, logo a inclinação é

$$m = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} (x + 1) = 1 + 1 = 2$$

Usando a forma ponto-inclinação da reta, encontramos que uma equação da reta tangente em $(1, 1)$ é

$$y - 1 = 2(x - 1) \qquad \text{ou} \qquad y = 2x - 1$$

□

Figura 8 – Exemplo 1
Fonte: Stewart (2010, p. 130)

EXEMPLO 2 Encontre uma equação da reta tangente à hipérbole $y = 3/x$ no ponto $(3, 1)$.

SOLUÇÃO Seja $f(x) = 3/x$. Então a inclinação da reta tangente em $(3, 1)$ é

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(3 + h) - f(3)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{3}{3 + h} - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{3 - (3 + h)}{3 + h}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-h}{h(3 + h)} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{3 + h} = -\frac{1}{3}$$

Portanto, uma equação da reta tangente no ponto $(3, 1)$ é

$$y - 1 = -\tfrac{1}{3}(x - 3)$$

que se simplifica para $\qquad x + 3y - 6 = 0$

A hipérbole e sua tangente estão na Figura 4. □

Figura 9 – Exemplo 2
Fonte: Stewart (2010, p. 131)

Nos exemplos acima, podemos identificar regras e estratégias utilizadas por Stewart ao apresentar a equação da reta tangente passando pelos pontos fornecidos. Primeiramente, o autor utilizou a definição de inclinação da reta tangente em um ponto sem, até o momento, mencionar a palavra “derivada” no texto, para encontrar o coeficiente angular da reta. Após isso, utilizou o que ele chama de “forma ponto-inclinação” da equação da reta para determinar a reta tangente em cada ponto mencionado.

Vale comentar que exemplos desse tipo são importantes, pois evidenciam o simbolismo matemático, fundamental para o aluno aprender expressar-se matematicamente, não apenas usando representações textuais e geométricas, mas também utilizando a linguagem algébrica, que demonstra o domínio de mais uma parte da matemática.

Na seção “Velocidades”, o termo derivada ainda não é mencionado, porém a partir da associação entre a velocidade média e a inclinação da reta secante, o autor desenvolve o conceito de velocidade instantânea considerando intervalos na reta cada vez menores em relação ao tempo, ou seja, aproximando as inclinações da reta a um determinado ponto. A representação geométrica sobre a velocidade média é apresentada pelo autor por meio do seguinte gráfico:

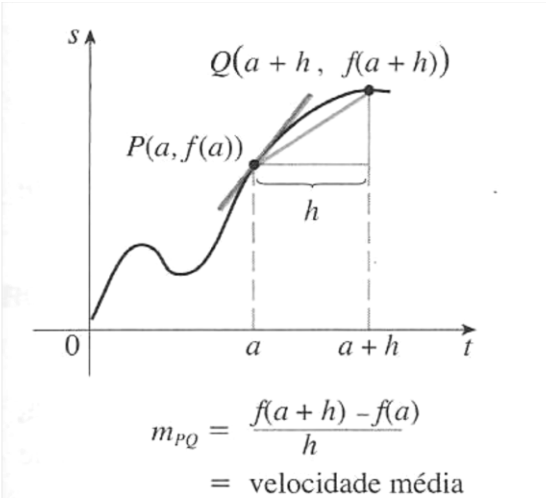


Figura 10 – Gráfico de posição ***versus*** tempo.
Fonte: Stewart (2010, p. 131)

Cabe salientar que a inclinação da reta PQ, secante à curva s é a velocidade média no intervalo $[a, a + h]$. A reta que passa no ponto $P(a, f(a))$ é tangente à curva s quando $t = a$, que foi obtida por meio do limite das retas secantes conforme h fica cada vez menor. Portanto, a velocidade instantânea quando $t = a$ é ilustrada no livro da seguinte forma:

$$\boxed{v(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}}$$

Figura 11 – Velocidade instantânea.
Fonte: Stewart (2010, p. 132)

Das situações acima mencionadas, podemos identificar a presença do *componente social*, pois a utilização do conceito físico de velocidade média e velocidade instantânea possibilita que o estudante, por intermédio das ideias matemáticas, compreenda a ideia por trás do conceito físico e vice-versa.

Assim, até o presente momento, Stewart, partindo de ideias intuitivas, apresentou implicitamente o conceito de derivada sem defini-la formalmente. Na próxima seção, chamada “Derivadas”, o autor enuncia a definição formal deste conceito, como mostra a figura abaixo:

$\boxed{4}$ **DEFINIÇÃO** **A derivada de uma função f em um número a**, denotada por $f'(a)$, é

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

se o limite existir.

Figura 12 – Definição de derivada no ponto.
Fonte: Stewart (2010, p. 133)

A formalização do conceito de derivada por meio da definição acima mostra a presença do *componente cultural* que possibilita a investigação para responder a questões do tipo “por que houve a necessidade do conceito de derivada?” permitindo, assim, entrar em contato com as ideias dos matemáticos no passado.

Até agora, Stewart tratou de encontrar uma reta tangente à determinada curva, a partir do limite das retas secantes até chegar ao conceito formal de derivada. Agora, em “Taxas de Variação”, outro assunto discutido durante este capítulo, o autor refere-se às derivadas como sendo uma taxa de variação instantânea. Assim, sendo y uma variável que depende da quantidade x tal que $y = f(x)$ e, pensando no intervalo $[x_1, x_2]$, temos $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$ e $\Delta x = x_2 - x_1$. O quociente de diferenças do tipo $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ é denominado taxa de variação média. A representação geométrica apresentada pelo autor ilustra tanto a taxa de variação média, quanto à taxa de variação instantânea:

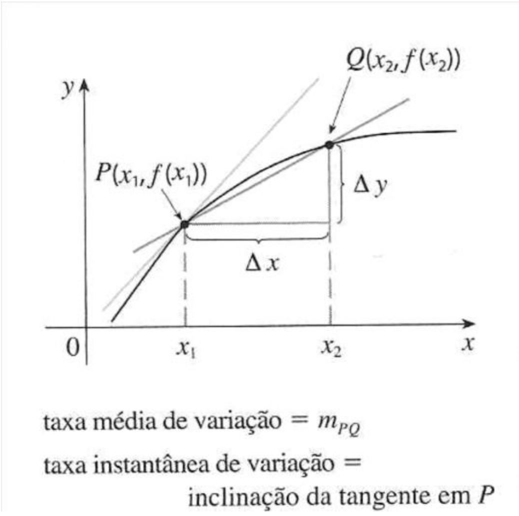


Figura 13 – Representação da derivada como taxa de variação instantânea.
Fonte: Stewart (2010, p. 134)

Além disso, representa algebricamente a taxa de variação instantânea, como:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Após a abordagem acima, o autor apresenta dois exemplos e, posteriormente, focaliza um conjunto de exercícios. Os primeiros cobram conceitos, por exemplo, calcular a inclinação da reta secante e da reta tangente. A figura a seguir mostra o primeiro exercício da lista proposta:

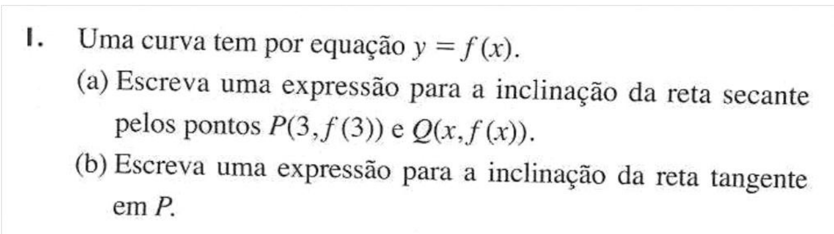

1. Uma curva tem por equação $y = f(x)$.
(a) Escreva uma expressão para a inclinação da reta secante pelos pontos $P(3, f(3))$ e $Q(x, f(x))$.
(b) Escreva uma expressão para a inclinação da reta tangente em P.

Figura 14 – Exercício 1 retirado do tópico 2.7.
Fonte: Stewart (2010, p. 136)

Os próximos exercícios, do décimo primeiro até o décimo sexto, são baseados em conceitos físicos como a velocidade instantânea dada a função posição. Como no caso do exercício a seguir:

13. Se uma bola for atirada ao ar com uma velocidade de 10 m/s, sua altura (em metros) depois de t segundos é dada por $y = 10t - 4{,}9t^2$. Encontre a velocidade quando $t = 2$.

Figura 15 – Exercício 13 retirado do tópico 2.7.
Fonte: Stewart (2010, p. 137)

Nos demais exercícios, décimo sétimo ao trigésimo, o autor solicita ao estudante o conceito de derivada analisada em pontos específicos, ou seja, exige uma análise gráfica mais detalhada sobre como interpretar a derivada geometricamente. Por exemplo, o exercício 17 ilustrado abaixo.

17. Para a função g cujo gráfico é dado, arrume os seguintes números em ordem crescente e explique seu raciocínio:

$$0 \qquad g'(-2) \qquad g'(0) \qquad g'(2) \qquad g'(4)$$

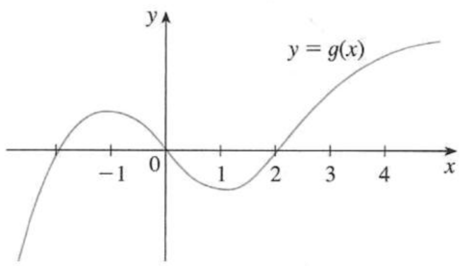


Figura 16 – Exercício 17 retirado do tópico 2.7.
Fonte: Stewart (2010, p. 137)

O exercício acima requer que o estudante seja capaz de fazer o seguinte raciocínio: quanto maior a inclinação da reta tangente num dado ponto, maior o valor numérico da derivada. Além disso, é possível verificar neste exercício a presença do *componente simbólico*, mais especificamente as atividades *contar*, *localizar* e *desenhar*.

Outra observação pertinente, até o momento, é destacar a quantidade de vezes que tais atividades aparecem. A questão da representação gráfica, por exemplo, largamente explorada durante o texto de Stewart (2010), está diretamente ligada com as ações *desenhar* e *explicar*, atividades existentes no *componente simbólico* proposto por Bishop (1999).

O conjunto de exercícios – 25 a 30 – requer uma resolução por meio da definição de derivada em um ponto genérico, denominado “a”. Diferente dos exercícios analisados até agora, este conjunto de exercício não traz um enunciado contextualizado, apenas cobra indiretamente o coeficiente angular da reta tangente no ponto “a”. Vide figura a seguir.

25–30 Encontre $f'(a)$.

25. $f(x) = 3 - 2x + 4x^2$

26. $f(t) = t^4 - 5t$

27. $f(t) = \dfrac{2t+1}{t+3}$

28. $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-2}$

29. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$

30. $f(x) = \sqrt{3x+1}$

Figura 17 – Exercícios 25 a 30 retirados do tópico 2.7.
Fonte: Stewart (2010, p. 137)

Do exercício 31 ao 36, a exigência é fazer o processo inverso do que foi realizado até agora, ou seja, a partir do limite que determina a derivada no ponto o leitor encontrará a função e o ponto que passará à reta tangente em $(a, f(a))$.

31–36 Cada limite representa a derivada de certa função f em certo número a. Diga quem é f e a em cada caso.

31. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(1+h)^{10} - 1}{h}$

32. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt[4]{16+h} - 2}{h}$

33. $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{2^x - 32}{x-5}$

34. $\lim\limits_{x \to \pi/4} \dfrac{\operatorname{tg} x - 1}{x - \pi/4}$

35. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\cos(\pi + h) + 1}{h}$

36. $\lim\limits_{t \to 1} \dfrac{t^4 + t - 2}{t - 1}$

Figura 18 – Exercícios 31 a 36 retirados do tópico 2.7.
Fonte: Stewart (2010, p. 137 e 138)

Vale comentar aqui que tais enunciados cobram a resolução propriamente do exercício, ou seja, se o estudante não souber calcular limite, por exemplo, o exercício não fornece elementos que o ajudam a chegar à resolução, assim, verificamos a predominância do simbolismo matemático em tais exercícios, o que requer um conhecimento específico.

Já os exercícios 37 e 38 envolvem conceitos de cinemática. A partir da derivada, pede para encontrar a velocidade e a velocidade escalar num dado ponto.

37-38. Uma partícula se move ao longo de uma reta com equação de movimento $s = f(t)$, em que s é medido em metros e t em segundos. Encontre a velocidade e a velocidade escalar quando $t = 5$.

37. $f(t) = 100 + 50t - 4{,}9t^2$ **38.** $f(t) = t^{-1} - t$

Figura 19 – Exercícios 37 e 38 retirados do tópico 2.7.
Fonte: Stewart (2010, p. 138)

Em se tratando do *componente social* proposto por Bishop (1999), os exercícios finais deste bloco – 39 ao 50 – tratam de fenômenos reflexivos, ou seja, permitem a análise de situações reais por intermédio do conceito de taxa de variação média e instantânea. Para resolver esse tipo de exercício, considerado situação-problema, é possível utilizar diversas ferramentas, dentre elas, utilizar conhecimento prévio adquirido por experiências sociais e culturais de cada indivíduo, além de transitar entre abordagens geométricas e analíticas ou até mesmo ambas, concomitantemente. Como no caso do exercício que iremos analisar a seguir:

39. Uma lata de refrigerante morna é colocada na geladeira. Esboce o gráfico da temperatura do refrigerante como uma função do tempo. A taxa de variação inicial da temperatura é maior ou menor que a taxa de variação após 1 hora?

Figura 20 – Exercício 39 retirado do tópico 2.7.
Fonte: Stewart (2010, p. 138)

Conforme o enunciado citado, ao pensar na situação-problema proposta, algumas estratégias que o estudante poderá utilizar para chegar à resolução são: desenhar um gráfico que ilustre a variação de temperatura em função do tempo; ou, fazer uma análise real da situação, pensando num experimento real, mesmo sabendo previamente que após uma hora o refrigerante irá resfriar em relação à temperatura inicial. Isso nos permite inferir sobre a presença do *componente social*, pois a atividade proposta possibilita o aluno refletir sobre a problemática a partir de uma situação real e, também, socializar a solução do exercício em sala de aula.

Para melhor ilustrar a interpretação dos exercícios deste bloco, basta observar também, a proposta existente no seguinte enunciado:

41. A tabela mostra a estimativa da porcentagem da população da Europa que usa telefones celulares. (Estimativas dadas para meados do ano.)

Ano	1998	1999	2000	2001	2002	2003
P	28	39	55	68	77	83

(a) Encontre a taxa média do crescimento do número de celulares (i) de 2000 a 2002 (ii) de 2000 a 2001 (iii) de 1999 a 2000
Em cada caso, inclua as unidades.

(b) Estime a taxa instantânea de crescimento em 2000 tomando a média de duas taxas médias da variação. Quais são suas unidades?

(c) Estime a taxa instantânea de crescimento em 2000 medindo a inclinação de uma tangente.

Figura 21 – Exercício 41 retirado do tópico 2.7.
Fonte: Stewart (2010, p. 138)

Esse tipo de enunciado possibilita tanto reflexões acerca da análise matemática da situação, quanto das consequências na sociedade, podendo causar no leitor indagações sobre o aumento do número de usuários de telefones celulares, suas vantagens e desvantagens. Como visto na figura, o exercício 41 traz uma tabela com estimativas do aumento da porcentagem de usuários de telefones celulares na Europa entre 1998 e 2003. Esses dados podem ser adaptados para o Brasil podendo gerar reflexões acerca de vantagens e riscos que essas tecnologias crescentes podem trazer para a sociedade. Assim, tal exercício permite que o aluno consiga resolvê-lo usando não somente os conhecimentos de cálculo, mas também noções que adquiriu ao longo de sua vivência escolar ou mesmo ideias decorrentes de outras fontes. Porém, cabe ao professor estimular esse tipo de tratamento ao exercício, ou seja, o livro não sugere tais adaptações, mas o professor pode aproveitar essa abertura que o exercício proporciona e solicitar aos alunos que reflitam sobre esse outro ponto de vista.

Pensando na análise acima mencionada e no exercício 41, o cálculo pode nos dar ideia do crescimento atual e fazer previsões futuras do quanto aumentará ou diminuirá, neste caso, o número de usuários de telefones celulares com o passar dos anos. Enquanto isso cabe mencionar que o raciocínio empregado nesse exercício, também pode ser utilizado em outras situações. O cálculo, assim como outros conteúdos matemáticos, permite fazer generalizações.

Esse assunto se enquadra perfeitamente no *componente social* proposto por Bishop (1999), pois desenvolve uma consciência crítica empregando os conceitos matemáticos necessários e suas ferramentas, a fim de analisar os efeitos positivos e negativos que esse estudo fornece para a sociedade. Mais uma vez, cabe lembrar que para isso ocorrer há a necessidade de medidas tomadas pelo professor, pois o livro não amplia para essa discussão, apenas da margem para sua exploração. O exercício por si só não contempla todas as ideias mencionadas, mas com o auxílio do professor isso se torna possível.

Na sequência, os exercícios até o quinquagésimo também trazem situações com a mesma perspectiva, sendo os dois últimos – 51 e 52 – referentes à existência da derivada das funções quando $x = 0$, ou seja, que cobram puramente a interpretação do conceito, sem contextualizá-los a partir de uma situação realística.

No fim da lista de exercícios, há um quadro chamado “Projeto Escrito”, em que identificamos uma das características do *componente social* proposto por Bishop, pois essa passagem possui fragmentos sobre o uso da Matemática pelas sociedades do passado. Stewart (2010), em “Métodos iniciais para encontrar as tangentes”, propõe ao leitor pesquisar acerca de como matemáticos anteriores, por exemplo, Fermat e Barrow, encontravam tangentes antes do método de Newton, conhecido como fluxões. A figura seguinte retrata o quadro mencionado.

PROJETO ESCRITO

MÉTODOS INICIAIS PARA ENCONTRAR AS TANGENTES

A primeira pessoa a formular explicitamente as ideias de limite e derivada foi Sir Isaac Newton, em 1660. Mas Newton reconhecia que “Se vejo mais longe do que outros homens é porque estou sobre os ombros de gigantes”. Dois desses gigantes eram Pierre Fermat (1601-1665) e o professor de Newton em Cambridge, Isaac Barrow (1630-1677). Newton estava familiarizado com os métodos deles para encontrar as retas tangentes, e esses métodos desempenharam papel importante na formulação final do cálculo de Newton.

As seguintes referências contêm explicações desses métodos. Leia uma ou mais referências e escreva um relatório comparando os métodos ou de Fermat ou de Barrow com os métodos modernos. Em particular, use o método da Seção 2.7 para encontrar uma equação da reta tangente à curva $y = x^3 + 2x$ no ponto $(1, 3)$ e mostre como Fermat ou Barrow teriam resolvido o mesmo problema. Embora você tenha usado as derivadas e eles não, mostre a analogia entre os métodos.

1. BOYER, Carl; MERZBACH, Uta. *A History of Mathematics*. Nova York: John Wiley, 1989, p. 389, 432.
2. EDWARDS, C. H. *The Historical Development of the Calculus*. Nova York: Springer-Verlag, 1979, p. 124, 132.
3. EVES, Howard. *An Introduction to the History of Mathematics*. 6. ed. Nova York: Saunders, 1990, p. 391, 395.
4. KLINE, Morris. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. Nova York: Oxford University Press, 1972, p. 344, 346.

Figura 22 – Quadro: Projeto escrito, *componente social.*
Fonte: Stewart (2010, p. 139)

3.2 Análise do tópico: *A derivada como uma função*.

Enquanto o tópico 2.7 desenvolveu o conceito de derivada no ponto, agora, no 2.8, o autor trabalha a derivada como uma função, isto é, ao invés de pensarmos na derivada em um ponto específico, agora será possível determiná-la em todos os pontos que o limite exista. Como Stewart (2010) ilustra logo no início:

Na seção precedente consideramos a derivada de uma função f em um número fixo a:

$$\boxed{1} \qquad f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Aqui, mudamos nosso ponto de vista e vamos variar o número a. Se substituirmos a na Equação 1 por uma variável x, obteremos

$$\boxed{2} \qquad f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Figura 23 – Introdução do conteúdo: “A derivada como uma função” de acordo com o tópico 2.8 do livro de Cálculo analisado.
Fonte: Stewart (2010, p. 140)

Aqui podemos identificar, novamente, o *componente cultural* em relação à formalização do saber matemático por intermédio da definição da função derivada de maneira análoga à definição de derivada no ponto.

Após essa apresentação do novo conteúdo, Stewart (2010) utiliza alguns exemplos para auxiliar na explicação de como é o funcionamento da derivada como uma função. Os exemplos são abordados gráfica e analiticamente, uma vez que a contextualização ocorre dentro do conceito matemático sem trazer situações aplicadas em um cotidiano específico.

O exemplo 1 fornece o gráfico de uma função f genérica e, analisando-o, solicita o esboço do gráfico da função derivada de f de acordo com as figuras a seguir:

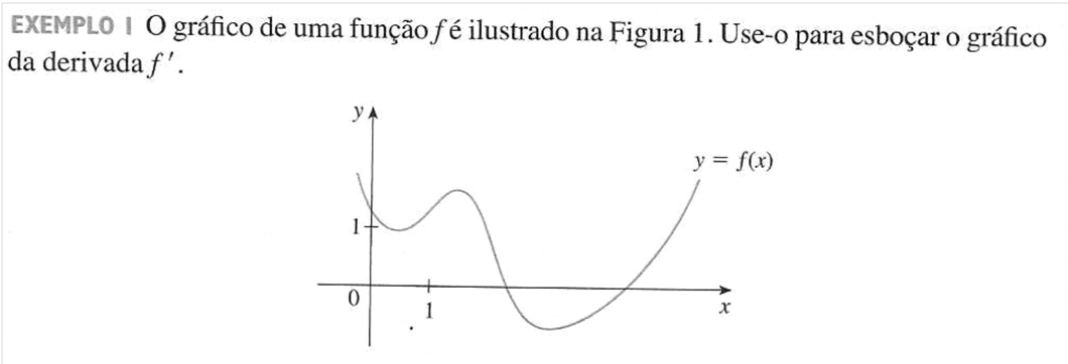


Figura 24 – Enunciado do exemplo 1.
Fonte: Stewart (2010, p. 140)

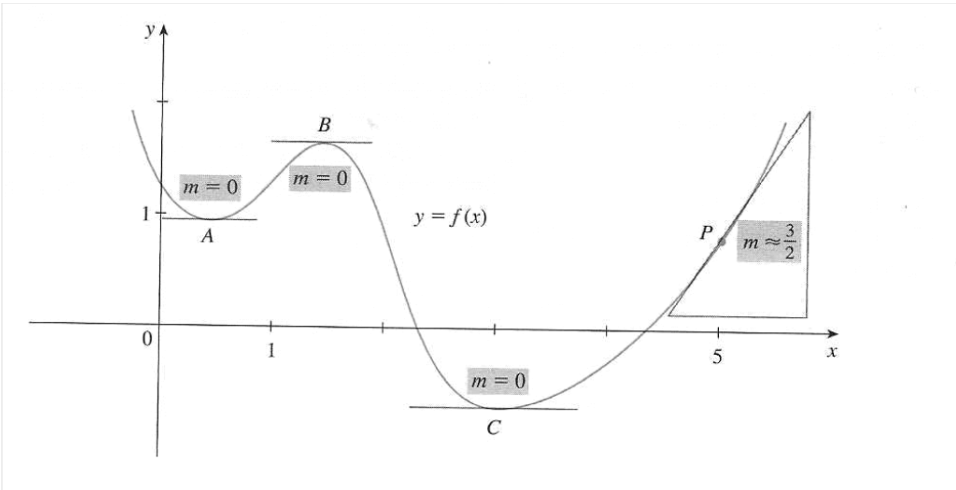


Figura 25 – Estimativas das inclinações das retas tangentes ao gráfico de f.
Fonte: Stewart (2010, p. 140)

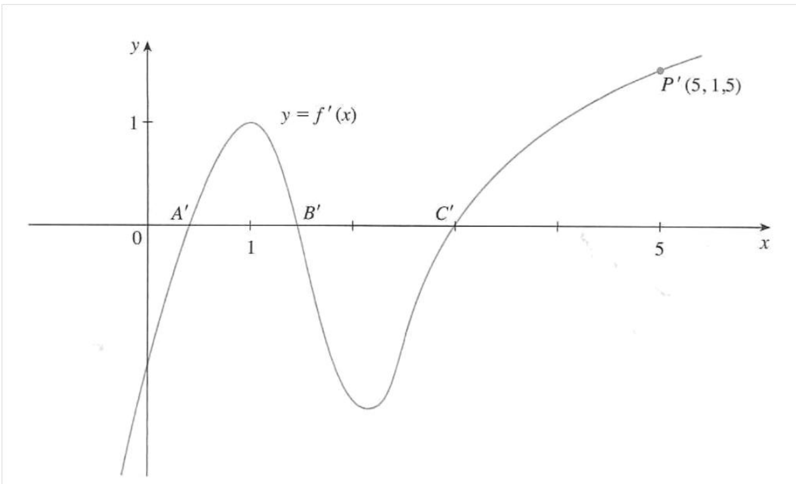


Figura 26 – Gráfico da função derivada.
Fonte: Stewart (2010, p. 141)

Com isso, o autor espera que o leitor seja capaz de identificar a representação gráfica da função derivada a partir de estimativas de inclinações das retas tangentes ao gráfico de f.

No Exemplo 1 acima, podemos identificar as atividades *localizar* e *desenhar* presentes no *componente simbólico*. Localizar, nesse caso, é o fato de Stewart identificar no gráfico, por exemplo, onde as inclinações das retas tangentes são nulas e a estimativa da inclinação $m = 1{,}5$ que, por ventura, é um objeto matemático podendo ser, também, um objeto físico como a velocidade instantânea quando $t = 5$. *Desenhar* enquadra-se na questão da interpretação geométrica da proposta contida no exemplo que, de acordo com Bishop (1999), é uma forma poderosa de transmissão de valores com relação à interação matemática.

Já no segundo exemplo:

EXEMPLO 2
(a) Se $f(x) = x^3 - x$, encontre uma fórmula para $f'(x)$.
(b) Ilustre, comparando os gráficos de f e f'.

Figura 27 – Exemplo 2
Fonte: Stewart (2010, p. 141)

A intenção do autor com o exemplo acima é obter, primeiramente, a função derivada de f a partir da definição de derivada como um limite e, assim, esboçar o gráfico de ambas, a fim de perceber que as imagens da função f' são os coeficientes angulares das retas tangentes em cada ponto da função f.

Nos exemplos três e quatro, a proposta do autor está em aplicar novamente o conceito. O estudante irá exercitar o cálculo da função derivada como um limite. Conforme se observa nas figuras a seguir:

EXEMPLO 3 Se $f(x) = \sqrt{x}$, encontre a derivada de f. Diga qual é o domínio de f'.

Figura 28 – Exemplo 3.
Fonte: Stewart (2010, p. 142)

EXEMPLO 4 Encontre f' se $f(x) = \dfrac{1 - x}{2 + x}$.

Figura 29 – Exemplo 4.
Fonte: Stewart (2010, p. 142)

Após a apresentação de alguns exemplos explorando a derivada como uma função, o livro passa a formalizar um conceito importante: a diferenciabilidade de uma função em um ponto específico. A figura abaixo mostra o fato acima mencionado:

> **3 DEFINIÇÃO** Uma função f é **derivável ou diferenciável em a** se $f'(a)$ existir. É **derivável ou diferenciável em um intervalo aberto** (a, b) [ou (a, ∞) ou $(-\infty, a)$ ou $(-\infty, \infty)$] se for diferenciável em cada número do intervalo.

Figura 30 – Definição sobre diferenciabilidade.
Fonte: Stewart (2010, p. 143)

A seguir, traz um exemplo em que mostra que a função $f(x) = |x|$é diferenciável para todo $x \neq 0$.

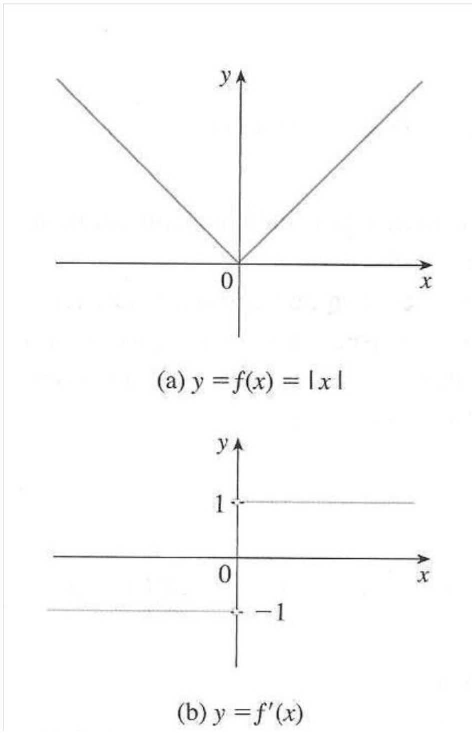


Figura 31 – Gráfico da função $f(x) = |x|$ e sua derivada $f'(x)$.
Fonte: Stewart (2010, p. 144)

É possível observar um fato interessante. A função $f(x) = |x|$ é continua para todo x real, porém não é diferenciável na origem, ou seja, continuidade de uma função não implica sua diferenciabilidade. A seguir, no livro, é apresentado um teorema que garante que uma função é contínua num dado ponto se ela for diferenciável neste ponto.

4 TEOREMA Se f for diferenciável em a, então f é contínua em a.

DEMONSTRAÇÃO Para demonstrar que f é contínua em a, temos de mostrar que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Fazemos isso mostrando que a diferença $f(x) - f(a)$ tende a 0 quando x tende a a.

A informação dada é que f é diferenciável em a, isto é,

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existe (veja a Equação 2.7.5). Para conectar o dado com o desconhecido, dividimos e multiplicamos $f(x) - f(a)$ por $x - a$ (o que pode ser feito quando $x \neq a$):

$$f(x) - f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}\,(x - a)$$

Assim, usando a Propriedade do Produto e a Equação 2.7.5, podemos escrever

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a}[f(x) - f(a)] &= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}\,(x - a) \\ &= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \to a}(x - a) \\ &= f'(a) \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Para usar o que acabamos de demonstrar, vamos começar com $f(x)$ e somar e subtrair $f(a)$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} f(x) &= \lim_{x \to a} [f(a) + (f(x) - f(a))] \\ &= \lim_{x \to a} f(a) + \lim_{x \to a} [f(x) - f(a)] \\ &= f(a) + 0 = f(a) \end{aligned}$$

Consequentemente, f é contínua em a. □

Figura 32 – Teorema sobre diferenciabilidade e continuidade.
Fonte: Stewart (2010, p. 144)

Conforme o *componente cultural* proposto por Bishop (1999), a demonstração do teorema acima favorece a formalização do conceito. Na ideia do autor, essa formalização por meio do teorema e sua demonstração relaciona “las abstracciones que tienen lós matemáticos y el hecho de que las ideias Matemáticas se han inventado” (BISHOP, 1999, p. 149). Nesse sentido, o incremento do nível técnico permite que o aluno investigue o problema segundo uma visão abstrata do matemático, ou seja, uma visão interna da Matemática (BISHOP, 1999).

A seguir, Stewart apresenta uma seção chamada “Como pode uma função não ser diferenciável?”, em que exemplifica características de funções que não são diferenciáveis em um determinado ponto, conforme figura 33.

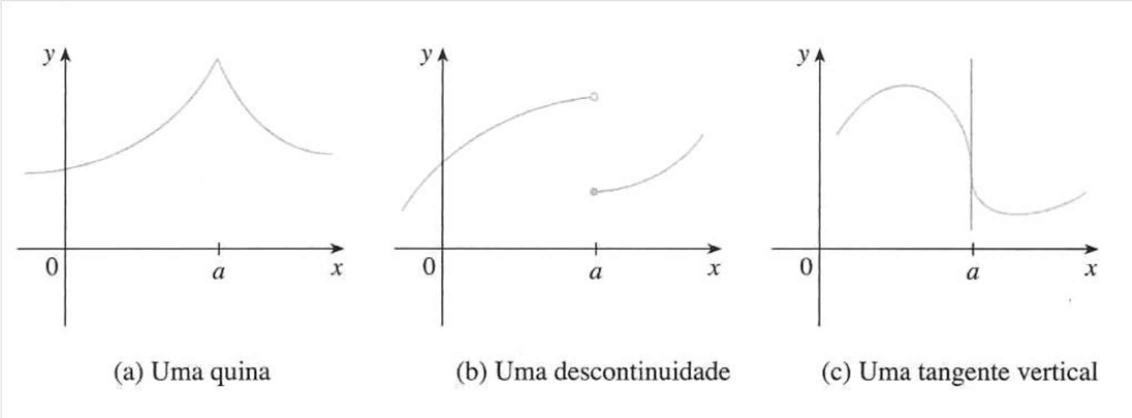


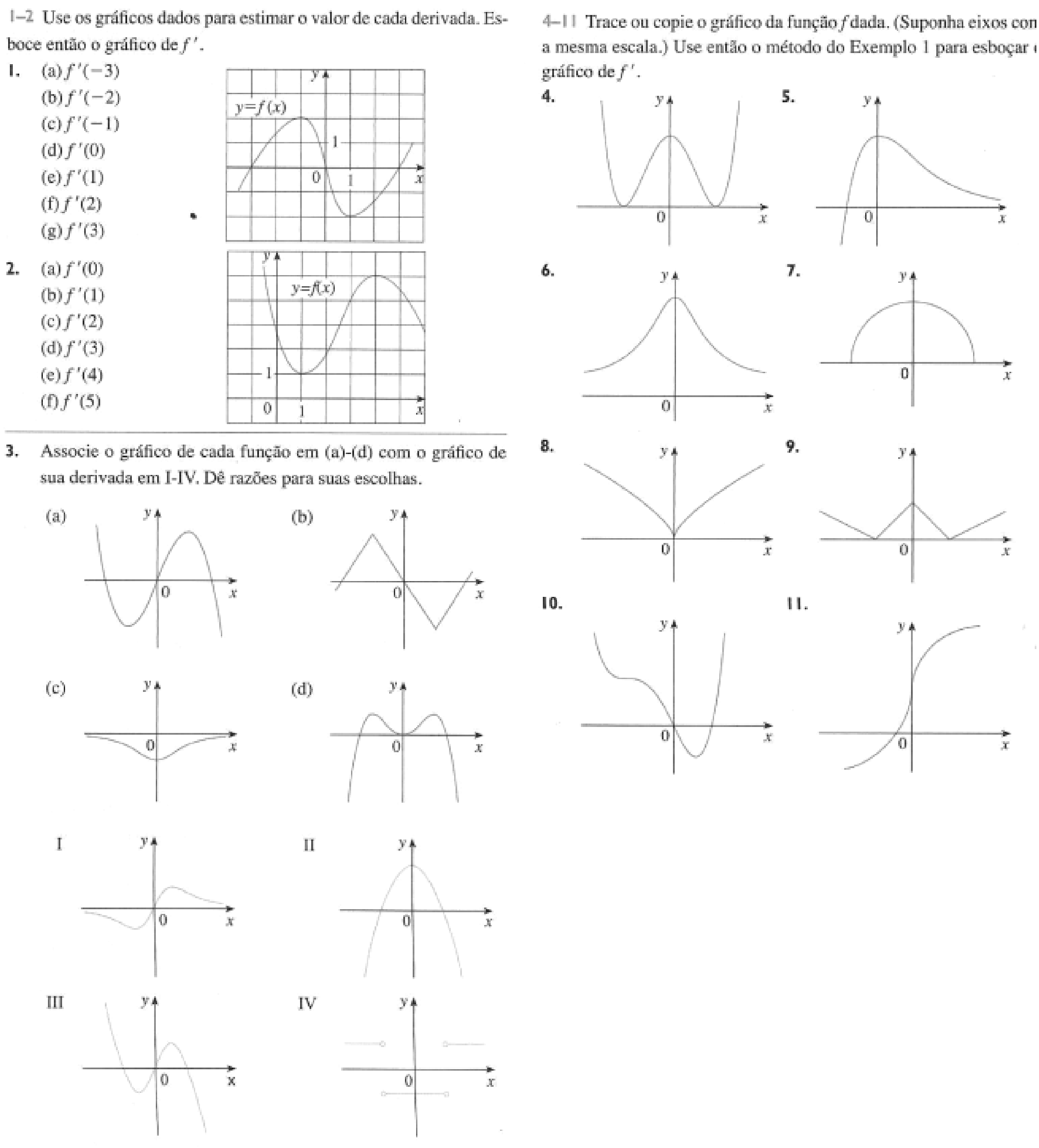
Figura 33 – Diferentes maneiras de f não ser diferenciável em a.
Fonte: Stewart (2010, p.145)

A próxima seção trazida no livro, chamada “Derivadas de ordem mais alta”, trata de como uma função derivada pode ter a sua própria função derivada. Além disso, pensando na aplicabilidade física, em termos de velocidade e aceleração, vimos que a função velocidade é a derivada da função espaço em relação ao tempo e que a aceleração é a derivada da função velocidade em relação ao tempo, ou seja, a aceleração torna-se a derivada de segunda ordem do espaço em função do tempo, conforme discutimos acima, que pode ser representada por:

$$a(t) = v'(t) = s''(t)$$

A questão de trazer um conceito físico para exemplificar as derivadas de ordem mais alta enquadra-se no *componente social*, pois possibilita ao estudante compreender este conceito em um contexto social diferente, talvez mais próximo ao cotidiano do aluno.

Após a discussão sobre derivadas de ordem superior, iniciam-se os exercícios propostos da seção 2.8. Do primeiro exercício até o décimo primeiro há predominância da representação gráfica das funções e suas respectivas derivadas, o que evidencia a presença do *componente simbólico* proposto por Bishop (1999).



1–2 Use os gráficos dados para estimar o valor de cada derivada. Esboce então o gráfico de f'.

1. (a) $f'(-3)$ (b) $f'(-2)$ (c) $f'(-1)$ (d) $f'(0)$ (e) $f'(1)$ (f) $f'(2)$ (g) $f'(3)$

2. (a) $f'(0)$ (b) $f'(1)$ (c) $f'(2)$ (d) $f'(3)$ (e) $f'(4)$ (f) $f'(5)$

3. Associe o gráfico de cada função em (a)-(d) com o gráfico de sua derivada em I-IV. Dê razões para suas escolhas.

4–11 Trace ou copie o gráfico da função f dada. (Suponha eixos con a mesma escala.) Use então o método do Exemplo 1 para esboçar o gráfico de f'.

4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11.

Figura 34 – Exercícios do tópico 2.8.
Fonte: Stewart (2010, p. 148)

Ao mesmo tempo em que identificamos o *componente simbólico* logo ao visualizar os exercícios, também é possível observar a presença em específico de duas atividades: *desenhar* e *localizar,* uma vez que os enunciados solicitam o esboço do gráfico e a localização da derivada a partir do ponto dado, para assim traçar o gráfico da função derivada, como solicitado no exercício 1, por exemplo.

Já a proposta existente no exercício treze é diferente: a partir das informações contidas no gráfico, o aluno deverá fazer uma interpretação para perceber em qual intervalo no domínio da função as inclinações das retas tangentes são negativas. Conforme ilustra a figura a seguir:

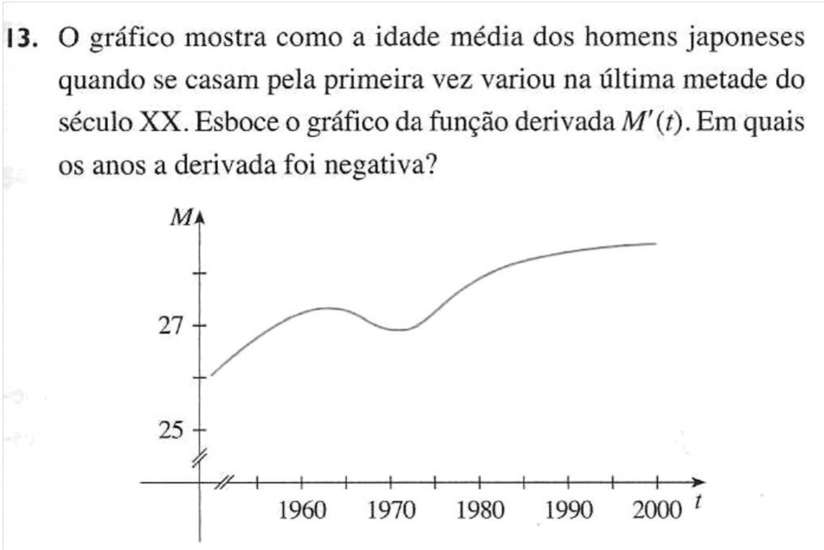

13. O gráfico mostra como a idade média dos homens japoneses quando se casam pela primeira vez variou na última metade do século XX. Esboce o gráfico da função derivada $M'(t)$. Em quais os anos a derivada foi negativa?

Figura 35 – Exercício 13 do tópico 2.8.
Fonte: Stewart (2010, p. 149)

Assim, é possível identificar também a presença do *componente simbólico*, porém a atividade que se destaca é a de *explicar,* pois requer do estudante não apenas que localize um intervalo e desenhe uma reta tangente, mas também que argumente sobre o fenômeno a respeito do que está acontecendo com a idade média de homens que se casam pela primeira vez. Além disso, o *componente social* também pode ser evidenciado, uma vez que o exercício traz um contexto próximo dos estudantes, falando sobre idade média.

Nos exercícios representados na figura abaixo, notamos a presença do *componente cultural*, pois se destaca a parte formal do conteúdo estudado, ou seja, calcular a derivada pela definição.

19–29 Encontre a derivada da função dada usando a definição. Diga quais são os domínios da função e da derivada.

19. $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}$ **20.** $f(x) = mx + b$

21. $f(t) = 5t - 9t^2$ **22.** $f(x) = 1{,}5x^2 - x + 3{,}7$

23. $f(x) = x^3 - 3x + 5$ **24.** $f(x) = x + \sqrt{x}$

25. $g(x) = \sqrt{1 + 2x}$ **26.** $f(x) = \dfrac{3 + x}{1 - 3x}$

27. $G(t) = \dfrac{4t}{t + 1}$ **28.** $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$

29. $f(x) = x^4$

Observe os enunciados dos exercícios contidos na figura abaixo:

33. A taxa de desemprego $U(t)$ varia com o tempo. A tabela fornece a porcentagem de desempregados na força de trabalho australiana em meados de 1995 a 2004.

t	$U(t)$	t	$U(t)$
1995	8,1	2000	6,2
1996	8,0	2001	6,9
1997	8,2	2002	6,5
1998	7,9	2003	6,2
1999	6,7	2004	5,6

(a) Qual o significado de $U'(t)$? Quais são suas unidades?

(b) Construa a tabela de valores de $U'(t)$.

34. Seja $P(t)$ a porcentagem da população das Filipinas com idade maior que 60 anos no instante t. A tabela fornece projeções dos valores desta função de 1995 a 2020.

t	$P(t)$	t	$P(t)$
1995	5,2	2010	6,7
2000	5,5	2015	7.7
2005	6.1	2020	8,9

(a) Qual o significado de $P'(t)$? Quais são suas unidades?

(b) Construa uma tabela de valores para $P'(t)$.

(c) Faça os gráficos de P e P'.

Figura 37 – Exercícios 33 e 34 do tópico 2.8.
Fonte: Stewart (2010, p. 149)

Em ambos os exercícios, o *componente social* proposto por Bishop se destaca, uma vez que apresentam situações reais, em que o estudante poderá chegar à solução interpretando a derivada a partir de dados reais.

Já os exercícios ilustrados na figura a seguir demonstram claramente a presença do componente simbólico, na atividade explicar, à medida que solicita no próprio enunciado a seguinte tarefa: identificar, o ponto em que a função f não é diferenciável *explicando* o motivo.

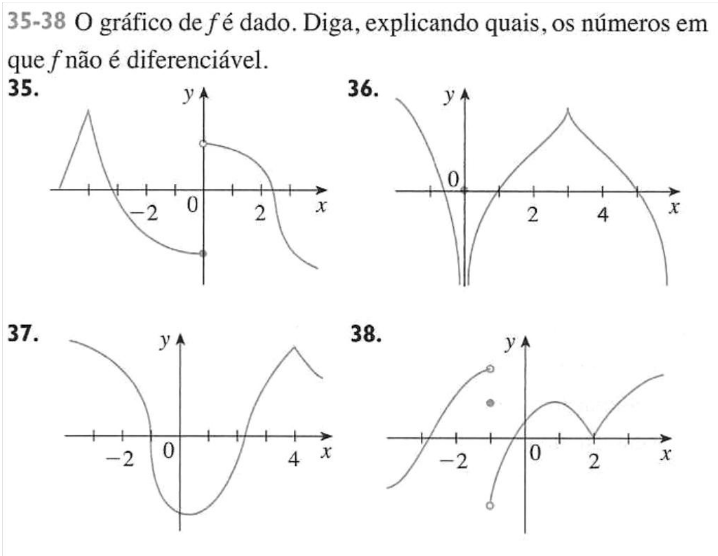
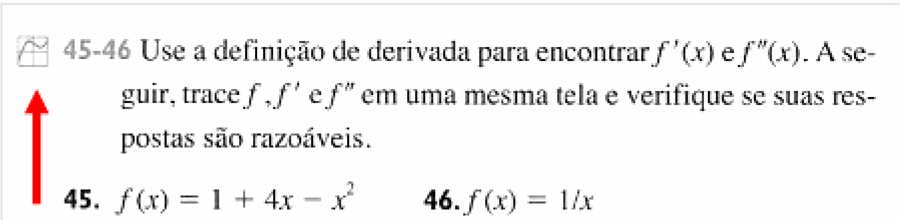


Figura 38 – Exercícios 35 a 38 do tópico 2.8.
Fonte: Stewart (2010, p. 149)

Um aspecto interessante em ambas listas de exercícios apresentadas, referentes às seções 2.7 e 2.8, é o fato do autor sugerir no início de alguns exercícios o uso de um *software* gráfico para esboçar as funções estudadas e seu comportamento. O que evidencia a importância das atividades: *desenhar* e *localizar*, propostas por Bishop (1999). Essa sugestão aparece da seguinte maneira:



45-46 Use a definição de derivada para encontrar $f'(x)$ e $f''(x)$. A seguir, trace f, f' e f'' em uma mesma tela e verifique se suas respostas são razoáveis.

45. $f(x) = 1 + 4x - x^2$ **46.** $f(x) = 1/x$

Figura 39 – Enunciado ilustrando a sugestão do uso de um software gráfico.
Fonte: Stewart (2010, p. 150)

Os demais exercícios dessa seção tratam novamente de conceitos e trazem ideias de representação gráfica, conforme analisamos até agora. No caso do exercício 42, por exemplo, é possível argumentar que o autor espera do leitor, ao tentar resolvê-lo, uma interpretação geométrica para identificar qual é a função f e suas derivadas até a terceira ordem. Stewart (2010) se preocupa em investigar quais noções o estudante adquiriu até o momento, a partir de uma função dada, o que significa a função derivada.

42. A figura mostra os gráficos de $f, f'\ f''$ e f'''. Identifique cada curva e explique suas escolhas.

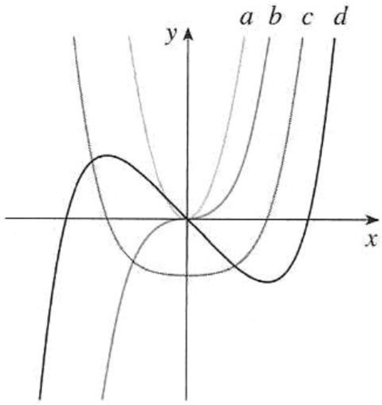


Figura 40 – Exercício 42 do tópico 2.8.
Fonte: Stewart (2010, p. 150)

Podemos notar, na questão acima proposta, a presença das atividades *desenhar, localizar* e *explicar* presentes no *componente simbólico*. As atividades desenhar e localizar encontram-se na questão geométrica e gráfica do problema, pois Stewart sinaliza que o aluno, por intermédio da questão visual, interprete a função derivada de ordem superior. Já em relação a explicar, o próprio enunciado requer a explanação das escolhas realizadas pelo aluno. O fato de explicar o fenômeno estudado propicia a socialização do seu entendimento e, assim, uma discussão da problemática em grupo.

4. ANÁLISE DO LIVRO DIDÁTICO ACERCA DOS PRINCÍPIOS

De modo análogo ao capítulo anterior, a análise a seguir também se refere ao capítulo 2, nos tópicos 2.7 e 2.8, “Derivadas e taxas de variação” e “A derivada como uma função”, respectivamente. Porém, iremos identificar atividades do livro em questão que retratem os princípios propostos por Bishop (1999).

Em relação ao *princípio da representatividade*, Bishop (1999) afirma que não se deve apenas dar ênfase a uma tecnologia simbólica, mas, de maneira conjunta, deve haver uma ênfase na formalidade dos valores da cultura Matemática. Para o mesmo autor, a escassez de criatividade e inovações no currículo de Matemática menospreza o progresso gerando uma falta de compreensão e sentido dos conceitos matemáticos por parte dos alunos. No livro didático proposto para essa análise, é possível observar pontos que se enquadram no princípio da representatividade, uma vez que o autor trabalha a teoria de forma mais significativa e transita por diferentes representações permitindo que o aluno entenda o conceito para depois formalizá-lo.

Stewart (2010) traz, intuitivamente, a ideia de reta tangente em um dado ponto $(a, f(a))$. Ele faz isso, primeiramente, definindo a inclinação da reta secante que passa pelos pontos $P(a, f(a))$ e $Q(x, f(x))$ tal que $x \neq a$ e, assim, explica que, para obter a reta tangente t que passa por P é necessário fazer o ponto Q aproximar-se a este ponto fazendo x variar tendendo a a. Essa noção intuitiva não é mostrada apenas de forma explicativa: textual e algébrica, mas também é reconhecida geometricamente conforme mostra a figura abaixo:

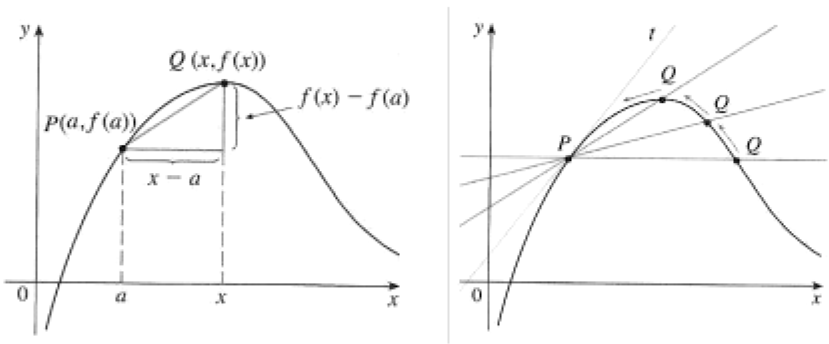


Figura 41 – Noção intuitiva das inclinações das retas secante e tangente.
Fonte: Stewart (2010, p. 130)

Observe em ambos gráficos que, no primeiro, ele mostra o segmento de reta que liga o ponto $P\big(a, f(a)\big)$ ao ponto $Q\big(x, f(x)\big)$ e, no segundo, mostra a indicação por flechas do ponto Q tendendo ao ponto P, ou seja, a reta tangente t "é a posição-limite da reta secante PQ quando Q tende a P" (STEWART, 2010, p. 130). É possível notar que não é dada atenção especial em apenas uma linguagem matemática fechada de conhecimentos lógico-axiomáticos, mas sim procura explicar o fenômeno de uma forma que o aluno progrida no entendimento de que a inclinação da reta tangente em um ponto dado é a derivada neste ponto. A conexão entre a abordagem textual explicativa com simbologia geométrica faz com que a percepção visual ajude a atender o simbolismo matemático para definir o objeto estudado.

Podemos notar que o assunto não é tratado apenas com uma linguagem algébrica não permitindo outra linguagem, mas sim é aberta a possibilidade de diferentes representações do mesmo objeto matemático estudado. No que foi apresentado acima, há a presença de uma visão geométrica da inclinação da reta secante passando por dois pontos e da inclinação da reta tangente a um ponto. Porém, outra linguagem presente é a matemática simbólica por intermédio da seguinte expressão quando se trata do coeficiente angular da reta secante:

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

e da reta tangente

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

desde que exista tal limite. Então, observa-se uma preocupação em teorizar o conceito abordado com linguagens distintas em que, primeiramente, priorizam-se ideias intuitivas permitindo o progresso do estudante para entender as motivações do estudo de coeficiente angular da reta tangente a uma curva em um dado ponto e suas consequências em aplicações práticas vividas pelo aluno para, assim, trazer a formalização necessária e estabelecer um corpo de conhecimento deste assunto.

Quando se trata do *princípio do formalismo*, Bishop (1999) ressalta a importância do tratamento da informação matemática do nível informal à formalidade do fenômeno estudado. No livro didático adotado podemos notar esse tratamento formal e informal quando apresenta a propriedade de diferenciabilidade de uma função presente na seção 2.8 nomeada de “A derivada como uma função”. Primeiramente, Stewart (2010) apresenta a parte formal por meio de uma definição conforme figura a seguir:

$\boxed{3}$ **DEFINIÇÃO** Uma função f é **derivável ou diferenciável em a** se $f'(a)$ existir. É **derivável ou diferenciável em um intervalo aberto** (a, b) [ou (a, ∞) ou $(-\infty, a)$ ou $(-\infty, \infty)$] se for diferenciável em cada número do intervalo.

Figura 42 – Formalização do conceito de diferenciabilidade de uma função.
Fonte: Stewart (2010, p. 143)

É possível notar que, por intermédio dessa definição, ele apresenta condições para que uma função seja diferenciável em um dado ponto e também em um dado intervalo. Em seguida, é mostrado um exemplo de função interessante, no caso $f(x) = |x|$, em que é possível estudá-la em dois intervalos, $(-\infty, 0)$ e $(0, +\infty)$, e depois em um ponto específico, $x = 0$, e, assim, mostra que tal função é diferenciável em ambos intervalos, porém no ponto indicado não. A figura 43 denota este fato.

EXEMPLO 5 Onde a função $f(x) = |x|$ é diferenciável?

SOLUÇÃO Se $x > 0$, então $|x| = x$ e podemos escolher h suficientemente pequeno para que $x + h > 0$ e portanto $|x + h| = x + h$. Consequentemente, para $x > 0$ temos

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{|x + h| - |x|}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x + h) - x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \to 0} 1 = 1$$

e f é diferenciável para qualquer $x > 0$.

Analogamente, para $x < 0$ temos $|x| = -x$ e podemos escolher h suficientemente pequeno para que $x + h < 0$ e, assim, $|x + h| = -(x + h)$. Portanto, para $x < 0$,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{|x + h| - |x|}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-(x + h) - (-x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-h}{h} = \lim_{h \to 0} (-1) = -1$$

e dessa forma f é diferenciável para qualquer $x < 0$.

Figura 43 – Exemplo da diferenciabilidade de uma função em intervalos.
Fonte: Stewart (2010, p. 143)

Nota-se que a definição apresentada foi utilizada para resolver o exemplo e, em seguida, a mesma definição serve para mostrar que, quando $x = 0$, a função não é diferenciável e este fato é apresentado na figura a seguir:

Para $x = 0$ temos de averiguar

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{|0+h| - |0|}{h} \qquad \text{(se ele existir)}$$

Vamos calcular os limites à esquerda e à direita:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h} = \lim_{h \to 0^+} 1 = 1$$

e $$\lim_{h \to 0^-} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h}{h} = \lim_{h \to 0^-} (-1) = -1$$

Uma vez que esses limites são diferentes, $f'(0)$ não existe. Logo, f é diferenciável para todo x, exceto 0.

Figura 44 – Exemplo da não diferenciabilidade de uma função em um ponto.
Fonte: Stewart (2010, p. 144)

Observe que, como o estudo está concentrado em um ponto específico, ou seja, para $x = 0$, a definição exige estudar a existência do limite no ponto. Isso significa que é necessário conferir os limites laterais à esquerda e à direita do ponto zero. Como os limites são diferentes conclui-se que a função não é diferenciável para $x = 0$.

Essa apresentação formal continua por meio de um teorema seguido de sua demonstração. Ambas as propriedades, continuidade e diferenciabilidade, estão intimamente ligadas e o teorema apresentado e demonstrado no livro mostra isso. Este teorema é apresentado da seguinte forma:

4 TEOREMA Se f for diferenciável em a, então f é contínua em a.

Figura 45 – Formalização: condição necessária para continuidade de f no ponto a.
Fonte: Stewart (2010, p. 144)

Fazendo parte do formalismo matemático, é possível destacar e abrir um campo de discussão com os alunos que a função ser contínua no ponto a é uma *condição necessária* para ser diferenciável em a, já a função ser diferenciável em a é uma *condição suficiente* para ser contínua em a. A figura a seguir apresenta o formalismo da demonstração do teorema apresentado.

DEMONSTRAÇÃO Para demonstrar que f é contínua em a, temos de mostrar que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Fazemos isso mostrando que a diferença $f(x) - f(a)$ tende a 0 quando x tende a a.

A informação dada é que f é diferenciável em a, isto é,

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existe (veja a Equação 2.7.5). Para conectar o dado com o desconhecido, dividimos e multiplicamos $f(x) - f(a)$ por $x - a$ (o que pode ser feito quando $x \neq a$):

$$f(x) - f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}\,(x - a)$$

Assim, usando a Propriedade do Produto e a Equação 2.7.5, podemos escrever

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to a}[f(x) - f(a)] &= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}\,(x - a) \\
&= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \to a}(x - a) \\
&= f'(a) \cdot 0 = 0
\end{aligned}$$

Para usar o que acabamos de demonstrar, vamos começar com $f(x)$ e somar e subtrair $f(a)$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to a} f(x) &= \lim_{x \to a} [f(a) + (f(x) - f(a))] \\
&= \lim_{x \to a} f(a) + \lim_{x \to a} [f(x) - f(a)] \\
&= f(a) + 0 = f(a)
\end{aligned}$$

Consequentemente, f é contínua em a. □

Figura 46 – Formalização: demonstração do Teorema 4.
Fonte: Stewart (2010, p. 144)

O mesmo estudo é tratado de uma maneira mais informal quando Stewart (2010) apresenta como identificar uma função não diferenciável em um dado ponto. A partir de termos como "quina" ou "dobra", termologias não utilizadas no formalismo matemático, discute que "o gráfico de f não terá tangente nesse ponto e f não será diferenciável ali" (STEWART, 2010, p. 145). A discussão é trazida por Stewart (2010) tanto da forma texto - explicativa como geométrico - explicativa.

A primeira investida é a explicação textual conforme mostra a figura 47 a seguir:

Vimos que a função $y = |x|$ do Exemplo 5 não é diferenciável em 0, e a Figura 5(a) mostra que em $x = 0$ a curva muda abruptamente de direção. Em geral, se o gráfico de uma função f tiver uma "quina" ou uma "dobra", então o gráfico de f não terá tangente nesse ponto e f não será diferenciável ali. (Ao tentar calcular $f'(a)$, vamos descobrir que os limites à esquerda e à direita são diferentes.)

O Teorema 4 nos dá outra forma de uma função deixar de ter uma derivada. Ele afirma que se f for descontínua em a, então f não será diferenciável em a. Assim, em toda descontinuidade de f (por exemplo, uma descontinuidade de salto), ela deixa de ser diferenciável.

Uma terceira possibilidade surge quando a curva tem uma **reta tangente vertical** em $x = a$, isto é, f é contínua em a e

Figura 47 – Linguagem textual e informal do conceito de diferenciabilidade.
Fonte: Stewart (2010, p. 145)

A outra investida é uma explicação posterior a textual, traduzida por um registro geométrico, que foi feito da seguinte forma:

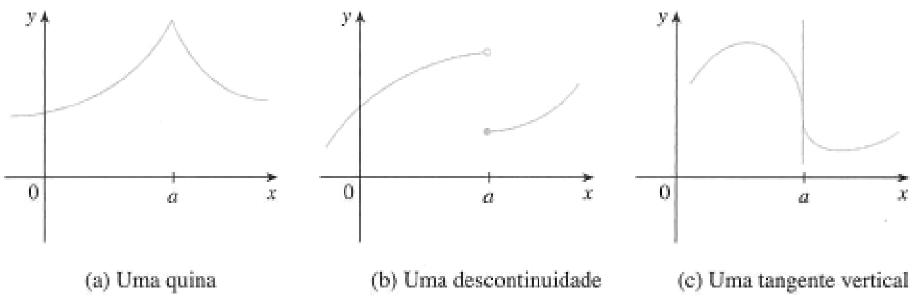


Figura 48 – Linguagem geométrica e informal do conceito de diferenciabilidade.
Fonte: Stewart (2010, p. 145)

A figura acima apresenta três características da não diferenciabilidade de uma função. Observe que há termos tanto formais quanto informais, por exemplo, "uma quina".

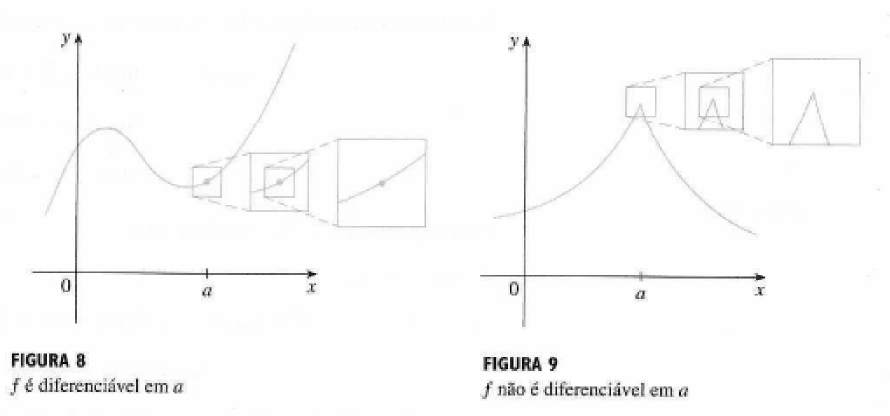


Figura 49 – Comparação informal de diferenciabilidade e não diferenciabilidade.
Fonte: Stewart (2010, p. 146)

As duas figuras acima mostram um *zoom* no gráfico da função. O primeiro, quando a função é diferenciável, o ponto estudado se mostra como uma reta “bem comportada” em sua proximidade, porém, no segundo gráfico é possível observar o “bico” formado, ou seja, a reta tangente neste exato ponto forma um ângulo reto e, como se sabe, não existe tangente de tal ângulo.

Podemos notar nesta análise que o autor aborda a diferenciabilidade de uma função num ponto tanto do modo formal quanto do informal. Observamos que, a partir de um tratamento formal apresentado com uma definição e um teorema, o autor discute de maneira informal a identificação desse tipo de função inclusive utilizando termos palpáveis como “quina” ou “dobra” para explicar que nesses “locais” não haverá tangente e, portanto, exatamente ali não haverá a diferenciabilidade da função.

No que diz respeito ao *princípio da acessibilidade*, Bishop (1999) garante que o acesso ao aprendizado matemático deve ser realizado do contexto social do aluno para, assim, enfatizar o contexto matemático da problemática estudada sempre atentando-se a não ignorar a capacidade naquele instante do aluno, ou seja, a apresentação do conteúdo matemático que não esteja acessível para o estudante naquele momento. Uma das maneiras que Stewart (2010) apresenta o conceito de reta tangente a uma curva é a questão da velocidade média e velocidade instantânea que, porventura, o aluno que está nessa fase do ensino superior estuda no ensino médio na disciplina de Física. O estudo da velocidade está dentro do contexto social do aluno e, aqui, se enquadra muito bem na proposta de Bishop (1999).

As questões das retas secantes e tangentes no que se refere à velocidade são abordadas algébrica e geometricamente de forma bem acessível. Primeiramente, Stewart (2010) apresenta o conceito de velocidade média, que é a inclinação da reta secante passando por dois pontos à curva f a qual define como:

$$m_{PQ} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Em que a e $a+h$ é o intervalo de tempo e $f(a+h) - f(a)$ é a variação da posição do móvel. A figura abaixo mostra a apresentação desta abordagem no livro didático.

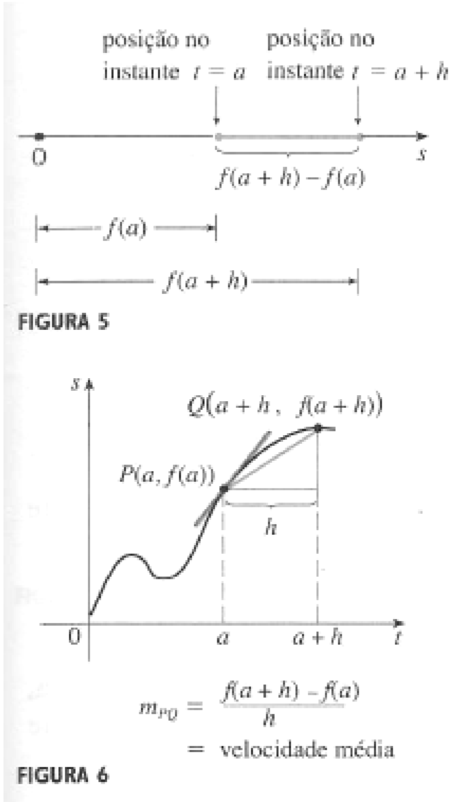


Figura 50 – Conceitualização visual geométrica do conceito de derivadas.
Fonte: Stewart (2010, p. 131)

Acima se encontra uma abordagem geométrica da velocidade média de um móvel. Tanto na “Figura 5” como na “Figura 6” é ilustrada a variação da posição de um móvel que se desloca em função do tempo. Ambas as abordagens estão inseridas no contexto social do aluno, pois lidamos com a questão da velocidade tanto dentro de um automóvel de passeio quanto ao caminharmos, entre outras abordagens. Portanto, é um fenômeno acessível para o aluno que poderá estudar a questão da derivada sob este outro ponto de vista. A explicação não se resume apenas a parte visual, mas também na questão textual e simbólica. A figura seguinte denota este fato:

> Em geral, suponha que um objeto se mova sobre uma reta de acordo com a equação $s = f(t)$, na qual s é o deslocamento do objeto a partir da origem no instante t. A função f que descreve o movimento é chamada **função posição** do objeto. No intervalo de tempo entre $t = a$ e $t = a + h$ a variação na posição será de $f(a + h) - f(a)$ (veja a Figura 5). A velocidade média nesse intervalo é
>
> $$\text{velocidade média} = \frac{\text{deslocamento}}{\text{tempo}} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$
>
> que é o mesmo que inclinação da reta secante PQ na Figura 6.

Figura 51 – Conceitualização textual e simbólica do conceito de derivadas.
Fonte: Stewart (2010, p. 131)

A questão tratada de forma textual e por intermédio do simbolismo matemático é a velocidade média e é possível notar que, ainda, trata-se da inclinação da reta secante passando pelos pontos P e Q. Stewart (2010) não trata do assunto de uma forma inacessível, mas indiretamente insere o estudante em um contexto social que ele encontra facilmente na vida prática e, isso vem ao encontro do que propõe Bishop (1999) quando enfatiza que o conteúdo curricular não deve estar fora da capacidade intelectual do aluno e que “los ejemplos, los materiales, las situaciones y los fenómenos que hay que explicar no deben ser exclusivos de un grupo de la sociedad” (BISHOP, 1999, p. 129). Em se tratando do fenômeno velocidade, sabemos que não é um assunto exclusivo de um grupo específico, mas algo que está presente em todos os grupos direta e indiretamente.

A preocupação de Stewart (2010), por meio do estudo das derivadas, é inserir o aluno em vários contextos de forma acessível, não estando acima de suas capacidades intelectuais, sendo tais conceitos presentes na vida cotidiana da sociedade.

No capítulo 2, apresentamos a atividade *explicar* da teoria de Alan J. Bishop que também está ligada com o *princípio do poder explicativo* pois, segundo o autor, a Matemática como um fenômeno cultural é uma rica fonte de explicação e promove aos alunos situações em que possam explicar suas ideias a partir do seu progresso em relação ao fenômeno estudado fornecendo, assim, significado a tal conceito. O livro de CDI adotado para esta análise permite que o aluno argumente suas ideias, principalmente, ao tentar resolver os exercícios propostos. Por exemplo, no tópico

2.7 no exercício 2, Stewart (2010) propõe que o aluno utilize um software gráfico para desenhar uma curva como se pode observar na figura abaixo:

2. Faça o gráfico da curva $y = e^x$ nas janelas $[-1, 1]$ por $[0, 2]$, $[-0,5, 0,5]$ por $[0,5, 1,5]$ e $[-0,1, 0,1]$ por $[0,9, 1,1]$. Dando um *zoom* no ponto $(0, 1)$, o que você percebe na curva?

Figura 52 – Exercício 2 do tópico 2.7.
Fonte: Stewart (2010, p. 136)

Observe que o autor sugere que o aluno explique o fenômeno que acontece ao dar um *zoom* no ponto $(0,1)$ com a seguinte pergunta "o que você percebe na curva?". A ideia é que o aluno explique que a função $y = e^x$, em torno deste ponto, comporta-se como uma reta. Este fato pode ser observado graficamente da seguinte maneira:

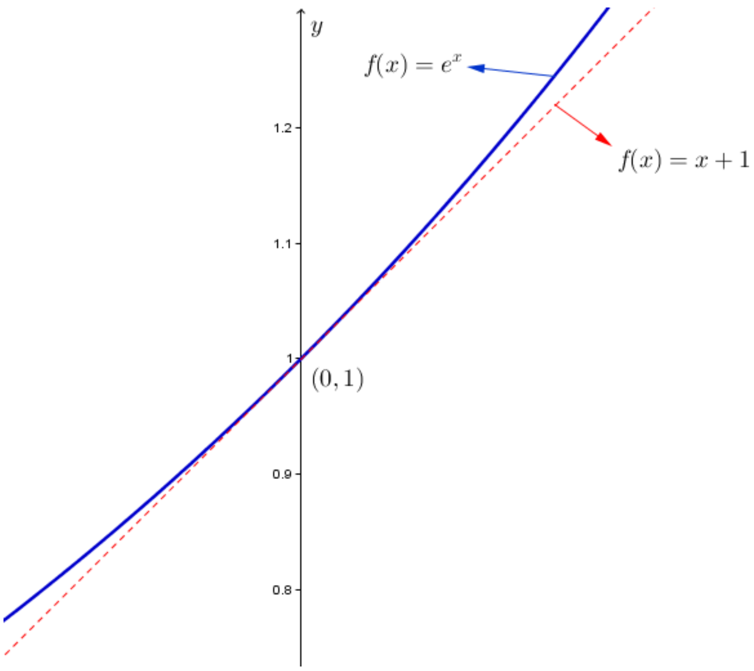


Figura 53 – Comportamento da função $y = e^x$ em torno do ponto $(0,1)$.
Fonte: Próprio autor.

A reta tracejada é tangente ao gráfico da função $y = e^x$ no ponto $(0,1)$. O aluno teria que observar e explicar que, em torno deste ponto, o comportamento é semelhante ao de uma reta conforme podemos notar na figura. Tanto o gráfico em azul quanto o em vermelho estão muito bem alinhados no ponto considerado. Esse tipo de exercício permite que o aluno, ao perceber tal fato, tenha o poder de explicar e socializar o seu progresso. Uma maneira bem interessante de o aluno observar este fato e argumentar é, por exemplo, calcular a imagem da função para $x = 0{,}01$. Na reta tangente ao gráfico em vermelho o valor da imagem é $f(0{,}01) = 1 + 0{,}01 = 1{,}01$ e na função exponencial tal valor é $f(0{,}01) = e^{0{,}01} \approx 1{,}01005$, ou seja, valores muito próximos.

É possível observar que muitas das atividades propostas em Stewart (2010) permitem aos alunos explicar os fenômenos e isso nota-se em exercícios com questionamentos como o apresentado acima. Não somente atividades contextualizadas dentro da própria matemática abordada, mas também em situações que podem ser analisadas no cotidiano. O enunciado abaixo ilustra este fato além de permitir o poder argumentativo do aluno.

39. Uma lata de refrigerante morna é colocada na geladeira. Esboce o gráfico da temperatura do refrigerante como uma função do tempo. A taxa de variação inicial da temperatura é maior ou menor que a taxa de variação após 1 hora?

Figura 54 – Exercício 39 do tópico 2.7.
Fonte: Stewart (2010, p. 138)

O problema acima é uma situação que pode muito bem ser aplicada como um experimento real. O aluno pode argumentar a problemática enunciada tanto de modo teórico como de modo prático. Stewart (2010) permite que o aluno progrida em relação ao conceito estudado por responder à questão proposta. Espera-se do aluno explicar que, primeiramente, a derivada em cada ponto é negativa, porém requer-se que a argumentação do estudante se concentre que ela é maior em módulo no início, pois a inclinação da reta tangente no instante inicial é maior que após uma hora.

Neste tópico 2.7 do livro do Stewart, há uma série de exercícios formados por perguntas, porém há alguns em que a explicação é cobrada de forma explícita. Isso nos leva a interpretar que o autor está preocupado com o fato do aluno não resolver os problemas de forma mecânica por meio de fórmulas pré-estabelecidas, mas sim que os resolva entendendo realmente o conceito. Vale ressaltar que há exercícios em que o cálculo da derivada num ponto dado é por intermédio da definição, porém a preocupação é além da solução de forma mecanizada. Observe o enunciado dos exercícios 46, 48, 49 e 50 do tópico 2.7.

46. O número de bactéria depois de t horas em um laboratório experimental controlado é $n = f(x)$.

(a) Qual o significado da derivada de $f'(5)$? Quais são suas unidades?

(b) Suponha que haja uma quantidade ilimitada de espaço e nutrientes para a bactéria. Qual será maior: $f'(5)$ ou $f'(10)$? Se a oferta de nutrientes for limitada, isso afetaria sua conclusão? Explique.

48. A quantidade (em quilogramas) de café vendida por uma companhia para uma lanchonete ao preço de p dólares por quilogramas é dada por $Q = f(p)$.

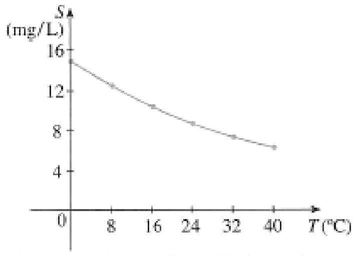
(a) Qual o significado da derivada $f'(8)$? Quais são suas unidades?

(b) $f'(8)$ é positivo ou negativo? Explique.

49. A quantidade de oxigênio que pode ser dissolvido em água depende da temperatura da água. (Logo, a poluição térmica influencia o nível de oxigênio da água.) O gráfico mostra como a solubilidade do oxigênio S varia em função da temperatura T da água.

(a) Qual o significado da derivada $S'(T)$? Quais são suas unidades?

(b) Dê uma estimativa do valor $S'(16)$ e interprete-o.



Adaptado de *Environmental Science: Living Within the System of Nature*, 2d ed.; por Charles E. Kupchella, © 1989. Reproduzido

50. O gráfico mostra a influência da temperatura T sobre a velocidade máxima de nado S do salmão Coho.

(a) Qual o significado da derivada $S'(T)$? Quais são suas unidades?

(b) Dê uma estimativa do valor $S'(15)$ e de $S'(25)$ e interprete-os.

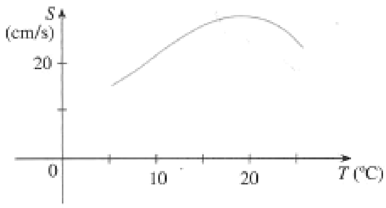
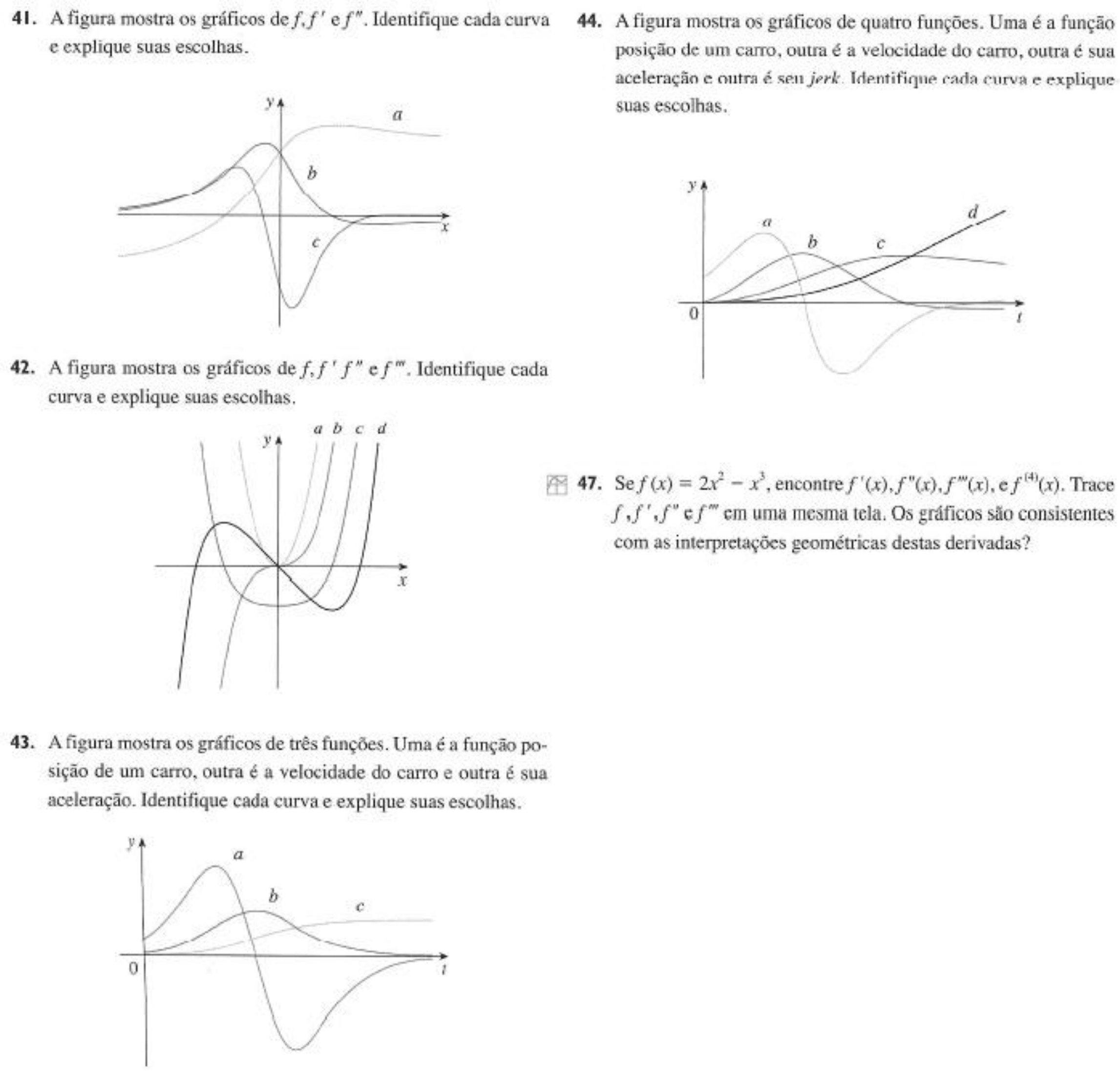


Figura 55 – Exercícios 46, 48, 49 e 50 do tópico 2.7.
Fonte: Stewart (2010, p. 138 e139)

Note que eles enquadram-se no *princípio do poder explicativo*, pois ao solicitar para o aluno “explique” e “interprete-os”, Stewart está abrindo um campo para que o estudante tenha o poder de argumentar a solução da problemática, ou seja, explicar o que a taxa de variação instantânea no ponto fornecido significa para diferentes tipos de problemas. Em diferentes situações sociais, o autor permite a argumentação do estudante para cada campo estudado e, de acordo com Bishop (1999), faz com que o aluno experimente currículos diferentes porque os próprios alunos são diferentes entre si criando estruturas curriculares individualizadas.

Para o tópico 2.8 é possível identificar alguns exercícios com essas características (41, 42, 43, 44, 47). A figura abaixo apresenta o enunciado desses cinco exercícios.



41. A figura mostra os gráficos de f, f' e f''. Identifique cada curva e explique suas escolhas.

42. A figura mostra os gráficos de $f, f'\ f''$ e f'''. Identifique cada curva e explique suas escolhas.

43. A figura mostra os gráficos de três funções. Uma é a função posição de um carro, outra é a velocidade do carro e outra é sua aceleração. Identifique cada curva e explique suas escolhas.

44. A figura mostra os gráficos de quatro funções. Uma é a função posição de um carro, outra é a velocidade do carro, outra é sua aceleração e outra é seu *jerk*. Identifique cada curva e explique suas escolhas.

47. Se $f(x) = 2x^2 - x^3$, encontre $f'(x), f''(x), f'''(x)$, e $f^{(4)}(x)$. Trace f, f', f'' e f''' em uma mesma tela. Os gráficos são consistentes com as interpretações geométricas destas derivadas?

Figura 56 – Exercícios 41, 42, 43, 44 e 47 do tópico 2.8.
Fonte: Stewart (2010, p. 150)

Observe que, no final de cada um desses enunciados, Stewart cobra explicações e interpretações acerca de cada problema proposto. Podemos perceber que o aluno que resolverá tais exercícios não depende apenas de fórmulas para solucioná-los, mas sim do entendimento do conteúdo apresentado, ou seja, interpretá-los sem a aplicação de técnicas específicas e mecanizadas.

O *princípio da concepção ampla e elementar* proposto por Bishop (1999) é uma consequência direta do princípio anterior. Aqui se abre uma oportunidade para o aluno entender o fenômeno estudado de uma forma mais abrangente, ou seja, por diferentes contextos ele compreende um único que, no nosso caso, é o conceito de derivada. O livro didático adotado para esta análise contempla esse requisito. Stewart (2010) aborda o conceito de derivada por situações distintas, por exemplo, velocidade instantânea na Física e taxas de variação como o custo marginal na área da Economia. Essas aplicações são utilizadas como base para explicar o conceito de coeficiente angular da reta tangente e taxas de variação até chegar à definição formal de derivada. O exemplo enunciado abaixo mostra o cálculo da velocidade instantânea realizado por meio da definição de derivada em um ponto.

EXEMPLO 3 Suponha que a bola foi abandonada do posto de observação da torre, 450 m acima do solo.
(a) Qual a velocidade da bola após 5 segundos?
(b) Com qual velocidade a bola chega ao solo?

SOLUÇÃO Precisaremos encontrar a velocidade tanto quando $t = 5$ quanto quando a bola atinge o solo, de modo que é eficiente começar encontrando a velocidade em um instante geral $t = a$. Usando a equação de movimento $s = f(t) = 4{,}9t^2$, temos

$$v(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4{,}9(a+h)^2 - 4{,}9a^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{4{,}9(a^2 + 2ah + h^2 - a^2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4{,}9(2ah + h^2)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} 4{,}9(2a + h) = 9{,}8a$$

(a) A velocidade após 5 s é de $v(5) = (9{,}8)(5) = 49$ m/s.
(b) Uma vez que o posto de observação está 450 m acima do solo, a bola vai atingir o chão em t_1, quando $s(t_1) = 450$, isto é,

$$4{,}9t_1^2 = 450$$

Isso fornece

$$t_1^2 = \frac{450}{4{,}9} \quad \text{e} \quad t_1 = \sqrt{\frac{450}{4{,}9}} \approx 9{,}6 \text{ s}$$

A velocidade com que a bola atinge o chão é, portanto,

$$v(t_1) = 9{,}8t_1 = 9{,}8\sqrt{\frac{450}{4{,}9}} \approx 94 \text{ m/s}$$ □

Figura 57 – Exemplificação do conceito de derivada por meio da Física.
Fonte: Stewart (2010, p. 132)

Por intermédio de um conceito físico, Stewart (2010) mostra o cálculo da velocidade instantânea que, por definição, é a derivada da função horária do espaço em função do tempo. O outro exemplo citado é na Economia denominado custo marginal. Essa é outra situação que se enquadra no *princípio da concepção ampla e elementar* proposto por Bishop (1999), pois, da mesma forma que o exemplo anterior, Stewart busca aprofundar o estudo do conceito de derivada em um ponto por meio de um contexto social distinto da Matemática. A figura abaixo ilustra o enunciado e sua solução.

EXEMPLO 6 Um fabricante produz peças de fazenda com largura fixa e o custo da produção de x metros desse material é $C = f(x)$.

(a) Qual o significado da derivada $f'(x)$? Quais suas unidades?

(b) Em termos práticos, o que significa dizer que $f'(1\,000) = 9$?

(c) O que você acha que é maior, $f'(50)$ ou $f'(500)$? E $f'(5\,000)$?

SOLUÇÃO

(a) A derivada $f'(x)$ é a taxa de variação instantânea de C em relação a x; isto é, $f'(x)$ significa a taxa de variação do custo de produção em relação ao número de metros produzidos. (Os economistas chamam essa taxa de variação de *custo marginal*. Essa ideia está discutida em mais detalhes nas Seções 3.7 e 4.7.)

Como

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta x}$$

as unidades para $f'(x)$ são iguais àquelas do quociente de diferenças $\Delta C/\Delta x$. Uma vez que ΔC é medida em dólares e Δx em metros, segue que a unidade para $f'(x)$ é dólares por metro.

(b) A afirmação que $f'(1\,000) = 9$ significa que, depois de 1 000 metros da peça terem sido fabricados, a taxa segundo a qual o custo de produção está aumentando é \$ 9/m. (Quando $x = 1\,000$, C está aumentando 9 vezes mais rápido que x.)

Uma vez que $\Delta x = 1$ é pequeno comparado com $x = 1\,000$, podemos usar a aproximação

$$f'(1\,000) \approx \frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{\Delta C}{1} = \Delta C$$

e dizer que o custo de fabricação do milésimo metro (ou do 1 001º) está em torno de \$ 9.

(c) A taxa segundo a qual o custo de produção está crescendo (por metro) é provavelmente menor quando $x = 500$ do que quando $x = 50$ (o custo de fabricação do 500º metro é menor que o custo do 50º metro), em virtude da economia de escala. (O fabricante usa mais eficientemente os custos fixos de produção.) Então

$$f'(50) > f'(500)$$

Mas, à medida que a produção expande, a operação de larga escala resultante pode se tornar ineficiente, e poderiam ocorrer custos de horas extras. Logo, é possível que a taxa de crescimento dos custos possa crescer no futuro. Assim, pode ocorrer que

$$f'(5\,000) > f'(500)$$

Figura 58 – Exemplificação do conceito de derivada por meio da Economia.
Fonte: Stewart (2010, p. 134 e 135)

Observe que o item (a) está enfatizando em explicar o que significa $f'(x)$ e vem ao encontro do princípio mencionado, sendo este uma consequência do princípio do poder explicativo. Além de ser uma situação-problema em um contexto diferente, ela vem explicar o significado da taxa de variação instantânea de acordo com a situação apresentada na problemática.

No tópico 2.8, "A derivada como uma função", Stewart, logo de início, compara a derivada em um ponto específico $x = a$ com a função derivada em que é possível variar o valor de a. Nesta seção, o livro teoriza este conceito com explicações aplicadas à própria matemática e a um contexto diferente, ou seja, à Física. A figura a seguir apresenta, primeiramente, um exemplo aplicado à própria matemática.

EXEMPLO 2

(a) Se $f(x) = x^3 - x$, encontre uma fórmula para $f'(x)$.

(b) Ilustre, comparando os gráficos de f e f'.

SOLUÇÃO

(a) Ao usar a Equação 2 para calcular uma derivada, devemos nos lembrar de que a variável é h e de que x é considerado temporariamente uma constante para os cálculos do limite.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{[(x+h)^3 - (x+h)] - [x^3 - x]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x - h - x^3 + x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3 - h}{h} = \lim_{h \to 0}(3x^2 + 3xh + h^2 - 1) = 3x^2 - 1$$

(b) Vamos fazer os gráficos de f e f' utilizando alguma ferramenta gráfica. O resultado está na Figura 3. Observe que $f'(x) = 0$ quando f tem tangentes horizontais e que $f'(x)$ é positivo quando as tangentes têm inclinação positiva. Assim, esses gráficos servem como verificação do trabalho feito em (a).

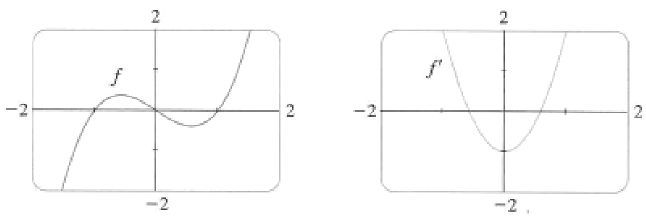


FIGURA 3

Figura 59 – Exemplificação do conceito de derivada na própria Matemática.
Fonte: Stewart (2010, p. 141)

Na figura anterior, podemos notar dois registros: algébrico e geométrico. No item (a) é calculada a derivada por intermédio de sua definição e, assim, é determinada a função derivada da função dada. No item (b) é ilustrada geometricamente o item anterior e Stewart, logo em seguida, explica o que acontece graficamente. Este é um exemplo num contexto puramente matemático. O próximo exemplo, como já citado, permite o estudo da derivada como uma função no campo da Física.

A figura a seguir mostra como Stewart (2010) apresenta a função derivada em termos da função espaço em relação ao tempo, velocidade e aceleração instantânea.

Em geral, podemos interpretar uma segunda derivada como uma taxa de variação de uma taxa de variação. O exemplo mais familiar disso é a *aceleração*, que é definida desta maneira:

Se $s = s(t)$ for a função posição de um objeto que se move em uma reta, sabemos que sua primeira derivada representa a velocidade $v(t)$ do objeto como uma função do tempo:

$$v(t) = s'(t) = \frac{ds}{dt}$$

A taxa instantânea de variação da velocidade com relação ao tempo é chamada **aceleração** $a(t)$ do objeto. Assim, a função aceleração é a derivada da função velocidade e, portanto, é a segunda derivada da função posição:

$$a(t) = v'(t) = s''(t)$$

ou, na notação de Leibniz,

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

Figura 60 – Conceitualização da derivada por meio da Física.
Fonte: Stewart (2010, p. 146 e 147)

Nesta parte da explicação, Stewart (2010) está dando atenção às derivadas de ordem mais altas. É apresentado que a taxa instantânea de variação do espaço em relação ao tempo é denominada de velocidade instantânea e que a taxa instantânea da velocidade em relação ao tempo é chamada de aceleração o que se conclui que a aceleração é a segunda derivada da função posição em função do tempo. As duas situações anteriormente apresentadas enquadra-se no *princípio da concepção ampla e elementar*, pois por diferentes contextos, Stewart conceitua as derivadas de funções de uma maneira ampla porque “limitarse a ofrecer um mero ejemplo de uma aplicación algorítmica dada puede conservar la pureza Matemática, pero no ayuda a explicar” (BISHOP, 1999, p. 130). Disso, percebemos que o livro didático adotado para esta análise está preocupado em apresentar diferentes concepções e contextos para abordar um único tópico matemático, ou seja, a definição de derivada.

Neste capítulo, por meio de exemplos e exercícios presentes em Stewart (2010), analisamos algumas situações que se enquadram nos princípios proposto por Bishop (1999). Procuramos apresentar a teoria de Bishop exemplificando-a com problemáticas e conceitos presentes em Stewart (2010) de acordo com o objetivo desta pesquisa.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, analisamos o livro didático Cálculo, volume 1 de James Stewart do ponto de vista dos componentes e princípios propostos por Bishop (1999). Esta análise foi feita minuciosamente, verificando nos tópicos escolhidos – 2.7 e 2.8 do capítulo 2 – a conceitualização, exemplificação e exercitação do conteúdo e, fazendo a ligação direta com a proposta de enculturação matemática descrita na teoria de Alan J. Bishop.

No capítulo 2, discutimos a definição de currículo sobre diferentes pontos de vista e de acordo com sua perspectiva histórica, porém a ideia trazida refere-se principalmente à "definição" de currículo conforme os conhecimentos e saberes que direcionam uma disciplina, segundo um conjunto de tópicos presentes em um livro didático. Apresentamos o livro didático desde o significado presente no dicionário até ideias de autores como Sacristán (2000) e Frison *et al.* (2009).

O livro didático adotado por um professor tem real fundamento em auxiliá-lo, contudo outros documentos também são importantes como ferramenta para a prática docente. O livro didático *Cálculo,* Volume 1 está presente na bibliografia básica do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo – *campus* São Paulo – e, quando cursei a disciplina CDI, tal obra foi utilizada como referência.

Após isso, apresentamos neste mesmo capítulo a teoria de Alan J. Bishop, pois tal teoria nos guiou para analisar o livro adotado. Discutimos os cincos princípios propostos por Bishop (1999), ou seja, princípio da representatividade, princípio do formalismo, princípio da acessibilidade, princípio do poder explicativo e princípio da concepção ampla e elementar e, também os três componentes de um currículo de enculturação, ou seja, componente simbólico e as seis atividades que o organizam: contar, localizar, medir, desenhar, jogar e explicar, componente social e componente cultural.

Por fim, demonstramos a metodologia utilizada para a realização da presente pesquisa. A pesquisa foi do tipo qualitativa, pois tem como objetivo investigar a problemática proposta a partir de uma análise bibliográfica por intermédio de fontes e dados referentes à teoria da Alan J. Bishop e também, o livro didático escrito por James Stewart.

No capítulo 3, apresentamos uma análise do livro didático adotado em relação aos componentes simbólico, social e cultural propostos por Bishop (1999). Nos tópicos 2.7 e 2.8 do capítulo 2 da obra *Cálculo,* Volume 1 de James Stewart, analisamos a presença de conceitos, exemplos e exercícios que se enquadram em cada componente apresentado e, assim, para cada ponto escolhido discutimos o motivo das relações feitas entre a obra de Stewart e a teoria de Bishop. Neste capítulo, a análise foi realizada nos tópicos 2.7 e 2.8, nessa ordem.

No capítulo 4, também fizemos a análise do livro, porém identificando os princípios propostos por Alan J. Bishop. A discussão sobre os princípios, representatividade, formalismo, acessibilidade, poder explicativo e concepção ampla e elementar, foi feita da seguinte maneira: primeiramente, apresentamos uma breve descrição do que é cada princípio e, em seguida enquadramo-nos aos conceitos, exemplos e exercícios da obra *Cálculo,* Volume 1. Diferente do capítulo 3, em que separamos os tópicos 2.7 e 2.8, aqui fizemos a análise de forma corrente para tais tópicos. Quando necessário, exploramos uma possível leitura do que o aluno, ao estudar o livro, pode observar nos fenômenos abordados.

A obra de James Stewart não foi escrita de acordo com os pressupostos teóricos propostos por Bishop (1999). Porém, respondendo nossa questão de pesquisa, pudemos, em várias partes do livro, verificar a existência dos princípios e componentes de um currículo enculturador. A ligação entre a teoria de Alan J. Bishop e o capítulo 2 do livro didático adotado nos tópicos 2.7 e 2.8 foi encontrada nas três seguintes concepções: conceitualização, exemplificação e nos exercícios propostos. A presença dessa ligação está contemplada nos capítulos 3 e 4 da presente pesquisa.

Como forma de um trabalho de conclusão de curso, analisamos apenas os tópicos 2.7 e 2.8 do capítulo 2 do livro didático mencionado, porém, como sugestão para futuros trabalhos é indicada uma mesma análise da continuação deste mesmo capítulo e dos demais presentes no livro. Por exemplo, o estudo da variação das funções e o processo de integração, em que ocorre uma série de aplicações, noções intuitivas e o formalismo matemático esperado.

Outra sugestão é a partir dos componentes e princípios propostos por Bishop (1999), comparar dois livros didáticos de CDI presentes na ementa do curso de Licenciatura Matemática do IFSP – *campus São Paulo* – e, assim, concluir qual se encaixa melhor no que tange a um currículo enculturador proposto pelo mesmo teórico. Também, para futuros trabalhos, outras questões podem ser analisadas e respondidas, por exemplo, *é possível criar uma sequência didática de ensino de cálculo a partir das ideias propostas por Bishop (1999)?*

Esta pesquisa contribuiu para um considerado progresso no entendimento do conteúdo, derivadas, além de fornecer uma nova perspectiva para abordá-lo do ponto de vista dos componentes e princípios propostos por Bishop (1999). Ao relatar cada ponto apresentado por Stewart (2010), tanto nos conceitos e exemplos quanto nos exercícios, ampliamos o campo de visão acerca do currículo que, nesta pesquisa é o livro didático – ou currículo apresentado – o que possibilitou maior acessibilidade em entender o assunto estudado, tanto na questão intuitiva quanto na formalista.

Pudemos observar, também, os diferentes contextos sociais em que o tema *derivadas* se enquadra, gerando reflexões entre discentes e docentes acerca desse assunto. Citamos, por exemplo, o exercício 41 da página 138 que mostra uma tabela de estimativa de porcentagem da população, usuária de telefones celular. Este assunto pode acarretar a seguinte questão: quais os benefícios e prejuízos que o aumento do uso de celulares pode trazer para a sociedade? Existem pesquisas que relatam a rápida troca dos aparelhos num curto período de tempo e o aumento do lixo eletrônico que pode trazer sérios danos ambientais e, também a facilidade da comunicação que tais aparelhos nos trazem.

Nossas observações, leituras e reflexões nos fizeram perceber que o currículo matemático apresentado no livro didático adotado procura respeitar a integração social, cultural e acadêmica do aluno leitor, pois o insere em diversos contextos fora da aplicação Matemática e dentro da própria Matemática ou dentro da Física, da Economia, da Biologia, da Química, dentre outras áreas, procurando respeitar sempre o poder explicativo do leitor, a partir do que passa a entender sobre o assunto conforme aprende lendo o livro.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ASSUMPÇÃO, E. M. et al. **Pedagogia: currículo e diversidade cultural.** Brasília: Universidade de Brasília, 2008, 43p.

BARUFI, M. C. B. **A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral.** Tese (Doutorado em Educação), Universidade de São Paulo. São Paulo, 1999.

BISHOP, A. J. **Enculturación matemática: la educación matemática desde una perspectiva cultural**. Traducción de Genis Sánchez Barberán. Barcelona: Paidós, 1999.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação qualitativa em Educação: fundamentos, métodos e técnicas.** In: *Investigação qualitativa em educação.* Portugal: Porto Editora, 1994, p. 15-80.

ESCREVER É BOM PARA APRENDER E ENRIQUECER. **Cálculo: Matemática para todos**, São Paulo, ano 2, n.15, p. 18-21, abril 2012.

FONSECA, J. J. S. **Metodologia de pesquisa científica.** Fortaleza: UECE, 2002.

FRISON, M. D. et al. **Livro didático como instrumento de apoio para construção de propostas de ensino de ciências naturais.** *Encontro Nacional de Pesquisas em Educação em Ciências,* Florianópolis, 2009.

HOUAISS, A; VILLAR, M. S. **Minidicionário Houaiss da língua portuguesa.** 3ª ed. Rio de Janeiro: Objetiva, 2008.

_________. **Grande Dicionário Houaiss (Beta) da Língua Portuguesa.** Disponível em: <http://houaiss.uol.com.br>. Acesso em: 07/04/2014.

MENEZES, E. T.; SANTOS, T. H. "Currículo" (verbete). **Dicionário Interativo da Educação Brasileira - EducaBrasil**. São Paulo: Midiamix Editora, 2002. Disponível em: <http://www.educabrasil.com.br/eb/dic/dicionario.asp?id=349>. Acesso em: 08/04/2014.

NEVES, J. L. **Pesquisa Qualitativa – Características, usos e possibilidades.** *Caderno de pesquisas em administração*, São Paulo, v.1, n.3, 2º sem./1996.

OLIMPIO Jr., A. **Compreensões de conceitos de Cálculo Diferencial no primeiro ano de Matemática – Uma abordagem integrando oralidade, escrita e informática.** Tese (Doutorado em Educação Matemática), Universidade Estadual Paulista. Rio Claro, 2006.

PARASKEVA, J. M. **Uma Abordagem Simplista para um Fenômeno Complexo.** Resenhas Educativas – Uma revista de resenhas de livros. Rio de Janeiro, 2005.

SACRISTÁN, J. G. **O currículo: uma reflexão sobre a prática.** 3. ed. Tradução: Ernani F. da Fonseca Rosa. Porto Alegre: ArtMed, 2000.

SANTANA, K. C. L. **Currículo de Matemática da Educação de Jovens e Adultos: uma análise baseada em livros didáticos.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2012.

SILVA, T. T. **Documentos de identidade: uma introdução às teorias do currículo.** 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2010.

STEWART, J. **Cálculo Volume 1.** 6. ed. São Paulo: Cengrage Learning, 2010.

TRALDI Jr., A. **Formação de formadores de professores de Matemática: Identificação de possibilidades e limites da estratégia de organização de grupos colaborativos.** Tese (Doutorado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2006.

ANEXO A - EMENTA CD1M3

3º SEMESTRE

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA SÃO PAULO	***CAMPUS*** São Paulo

1- IDENTIFICAÇÃO:

Curso: Licenciatura em Matemática	
Componente curricular: Cálculo Diferencial e Integral 1	**Código: CD1M3**
Ano/ Semestre: 03	**Nº aulas semanais: 06**
Total de aulas: 114	**Total de horas: 85h30min**

2- EMENTA:

Neste Componente curricular, são abordados os conceitos de limite e derivada, a partir da idéia intuitiva, propiciando ao estudante a compreensão desses conceitos no estudo de funções de uma variável e suas aplicações.

3- OBJETIVOS:

Consolidar e ampliar o conhecimento dos futuros professores de matemática sobre os conceitos de limite e derivada e suas aplicações.

4- CONTEÚDO PROGRAMÁTICO:

- Limite
  - Idéia intuitiva
  - Propriedades dos limites
  - Continuidade
  - Limites no Infinito
- Derivada
  - Derivada e Taxa de Variação
  - Derivada de uma função
  - Regras de derivação
  - Derivação implícita
  - Aproximações lineares e diferenciais
- Aplicação das Derivas
  - Máximos e Mínimos de uma Função
  - Teorema do Valor Médio
  - Esboço de Gráficos
  - Problemas de Otimização

5- METODOLOGIAS:

Aulas expositivas e dialogadas; demonstrações de propriedades e teoremas; resolução de problemas e exercícios em atividades individuais e em grupo.

6- AVALIAÇÃO:

Critério de Avaliação: Serão consideradas três avaliações individuais escritas (P1, P2 e P3) sobre os conteúdos desenvolvidos durante o semestre, cada uma com valor de zero (0,0) a dez (10,0). A nota final do aluno será calculada da seguinte forma: Nota final = (P1 + P2 + P3)/3.

Avaliação substitutiva (PSub): será permitida após as três avaliações (P1, P2 e P3) uma prova substitutiva, contemplando todo o conteúdo da disciplina, aos alunos que faltaram e atestaram problemas médicos, conforme normas acadêmicas do IFSP. A avaliação *PSub* substituirá uma das avaliações formais para o cálculo da Nota final. *Recuperação:* Será submetido ao Instrumento Final de Avaliação o aluno que tiver obtido nota final do semestre maior ou igual a 4 e menor que 6, conforme normas acadêmicas.
7- BIBLIOGRAFIA BÁSICA:
GUIDORIZZI, H. L. *Um Curso de Cálculo*. Vol. 1 e 2. Rio de Janeiro: LTC, 2008. STEWART, J. *Cálculo***.** Vol. 1. São Paulo: Pioneira, 2005. SWOKOWSKI, E. W. *Cálculo com geometria analítica.* Vol. 1. São Paulo: Makron books, 1995.
8-BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR:
ANTON, H.; BIVENS, I.; DAVIS, S.. Cálculo. Vol. 1. Porto Alegre: Bookman, 2007. FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. *Cálculo A.* São Paulo: Makron Books, 2006. IEZZI, G., MURAKAMI, C.; MACHADO; N. J. *Fundamentos de matemática elementar* : limites, derivadas, noções de integral. Vol. 8. São Paulo: Atual, 2005. LEITHOLD, L. *O cálculo com geometria analítica*. Vol. 1. São Paulo: Harbra, 1994. THOMAS, G. B.; FINNEY, R. L.; WEIR, M. D. *Cálculo*. Vol 1. São Paulo, Addison Wesley, 2002.