SANGAKU: A MATEMÁTICA SAGRADA

Thaynara Keiko Oda Santos

Trabalho de Conclusão do Curso Superior de Licenciatura em Matemática, orientado pelo Professor Dr. Sílvio De Liberal.

IFSP
SÃO PAULO
2018

THAYNARA KEIKO ODA SANTOS

SANGAKU: A MATEMÁTICA SAGRADA

Monografia apresentada ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo (Campus São Paulo), orientada pelo professor Dr. Silvio De Liberal, em cumprimento ao requisito para obtenção do grau acadêmico de Licenciada em Matemática.

SÃO PAULO
2018

Catalogação na fonte
Biblioteca Francisco Montojos - IFSP Campus São Paulo
Dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S237s Santos, Thaynara Keiko Oda
Sangaku: a matemática sagrada / Thaynara Keiko Oda Santos. São Paulo: [s.n.], 2018.
59 f. il.

Orientador: Silvio de Liberal

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, IFSP, 2018.

1. Etnomatemática. 2. Matemática. 3. Sangaku. 4. Matemática Sagrada. 5. Geometria dos Templos Japoneses. I. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo II. Título.

CDD 510

THAYNARA KEIKO ODA SANTOS

SANGAKU: A MATEMÁTICA SAGRADA

Monografia apresentada ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, em cumprimento ao requisito exigido para a obtenção do grau acadêmico de Licenciada em Matemática.

APROVADO EM 09/08/2018 **CONCEITO:** 9,5

Prof. Dr. Henrique Marins de Carvalho
Membro da Banca

Prof. Me. José Maria Carlini
Membro da Banca

Prof. Dr. Silvio De Liberal
Orientador

Thaynara Keiko Oda Santos
Aluna: Thaynara Keiko Oda Santos

“É de se esperar que as pessoas queiram aprender de nós como e em que ordem as descobertas matemáticas se sucederam umas às outras, e seria nosso dever ensiná-las. Foi feita a História da Pintura, da Música, da Medicina, etc. Uma boa História da Matemática, em particular da Geometria, seria uma obra mais curiosa. Que prazer não se teria ao ver a ligação a conexão dos métodos, o encadeamento das diferentes teorias começando desde os primeiros tempos até o nosso, no qual essa Ciência se encontra transportada a tão alto grau de perfeição!”

Pierre Rémond de Montmort, Carta a Bernoulli

A todos que me apoiaram para que este trabalho fosse possível.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus.

À minha família, em especial, à minha mãe, Alice, e ao meu namorado, Claudio, por todo apoio, incentivo e amor.

Aos meus cachorros e os do meu namorado por cada demonstração de amor em meus momentos de fragilidade e os de felicidade também.

Aos professores e funcionários do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo – Campus São Paulo, em especial, ao professor Silvio pela orientação, confiança e compreensão para a realização deste trabalho, e aos professores Carlini e Henrique pela dedicação e disponibilidade de compartilharem comigo este momento tão importante da minha vida.

Aos colegas e amigos feitos durante a graduação, os quais pretendo ter em toda a minha vida, em especial, à Dayene, ao Lucas, ao Phelipe, à Priscila, à Renata, aos seus pais, Marlene e Jaime, e sua cachorra, Malu, por todas as risadas, conselhos, broncas, incentivos, dedicação e amizade.

A todos aqueles que compartilharam comigo momentos durante esta fase da minha vida que, apesar de seus nomes não estarem nestas linhas, sabem de todo o meu carinho e gratidão.

RESUMO

Neste trabalho, abordaremos sobre a Etnomatemática, uma teoria desenvolvida pelo matemático e professor Dr. Ubiratan D'Ambrosio que afirma que há mais de uma forma de compreender e entender a realidade, em especial, a Matemática; e os *Sangaku*, também conhecidos por Matemática Sagrada ou Geometria dos Templos Japoneses, uma geometria singular desenvolvida em um período de isolamento cultural. Ofereceremos neste uma alternativa à aula tradicional de Matemática, sustentando-se na Etnomatemática.

Palavras-chave: Etnomatemática. Matemática. *Sangaku*. Matemática Sagrada. Geometria dos Templos Japoneses.

ABSTRACT

In this work, we will approach Ethnomathematics, a theory developed by the mathematician and professor Dr. Ubiratan D'Ambrosio, who states that there is more than one way of comprehend and understand the reality, especially Mathematics; and the *Sangaku*, also known as Sacred Mathematics or Geometry of the Japanese Temples, a singular geometry in a period of cultural isolation. We offer an alternative to the traditional Mathematics class, relying on Ethnomathematics.

Keywords: Ethnomathematics. Mathematics. *Sangaku*. Sacred Mathematics. Geometry of Japanese Temples.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Ao considerar a maneira que uma professora de Matemática ministrava suas aulas, do Ensino Fundamental II, associada à curiosidade pela disciplina e vontade de sanar as dúvidas de colegas, o meu interesse em ser professora de Matemática passou a crescer de maneira gradativa. Em 2014, ingressei no curso de Licenciatura em Matemática no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo – Campus São Paulo (IFSP).

Ao decorrer do curso, além de todo o conhecimento adquirido, tive a oportunidade de estagiar, no Kumon Instituto de Educação Ltda. e em duas escolas estaduais de São Paulo (SP). Durante o estágio no Kumon, tive a chance de atuar de forma mais ativa com os alunos, auxiliando-os com suas dúvidas e, eventualmente, ocorreu de os próprios alunos me procurarem para isso fora do ambiente de trabalho. Já nas escolas estaduais, percebi que o interesse dos alunos não foi intenso como no estágio anterior, o que me fez pensar em métodos de ensino que pudessem atrair a atenção do aluno, mostrando que a Matemática ministrada nas escolas está dentro da realidade em que eles vivem e na própria história da humanidade.

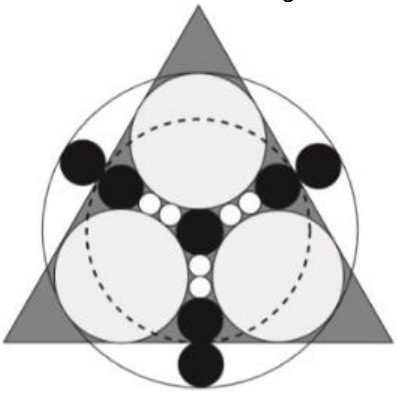
Assim chego à escolha de temática, compartilhada pelo orientador professor Dr. Silvio De Liberal. Após discutirmos sobre *Wasan*, a "matemática nativa japonesa", mais especificamente, os *Sangaku*, como uma forma alternativa para auxiliar no ensino da Matemática, e como suporte para tal hipótese, o uso da Etnomatemática, teoria desenvolvida pelo matemático e professor brasileiro Dr. Ubiratan D'Ambrosio.

Em resumo, os *Sangaku* são tábuas votivas com problemas matemáticos, como o do exemplo[1] a seguir, muitos envolvendo Geometria.

Este problema é o terceiro da esquerda no Sangaku do Meiseirinji. Foi proposto por Tanabe Shigetoshi, de 15 anos. Em um triângulo equilátero azul, três círculos "verdes" (claros) de raio a, quatro círculos "vermelhos" (escuros) de raio b e seis círculos brancos de raio c tocam-se como mostrado na figura. Se R é o raio do círculo externo, e r é o raio do círculo tracejado, encontre c em termos de r.

[1] Retirado e traduzido do livro FUKAGAWA, Hidetoshi; ROTHMAN, Tony. **Sacred Mathematics:** Japanese Temple Geometry. Princeton: Princeton University Press, 2008.

Figura 1: Problema encontrado em um *Sangaku* no templo de Meiseirinji



Fonte: Fukagawa e Rothman (2008)

Resolução: Observando a figura, vemos facilmente que r = 3b + 4c, R = b + 2a, R = 5b + 4c e a + b = 2b + 4c. Resolvendo essas equações simultaneamente gera b = 2c, a = 6c e r = 10c.

As tábuas eram penduradas em templos budistas e santuários xintoístas japoneses, no período Edo ou Tokugawa (1603-1868). Nesse período, como o Japão se encontrava isolado do mundo ocidental, uma das funções do *Sangaku* era propagar o conhecimento matemático, por meio de desafios matemáticos, resultando no interesse de matemáticos japoneses profissionais e amadores como comerciantes, agricultores, até mesmo crianças, para resolver tais problemas.

Entender Geometria dentro do contexto da Etnomatemática pode ser visto como um estímulo que junto à toda diversidade de conhecimento e cultura possibilita o despertar de interesse dos alunos mostrando que a Matemática foi construída ao longo do tempo a partir de contribuição de vários povos, tribos e raças. Conforme D’Ambrosio (2009) afirma

> [...] etnomatemática não é apenas o estudo de “matemática das diversas etnias”, mas também significa, usando as raízes ‘tica’, ‘matema’ e ‘etno’, que há várias maneiras, técnicas, habilidades (tica) de explicar, entender, lidar e conviver (matema) com diferentes contextos naturais e socioeconômicos da realidade (etno). (D’AMBROSIO, 2009, p.111)

Usar a História da Matemática como recurso didático na sala de aula pode ser benéfico, segundo Santos (2012), possibilita a apropriação do conhecimento matemático pelos alunos, melhorando o aprendizado, motivando o aluno a estudar o conteúdo apresentado, podendo resultar em o aluno ter afinidade com a Matemática. Como os Parâmetros Curriculares Nacionas – PCN (1997) propõem

> Ao revelar a Matemática como uma criação humana, ao mostrar necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, ao estabelecer comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente, o professor cria condições para que o aluno desenvolva atitudes e valores mais favoráveis diante desse conhecimento. (BRASIL, 1997, p.34)

Assim, pode propiciar reflexão e análise sobre o período, a cultura, o povo naquela época como também provocar uma melhor compreensão e fixação do conteúdo. Por isso, o objetivo deste trabalho será oferecer uma alternativa à aula tradicional, recorrendo ao estudo e utilização dos *Sangaku*, uma geometria singular que se desenvolveu no Japão em um período de isolamento cultural, para verificar seu auxilio no ensino de Matemática, principalmente, Geometria, sustentando-se na Etnomatemática.

Realizamos uma pesquisa bibliográfica qualitativa buscando por trabalhos desenvolvidos sobre a presente temática. Além desta introdução, este trabalho divide-se em quatro capítulos. No capítulo 2, abordaremos, de forma geral, como a Etnomatemática pode auxiliar a oferecer uma forma alternativa de ensino; no capítulo 3, apresentaremos o contexto histórico e cultural do Japão anterior, durante e posterior ao *Sangaku*, dissertando sobre os períodos Edo e Meiji; no capítulo 4, proporemos uma atividade que utiliza os *Sangaku* como motivadores ao ensino de Geometria; e no capítulo 5, indicaremos nossas conclusões mediante a pesquisa realizada.

2 ETNOMATEMÁTICA: UMA ALTERNATIVA PARA O ENSINO TRADICIONAL

Segundo Chagas (2004), o ensino tradicional é caracterizado pela transmissão de conteúdos pelo professor e recepção destes pelos alunos. De forma que essa transmissão de conteúdo é acompanhada da prática repetitiva e mecanizada de resolução de exercícios, provocando memorização em vez de aprendizado, fazendo o aluno perder o interesse em refletir (, a fim de ter sugestões de resolução, para se ater apenas um único modo de resolução: o correto que é apenas ofertado pelo professor de forma inquestionável. Conforme D'Ambrosio (2009) observa, o ensino tradicional ou formal é baseado

> [...] ou na mera transmissão (ensino teórico e aulas expositivas) de explicações e teorias, ou no adestramento (ensino prático com exercícios repetitivos) em técnicas e habilidades. Ambas as alternativas são totalmente equivocadas em vista dos avanços mais recentes do nosso entendimento dos processos cognitivos. Não se pode avaliar habilidades cognitivas fora do contexto cultural. (D'AMBROSIO, 2009, p.119)

Por isso, o ensino, em especial, o ensino de Matemática precisa ser continuamente repensado, tanto em conteúdo quanto pela relação com a realidade, de modo a valorizar a bagagem cultural de cada aluno. De fato, como denota Matias (2003), "a matemática tradicional ensinada nas escolas distancia-se da realidade dos alunos, o que se reflete no fracasso no sistema de ensino e nos elevados índices de reprovação" (MATIAS, 2003, p.9). Pensando sobre os problemas relacionados ao ensino, acreditamos que a Etnomatemática possa auxiliar o processo de ensino e aprendizagem. Como D'Ambrosio (1993 *apud* LOPES JÚNIOR, [20--?].) denota

> [...] o enfoque da etnomatemática para a matemática, é de implementar a sua utilização nas escolas, proporcionando aos alunos uma vivência que somente faça sentido se eles estiverem em seu ambiente natural e cultural; criar situações variadas que possam despertar e aguçar o interesse e a curiosidade que os alunos possuem naturalmente, para tornar a matemática agradável de ser aprendida, tendo como objetivo conectar a matemática ensinada nas escolas com a matemática presente em seus cotidianos. (D'AMBROSIO, 1993, p.27 *apud* LOPES JÚNIOR, [20--?], n.p.)

Da mesma forma que há mais de uma religião, cultura, sistema de valores, também pode haver mais de uma maneira de compreender e entender a realidade. Conforme D'Ambrosio (2007) afirma

> A cultura, que é o conjunto de comportamentos compatibilizados e de conhecimentos compartilhados, inclui valores. Numa mesma cultura, os indivíduos dão as mesmas explicações e utilizam os mesmos instrumentos materiais e intelectuais no seu dia-a-dia. O conjunto desses instrumentos se manifesta nas maneiras, nos modos, nas habilidades, nas artes, nas técnicas, nas ***ticas*** de lidar com o ambiente, de entender e explicar fatos e fenômenos, de ensinar e compartilhar tudo isso, que é o ***matema*** próprio ao grupo, à comunidade, ao ***etno***. Isto é, na sua etnomatemática. (D'AMBROSIO, 2007, p.35)

E como observa Akizuki, citado por D'Ambrosio ([20--?]),

> As filosofias e as religiões orientais são de natureza diferente das ocidentais. Posso então imaginar que existam diferentes métodos de pensar, mesmo no campo da matemática. Não deveríamos nos limitar à aplicação direta dos métodos atualmente considerados na Europa e na América como os melhores, mas estudar de perto o ensino da matemática na Ásia. Tal estudo poderia se mostrar interessante e frutífero para o Ocidente e para o Oriente. (AKIZUKI apud D'AMBROSIO, [20--?], p.7)

Ao reconhecer "mais de uma matemática" e reencontrar o conhecimento de outros povos, estamos não só encontrando sinais de atividades matemáticas pelo mundo todo, como também aprofundando a compreensão da matemática em seu maior sentido porque, como aponta D'Ambrosio ([20--?]), se entende que o ensino da Matemática de outras culturas promove a desmitificação do conhecimento definitivo e único além de mostrar os feitos intelectuais de diferentes culturas e civilizações.

Assim, a Etnomatemática "propõe uma alternativa à educação tradicional" (D'AMBROSIO, [20--?], p.9). Como visto em Santos (2012), por meio dela, o uso da História da Matemática pode auxiliar no processo de ensino e aprendizagem de Matemática, despertando a curiosidade do aluno, resultando na busca por conhecimento, ampliando a capacidade de enfrentar situações e problemas novos. Além disso a utilização da História, como descrito em Brasil (2006), também pode ser colocada como parte importante no processo de transmissão de significados aos conceitos matemáticos.

Como salienta D'Ambrosio ([20--?]), alguns críticos, além de considerarem que esses meios diferenciados de ensino de Matemática não são de grande destaque, restringindo-os apenas ao campo lúdico, também alegam que a exigência por conhecimentos matemáticos comumente vistos no ambiente escolar e acadêmico é maior quando há situações como entrevistas de emprego e concursos, mas, segundo Domite ([20--?]),

> [...] o conhecimento matemático, as relações quantitativas e espaciais também devem ser trabalhadas pelos professores como relações que combinam com outras inúmeras influências, proporcionando novas transformações. Porque não é possível desenvolver alguém intelectualmente e afetivamente de modo isolado de sua vivência sociocultural e que aprender matemática é uma negociação com o universo do conhecimento já existente, na interação com os novos saberes. (DOMITE, [20--?], p.84)

Como D'Ambrosio ([20--?]) salienta, a Matemática pertence a todas as culturas, é a marca da pluralidade da civilização humana. Mostrar isso de forma que acrescente ao saber escolar e cultural do aluno é contribuir para a constituição de um olhar mais crítico sobre o que é aprendido, integrando o novo ao que foi aprendido anteriormente. Assim como os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (1997) estabelecem

> [...] essa abordagem não deve ser entendida simplesmente que o professor deva situar no tempo e no espaço cada item do programa de Matemática ou contar sempre em suas aulas trechos da história da Matemática, mas que a encare como um recurso didático com muitas possibilidades para desenvolver diversos conceitos, sem reduzi-la a fatos, datas e nomes a serem memorizados. (BRASIL, 1997, p.71)

Desse modo pode-se propiciar a reflexão e análise sobre o período, a cultura, o povo naquela época como também provocar uma melhor compreensão e fixação do conteúdo. Com isso, oferecemos uma alternativa à aula tradicional, verificando se o estudo e utilização dos *Sangaku* podem auxiliar no ensino de alguns tópicos de Matemática, sustentando-se na Etnomatemática.

3 OS *SANGAKU* COMO MOTIVADORES AO ESTUDO DA GEOMETRIA

A parte da história do Japão que nos interessa é o período Edo ou Tokugawa (1603-1868) no qual os *Sangaku* surgem e atingem seu ápice, e é estabelecido o regime feudal xogunato Tokugawa tendo a cidade Edo (atual Tóquio) como sede do governo. O xogunato é um sistema de governo militar no Japão baseado na autoridade do Xogum[2], "um líder militar supremo [...] que chegou a suplantar o poder do imperador" (PRIBERAM INFORMÁTICA S.A., 2009, n.p.) tornando-o uma figura representativa.

Durante a era Edo, o Japão foi governado de forma praticamente feudal pelo xogunato Tokugawa cuja meta, apontada por Carvalho (1998), era

> [...] um país agrícola auto-suficiente em seu território, socialmente estratificado num contexto de perfeita paz interna, e ao abrigo de qualquer contato com o exterior. Essa concepção política, que resultou de violenta reação a cem anos de intromissão mercantilista portuguesa-e de intensa repulsa à doutrinação cristã, jesuítica, no Sul do país, perdurou de 1603 a 1868, denominando-se o período Era de Edo, por referência a Edo (atual Tóquio), sede do governo xogunal. Fundamentalmente, as políticas social e cultural dos Tokugawa nos legaram um Japão racialmente unificado, por mais de dois séculos de isolamento étnico, e culturalmente reeducado nos antigos moldes das tradições budistas, confucionistas e xintoístas. (CARVALHO, 1998, p.38)

Como descrito anteriormente, este período é caracterizado pelo isolamento do Japão do mundo ocidental em 1639, por meio do fechamento dos portos japoneses como uma forma de impedir o avanço da influência ocidental, começando pela proibição do cristianismo, pois diante de seu alto nível de aceitação pelo povo, o xogum ficou temeroso pelos novos cristãos que estavam adquirindo costumes e hábitos até então desconhecidos no país, pudessem se tornar um problema para o seu governo. O pensamento de um Deus onipotente parecia uma insensatez, uma ameaça à autoridade absoluta do xogum. (YAMASHIRO, 1964, 1989)

Ao longo do *sakoku*, ou "país fechado", estava proibido qualquer contato entre a população japonesa e o mundo ocidental, isso incluía também viagens e livros. Do oriente, como Fukagawa aponta, deve ter continuado o comércio com a China e a

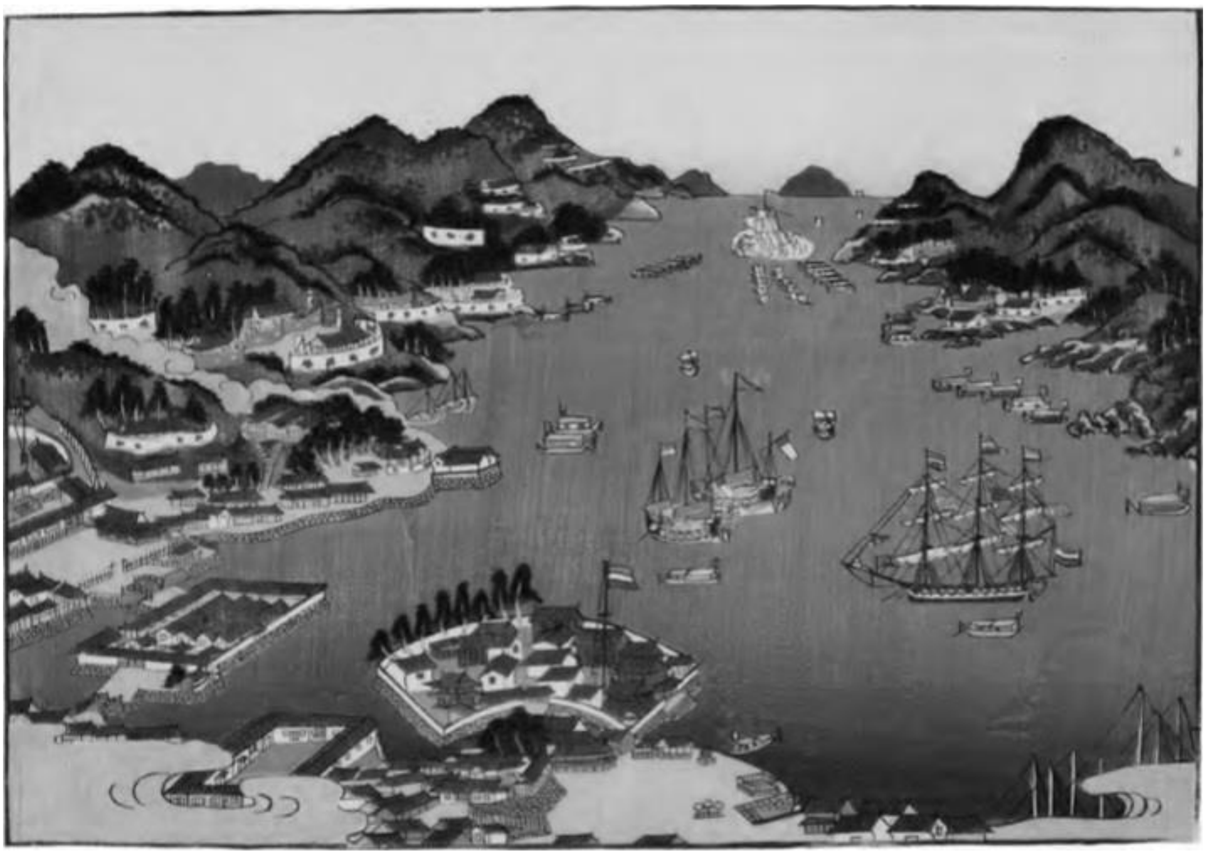
---

[2] Xogum: Grande general. Forma contraída de *seiitaishogun*, significando o grande general, o que domina os bárbaros. Originalmente um título temporário dado a um príncipe que dirigia campanhas militares ofensivas durante o período Heian. Mais tarde, o título de xógum foi dado [...] a Tokugawa, que criou um Bakufu a fim de obter o título de xógum como expressão de sua legítima autoridade militar para governar o país como braço militar da soberania imperial. (COLLCUTT; JANSEN; KUMAKURA, 1997, p.231)

Coréia. Do ocidente, o comércio foi mantido apenas com a Holanda que possuía permissão de aportar seus navios para o desembarque e embarque de mercadorias e transitar em Deshima, Nagasaki (Figura 2). Conforme Rothman (1998) menciona

> É certo que além dos holandeses que foram autorizados a permanecer no porto de Nagasaki em Kyushu, a ilha mais ao sul, todos os comerciantes ocidentais foram banidos. Igualmente claro é que os próprios japoneses foram severamente restringidos. O simples ato de viajar para o exterior era considerado alta traição, punível com a morte. Parece seguro supor que, se o isolamento não estivesse completo, então seria quase o mesmo, e qualquer influência estrangeira na matemática japonesa teria sido mínima. (ROTHMAN, 1998, p.89, tradução nossa)[3]

Figura 2: Uma cópia da xilografia de autor e data desconhecidos (provavelmente meados do século XIX) que mostra o porto de Nagasaki com a pequena ilha Deshima em forma de leque.



Fonte: Fukagawa e Rothman (2008)

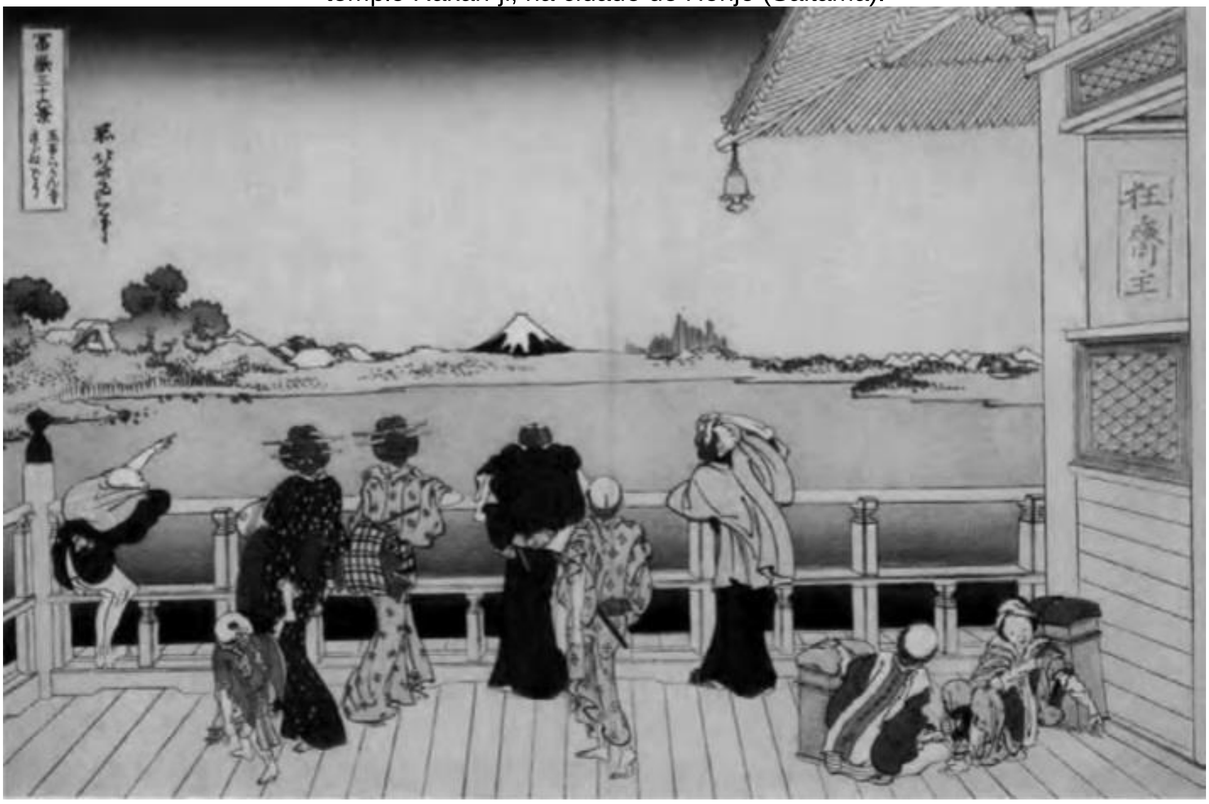
Porém o isolamento não foi completamente ruim, o país entrou em um tempo de "paz interna mais ou menos completa e permanente chamada 'grande paz'

[3] No original: *It is certain that apart from the Dutch who were allowed to remain in Nagasaki Harbor on Kyushu, the southern most island, all Western traders were banned. Equally clear is that the Japanese themselves were severely restricted. The mere act of traveling abroad was considered high treason, punishable by death. It appears safe to assume that if the isolation was not complete, then it was most nearly so, and any foreign influence on Japanese mathematics would have been minimal.* (ROTHMAN, 1998, p.89)

(*taihei*), embora em anos de crise econômica ocorram levantes camponeses" (YAMASHIRO, 1986, p.151), ocasionando no início da era cultural *Genroku* (1688-1703). Como Rothman (1998) explica

> De fato, durante o final do século XVII, a arte e a cultura japonesas floresciam tão brilhantemente que esses anos levam o nome de *Genroku*, "renascimento". Naquela época, o *haiku* se desenvolveu em uma forma de arte fina; Os teatros *No* e *Kabuki* alcançaram o ápice de seus desenvolvimentos; *ukiyo-e*, ou imagens do "mundo flutuante", originou-se; cerimônias de chá e arranjos de flores alcançaram novos patamares. (ROTHMAN, 1998, p.89, tradução nossa)[4]

Figura 3: *Ukiyo-e*[5], ou "mundo flutuante", da série *Thirty-Six views of Mt. Fuki* de Katsushika Hokusai (1760-1849), um dos mais famosos artistas da era Edo, mostra uma vista distante do Monte Fuji do templo Rakan-ji, na cidade de Honjo (Saitama).



Fonte: Fukagawa e Rothman (2008)

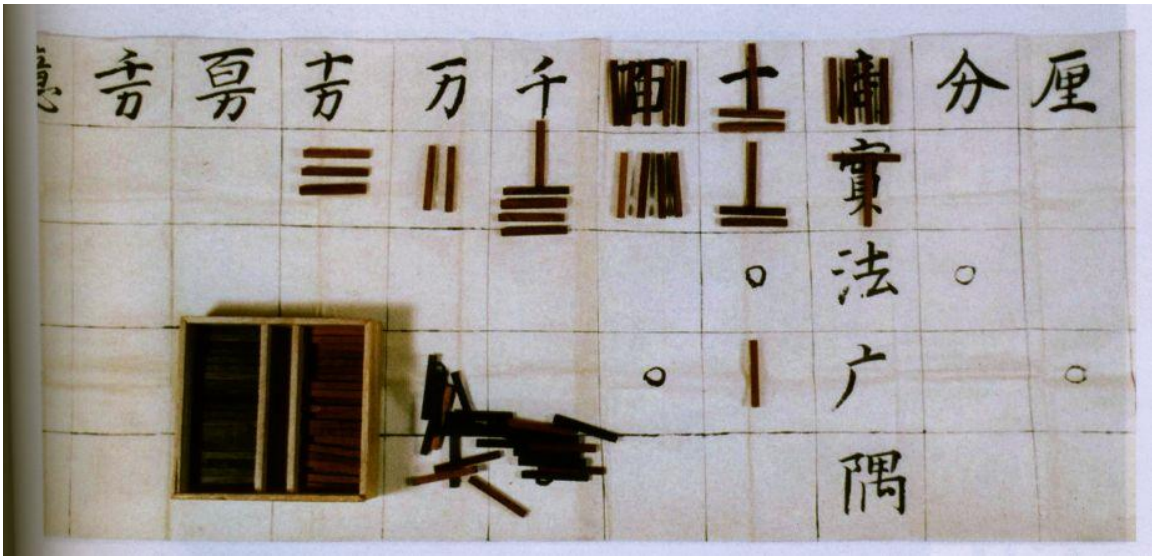
[4] No original: *Indeed, during the late 17th century, Japanese art and culture flowered so brilliantly that those years go by the name of Genroku, for "renaissance". In that era, haiku developed into a fine art form; No and Kabuki theater reached the pinnacle of their development; ukiyo-e, or "floating world" pictures, originated; and tea ceremonies and flower arranging reached new heights.*(ROTHMAN, 1998, p.89)

[5] Na arte Genroku surgiram artistas decorativos como Ogata Korin (1658-1716) e o aperfeiçoamento das xilogravuras, as pinturas do mundo flutuante (*ukiyoe*). [...] A frescura, vitalidade e qualidades abstractas das pinturas *ukiyoe* cativaram os impressionistas europeus e americanos aquando da exibição das pinturas japonesas em Paris, Londres e Filadélfia, na segunda metade do século XIX, e iniciaram uma onda de japonismo. (COLLCUTT; JANSEN; KUMAKURA, 1997, p.155-157)

Na Matemática, houve avanços importantes na era *Genroku*, bem como Yamashiro (1986) explica

> Interessante observar que, no campo da matemática, o cálculo em *sangi* (espécie de ábaco, porém destinado a cálculos superiores à extração da raiz quadrada) realiza progresso impressionante já na era Genroku. O mais conhecido perito em *sangi*, Takakazu Seki (1642-1708), mais ou menos contemporâneo de Newton e Leibnitz, descobre, independentemente de ambos, métodos de matemática superior, tais como o cálculo diferencial e integral - no *sangi*. (YAMASHIRO, 1986, p.174-175)

Figura 4: *Sangi* consistia de um conjunto de varetas pretas e vermelhas (representando quantidades negativas e positivas, respectivamente) dispostas em uma tabela e seguindo regras prescritas, usado principalmente para equações de grau elevado.



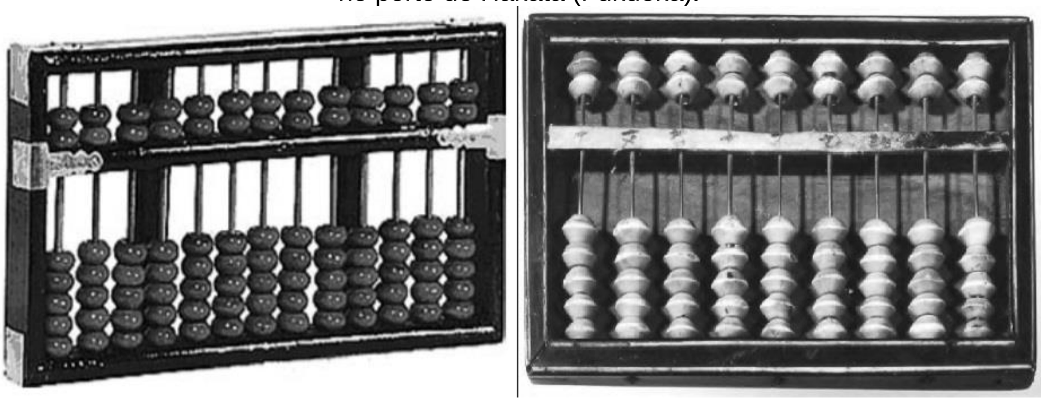
Fonte: Silva, Neto e Santos (2008a).

Nesse contexto cultural e histórico, surgem *soroban* (ábaco japonês) e *wasan*, "matemática nativa japonesa" que, durante o autoisolamento, foram desenvolvidos por meio da influência da matemática chinesa (Figuras 5, 6 e 9). *Soroban* (Figura 6), conforme Santos, Neto e Silva (2008a, p.6) apontam, por volta de 1600 começa a substituir o *sangi*, os dois modos sobreviveram lado a lado até o século XIX.

Wasan, segundo Buescu (2009, p.91-92), "centrada sobretudo na geometria do plano e do espaço, tornou-se assim um interesse intelectual desenvolvido por samurais, por mercadores e por camponeses". De acordo com Fukagawa e Horibe (2014), "na era Edo dos séculos XVIII e XIX no Japão, as pessoas comuns desfrutavam da matemática na vida cotidiana, não como um estudo profissional, mas como um jogo popular intelectual e uma atividade recreativa" (FUKAGAWA; HORIBE, 2014, p.118, tradução nossa)[6], como podemos observar na Figura 7.

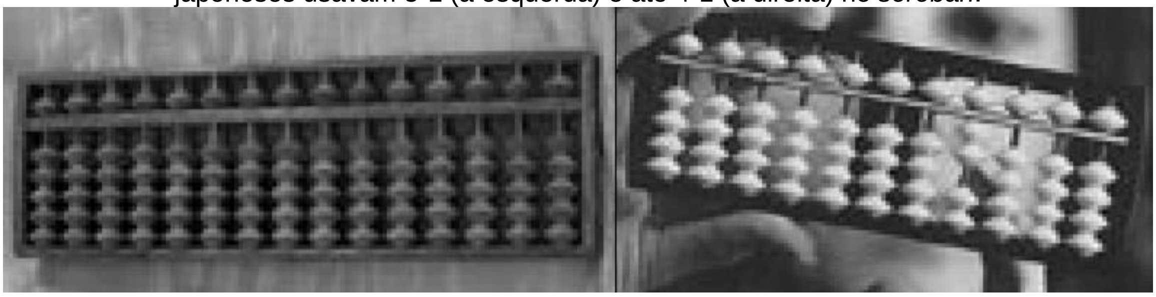
E a partir do *wasan*, se inicia a tradição do *Sangaku* (Figuras 7 e 8), "o nome literalmente significa tábua matemática (*san = matemática, gaku = tábua*)" (FUKAGAWA; HORIBE, 2014, p.111, tradução nossa)[7], tábua retangular de madeira com problemas matemáticos, boa parte envolvendo geometria, unindo matemática, religião e arte.

Figura 5: À esquerda – *Suanpan* (ábaco chinês), do qual o *soroban* se deriva. À direita – O mais velho *soroban* conhecido no Japão, de 1592 d.C., estava na posse de um dos soldados de Hideyoshi[8] no porto de Hakata (Fukuoka).



Fontes: Santos, Neto e Silva (2008b), e Fukugawa e Rothman (2008), respectivamente.

Figura 6: Ao contrário da disposição 5-2 do número de contas em cada vareta do *suanpan*, os japoneses usavam 5-1 (à esquerda) e até 4-1 (à direita) no *soroban*.



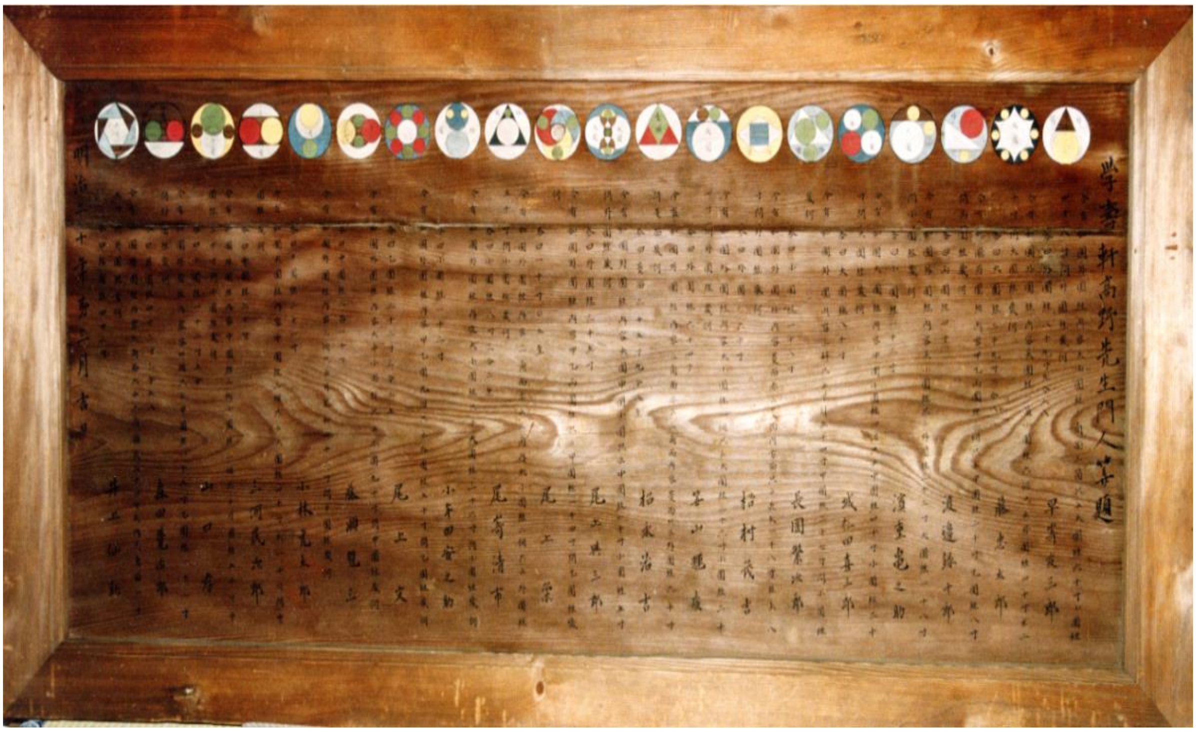
Fonte: Santos, Neto e Silva (2008a)

[6] No original: *in the Edo era of the 18th and 19th centuries in Japan, ordinary people enjoyed mathematics in daily life, not as a professional study but rather as an intellectual popular game and a recreational activity* (FUKAGAWA; HORIBE, 2014, p.118)
[7] No original: *the name literally means mathematical tablet (san = mathematics, gaku = tablet)* (FUKAGAWA; HORIBE, 2014, p.111)
[8] Toyotomi Hideyoshi (1536-1598) era filho de um soldado raso que ganhou a confiança de Nobunaga. Após a morte deste, Hideyoshi tomou o poder, alargou as conquistas de Nobunaga e governou com o titulo de regente (*kampaku*). (COLLCUTT; JANSEN; KUMAKURA, 1997, p.132)

Figura 7: *Sangaku* retratando a popularidade da matemática como um jogo (com 93 cm por 170 cm, datado de 1861, encontrado no santuário de Souzume, Okayama).

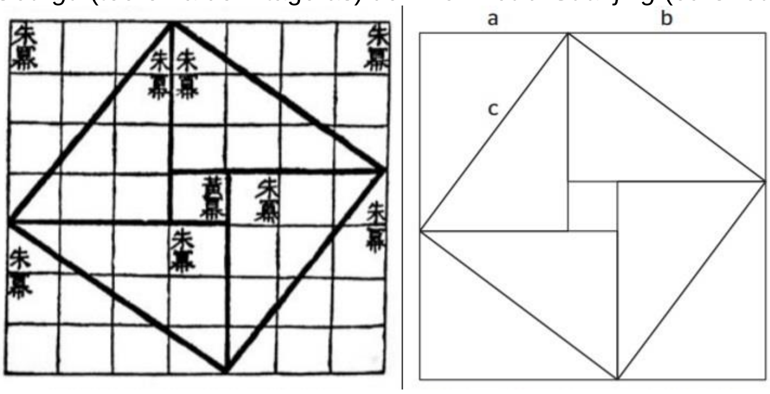
Fonte: Fukagawa e Horibe (2014)

Figura 8: *Sangaku* encontrado no santuário de Suwa, Nagaski, datado de 1887, com 215 cm por 107 cm.



Fonte: Japanese... (2017)

Figura 9: Regra *Gou-gu* (teorema de Pitágoras) do livro *Zhoubi Suanjing* (ou *Chou-pei Suan-ching*).



Fonte: Santos, Neto e Silva (2008b)

Um dos textos mais antigos e completos de Matemática, provavelmente do século I a.C., foi o *Zhoubi suanjing* (“Clássico de Matemática do gnómon”), como descreve Santos, Neto e Silva (2008b)

> Embora se trate de um livro dedicado à astronomia, contém várias secções de matemática. Um gnómon, neste contexto, é uma vara que se utiliza para projectar sombra quando o Sol brilha e que, por alinhamento, permite estimar distâncias inacessíveis. Por exemplo, o *Zhoubi suanjing* contém uma estimativa da distância ao Sol. [...] contém uma utilização implícita do Teorema de Pitágoras, conhecido na China por Regra *Gou-gu*. Na mesma obra encontramos uma demonstração geométrica, que hoje classificaríamos mais como um argumento de plausibilidade por sugestão das imagens. (SANTOS; NETO; SILVA, 2008b, p.8)

Segundo Arconcher (2016), sob o governo da família Tokugawa, os japoneses se dedicaram à Matemática a partir de conhecimentos chineses como, por exemplo, um clássico livro chinês *Jiuzhang Suanshu* (*Nove Capítulos sobre a Arte da Matemática*) do final da dinastia Han (208 a.C – 8 d.C.). A obra registrava conhecimentos de áreas, volumes, sistemas lineares, regra de três entre outros e os seis primeiros livros de Euclides que haviam sido traduzidos para o chinês no final do século XVI a pedido do missionário jesuíta Matteo Ricci que tinha como objetivo a difusão da doutrina cristã entre os chineses.

Arconcher (2016) aponta que

> A competência dos matemáticos japoneses do período Edo no uso da álgebra elementar para resolver problemas geométricos é muito grande. A forma geral de trabalho deles é: (i) tradução para a linguagem algébrica da situação geométrica, (ii) resolução das equações correspondentes até encontrar a solução ou desenvolvimentos algébricos até demonstrar a propriedade. É, principalmente, nesse segundo passo que encontramos transformações algébricas muito sutis. Esse “arsenal” inclui ainda:

> transformação afim aplicada a uma figura geométrica e o uso de relações de recorrência. (ARCONCHER, 2016, n.p.)

Devido ao tempo de paz interna, sem guerras para lutar, os samurais procuravam por uma ocupação. Conforme Fukagawa e Rothman (2008) afirmam que, objetivando um tempo de paz para a era Edo, o xogunato Tokugawa se dedica a tornar os samurais em uma classe altamente instruída.

Assim, procurando um emprego secundário e não havendo universidades e escolas no Japão, dentre as opções, muitos samurais abriam *juku* que se dedicavam aos três R's: *reading*, *'riting and 'rithmetic* (leitura, escrita e aritmética), o último com o uso do *soroban*. Eram consideradas verdadeiras escolas matemáticas, cada uma com seu mestre e seus discípulos. Um exemplo disso é o Yōken *juku* (Figura 10), como Fukagawa e Rothman (2008) observam, local em que 2144 alunos, incluindo muitos adultos, estudaram ao longo de cinquenta anos, cujo professor era o matemático Sakuma Yōken (1819-1896) e a pequena sala de aula de madeira ainda está de pé

> Um estudo recente (Ohishi Manabu, http:/library.u-gakugei.ac.jp (em japonês)) indica que, no século XIX, no final do período Edo, cerca de 80.000 *juku* existiam em todo o Japão. Embora, como no Ocidente, as crianças fossem consideradas trabalhadoras, não estudantes, a escolaridade local fornecida pelos *juku* resultou em um nível de alfabetização que era alto em comparação com outros países da época. (FUKAGAWA; ROTHMAN, 2008, p. 21, tradução nossa)[9]

Figura 10: Foto do Yōken *juku* (Tamura, Fukushima).

Fonte: Fukagawa e Rothman (2008)

[9] No original: *A recent study (Ohishi Manabu, http:/library.u-gakugei.ac.jp (in Japanese)) indicates that, by the nineteenth century, late in the Edo period, about 80,000* juku *existed throughout Japan. Although, as in the West, children were considered laborers, not students, the home-grown schooling provided by the* juku *resulted in a literacy level that was high compared to other countries at the time.* (FUKAGAWA; ROTHMAN, 2008, p. 21)

Figura 11: Escola[10] de matemática de Takeda, em Osaka, no século XIX.

Fonte: Horiuchi ([20--])

Como Arconcher (2016) observa

> [...] os matemáticos japoneses do período Edo desenvolveram uma habilidade muito grande no uso do ábaco (*sorobam*) e suas aplicações. Nessa época, o Japão tinha uma organização administrativa centralizada (Tokugawa) que necessitava de funcionários hábeis para executar e fiscalizar cobrança de impostos (40 a 60% da colheita). Havia concursos públicos para o provimento desses cargos implicando o surgimento de verdadeiras escolas matemáticas. Cada uma delas tinha um líder e um grupo de discípulos. A universal prática de publicar desafios matemáticos também se fez presente nessas escolas. (ARCONCHER, 2016, n.p.)

Com essa prática de publicar desafios matemáticos, se difundem os *Sangaku*. Os matemáticos japoneses profissionais e amadores – samurais, comerciantes, agricultores, cidadãos, até mesmo crianças – resolviam teoremas ou problemas matemáticos, muitos de Geometria, e os registravam sem sua resolução em tábuas retangulares de madeira, com aproximadamente 50 cm por 30 cm ou 180 cm por 90 cm, podendo ter até mais de um teorema, com texto explicativo escrito em *Kanbum*, uma língua japonesa antiga (equivalente japonês do latim), e figuras coloridas bem trabalhadas.

[10] “O mestre dá instruções a um discípulo, que faz cálculos com a ajuda de pequenos bastões (ao centro). Uma criança recebe ajuda para efetuar cálculos no ábaco (à direita). Outra estuda num livro (à esquerda). Percebe-se uma esfera armilar no fundo da sala, perto de uma parede de papel.” (HORIUCHI, [20--], p. 35)

Os matemáticos japoneses, profissionais e amadores, penduravam as tábuas nos templos budistas e santuários xintoístas (Figura 12) como homenagem aos deuses, mas também para exibir seus engenhos e desafiar matemáticos rivais e visitantes, propagando não só conhecimento como também promover as escolas e seus mestres. Como Dyson (2008) afirma, “é uma obra de arte, bem como uma declaração matemática” (DYSON, 2008, p.IX, tradução nossa)[11].

Figura 12: Um *Sangaku* que foi criado e pendurado em 1875 no santuário Kaizu Tenman, Shiga.

Fonte: Fukagawa e Horibe (2014)

O costume de pendurá-los em santuários xintoístas e templos budistas vem do Xintoísmo e dos *ema* (Figura 13), “ou ‘cavalos pintados’, são objetos que substituíram os sacrifícios de animais como oferendas a partir do século VIII. As tabuletas de matemática constituem uma categoria desses ‘cavalos pintados’”. (HORIUCHI, [20--], p.32) Conforme Fukagawa e Rothman (2008) descrevem

> Independentemente dos desenvolvimentos formais na matemática da época, os leitores ocidentais invariavelmente querem saber como surgiu o estranho costume de pendurar tábuas em santuários e templos. No contexto do Japão, foi bastante natural. O xintoísmo, a religião nativa do Japão, é povoado por “oitocentas miríades de deuses”, os *kami*, cujos espíritos infundem tudo, do sol e da lua a rios, montanhas e árvores. Durante séculos antes da existência do *sangaku*, os fiéis traziam presentes aos santuários locais. O *kami*, dizia-se, ama cavalos, mas os cavalos eram caros, e um adorador que não podia dar-se ao luxo de oferecer um cavalo poderia apresentar uma imagem desenhada em uma peça de madeira. De fato,

[11] No original: *it is a work of art as well as a mathematical statement* (DYSON, 2008, p.IX)

> muitas tábuas do século XV e anteriores retratam cavalos. (FUKAGAWA; ROTHMAN, 2008, p.8, tradução nossa)[12]

Figura 13: Um *ema* (autoria desconhecida).

Fonte: Horiuchi ([20--])

Ao decorrer do tempo, deixaram de relacionar o animal como homenagem para também abordar cenas de batalhas, personagens famosos. Entretanto, Horiuchi ([20--]) destaca que as tábuas conservaram sua finalidade religiosa ao serem penduradas em busca de reconhecimento, ajuda de Buda ou das divindades xintoístas. Muitos cidadãos comuns os usavam como uma forma de agradecer aos deuses pela ajuda dada em problemas particulares da vida. “Por essa razão, todo o

[12] No original: *Regardless of the formal developments in mathematics at the time, Western readers invariably want to know how the strange custom of hanging tablets in shrines and temples arose. In the context of Japan, it was fairly natural. Shintoism, Japan's native religion, is populated by "eight hundred myriads of gods," the* kami*, whose spirits infuse everything from the sun and moon to rivers, mountains, and trees. For centuries before* sangaku *came into existence, worshippers would bring gifts to local shrines. The* kami*, it was said, love horses, but horses were expensive, and a worshipper who couldn't afford to offer a living one might present a likeness drawn on a piece wood instead. In fact, many tablets from the fifteenth century and earlier depict horses* (FUKAGAWA; ROTHMAN, 2008, p.8)

acervo de problemas de *sangaku* passou a ser conhecido como geometria da matemática sagrada" (FUKAGAWA; HORIBE, 2014, p.111, tradução nossa)[13].

E mesmo essa função deixou de ser indispensável a partir dos séculos XV e XVI. Além disso, como Horiuchi ([20--]) indica, o papel de pendurar as tábuas em templos e santuários se encontra na divulgação de jovens talentos que não possuem recursos ao pendurar resolução de problemas difíceis em lugares muito frequentado atraindo atenção e reconhecimento, de desafios e submissão às criticas, e das escolas, uma função publicitária (por incluir além da data, nome e localização do autor e da escola). Quanto mais famoso e frequentado era o lugar, maior a quantidade de *Sangaku*.

De acordo com Horiuchi ([20--]), os *Sangaku*

> [...] são relativamente sucintos e inspirados, na maioria dos casos, em composições geométricas complexas, nas quais quadrados, círculos e elipses (ou ainda esferas e cubos) se imbricam ou se cruzam harmoniosamente proporcionando um grande deleite visual. (HORIUCHI, [20--], p.30-31)

Geralmente, abordam Geometria Euclidiana de forma diferente ao que é ensinado nas escolas ocidentais, como Horiuchi disse anteriormente, os círculos e as elipses se sobressaem. Alguns exercícios são simples e podem ser resolvidos facilmente usando, por exemplo, teorema de Pitágoras e semelhança de triângulos, outros demandam conhecimentos mais avançados como integrais e séries. Embora o isolamento do Japão, podemos encontrar "alguns resultados ocidentais conhecidos anteriores, como o teorema de Malfatti, o teorema de Casey e o teorema de sexteto de Soddy. Um problema reproduz o teorema do círculo de Descartes" (ROTHMAN, 1998, p.85, tradução nossa)[14], como podemos ver nas Figuras 14 e 15.

Fukagawa e Horibe (2014) apontam que o mesmo teorema do Sexteto de Soddy publicado pela primeira vez na revista Nature em 1936, foi mostrado em um *Sangaku* em 1822, no santuário de Samukawa, na prefeitura de Kanagawa, mais de cem anos antes da descoberta de Soddy. Apesar do *Sangaku* original, feito por Irisawa Hiroatsu na família de Uchida Itsumi, ter sido perdido, o mesmo foi gravado

---

[13] No original: *For that reason the entire collection of sangaku problems has come to be known as geometry of sacred mathematics* (FUKAGAWA; HORIBE, 2014, p.111)

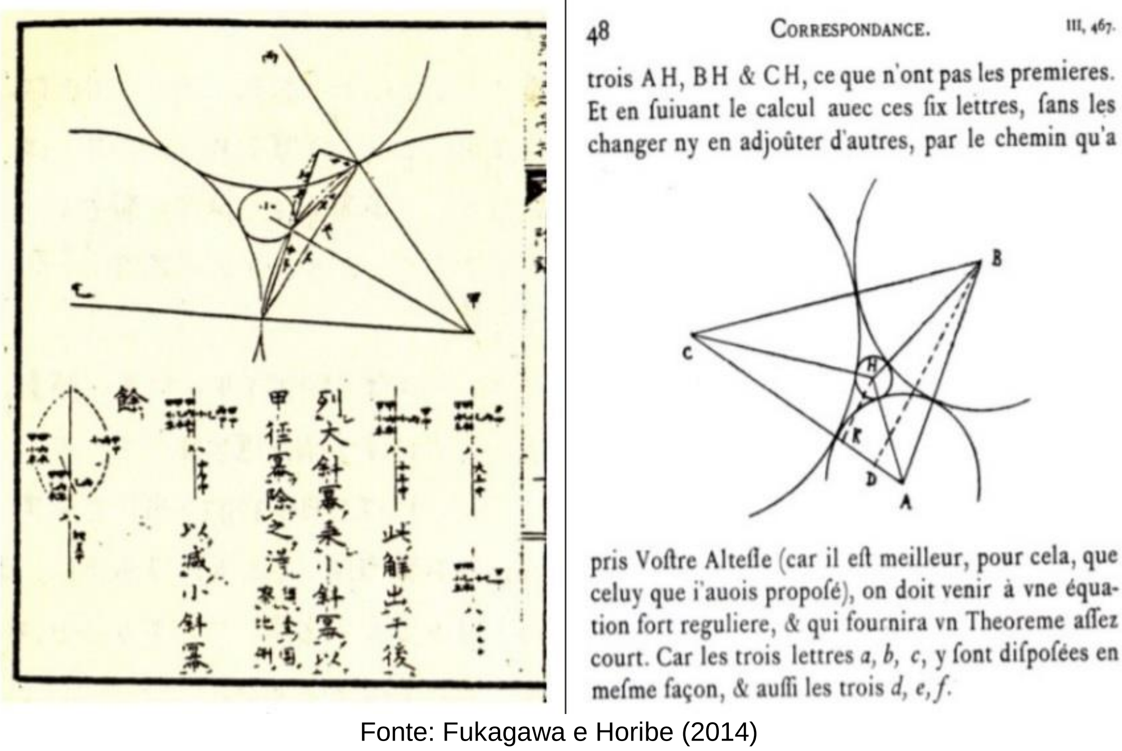
[14] No original: *a few predate known Western results, such as the Malfatti theorem, the Casey theorem and the Soddy hexlet theorem. One problem reproduces the Descartes circle theorem* (ROTHMAN, 1998, p.85)

no livro de Uchida, *Kokon Sankan*, em 1832, e uma réplica foi feita com a ajuda de Fukagawa, em 2009, baseada no registro feito nesse livro e destinado ao Museu de Hōtoku no santuário de Samukawa (Figura 14).

Figura 14: O primeiro problema (da esquerda para a direita) se refere ao teorema do Sexteto de Soddy (réplica do *Sangaku* encontrado no santuário de Samukawa, Kanagawa, 1822).

Fonte: Japanese... (2017)

Figura 15: À esquerda – o teorema de Descartes em um antigo texto em japonês *Sanpo Tenzan Syogakusyou* (publicado em 1830) e, à direita – o teorema original.


48 CORRESPONDANCE. III, 467.

trois AH, BH & CH, ce que n'ont pas les premieres. Et en ſuiuant le calcul auec ces ſix lettres, ſans les changer ny en adjoûter d'autres, par le chemin qu'a

pris Voſtre Alteſſe (car il eſt meilleur, pour cela, que celuy que i'auois propoſé), on doit venir à vne équation fort reguliere, & qui fournira vn Theoreme aſſez court. Car les trois lettres *a*, *b*, *c*, y ſont diſpoſées en meſme façon, & auſſi les trois *d*, *e*, *f*.

Fonte: Fukagawa e Horibe (2014)

> Essas tabuletas visíveis em nossos dias são em sua maioria do século XIX, mas sabe-se que a prática já era corrente em meados do século XVII. Estima-se que na época dos xoguns de Tokugawa (período feudal entre 1603 e 1868), elas tenham sido produzidas aos milhares, mas a maior parte desapareceu sem deixar marcas. (HORIUCHI, [20--], p.30)

Os mais antigos encontrados e “sobreviventes” datam de 1683 encontrado em Tochigi e, 1686 e 1689, em Kyoto. Um ainda mais antigo, porém perdido, data de 1668, foi relatado no diário de viagem do século XIX do matemático Kazan Yamaguchi[15]. Hoje, acredita-se existir mais de 880 registrados tanto em zonas rurais quanto urbanas.

Em 1854 é assinado o Tratado de Kanagawa entre o Japão e os EUA, seguindo na abertura de dois portos para o ocidente e o fim de dois séculos do *sakoku*. O xogunato Tokugawa já estava desgastado devido aos problemas internos como as revoltas dos camponeses (motivadas pelo aumento de impostos, períodos de fome e pobreza em razão de desastres naturais).

> Commodore Perry, dos Estados Unidos, cujas ambições no Pacífico iam bem mais longe dos interesses de seus barcos caçadores de baleias [...], forçou os japoneses à abertura de certos portos em 1853-54 com o método usual de ameaças navais. (HOBSBAWM, [2012], p.230)

Segundo Collcutt, Jansen e Kumakura (1997), a chegada da esquadra do comodoro Matthew Perry e a concessão às pressões americanas para abertura de mais portos por meio do Tratado Harris[16] assinado em 1858, resultam em uma instabilidade política e econômica provocando condições para uma crise interna e externa que resulta no fim do xogunato e restauração do poder ao Imperador. Não só *wasan* como também “a prática de pendurar o sangaku gradualmente desapareceu após a queda do xogunato Tokugawa, mas alguns devotos continuaram a publicá-los em 1980, e os sangaku continuam a ser descobertos mesmo agora” (FUKAGAWA; ROTHMAN, 2008, p.9, tradução nossa)[17]. “Alguns sangaku datam da década atual. Mas quase todos os problemas deste século são plágios” (ROTHMAN, 1998, p.89, tradução nossa)[18].

---

[15] Conforme Fukagawa e Rothman (2008) apontam, Yamaguchi nasceu por volta de 1781 em Suibara, em Niigata, estudou Matemática em Edo na escola Hasegawa Hiroshi e morreu em 1850. Muito do nosso conhecimento de *Sangaku* vem de seu diário, com cerca de setecentas páginas, de seis jornadas realizadas entre 1817 e 1828, descrevendo pontos turísticos, encontros com amigos e outros matemáticos e oitenta e sete problemas de *Sangaku*, dos quais apenas dois sobrevivem até o presente. E o destino deste diário é tão desconhecido quanto o de seu autor.

[16] O primeiro tratado americano-japonês que abria para o comércio com os Estados Unidos seis portos do Japão: Nagasaki, Kanagawa, Hyôgo, Shimoda, Niigata e Hakodate, prevendo a troca de cônsules entre os dois países, o direito para os cidadãos americanos de residir nesses portos, além de estabelecer o princípio da exterritorialidade. (FRÉDÉRIC, 2008, p.384)

[17] No original: *the practice of hanging sangaku gradually died out after the fall of the Tokugawa shogunate, but some devotees continued to post them as late as 1980, and sangaku continue to be discovered even now* (FUKAGAWA; ROTHMAN, 2008, p.9)

[18] No original: *A few sangaku even date from the current decade. But almost all the problems from this*

Em 1868, inicia-se a restauração Meiji que marca o começo de um Japão mais moderno e ocidentalizado, estabelecendo o estudo do *yosan*, “matemática ocidental”. Como Fukagawa e Rothman (2008) destacam

> Mas *wasan* se manteve firme até que, como consequência direta da abertura do Japão ao Ocidente por Perry, a família Tokugawa perdeu o poder em 1868. O novo governo Meiji decidiu que, para o Japão ser um parceiro igual a nações estrangeiras, deve se modernizar rapidamente. Seu programa incluía matemática. As escolas governamentais foram estabelecidas em todo o Japão e no *Gakurei* de 1872, ou “Código Fundamental de Educação”, os líderes de Meiji decretaram que “*wasan* não deveria ser ensinado na escola, mas apenas matemática Ocidental”. (FUKAGAWA; ROTHMAN, 2008, p.24, tradução nossa)[19]

Infelizmente, a tradição do *Sangaku*, que pode ser considerado único entre as criações culturais do mundo por ser ao mesmo tempo arte, votivo e um registro de uma matemática popular, se encontra quase esquecido atualmente exceto por alguns devotos da matemática japonesa tradicional. Dentre estes devotos está o Hidetoshi Fukagawa, que redescobriu os *Sangaku* e se tornou o principal responsável por sua divulgação, Rothman (1988) o retrata como

> […] um professor do ensino secundário na prefeitura de Aichi, localizada entre Tóquio e Osaka. Cerca de 30 anos atrás, Fukagawa decidiu estudar a história da matemática japonesa na esperança de encontrar melhores maneiras de ensinar seus cursos. Uma menção às tábuas de matemática de um antigo livro da biblioteca o surpreendeu muito, pois ele nunca ouvira falar de tal coisa. Desde então, Fukagawa, que tem Ph.D. em matemática, viajou muito no Japão para estudar as tábuas e acumulou um acervo de livros que lidam não apenas com um doutorado em matemática com *sangaku*, mas com o campo geral da matemática tradicional japonesa. Para realizar sua pesquisa, Fukagawa teve que aprender sozinho *Kambum* […]. Em 1989, Fukagawa, junto com Daniel Pedoe, publicou a primeira coleção de *sangaku* em inglês. (ROTHMAN, 1988, p.86-87, tradução nossa)[20]

---

century are plagiarisms (ROTHMAN, 1998, p.89)

[19] No original: *But* wasan *held its ground until, as a direct consequence of the opening of Japan to the West by Perry, the Tokugawa family lost power in 1868. The new Meiji government decided that, in order for Japan to be an equal partner to foreign nations, it must rapidly modernize. Their program included mathematics. Governmental schools were established all over Japan and in the 1872* Gakurei*, or “Fundamental Code of Education,” the Meiji leaders decreed that “*wasan *was not to be taught at school, but Western mathematics only.”* (FUKAGAWA, 2008, p.24)

[20] No original: *[…] a high school teacher in Aichi Prefecture, roughly hallway between Tokyo and Osaka. About 30 years ago Fukagawa decided to study the history of Japanese mathematics in hopes of finding better ways to teach his courses. A mention of the math tablets in an old library book greatly astonished him, for he had never heard of such a thing. Since then, Fukagawa, who holds a Ph.D. in mathematics, has traveled widely in Japan to study the tablets and has amassed a collection of books dealing not only with a doctorate in mathematics with* sangaku *but with the general field of traditional Japanese mathematics. To carry out his research, Fukagawa had to teach himself* Kambum *[…]. In 1989 Fukagawa, along with Daniel Pedoe, published the first collection of* sangaku *in English.* (ROTHMAN, 1988, p.86-87)

É por meio desta coleção, segundo Arconcher (2016), um livro de autoria dos professores Hidetoshi Fukagawa e Dan Pedoe *Japanese Temple Geometry Problems* (The Charles Babbage Research Centre – Winnipeg, Canada – 1989) que Fukagawa exibe 250 problemas geométricos provenientes de vários *Sangaku*, iniciando, assim, sua divulgação para o mundo.

Em 2004, como Fukagawa e Horibe (2014) apontam, o próprio Fukagawa supervisionou a primeira exposição de *Sangaku*. Nela, foi apresentado um dos maiores *Sangaku* (Figura 16) da prefeitura de Yamagata, originalmente pendurada em 1823, com cerca de 151 cm de altura e 453 cm de largura.

Figura 16: Primeira exposição de *Sangaku* em 2004 no Nagoya Science Museum com cerca de cem *Sangaku* transportados de todo o Japão.

Fonte: Fukagawa e Horibe (2014)

Em 2008, Fukagawa e Tony Rothman publicaram um livro *Sacred Mathematics: Japanese Temple Geometry* (Princeton University Press – Princeton, United States of America - 2008) cujo conteúdo aborda além dos problemas geométricos derivados de *Sangaku* com soluções em sua maioria, seus contextos cultural e histórico, excertos do diário de viagem do matemático japonês do século XIX, Yamaguchi Kanzan, entre outros fatores.

“Desde a exposição em 2004 e a publicação em inglês do […] livro sobre o sangaku em 2008 […], muitos matemáticos de todo o mundo vieram visitar o Japão para examinar essas tábuas de sangaku" (FUKAGAWA; HORIBE, 2014, p.114, tradução nossa)[21], como podemos ver nas figuras 16 e 17.

Figura 17: Um grupo dinamarquês visitando o templo de Myoujyourin-ji, Gifu, em 2012 para ver um *Sangaku* original que sobreviveu.

Fonte: Fukagawa e Horibe (2014)

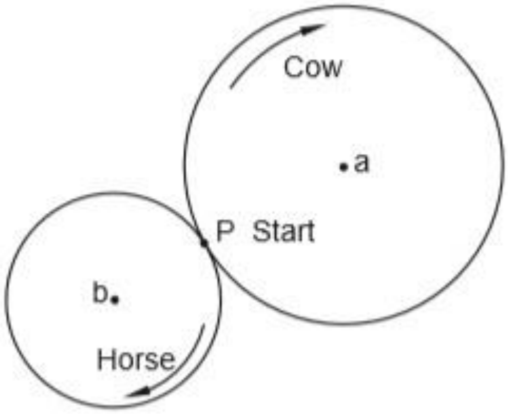
Diante o que foi apresentado neste trabalho e utilizando o livro *Sacred Mathematics: Japanese Temple Geometry* de Fukagawa e Rothman, serão expostos a seguir alguns problemas matemáticos de *Sangaku*, retirados deste mesmo livro e traduzidos por nós, tendo como base a Geometria Euclidiana.

Problema 01: Tanikawa Taizo pendurou a tábua contendo este problema em 1846 no templo Yuisin de Chita-gun, prefeitura de Aichi. Tem 98cm de largura e 48cm de altura. O *Sangaku* era desconhecido até 1979, quando alguém visitou o templo, encontrou-o vazio e abandonado e descobriu a tábua.

Uma estrada circular A de 48km de circunferência toca no ponto P outra estrada circular B de 32km de circunferência. Uma vaca e um cavalo começam a andar a partir do ponto P ao longo das estradas A e B, respectivamente. A vaca anda 8km por dia e o cavalo caminha 12km por dia. Quantos dias depois a vaca e o cavalo se encontram novamente em P?

[21] No original: *Since the exhibition in 2004 and the publication in English of […] book on sangaku in 2008 […], many mathematicians from all over the world have come to visit Japan to look at these sangaku tablets* (FUKAGAWA; HORIBE, 2014, p.114)

Figura 18: Problema encontrado em um *Sangaku* no templo de Yuisin de Chita-gun



Fonte: Fukagawa e Rothman (2008)

Resolução: Suponha que d dias depois de começar, a vaca e o cavalo se encontrem novamente em P. Então, como a vaca está caminhando a 8km por dia e completa um número inteiro de rotações, devemos ter

$$8d = 48m \ (1)$$

onde m é um inteiro. Similarmente, para o cavalo,

$$12d = 32n \ (2)$$

onde n é outro inteiro. Dividindo os dois membros da equação (1) por 8,

$$8d = 48m$$

$$d = 6m$$

E substituindo d = 6m na (2), obtemos

$$72m = 32n$$

$$\frac{m}{n} = \frac{32}{72}$$

Simplificando, temos

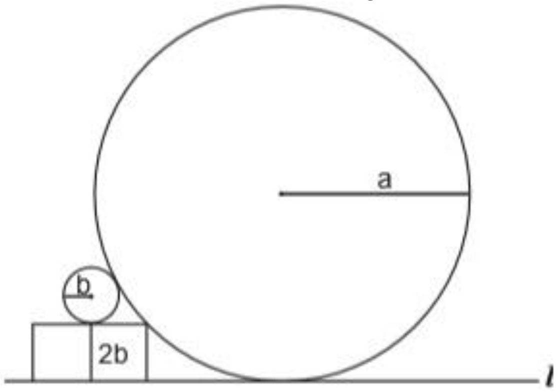
$$\frac{m}{n} = \frac{4}{9}$$

Mas como estamos procurando os menores inteiros possíveis, temos simplesmente m = 4 e n = 9. Assim d = 24 dias

Problema 02: Esse problema, apresentado por Kobayashi Nobutomo, também vem do *Sangaku* do santuário de Shimizu, 1828.

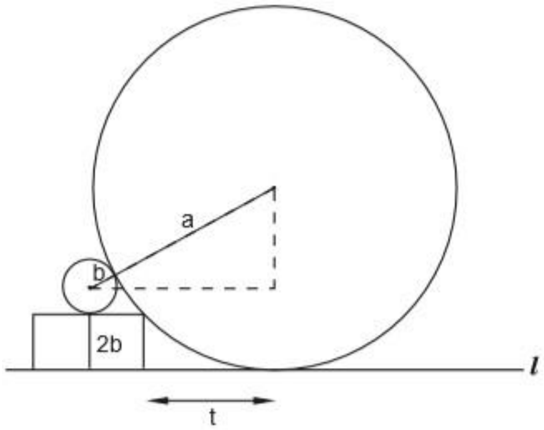
Como mostrado na figura, um pequeno círculo de raio b fica no ponto de contato entre dois quadrados do lado 2b que, por sua vez, estão localizados sobre uma linha l. Um grande círculo de raio a toca a linha l, o quadrado mais próximo e o pequeno círculo. Encontre a em termos de b.

Figura 19: Problema encontrado em um *Sangaku* no santuário de Shimizu



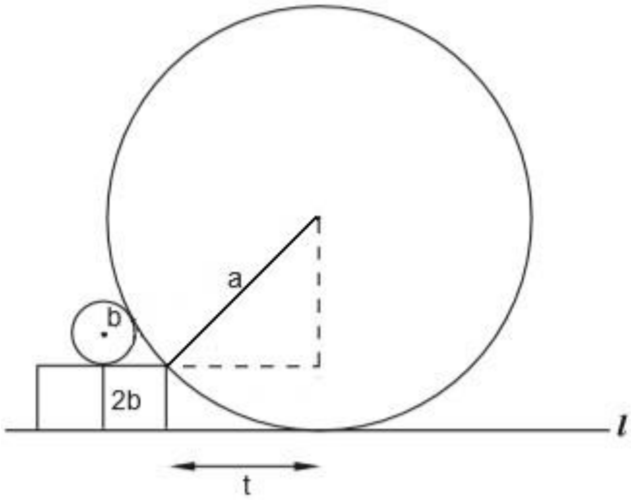
Fonte: Fukagawa e Rothman (2008)

Figura 20: Desenho auxiliar 1 para a resolução do Problema 02



Fonte: Fukagawa e Rothman (2008)

Figura 21: Desenho auxiliar 2 para a resolução do Problema 02



Fonte: Elaborada pela autora

Resolução: Desenhe as linhas auxiliares mostradas na Figura 20. Então, por Pitágoras,

$$(a+b)^2=(a-3b)^2+(t+2b)^2$$

$$8ab-8b^2=(t+2b)^2 \text{ (1)}$$

A partir da Figura 21 também se pode ver que

$$a^2=(a-2b)^2+t^2$$

$$4ab-4b^2=t^2 \text{ (2)}$$

Resolvendo as equações (1) e (2) juntas, obtemos

$$2t^2=(t+2b)^2$$

$$t=\frac{2b}{\sqrt{2}-1}$$

Substituindo essa expressão para t na equação (2) temos

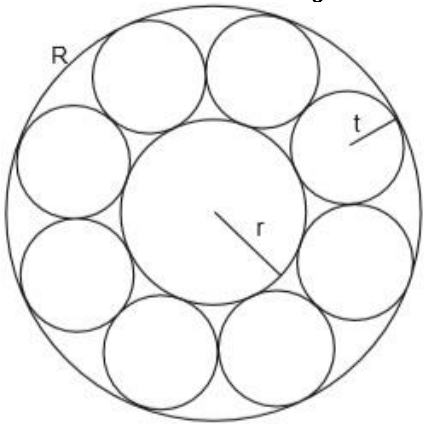
$$4ab-4b^2=\left(\frac{2b}{\sqrt{2}-1}\right)^2$$

$$a=\frac{b}{(\sqrt{2}-1)^2}+b$$

Problema 03: Nós apresentamos aqui um problema do *Sangaku* mais recentemente descoberto, que foi encontrado pelo Sr. Hori Yoji no santuário de Ubara, em Toyama em 2005. Ele data de 1879 e mede 76 cm por 26 cm.

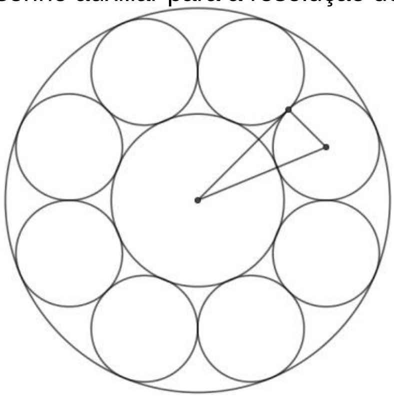
Como mostrado na figura, um anel de oito pequenos círculos de raio t, cujos centros se encontram nos vértices de um octógono regular, é circunscrito por um círculo de raio R e circunscreve um círculo de raio r. Encontre R e r em termos de t.

Figura 22: Problema encontrado em um *Sangaku* no santuário de Ubara



Fonte: Fukagawa e Rothman (2008)

Figura 23: Desenho auxiliar para a resolução do Problema 03



Fonte: Elaborada pela autora (2018)

Resolução: A tábua dá o resultado

$$R = (\frac{1}{k} + 1)t$$

$$r = (\frac{1}{k} - 1)t$$

$$\frac{1}{k} \text{ sendo } \sqrt{4 + \sqrt{8}}$$

que pode ser facilmente derivado da seguinte forma:

Da figura, o ângulo entre os centros de quaisquer dois dos pequenos círculos é de $\frac{360º}{8}$, e o ângulo entre o centro de um círculo e o ponto em que toca seu vizinho é $\frac{180º}{8}$. Desenhando uma linha do centro do círculo grande até o ponto onde dois pequenos círculos tocam, temos que

$$\text{sen}\left(\frac{180º}{8}\right) = \frac{t}{R - t} = \frac{t}{r + t}$$

Seja

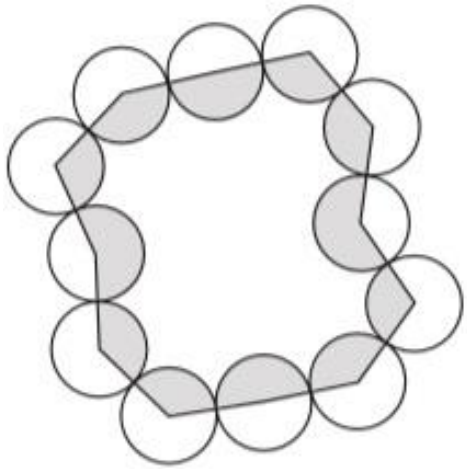
$$k = \text{sen}(\frac{180º}{8}) = \text{sen}(\frac{45º}{2}) = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} = \frac{1}{\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}}$$

Resolvendo o problema da equação acima para R e r temos o resultado da tábua.

Problema 04: Este problema vem da coleção Sūri Shinpen, ou Matemática dos Santuários e Templos de Saitō Gigi (1816-1889). Neste livro de 1860, Saitō registra trinta e quatro tábuas que foram penduradas entre 1843 e 1860. A maioria dos problemas envolvia o cálculo de alto nível. Este de nível fácil foi originalmente proposto por Nakasone Munekuni e pendurado em 1856 no santuário de Haruna, cidade de Haruna, prefeitura de Gumma.

Os centros de um ciclo de n círculos de raio r formam os vértices de um n-ágono como mostrado na figura. Seja S_1 a soma da área delimitada pelo n-ágono e S_2 a soma das áreas externas dos círculos. Mostre que $S_2 - S_1 = 2\pi r^2$.

Figura 24: Problema encontrado em um *Sangaku* no santuário de Haruna



Fonte: Fukagawa e Rothman (2008)

Resolução: Propomos como desafio ao leitor (a resolução encontra-se no APÊNDICE – Resolução do Problema 04).

4 PROPOSTA PEDAGÓGICA: ATIVIDADE COM *SANGAKU*

Apresentamos uma alternativa para o ensino de Matemática com o objetivo de possibilitar a interação entre alunos (do Ensino Fundamental II ou do Ensino Médio) e o contexto histórico e cultural de outro povo e de outra época, uma matemática diferente da que é comumente vista. Esperamos com essa alternativa permitir ao professor que trabalhe os conteúdos conforme o nível de aprendizagem dos alunos.

Acreditamos que tal proposta possa beneficiar tanto o aluno quanto o professor. Beneficia o aluno por desmistificar sobre a existência de uma única matemática ou uma única fonte de conhecimento, incentivando-o a aprofundar seu conhecimento matemático. Como os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (1997) explicitam, “valorizar esse saber matemático cultural e aproximá-lo do saber escolar em que o aluno está inserido, é de fundamental importância para o processo de ensino aprendizado” (BRASIL, 1997, p.32). Beneficia o professor por buscar formas que se adaptem ao nível de aprendizagem dos alunos, usando a História da Matemática não só como fatos, datas e nomes a serem memorizados como também um recurso didático, como os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (1997) apontam

> Conhecer os obstáculos enfrentados pelo homem na produção e sistematização desse conhecimento também pode levar o professor a uma melhor compreensão e aceitação das dificuldades enfrentadas pelos alunos e pensar em estratégias mais adequadas para favorecer a aprendizagem de conceitos e procedimentos matemáticos. (BRASIL, 1997, p.33)

Inicialmente, o professor fará uma descrição histórica de um país isolado culturalmente, em uma época que não havia aparatos tecnológicos ou mídias sociais, e que nos templos religiosos, no lugar de vitrais ou estátuas, eram encontrados tábuas de madeira penduradas com problemas de Matemática escritos. Em seguida, dirá que se trata do Japão e iniciará os questionamentos: Por quê em templos religiosos? Por quê serem problemas de Matemática? Por quê em tábuas de madeira? Por quê o país se encontrava em isolamento? Entre outros que possam instigar a curiosidade e o interesse dos alunos.

A seguir, o professor poderá apresentar, ou pedir para que os alunos pesquisem, imagens de *Sangaku*, explicando o que são e como eram utilizados.

Aproveitando este momento para abordar o contexto histórico e cultural do Japão. Também apresentando o *soroban* e o ábaco, o que são e como utilizá-los.

Depois tratando com mais detalhes sobre os *Sangaku* e resolvendo alguns deles, solicitará aos alunos que se organizem em grupos de 3 a 4 integrantes para montarem seus *Sangaku* usando materiais de sua escolha.

Ao concluírem os seus *Sangaku*, cada grupo poderá pendurar no mural, lousa da sala de aula ou expor conforme for possível pela disposição do local, permitindo que os grupos resolvam os *Sangaku* um do outro, sendo observados não só o uso de conceitos matemáticos, como também o trabalho em equipe.

O professor observará, estando a disposição no caso de alguma dúvida, incentivando os alunos de que não existe apenas um modo correto de resolução. E ao fim da atividade, o professor solicitará aos grupos que apresentem seus modos de resolução justamente para mostrar que diversos modos de resolução são possíveis de serem corretos, buscando assim como a Etnomatemática, conforme os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (1997) observam, “entender a realidade e chegar à ação pedagógica de maneira natural mediante um enfoque cognitivo com forte fundamentação cultural” (BRASIL, 1997, p.33).

5 CONCLUSÃO

Devido às experiências adquiridas pelos estágios, em especial, referentes aos questionamentos dos alunos sobre as próprias resoluções que nem sempre são aceitas por não seguirem os modelos impostos, percebemos que a educação precisa ser repensada de modo a considerar o conhecimento próprio de cada estudante, pois todo conhecimento é válido. Essa ideia pode ser trazida para o ensino de Matemática ao considerar que toda matemática é útil, pois atende às necessidades de cada povo. Por isso, mantemos nossas expectativas baseadas no respeito e reconhecimento das matemáticas de outros povos e culturas, seja a japonesa, a africana ou qualquer outra, tão importantes e corretas quanto a matemática mais usual.

Os currículos precisam tratar cada vez mais da Etnomatemática, não necessariamente de forma obrigatória, mas que possa ser discutida e apresentada em sala de aula. A ideia de muitos professores considerarem a Etnomatemática ou a própria História da Matemática como simples recursos alternativos em vez de práticas pedagógicas é outro fator que nos incomoda e nos motivou a realizar este trabalho. Repensar e agir sobre o ensino de Matemática se faz mais que necessário de modo a considerar os aspectos culturais e as vivências dos alunos, pois podem enriquecer as aulas e auxiliar no processo de ensino e aprendizagem.

A investigação feita com os *Sangaku* pode contribuir em vários aspectos para este trabalho, permitindo conhecer a cultura e a história em um período de determinado povo, verificar que a Matemática, em especial, a Geometria de tal época possuía suas próprias características: relacionando religião, arte e Matemática. Enquanto a Etnomatemática, possibilita desmistificar a ideia de que só na escola é ensinada Matemática, mostrando que todo conhecimento matemático adquirido no cotidiano é válido e de igual importância que aquele aprendido no ambiente escolar.

Como professores, somos antes de tudo, alunos. Por isso, precisamos estar atentos às necessidades dos alunos a fim de respeitar e valorizar os seus saberes. Nas aulas, podemos observar e compreender como uma cultura pode influenciar a Matemática e como esta influência reflete no modo de pensar e transmitir os conhecimentos atualmente. Portanto, o ensino de Matemática deve ser continuamente repensado.

Em uma reflexão sobre os problemas já vistos no ensino, optamos por utilizar a Etnomatemática como base teórica e, junto com os *Sangaku*, como proposta pedagógica. Por meio da pesquisa bibliográfica qualitativa, observamos que não existe um meio ideal ou único para o ensino da Matemática, porém ao conhecer novos métodos, notamos possibilidades acessíveis aos professores de forma a complementar ou remodelar sua prática, permitindo aos alunos aprenderem de forma mais significativa para suas vidas, mostrando como o ensinar é diferente de instruir.

Sendo assim, acreditamos que seja possível a continuação da pesquisa, a implementação e aprimoramento da atividade sugerida a fim de proporcionar maior enriquecimento na relação entre a Etnomatemática, não só a japonesa como a de outros grupos, e o conhecimento matemático, a nível tanto acadêmico quanto escolar.

REFERÊNCIAS

ARCONCHER, Cláudio. Sangaku: A Geometria Sagrada. **Revista do Professor de Matemática (RPM)**, [S. l.], v. 49, n.p., 2016

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Ministério da Educação e do Desporto. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997. 142p.

______. Secretaria de Educação Básica. Ministério da Educação. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio:** Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2006. 135p. (vol. 2)

BUESCU, Jorge. Sangaku: A Matemática Sacra: Os ecos distantes de uma Matemática – e Arte – quase perdidas. **Ingenium: a engenharia portuguesa em revista,** Lisboa, v. 2, n. 113, p.90-93, set. 2009.

CARVALHO, Darcy. Estratégias Econômicas e Condicionantes Geopolíticas do Desenvolvimento Japonês. In: MYAZAKI, Nobue (Org.). **A Cultura Japonesa Pré-Industrial:** Aspectos Socioeconômicos. São Paulo: Edusp - Editora da Universidade de São Paulo, 1998. p.37-56.

CHAGAS, Elza Marisa Paiva de Figueiredo. EDUCAÇÃO MATEMÁTICA NA SALA DE AULA: PROBLEMÁTICAS E POSSÍVEIS SOLUÇÕES. **Millenium**: Revista do ISPV, [S. l.], v. 29, n. 1, p.240-248, jun. 2004.

COLLCUTT, Martin; JANSEN, Marius; KUMAKURA, Isao. **Japão:** O Império do Sol Nascente. Madrid: Edições del Prado, 1997. v. 2. (Coleção Grandes Impérios e Civilizações).

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Educação Matemática:** Da Teoria à Prática. 17. ed. Campinas: Papirus, 2009. 120p. Coleção Perspectivas em Educação Matemática.

______. Etnomatemática: elo entre as tradições e a modernidade. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2007. 112p. Coleção Tendências em Educação Matemática.

______. Volta ao mundo em 80 matemáticas. **Scientific American: Brasil**, São Paulo, n. 11, p.6-9, [20--?]. Edição Especial Etnomatemática.

DOMITE, Maria do Carmo Santos. Etnomatemática em ação. **Scientific American: Brasil**, São Paulo, n. 11, p.80-84, [20--?]. Edição Especial Etnomatemática.

DYSON, Freeman. Foreword by Freeman Dyson. In: FUKAGAWA, Hidetoshi; ROTHMAN, Tony. **Sacred Mathematics:** Japanese Temple Geometry. Princeton: Princeton University Press, 2008. p.IX-XII.

FRÉDÉRIC, Louis. **O Japão:** Dicionário e Civilização. São Paulo: Globo, 2008. Tradução Álvaro David Hwang; Revisão Técnica Jorge Júnior do Prado e Jusara Kazue Ichioka. Disponível em:

<https://books.google.com.br/books?id=pKqDbBSLuSoC&printsec=frontcover&hl=pt-BR#v=onepage&q&f=false>. Acesso em: 26 jun. 2017.

FUKAGAWA, Hidetoshi; HORIBE, Kazunori. Sangaku: Japanese Mathematics and Art in the 18th,19th and 20th Centuries. In: BRIDGES SEOUL 2014: MATHEMATICS, MUSIC, ART, ARCHITECTURE, CULTURE, 17., 2014, Seoul, Korea. **Proceedings of Bridges 2014: Mathematics, Music, Art, Architecture, Culture.** Seoul, Korea: Bridges Seoul 2014, 2014. p.111-118.

FUKAGAWA, Hidetoshi; ROTHMAN, Tony. **Sacred Mathematics:** Japanese Temple Geometry. Princeton: Princeton University Press, 2008.

HOBSBAW, Eric John Ernest. **A Era do Capital.** São Paulo: Paz e Terra, [2012]. Tradução de: Luciano Costa Neto.

HORIUCHI, Annick. Geometria a serviço dos deuses no Japão. **Scientific American: Brasil,** São Paulo, n. 11, p.30-35, [20--]. Edição Especial Etnomatemática.

JAPANESE Temple Geometry Problem: Sangaku. Sangaku. Título e subtítulo traduzidos do japonês para inglês. Disponível em: <www.wasan.jp>. Acesso em: 02 jan. 2017.

LOPES JÚNIOR, José Erildo. Contribuições da Etnomatemática no processo de ensino e aprendizagem dos alunos do segundo segmento da EJA, em uma escola municipal de Itabirito. In: ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 19., 2015, Juiz de Fora. **Anais... .** Juiz de Fora: XIX EBRAPEM, 2015. n.p.

MATIAS, Sandra. **Etnomatemática: uma perspectiva para a educação matemática.** 2003. 58 f. TCC (Graduação) - Curso de Matemática - Habilitação Licenciatura, Departamento de Matemática, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2003.

PRIBERAM INFORMÁTICA S.A.. **Dicionário Priberam da Língua Portuguesa.** Lisboa: Priberam Informática S.A., 2009. Disponível em: <https://www.priberam.pt/dlpo/x%C3%B3gum>. Acesso em: 02 jan. 2017.

ROTHMAN, Tony. Japanese Temple Geometry. **Scientific American,** New York, v. 278, n. 5, p.84-91, may 1998.

SANTOS, Carlos Pereira dos; PEDRO NETO, João; SILVA, Jorge Nuno. **10 Livros, 10 Regiões, 10 Jogos para aprender e divertir-se:** China – Xiang-Qi. 2008b.

______. 10 Livros, 10 Regiões, 10 Jogos para aprender e divertir-se: Japão – Shogi. 2008a.

SANTOS, Márcia Nunes dos. **A História da Matemática como desencadeadora de atividades investigatórias sobre o Teorema de Tales:** análise de uma experiência realizada com uma classe de 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública de Ouro Preto (MG). Ouro Preto: UFOP, 2012. 72 p.

YAMASHIRO, José. **Choque Luso no Japão dos Séculos XVI e XVII.** [São Paulo]: Ibrasa, 1989. Disponível em: < https://books.google.com.br/books?id=l2qSNQnlQGcC&printsec=frontcover&hl=pt-BR#v=onepage&q&f=false>. Acesso em: 15 dez. 2016.

______. **História da Cultura Japonesa.** [São Paulo]: Ibrasa, 1986. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=YW_i09lMs5oC&printsec=frontcover&hl=pt-BR#v=onepage&q&f;=false>. Acesso em: 15 dez. 2016.

______. **Pequena História do Japão.** 2. ed. São Paulo: Herder, 1964.

APÊNDICE – Resolução do Problema 04

Sabendo que

- A soma dos ângulos internos de um polígono de n lados é dada pela expressão

$$B_n=(n-2)*180º$$

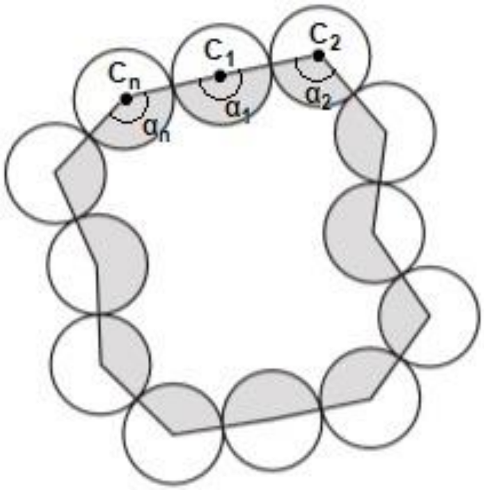
- A área de um setor circular de um círculo de raio r e ângulo central α é dada pela expressão

$$A_{SC}=\frac{\pi*r^2*\alpha}{360º}$$

- A área de um círculo de raio r é dada pela expressão

$$A_C=\pi*r^2$$

Figura 25: Desenho auxiliar para a resolução do Problema 04



Fonte: Elaborada pela autora (2018)

Considerando, pela Figura 25,

- As áreas hachuradas como setores circulares;
- Um polígono não convexo formado pela soma das áreas hachuradas;
- C_i, onde i = 1 a n, os centros dos círculos de raio r que formam os vértices do polígono de n lados;
- α_i, onde i = 1 a n, os ângulos internos do polígono não convexo formado pela soma das áreas hachuradas;

Recordando que S_1 é a soma das áreas hachuradas dos n círculos, das Figuras 24 e 25, temos que:

$$S_1=\sum_{i=1}^{n}\frac{\pi*r^2*\alpha_i}{360º} \quad (1)$$

$$S_1=\frac{\pi*r^2}{360º}*\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \quad (2)$$

Tendo em vista que $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i$ é a soma de todos os ângulos internos do polígono não convexo hachurado deste problema, entendemos que

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=(n-2)*180º$$

Então, substituindo em (2),

$$S_1=\frac{\pi*r^2}{360º}*(n-2)*180º \quad (3)$$

$$S_1=\frac{\pi*r^2*(n-2)}{2} \quad (4)$$

Observando as Figuras 24 e 25 e recordando que S_2 é a soma das áreas não hachuradas dos n círculos, nota-se que,

$$S_2=n*\pi*r^2-S_1 \quad (5)$$

Subtraindo S_1 nos dois membros da equação,

$$S_2-S_1=n*\pi*r^2-S_1-S_1 \quad (6)$$

$$S_2-S_1=n*\pi*r^2-2*S_1 \quad (7)$$

Subtraindo o S_1 posterior a igualdade, temos

$$S_2-S_1=n*\pi*r^2-2*\frac{\pi*r^2*(n-2)}{2} \quad 8)$$

$$S_2-S_1=n*\pi*r^2-\pi*r^2*(n-2) \quad (9)$$

$$S_2-S_1=n*\pi*r^2-n*\pi*r^2-(-2)*\pi*r^2 \quad (10)$$

$$S_2-S_1=2*\pi*r^2 \quad (11)$$

C.Q.D.

ANEXO – Mapa do Japão

Fonte: Fukagawa e Rothman (2008)