ALGUNS ASPECTOS MATEMÁTICOS SOBRE OS LOGARITMOS, O NÚMERO e E AS FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARITMICAS

VITOR HUGO NUNES LIMA

Trabalho de Conclusão do Curso Superior de Licenciatura em Matemática, orientado pelo Prof. Dr. Carlos Corrêa Filho

IFSP

SÃO PAULO

2018

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE SÃO PAULO

Câmpus São Paulo

VITOR HUGO NUNES LIMA

ALGUNS ASPECTOS MATEMÁTICOS SOBRE OS LOGARITMOS, O NÚMERO e E AS FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARITMICAS

Monografia apresentada ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, orientado pelo Prof. Dr. Carlos Corrêa Filho, em cumprimento ao requisito para obtenção do grau acadêmico Licenciado em Matemática.

SÃO PAULO

2018

Catalogação na fonte
Biblioteca Francisco Montojos - IFSP Campus São Paulo
Dados fornecidos pelo(a) autor(a)

L732a Lima, Vitor Hugo Nunes
Alguns aspectos matemáticos sobre os logaritmos, o número e e as funções exponenciais e logarítmicas / Vitor Hugo Nunes Lima. São Paulo: [s.n.], 2018.
97 f. il.

Orientador: Carlos Corrêa Filho

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, IFSP, 2018.

1. Número E. 2. Logaritmos. 3. Irracionalidade E Transcendência. 4. Funções Exponenciais E Logarítmicas. I. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo II. Título.

CDD 510

VITOR HUGO NUNES LIMA

ALGUNS ASPECTOS MATEMÁTICOS SOBRE OS LOGARITMOS, O NÚMERO *e* E AS FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS

Monografia apresentada ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, em cumprimento ao requisito exigido para a obtenção do grau acadêmico de Licenciada em Matemática.

APROVADO EM 10/12/2018 **CONCEITO:** 7,0

Patricia Paladino

Profa. Dra. Patrícia Andréa Paladino
Membro da Banca

Valeria O Jannis Luchetta

Profa. Dra. Valeria Ostete Jannis Luchetta
Membro da Banca

Prof. Dr. Carlos Correa Filho
Orientador

Vitor Hugo Nunes Lima

Aluno: Vitor Hugo Nunes Lima

“Por que são belos os números? É como perguntar por que é bela a nona sinfonia de Beethoven? Se não vê porquê, ninguém poderá explicar-lhe. Sei que os números são belos. Se não são belos, então nada o é.”

- Paul Erdös

Aos meus pais, Leticia e
Sapeca

Agradecimentos

Agradeço primeiramente aos meus pais por todo o apoio e incentivo durante essa trajetória acadêmica. A minha amada Leticia por estar comigo nos momentos difíceis, me ajudando ultrapassá-los e pela paciência por suportar minhas ausências.

Agradeço aos meus amigos de graduação por me ajudarem a compreender os conceitos matemáticos, tirarem minhas dúvidas e aguentarem minhas piadas durante todo este período acadêmico.

Agradeço aos professores do curso de licenciatura em Matemática do IFSP por proporcionarem conhecimentos mais que suficiente para o desenvolvimento desse trabalho. Além disso, agradeço por mostrarem uma nova visão do mundo e por proporcionarem conhecimentos matemáticos e didáticos para uma boa formação de professor de Matemática.

Sou grato ao meu orientador Carlos Correa Filho pela paciência comigo e pelas grandes contribuições que engradeceram meu trabalho.

Obrigado a todos!

Resumo

Este trabalho tem como enfoque um estudo sobre o número de Euler e as funções logarítmicas e exponenciais, apresentando alguns aspectos históricos com relação ao número e na Matemática, suas definições, sua irracionalidade e transcendência. Abordamos o conceito de logaritmos naturais e exponenciais naturais a partir da forma geométrica, demonstrando suas propriedades. Apresentamos a construção das séries infinitas das funções exponenciais e logarítmicas naturais feitas por Leonhard Euler no século $XVIII$.

Palavras-chave: Número e, Transcendência e Irracionalidade, Logaritmo e Exponencial

Abstract

This works focuses on a study on Euler’s number and logarithmic and exponential functions, presenting some historical aspects regarding number e in Mathematics, its definitions, its irrationality and transcendence. We approach the concept of natural logarithms and natural exponentials from the geometric form, demonstrating their properties. We present the construction of series infinite of natural exponential and logarithmic functions made by Leonhard Euler in the eighteenth century.

Keywords: number e,transcendence and irrationality, logarithm and exponential

Lista de figuras

Lista de Tabelas

Sumário

INTRODUÇÃO

O número de Euler é um dos números mais importantes da Matemática assim como o π, e sua história na Matemática se inicia no século $XVII$ com a criação dos logaritmos de Napier, cuja principal contribuição em sua época foi facilitar os cálculos extensos envolvendo produtos. Uma frase de Laplace (1749 – 1827) ilustra bem esse fato: “ao diminuir o trabalho, dobrou a vida dos astrônomos” (estes realizavam extensas contas envolvendo produtos). Além disso, o número e foi estudado por muitos matemáticos importantes, sendo demonstrado suas peculiaridades de transcendência e irracionalidade. A função exponencial natural desempenha um papel de extrema importância nas diversas áreas das ciências como: Química, Física, Economia, Biologia, Geografia, entre outras, pois é utilizada para modelar alguns fenômenos estudados por essas áreas.

Este trabalho apresenta um estudo de alguns aspectos matemáticos do número de Euler, principalmente àqueles que se referem à sua importância na compreensão e ensino moderno do Cálculo Diferencial e Integral e na teoria das funções. Pensamos inicialmente em fazer um estudo da relação entre o número de Euler (e sua representação em série infinita) com as funções de variável complexa, mas decidimos que o trabalho ficaria extenso demais, entendendo ser esta pesquisa tema para um trabalho à parte. Pretendemos ainda que o trabalho aqui desenvolvido sirva como material de apoio para o ensino do Cálculo Diferencial e Integral e Análise Matemática em seus diversos aspectos, principalmente no curso de Licenciatura em Matemática.

A metodologia seguida foi a da pesquisa e estudo na bibliografia disponível em bibliotecas, artigos de revistas científicas e material apropriado disponível na internet. No que diz respeito à abordagem histórica foram utilizados como ponto de partida os textos de Eves (2004), Maor (2008) e Dunham (1999). Deve ser enfatizado aqui que nosso entendimento é o de que para melhor compreensão de conceitos é necessário entender os motivos que levaram ao seu desenvolvimento. Segundo D’ Ambrosio (1996):

> A história da matemática é um elemento fundamental para se perceber como teorias e práticas matemáticas foram criadas, desenvolvidas e utilizadas num contexto específico de sua época. Essa visão crítica da matemática através de sua história não implica necessariamente o

> domínio das teorias e práticas que estamos analisando historicamente (D' AMBROSIO, 1996, p. 29 – 30).

Sobre o desenvolvimento de conceitos que levam a descrever de maneira formal os logaritmos e número *e* tivemos como ponto de partida as obras de Simmons (1987 e 1996), Thomas (2012), Stewart (2015), Figueiredo (2011), Lima (1996) e Guidorizzi (2001).

O trabalho foi estruturado da seguinte forma:

No primeiro capítulo apresentamos um apanhado histórico sobre o aparecimento do número de Euler na Matemática, abordando os conceitos de juros e de logaritmos neperianos.

No segundo capítulo apresentamos inicialmente alguns conceitos importantes de Sequências e Séries para a melhor compreensão dos estudos subsequentes. A partir disso abordamos a definição do número e como um limite, sendo este derivado dos estudos feitos por Napier e Briggs da aplicação dos logaritmos no cálculo financeiro, e cujo desenvolvimento se credita a Jakob Bernoulli I, um matemático cujas contribuições ao Cálculo Diferencial e Integral merece um trabalho exclusivo.

O terceiro capítulo trata das funções logarítmicas naturais e exponenciais naturais, primeiramente de uma forma analítica, sem nenhuma construção particular dessas funções, e depois fazemos suas construções sob o ponto de vista geométrico, relacionado com o problema da quadratura da hipérbole equilátera. A partir daí, são construídas as funções logarítmicas e exponenciais para base qualquer.

No último capítulo abordamos a questão da transcendência e irracionalidade do número e.

Por fim apresentamos em um apêndice as construções que Leonhard Euler provavelmente teria feito para obter as séries de expansão das funções e^x e $\ln\,(1+x)$.

1. NÚMERO e: IDEIAS NORTEADORAS

1.1. Abordagem Financeira

Desde a antiguidade, o homem necessitava de recursos “técnicos” para poder lidar melhor com suas operações financeiras. No entanto, a percepção dessa necessidade foi muito mais rápida do que a consolidação da ideia de que a ciência que melhor forneceria tais técnicas seria a Matemática, e mais lento foi o desenvolvimento de uma Matemática apropriada para se tratar de tais assuntos. Na verdade, esta evolução da Matemática levou séculos para chegar nos conhecimentos que hoje já estudamos a partir do nível fundamental ou médio de ensino.

Atualmente esses recursos constituem uma área da matemática nomeada de Matemática Financeira. Dentre os conceitos utilizados nessa área está o conceito de juros, que consiste em um rendimento financeiro obtido a partir do investimento inicial feito pelo emprestador. Essa ideia é encontrada em manuscritos antigos sobre matemática. Por exemplo, numa tabuleta de argila da Mesopotâmia do século 17 a.C. localizada atualmente no Museu do Louvre, se encontra o seguinte problema: quanto tempo levará para uma soma de dinheiro dobrar se for investida a uma taxa de 20 por cento de juros compostos anualmente? Nesse problema podemos perceber que ao final de cada ano, a soma cresce em 20%, ou seja, por um fator de $1{,}2$. Utilizando a linguagem atual da álgebra, concluímos que ao final de x anos a soma terá crescido por um fator de $(1{,}2)^x$. Portanto estamos interessados no valor de x para o qual $(1{,}2)^x = 2$.

Atualmente, sabemos que essa é uma equação do tipo exponencial que é resolvida através dos logaritmos. Porém, na época dos babilônios, os logaritmos não eram conhecidos, o que não os impediu de conseguirem uma solução aproximada para o problema: $3{,}7870$. Este resultado é surpreendente para a época, já que o valor correto com cinco casas decimais, utilizando o conhecimento de que dispomos hoje, é $3{,}8018$. Os babilônios inicialmente perceberam que $(1{,}2)^3 = 1{,}728$ e $(1{,}2)^4 = 2{,}0736$, então o valor de x deve estar entre 3 e 4. A partir disso podemos inferir que usaram uma ideia nomeada de interpolação linear, que consiste em encontrar um número x que divide o intervalo de 3 até 4 na mesma proporção que o número 2 divide o intervalo $1{,}728$ até $2{,}0736$, essa relação resulta numa equação do primeiro grau, entretanto os babilônios não possuíam nossos métodos atuais de resolução, além de utilizarem um sistema de numeração sexagesimal, assim o número que encontramos na tabuleta de argila é $3; 47.13.20$ que significa a soma $3 + \frac{47}{60} + \frac{13}{60^2} + \frac{20}{60^3}$. Devido a outra tabuleta de barro se sabe que os babilônios também possuíam uma tabela de "antilogaritmos"[1] para realização de seus cálculos, embora a formulação dos logaritmos ocorreu somente no século XVI com Napier e Brigss. Vamos agora ver como funcionam os sistemas de juros simples e juros compostos

Juros simples: neste tipo, o rendimento obtido em um período de investimento é dado pelo produto do valor inicial investido, pela taxa de juros do negócio e pelo período total investido. Em linguagem matemática temos: $j = juros$; $V = Valor\ Inicial; i = taxa\ de\ juros; n = período$. É importante salientar que estamos analisando um modelo discreto, ou seja, n é um número natural que corresponde ao número inteiro de vezes que ocorreu o intervalo de tempo mínimo para existir um rendimento.

$$j = V \cdot i \cdot n$$

O valor final nomeado de montante M é dado pela soma do valor inicial mais o juro obtido após o período total de investimento:

$$M = V + j$$

$$\Rightarrow M = V + (\ V \cdot i \cdot n) \Rightarrow M = V \cdot (1 + i \cdot n)$$

Juros compostos: neste tipo de juros, após o valor inicial investido, o montante parcial do rendimento, em cada período parcial é utilizado para calcular o rendimento do período subsequente. A tabela a seguir mostra o funcionamento dos juros compostos: Vamos definir: $V_0 = valor\ inicial$; $C = capital\ atual$; $M_n = Montante\ parcial\ do\ n - ésimo\ período$; $i = taxa\ de\ juros; n = período$

[1]De acordo com Iezzi (1977) para $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ com $a \neq 1$, se $\log_a b = x$ então b é o antilogaritmos de x na base a, e denotamos por $b = \operatorname{antilog}_a x$.

Tabela 1- Comportamento do Montante

n	C	M_n
0	V_0	$M_0 = V_0$
1	M_0	$M_1 = V_0 + V_0 \cdot i \Rightarrow M_1 = V_0(1+i)$
2	$M_1 = V_0(1+i)$	$M_2 = M_1 + M_1 \cdot i \Rightarrow M_2 = M_1(1+i) \Rightarrow M_2 = V_0(1+i)(1+i) \Rightarrow M_2 = V_0(1+i)^2$
3	$M_2 = V_0(1+i)^2$	$M_3 = M_2 + M_2 \cdot i \Rightarrow M_3 = V_0(1+i)^3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$M_{n-1} = V_0(1+i)^{n-1}$	$M_n = M_{n-1} + M_{n-1} \cdot i \Rightarrow M_n = V_0(1+i)^n$

Fonte: Elaborado pelo autor

Portanto o montante após n períodos decorridos é dado pela expressão: $M = V_0(1+i)^n$

Os bancos atualmente utilizam o sistema de juros compostos, pois a partir de certo ponto os montantes se tornam maiores que os montantes do sistema de juros simples. Vamos levar em consideração a seguinte situação: um cliente faz um investimento em um banco cujo valor inicial corresponde a $R\$\ 1.000{,}00$, no sistema de juros compostos e a uma taxa de 10% ao mês durante 1 ano, então temos:

- Após o primeiro mês o montante parcial é: $M_1 = 1.000(1+0{,}1) \Rightarrow M_1 = R\$\ 1.100{,}00$
- Após o segundo mês o montante parcial é: $M_2 = 1.000(1+0{,}1)^2 \Rightarrow M_2 = R\$\ 1.210{,}00$
- Após o terceiro mês o montante parcial é: $M_3 = 1.000(1+0{,}1)^3 \Rightarrow M_3 = R\$\ 1.331{,}00$
- Nosso montante final será: $M = 1.000(1+0{,}1)^{12} \Rightarrow M = 3.138{,}428377 \Rightarrow M \cong R\$\ 3.138{,}42$

Suponha que o banco tivesse composto os juros quinzenalmente e a uma taxa de juros de 5% a cada quinzena (ou seja, foi dobrado o número de períodos de 12 para 24 e se dividiu a taxa mensal pela metade); teríamos então:

- Após a primeira quinzena o montante parcial é: $M_1 = 1.000(1+0{,}05) \Rightarrow M_1 = R\$\ 1.050{,}00$

- Após a segunda quinzena o montante parcial é: $M_2 = 1.000(1 + 0{,}05)^2 \Rightarrow M_2 = R\$\ 1.102{,}50$ (note a diferença a mais no final do primeiro mês em relação ao caso anterior)
- Após a terceira quinzena o montante parcial é: $M_3 = 1.000(1 + 0{,}05)^3 \Rightarrow M_3 = 1.157{,}625 \Rightarrow M_3 \cong R\$\ 1.157{,}62$
- Nosso montante final será: $M = 1.000(1 + 0{,}05)^{24} \Rightarrow M = 3.225{,}099944 \Rightarrow M \cong R\$\ 3.225{,}09$

Podemos observar que nesse novo investimento o montante final é cerca de 86 reais a mais do que no investimento anterior.

Investiguemos o caso genérico em que os juros sejam compostos em n períodos ao ano em r anos e a taxa de juros seja igual a $\left({}^{i}\!/_{n}\right)$, tendo i o mesmo significado que antes, assim, existem agora $n \cdot r$ períodos de composição. Desta forma, nosso montante final será dado por: $M = V_0 \cdot \left[1 + \left({}^{i}\!/_{n}\right)\right]^{n \cdot r}$

Vamos construir uma tabela para analisar o comportamento do montante em relação a variável n (o número de períodos de composição ao ano). Para uma melhor análise vamos supor um valor inicial igual a 1, a taxa de juros inicial igual a 100% ao ano ($i = 1$) e $r = 1\ ano$; assim:

$$M = 1 \cdot \left[1 + \left({}^{1}\!/_{n}\right)\right]^{n}$$

Tabela 2- Iterações do Montante

$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{M_n}$
1	2
2	2,25
5	2,48832
10	2,59374246
50	2,691588029
100	2,704813829
1.000	2,716923932
10.000	2,718145927
50.000	2,718254646
10.000.000	2,718281693
1.000.000.000	2,718281827

Fonte: Elaborado pelo autor

Parece que qualquer outro aumento seguido em n, praticamente, não afetará o montante, ou seja, irá afetar o resultado apenas em casas decimais cada vez menos significativas. Então será que, não importa o quão grande seja o valor de n, o resultado de $\left[1+\left(1/n\right)\right]^n$ irá tender a algum valor próximo de $2{,}7182818$? Essa hipótese foi comprovada verdadeira com uma cuidadosa análise matemática que vamos apresentar mais adiante nesse trabalho.

1.2. Logaritmos

Para podermos compreender melhor algumas características do número *e*, precisamos do conceito de logaritmos criado por John Napier[2] e aperfeiçoada por Henry Brigss. De acordo com Maor (2008):

> Não temos um relato sobre como Napier tropeçou na ideia que resultaria em sua invenção. Ele era bem versado em trigonometria e sem dúvida estava familiarizado com a fórmula: $sen\,A \cdot sen\,B = \frac{1}{2}[\cos(A-B) - \cos(A+B)]$. Esta fórmula, e

[2]De acordo com Eves (2004), o escocês John Napier nasceu em 1550 e faleceu em 1617. Napier tinha interesse na resolução de triângulos esféricos, com isso contribuiu com ao menos duas formulas trigonométricas para resolução de triângulos esféricos obliquângulos. E dentre suas contribuições para a Matemática a maior delas foi à criação dos logaritmos.

> outras semelhantes para $\cos A \cdot \cos B$ e $\operatorname{sen} A \cdot \cos B$, eram conhecidas como regras prostafaréticas, da palavra grega que significa adição e subtração. Sua importância consiste no fato de que o produto de duas expressões trigonométricas, tais como $sen\, A \cdot sen\, B$ pode ser computado determinando-se a soma ou a diferença de outras expressões trigonométricas, neste caso $\cos(A - B)$ e $\cos(A + B)$. E como é mais fácil somar e subtrair do que multiplicar e dividir, essas fórmulas fornecem um sistema primitivo de redução de uma operação aritmética para outra mais simples. E foi provavelmente esta ideia que colocou Napier no caminho certo (MAOR, 2008, p.18).

Uma segunda ideia envolvia os termos de uma progressão geométrica. Já era conhecido no final do século XVI que, por exemplo, dada uma progressão geométrica da forma: $1, q,\ q^2, q^3, q^4, \dots, q^n$, ..., existe uma relação entre seus termos e os expoentes da razão comum q. podemos observar que os expoentes formam uma progressão aritmética. Na época, esta relação foi formulada da seguinte forma: se multiplicarmos dois termos quaisquer da progressão acima, o resultado será o mesmo que tomarmos a razão q com expoente igual à soma dos expoentes correspondentes dos fatores do produto, ou seja, $q^r \cdot q^s = q^{r+s}$. Da mesma forma, dividir um termo q^r da progressão por outro da forma q^s equivale à razão com o expoente igual à subtração dos correspondentes expoentes, contanto que q^r seja maior que q^s, ou seja, $\frac{q^r}{q^s} = q^{r-s}$. No entanto, caso o expoente do denominador fosse maior que o expoente do numerador, por exemplo q^2 dividido por q^6, pela nossa relação resultaria em $q^{2-6} = q^{-4}$, cuja expressão não foi definida. Para resolver esse problema definimos que $q^{-s} = \frac{1}{q^s}$, note que isso é válido de acordo com a relação $\frac{q^r}{q^s} = q^{r-s}$, como consequência podemos concluir que $q^0 = 1$. A partir disso podemos agora estender a progressão geométrica infinitamente para ambas direções, ou seja, $\dots, q^{-4},\ q^{-3}, q^{-2}, q^{-1}, q^0,\ q^1, q^2, q^3, q^4, \dots$ Dessa maneira podemos verificar que cada termo da progressão geométrica é uma potência de razão q e além disso, os expoentes formam uma progressão aritmética $\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots$ Esta é a ideia central por trás dos logaritmos, em que Napier desejava estender para uma faixa contínua de números.

Napier tinha em mente escrever qualquer número positivo como potência de algum número fixo (mais adiante esse número fixo foi nomeado de base), assim as operações de multiplicação e divisão de números seriam equivalentes a somas e subtrações de expoentes, ou seja, de modo que cada operação aritmética seria reduzida à operação abaixo dela na hierarquia das operações, propiciando uma dificuldade menor nos cálculos numéricos.

Então, qual deverá ser esse número fixo que será usado como base da potência para escrever qualquer número positivo? Se essa base for muito pequena suas potências irão crescer muito lentamente tornando não muito vantajoso o método, porém escolher um número próximo do 1 seria uma vantagem. Com isso em mente, Napier após anos de estudos decidiu pôr fim escolher como base o número $0{,}9999999 = 1 - 10^{-7}$, com objetivo de minimizar o uso de frações decimais, que na época de Napier era algo recente, em que a comunidade matemática estava passando por um período de aceitação. Além disso, para a escolha desse número específico, Napier utilizou uma ideia que é equivalente ao que nós utilizamos hoje ao dividir um quilometro em mil metros, ou seja, dividir uma unidade grande em outras pequenas subunidades todas de mesmo tamanho, assim criando uma nova unidade. E devido ao seu objetivo de diminuir os cálculos feitos em trigonometria, ele usou uma prática utilizada na trigonometria de dividir o raio de uma circunferência unitária em 10^7 partes. Portanto ao subtrair do raio unitário a sua 10^7 parte, obteve um número muito próximo de 1, ou seja, $1 - 10^{-7} = 0{,}9999999$. Esse número seria a taxa comum (Napier chamava esse número de "proporção") que ele usou para criar suas tabelas.

Com a taxa comum em mãos, Napier seguiu para encontrar os sucessivos termos de sua progressão, essa tarefa tediosa necessitou uma dedicação de vinte anos de sua vida (1594 – 1614). Sua primeira tabela possuía 101 elementos, iniciando com $10^7 = 10.000.000$, seguido de $10^7(1 - 10^{-7}) = 9.999.999$, depois o elemento $10^7(1 - 10^{-7})^2 = 9.999.998$, e assim por diante até o $10^7(1 - 10^{-7})^{100} = 9.999.900$, em que cada termo é resultado da subtração do termo anterior pela sua 10^7 parte. A partir dessa tabela, usando o mesmo processo Napier construiu uma segunda tabela utilizando como proporção a razão entre o último e o primeiro número da primeira tabela, ou seja, $\frac{9.999.900}{10.000.000} = 0{,}99999$, ou $1 - 10^{-5}$. Esta tabela era composta de 51 elementos com último termo igual a $10^7(1 - 10^{-5})^{50} \cong 9.995.001$. Sua terceira tabela de 21 termos foi construída utilizando à proporção $\frac{9.995.001}{10.000.000}$ obtendo como último termo o número $10^7(0{,}9995)^{20} \cong 9.900.473$. Por fim, Napier construiu sua última tabela com a proporção $\frac{9.900.473}{10.000.000}$.

Após completar suas tabelas, Napier inicialmente chamou os expoentes de cada potência de “número artificial”, porém depois escolheu o termo logaritmo, a palavra significando “número proporcional”, assim na notação atual significa dizer:

$$N = 10^7(1 - 10^{-7})^L \Rightarrow N = 10^7\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^L$$

em que Napier chamava L de logaritmo do número N. Podemos observar que nos logaritmos de Napier se $L = 0$ o valor de N é igual à 10^7 que difere dos nossos logaritmos atuais em que se $L = 0$ o valor de N é igual a 1. Além disso dividindo os ambos os lados da igualdade por 10^7 obtemos:

$$\frac{N}{10^7} = \frac{10^7\left[\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^{10^7}\right]^{\frac{L}{10^7}}}{10^7}$$

Denotando $N^* = \frac{N}{10^7}$ e $L^* = \frac{L}{10^7}$ temos:

$$N^* = \left[\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^{10^7}\right]^{L^*}$$

Calculando o valor numérico de $\left(1 + \left(-\frac{1}{10^7}\right)\right)^{10^7}$ obtemos uma aproximação do valor do inverso do número de Euler (que será abordado mais adiante), assim os logaritmos de Napier utilizavam como base o inverso do número de Euler, embora Napier não tinha isso em mente na época.

O matemático Brigss[3] ao visitar Napier, o ajudou a definir uma nova base para os logaritmos, a base 10 e ainda definiu que $\log 1 = 0$ e $\log 10 = 1$. Embora a invenção de Napier tenha facilitado muitos cálculos tediosos e extremamente demorados, o método para calcular logaritmos no século XVI ainda assim exigiam tempo e dedicação, por exemplo, para calcular $\log 5$ era necessário utilizar interpolação linear com o auxílio de uma tabela de logaritmos já conhecida. O método de Briggs consistia em obter aproximações de logaritmos através da extração de raízes quadradas

[3]Segundo Eves (2004), Henry Brigss nasceu em 1561 na Inglaterra e faleceu em 1631. Brigss era professor de Oxford quando viajou até Edimburgo para trabalhar com Napier no desenvolvimento dos logaritmos, sugeriu a Napier a utilizar os logaritmos com a base 10 que foi aceito e é utilizado até os dias atuais. Brigss após isso passou a se dedicar à construção de tabuas de logaritmos.

sucessivas. Primeiramente ele construiu uma tabela de raízes quadradas sucessivas de dez até o resultado estar próximo de um e assim para calcular o logaritmo de algum número y era necessário extrair raízes quadradas sucessivas do número y até que seu resultado também ficasse próximo do número 1, a partir disso era feito uma interpolação linear com a tabela inicial. Vamos exemplificar utilizando a tabela a seguir:

Tabela 3 - Logaritmos de potências de 10

X	$\log X$
10	1
$\sqrt{10} = 3{,}1622777$	$0{,}5$
$\sqrt{\sqrt{10}} = 1{,}7782794$	$0{,}25$
$\sqrt{\sqrt{\sqrt{10}}} = 1{,}3335214$	$0{,}125$
$\vdots$	$\vdots$
$(10)^{\frac{1}{2048}} = 1{,}0011249$	$0{,}00048828$
$(10)^{\frac{1}{4096}} = 1{,}0005623$	$0{,}00024414$
$(10)^{\frac{1}{8192}} = 1{,}0002811$	$0{,}00012207$

Fonte: Adaptada de Dunham (1999, p.19)

Ao calcular $(5)^{\frac{1}{4096}}$ (devemos notar que $\frac{1}{4096} = 2^{-12}$, isto é correspondente a dizer que o número $(5)^{\frac{1}{4096}}$ é obtido calculando- se 12 vezes seguidas, de forma recursiva, as raízes quadradas partindo do número 5) era obtido como resultado o valor $1{,}0003930$, que na tabela acima ficava no intervalo entre $(10)^{\frac{1}{8192}}$ e $(10)^{\frac{1}{4096}}$, assim era aplicado a interpolação linear na relação a seguir:

$$
\begin{array}{lcr}
(10)^{\frac{1}{4096}} = 1{,}0005623 & \qquad & 0{,}00024414 \\
(5)^{\frac{1}{4096}} = 1{,}0003930 & \qquad & X \\
(10)^{\frac{1}{8192}} = 1{,}0002811 & \qquad & 0{,}00012207
\end{array}
$$

Fazendo a proporção obtemos:

$$\frac{X - 0,00012207}{0,00024414 - 0,00012207} = \frac{1,0003930 - 1,0002811}{1,0005623 - 1,0002811}$$

$$\Rightarrow X = 0,000170646$$

Assim $\log(5)^{\frac{1}{4096}} = 0,000170646$ e, portanto $\log 5 = 0,698966$. Esse processo longo deveria ser repetido para se calcular qualquer outro logaritmo na base 10, o que era impraticável. Veremos no decorrer deste trabalho que Euler conseguiu uma maneira mais rápida de se calcular logaritmos, utilizando séries infinitas.

2. NÚMERO DE EULER E AS SÉRIES INFINITAS

2.1. Sequências numéricas

Uma sequência numérica $a(n)$ é uma função do conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}$: $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ (aqui adotaremos a convenção de que $\mathbb{N}$ se inicia a partir do 1). É convenção que a imagem $a(n)$ de um elemento $n \in \mathbb{N}$ seja escrito da forma a_n, o que sugere uma indexação desses elementos. Em geral, uma sequência como acima é denotada por $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ou simplesmente por $\{a_n\}$. Assim:

$$\{a_n\} = \{a_1; a_2; a_3; \dots; a_n; \dots\}$$

Uma sequência também pode ser vista como uma “n- upla” ordenada infinita:

$$(a_1; a_2; a_3; \dots; a_n; \dots)$$

que pode ser também escrita sem os parênteses:

$$a_1; a_2; a_3; \dots; a_n; \dots$$

Note que esta notação não quer dizer que os elementos a_i constituam uma sequência crescente de números reais, sendo que a ordem é estabelecida apenas em relação ao índice. Podemos descrever uma sequência utilizando o termo geral, veja alguns exemplos de sequência:

$$a_n = n, onde\ n = 1, 2, 3, \dots \Rightarrow \{a_n\} = \{1; 2; 3; 4; \dots; n; \dots\}$$

$$b_n = n^2, onde\ n = 1, 2, 3, \dots \Rightarrow \{b_n\} = \{1; 4; 9; 16; \dots; n^2; \dots\}$$

$$c_n = \frac{1}{n-1}, onde\ n = 2, 3, 4, \dots \Rightarrow \{c_n\} = \{1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \dots; \frac{1}{n-1}; \dots\}$$

Uma sequência numérica é crescente se $a_{n+1} > a_n$ para todo valor de n, ou seja, $a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < a_n < \cdots$. Ainda, uma sequência numérica é decrescente se $a_{n+1} < a_n$ para todo valor de n, ou seja, $a_1 > a_2 > \cdots > a_{n-1} > a_n > \cdots$. Se uma sequência for crescente ou decrescente dizemos que a sequência é monótona.

2.1.1. Convergência e divergência

Uma sequência infinita converge se existe um número L, do qual o termo a_n se torna arbitrariamente próximo à medida que o índice n aumenta. De acordo com Thomas (2012) temos:

Definição: Dizemos que a sequência $\{a_n\}$ converge para um número L, se para todo número positivo ε existe um número N,tal que:

$$\forall n > N \Rightarrow \ |a_n - L| < \varepsilon$$

Se uma sequência $\{a_n\}$ converge para o número L diremos que seu limite é L e denotamos este fato por $\lim_{n \to \infty} \{a_n\} = L$. Se não existe o número L com a propriedade acima dizemos que a sequência diverge.

Para estabelecermos o principal critério de convergência para sequências monótonas, vamos precisar de alguns conceitos. Este critério será essencial na demonstração da existência do número e como o limite de uma sequência. Vamos começar pela seguinte definição:

COTA SUPERIOR: Seja F um corpo ordenado e seja A um subconjunto de F. Um elemento $s \in F$ é um majorante ou limite superior ou cota superior de A se $s \geq x$, para todo $x \in A$ (sendo que o símbolo "≥" tem o significado usual em relação à ordem estabelecida em F). Neste caso diremos que A é limitado superiormente.

SUPREMO: Seja F um corpo ordenado e A um subconjunto limitado superiormente de F. O supremo de A, o qual designaremos por $\sup(A)$, é um elemento de F que possui a propriedade de ser a *menor* das cotas superiores de A. É claro que $sup\ (A)$ possui as seguintes propriedades:

i) $sup\ (A)$ é cota superior de A;

ii) Se y é uma cota superior qualquer de A, então $sup\ (A) \leq \ y$.

Da mesma forma que definimos cota superior, conjunto limitado superiormente e supremo, podemos definir, respectivamente, cota inferior, conjunto limitado inferiormente e o ínfimo de um conjunto.

Vamos considerar o corpo dos reais com sua ordem habitual[4].

AXIOMA DO SUPREMO: Se A é um subconjunto de $\mathbb{R}$ não vazio e limitado superiormente, então A admite supremo.

Os corpos ordenados que satisfazem o axioma do supremo são ditos *completos.* Assim, $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado completo. Além disso, $\mathbb{R}$ é o *único* corpo ordenado completo; no entanto não discutiremos este fato aqui, pois isto envolveria conceitos que extrapolam o objetivo desta monografia.

Podemos agora enunciar o seguinte teorema:

Teorema (Sequência Monótona) – Seja $\{a_n\}$ uma sequência monótona crescente, que também é limitada superiormente. Então $\{a_n\}$ é convergente.

Demonstração:

Seja $\{a_n\}$ uma sequência monótona crescente, que também é limitada superiormente, logo os termos da sequência $\{a_n\}$ formam um conjunto não vazio e limitado superiormente de $\mathbb{R}$.Assim, pelo Axioma do Supremo a sequência $\{a_n\}$ possui supremo L. Vamos provar que $\{a_n\}$ converge para L.

De fato: dado $\varepsilon > 0$, afirmamos que existe um natural N tal que $L - \varepsilon < a_N < L$. Se assim não fosse, e pelo fato de ser L uma cota superior do conjunto $\{a_n\}$, então $L - \varepsilon$ seria uma cota superior de $\{a_n\}$ menor que L, uma contradição. Como a sequência é monótona crescente, para todo n tal que $n > N$ temos que $L - \varepsilon < a_n < L$, de modo que $|a_n - L| < \varepsilon$. Como ε foi escolhido arbitrariamente, o teorema fica demonstrado.

2.2. Séries numéricas

Dada uma sequência infinita $\{a_n\} = \{a_1; a_2; a_3; \dots; a_n; \dots\}$ podemos, a partir desta formar uma nova sequência $\{S_n\}$ da seguinte forma:

$$S_1 = a_1$$

---

[4]Na verdade, existem várias construções possíveis para os números reais; os resultados e conceitos aqui colocados valem em todos os casos, independentemente da natureza dessas construções. Em particular, o axioma do supremo se torna um teorema quando estamos trabalhando com uma dessas construções. O "artifício" de se colocar a mencionada propriedade do supremo como um axioma é uma abordagem comum quando não se fornece a definição de número real, por exemplo em Lima (1982) é adotado esta abordagem.

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$\vdots$$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

$$\vdots$$

Tal sequência é denominada *a série* associada à sequência $\{a_n\}$; o termo S_n desta nova sequência nos fornece a soma dos n primeiros termos da sequência original. Por este motivo, a sequência $\{S_n\}$ é também denominada a sequência das somas parciais *de* $\{a_n\}$. Se a sequência $\{S_n\}$ converge para um real S, diremos que a série converge e *soma é igual a* S*.* Por este motivo, é comum se escrever que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$$

Se não existir tal real S, diremos que a série diverge. Porém, tanto no caso de convergência como divergência, o mais comum é denotar a série $\{S_n\}$ por $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

2.2.1. Série de Potências

Uma série de potência centrada em a é definida como:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \cdots$$

em que $c_0, c_{1,} c_2, c_3, \ldots$ são constantes chamadas coeficientes da série. Numa série de potência ao analisar a convergência acontece apenas uma das três situações a seguir:

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ converge apenas para $x = a$;

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ converge para qualquer valor de x;

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ converge apenas se $|x-a| < R$, em que R é um número positivo chamado raio de convergência. E assim diverge se $|x-a| > R$.

Temos que $|x-a|<R$ pode ser reescrito como $-R+a<x<R+a$, assim esse intervalo em x é chamado intervalo de convergência. É possível definir uma função $f(x)$ utilizando uma série de potências cujo domínio seja o intervalo de convergência: $f(x)=c_0+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+c_3(x-a)^3+\cdots$ para $-R+a<x<R+a$. Essa função é diferenciável e integrável dentro do intervalo de convergência e sua derivada e integral é obtida através da derivação e integração termo a termo da série, ou seja:

$$f'(x)=c_1+2c_2(x-a)+3c_3(x-a)^2+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}nc_n(x-a)^{n-1}$$

$$\int f(x)dx=K+f(x)=c_0(x-a)+c_1\frac{(x-a)^2}{2}+c_2\frac{(x-a)^3}{3}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$$

2.2.2. Serie de Taylor e Maclaurin

A série de potências pode definir uma função, entretanto não sabemos se qualquer função pode ser representada por uma série de potências. Para responder essa questão vamos assumir que $f(x)$ pode ser representada por uma série de potências:

$f(x)=c_0+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+c_3(x-a)^3+\cdots$ realizando sucessivas derivações obtemos:

$$f'(x)=c_1+2c_2(x-a)^1+3c_3(x-a)^2+\cdots$$

$$f''(x)=1\cdot 2c_2+2\cdot 3c_3(x-a)^1+3\cdot 4c_3(x-a)^2+\cdots$$

$$f'''(x)=1\cdot 2\cdot 3c_3+2\cdot 3\cdot 4c_3(x-a)^1+\cdots$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x)=1\cdot 2\cdots nc_n+termos\ que\ possuem\ uma\ potência\ de\ (x-a)$$

Fazendo $x=a$ podemos observar um padrão nas derivadas, pois: $f'(x)=c_1, f''(x)=1\cdot 2c_2, f'''(x)=1\cdot 2\cdot 3c_3, \ldots, f^{(n)}(x)=n!\,c_n$, assim caso a função $f(x)$ seja possível ser representada por uma série infinita, os coeficientes da série serão dados por: $c_n=\frac{f^{(n)}(x)}{n!}$. Substituindo na série que por hipótese representava $f(x)$ obtemos:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Essa série é denominada Série de Taylor gerada pela função $f(x)$ em torno de a, quando $a = 0$ a série é chamada Série de Maclaurin. As representações de funções por meio da Série de Maclaurin mais utilizadas são:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}; \ se \ -1 < x < 1$$

Veremos no decorrer deste trabalho como Leonhard Euler provavelmente fez para obter as mesmas expansões das séries e^x e $\ln(1+x)$ utilizando um método diferente.

2.3. Existência do número e

Para provarmos a existência do número *e*, vamos considerar a sequência $\{x_n\}$ cujo termo geral é $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ e a partir disso mostrar que $\lim_{n\to\infty} x_n$ existe. Para isso utilizaremos o Binômio de Newton para fazer a expansão do termo da sequência.

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$\Rightarrow x_n = \binom{n}{0}\frac{1}{n^0} + \binom{n}{1}\frac{1}{n^1} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \binom{n}{3}\frac{1}{n^3} + \cdots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n}$$

$$\Rightarrow x_n = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n!}{2!\,(n-2)!} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n!}{3!\,(n-3)!} \cdot \frac{1}{n^3} + \cdots + \frac{n!}{n!\,0!} \cdot \frac{1}{n^n}$$

$$\Rightarrow x_n = 1 + 1 + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{n^3} + \cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}\frac{1}{n^n}$$

$$\Rightarrow x_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)$$

Com isso, observamos que cada x_n corresponde à soma com $n+1$ parcelas; vamos provar que a sequência é crescente.

Considere m e n naturais tais que $n < m$. Temos:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+1+\frac{n(n-1)}{n^2}\cdot\frac{1}{2!}+\frac{n(n-1)(n-2)}{n^3}\cdot\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{n!}{n^n}\frac{1}{n!}$$

$$\Rightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots$$
$$+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

e

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1+1+\frac{m(m-1)}{m^2}\cdot\frac{1}{2!}+\frac{m(m-1)(m-2)}{m^3}\cdot\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{m!}{m^m}\frac{1}{m!}$$

$$\Rightarrow \left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{m}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)+\cdots$$
$$+\frac{1}{m!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{m-1}{m}\right)$$

Como $n < m$ então $\frac{1}{n} > \frac{1}{m}$, então:

$$1-\frac{1}{n} < 1-\frac{1}{m}$$

$$1-\frac{2}{n} < 1-\frac{2}{m}$$

$$\vdots$$

$$1-\frac{n-1}{n} < 1-\frac{n-1}{m}$$

Logo,

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) < \left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)$$

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right) < \left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\left(1-\frac{3}{m}\right)$$

$$\vdots$$

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)<\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{m-1}{m}\right)$$

Assim $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ se $n<m$. Portanto a sequência $\{x_n\}$ é monótona crescente:

$$x_1<x_2<x_3<\cdots<x_n<x_{n+1}$$

Consideremos as sequências $\{y_n\}$ e $\{z_n\}$ definidas pelo termo geral:

$$y_n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\text{ e }z_n=1+\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}$$

Se fizermos uma comparação entre as sequências $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ podemos observar que $x_n\leq y_n$, pois cada parcela de x_n a partir do terceiro termo é o produto de dois números, um dos fatores sendo menor que 1 e o outro igual à correspondente parcela de y_n:

$$x_n\leq y_n$$

$$\Rightarrow x_n\leq 1+1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}$$

Considere $1+z_n=1+1+\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}$, assim se fizermos uma comparação termo a termo entre y_n e $1+z_n$ podemos observar que $y_n\leq 1+z_n$, ou seja:

$$1+1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\leq 1+1+\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$\Longrightarrow x_n\leq 1+1+\left(\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)=2+z_{n-1},n\geq 2$$

A soma $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$ constitui a soma dos $n-1$ primeiros termos da progressão geométrica que tem por primeiro termo $\frac{1}{2}$ e razão $r=\frac{1}{2}$, assim:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots=\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2^n}<1,\forall n\geq 2$$

Logo, $x_n\leq 2+\left(1-\frac{1}{2^n}\right)<3$, para todo $n\in\mathbb{N}$. Mostramos assim que a sequência é limitada.

Como a sequência $\{x_n\} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ é monótona crescente e limitada superiormente, temos, pelo Teorema da Sequência Monótona, que ela converge. Como $x_1 = 2$ concluímos que $2 \leq x_n < 3, \forall n \in \mathbb{N}$. Assim, o limite da sequência deve estar entre 2 e 3. Euler atribuiu o símbolo $\boldsymbol{e}$ a este número real.

Agora vamos provar que a sequência $\{y_n\}$ também tende ao mesmo limite. A sequência $\{y_n\}$ é crescente; além do mais, vimos na demonstração acima que, para todo n, temos que $y_n \leq 3$; logo, a sequência é monótona crescente e limitada, portanto é convergente. Utilizando o termo geral de y_n podemos notar que para $n = 2$, o $y_2 = 2{,}5$ e ainda pelo fato da sequência ser crescente, para qualquer $n > 2$, o termo $y_n > 2{,}5$, assim podemos ver que seu limite L também será um número entre 2 e 3. Já sabemos que para todo n, temos $x_n \leq y_n$. Concluímos então, por propriedades de limites, que $e \leq L$. Por outro lado, seja m e n naturais quaisquer tais que $m < n$; vamos por um momento considerar apenas os primeiros $m+1$ termos de x_n, de modo a obter:

$$1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{m!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{n}\right) \leq x_n$$

Se mantemos m fixo e fizermos n crescer em ambos os lados da desigualdade acima, teremos:

$$\lim_{n\to+\infty}\left[1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{m!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)\right] \leq \lim_{n\to+\infty} x_n = e$$

Como para todo $1 \leq j \leq m-1$ temos que $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{j}{n}\right) = 1$, segue que:

$$\lim_{n\to+\infty}\left[1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{m!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)\right] = y_m = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{m!}$$

De modo que

$$\Rightarrow y_m \leq \lim_{n\to\infty} x_n = e$$

Como o argumento acima pode ser repetido para todo m natural, temos que:

$$L = \lim_{m \to +\infty} y_m \leq \lim_{n \to +\infty} x_n = e$$

Segue desta desigualdade e da desigualdade anterior $e \leq L$ que:

$$L = e$$

Ou ainda que:

$$e = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

3. FUNÇÃO EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA NATURAIS

3.1. Aspectos Analíticos de uma Função Logarítmica

Conforme já colocado no primeiro capítulo, a ideia principal acerca da definição "tradicional" de logaritmo está intimamente relacionada com a ideia de expoentes. Mais formalmente:

> "*Dado um número real x positivo e um número real $b > 0$, com $b \neq 1$, diremos que o logaritmo de x na base b é y se $b^y = x$, em símbolos:*
> $$\log_b x = y \iff b^y = x \text{ "}$$

A ideia parece ser muito simples e, em um primeiro momento, bem razoável. O problema começa com a própria definição de potência com expoente real. Lembramos ainda que a própria noção de número real foi melhor estabelecida pelos matemáticos do século XIX. Se tivermos um número real a positivo qualquer, conseguimos entender o significado de a^n para n natural: o símbolo indica que devemos multiplicar o real *a* por ele mesmo *n* vezes. Se n for um inteiro negativo, é fácil dar uma definição para a potência em questão: a^n representa o inverso do número a^{-n}. Esta definição mantém as propriedades aritméticas no tratamento dos expoentes. De todas as formas, se $x = a^n$, para algum inteiro n, podemos dizer que $\log_a x = n$. Até aqui, fica claro que a definição de logaritmo depende da relação entre o real x e a base a.

A questão de se definir a potência com expoente racional já não é tão trivial. Em primeiro lugar, deve ser demonstrado que, para todo número real positivo e diferente de 1, existe a raiz n- ésima de a, ou seja, existe um número positivo b de forma que

$$\sqrt[n]{a} = b \text{ ou } a = b^n$$

Essa demonstração não é trivial e geralmente é encontrada em livros de análise. Um dos livros de Cálculo Diferencial e Integral que tratam o assunto desta maneira é o Guidorizzi (2001). A demonstração se dá pela aplicação do chamado "Teorema dos Intervalos Encaixantes", um equivalente do axioma do supremo colocado no capítulo anterior. Nós não falaremos em detalhes sobre estes conceitos e demonstrações, sugerimos que o leitor interessado consulte o Capítulo 1 do livro citado. De todas as formas, isto permite a definição seguinte:

"Se a for um real positivo e diferente de 1 e n um natural, definimos a expressão $a^{\frac{1}{n}}$ pela relação: $a^{\frac{1}{n}} = b > 0 \Longleftrightarrow a = b^n$"

A extensão para um racional qualquer é então relativamente simples: definimos $a^{\frac{m}{n}}$ pela relação: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$. Assim, se $b > 0$ é tal que $a^{\frac{m}{n}} = b$, então $\log_a b = \frac{m}{n}$; novamente, a existência do logaritmo está condicionada à relação que existe entre b e a.

Uma boa definição do logaritmo $\log_a x$ para $a > 0$, $a \neq 1$ e $x > 0$ qualquer deve independer de uma relação pré-existente entre x e a. Ou seja: queremos garantir que para todos os pares a e x nas condições acima, podemos afirmar que existe o logaritmo de x na base a. O maior entrave para tal definição é a aparente falta de sentido para a expressão a^α quando α é irracional.

Alguns autores de livros de Cálculo Diferencial e Integral fornecem como definição informal o seguinte:

"Seja α um irracional e seja $\{r_n\}$ uma sequência de racionais de modo que $\lim_{n\to\infty} r_n = \alpha$;

Define-se então a potência a^α pela relação: $a^\alpha = \lim_{n\to\infty}(a^{r_n})$"

Embora a ideia não seja exatamente errada, ela carece de um sentido. Uma das coisas a ser provada é o fato de que para todo irracional α, existe (pelo menos) uma sequência de racionais que tem por limite α. Outro entrave: provar que a definição acima independe da escolha da sequência de racionais $\{r_n\}$ escolhida (se escolhermos duas sequências de racionais diferentes, ambas convergindo para α, teríamos o mesmo resultado?)

Um dos textos de Cálculo Diferencial e Integral que segue a linha acima e faz uma demonstração rigorosa da existência de $\log_a x$ para todo x e a como antes é o já mencionado Guidorizzi (2001). Para os interessados, recomendamos a leitura do Capítulo 6 e Apêndice 3 do referido livro.

Neste trabalho, iremos seguir por outro caminho. Daremos uma definição da função logarítmica baseada em ideias geométricas. No entanto, acreditamos ser interessante, a título de comparação com o que faremos adiante, uma exposição analítica preliminar sobre o assunto. O ponto de vista aqui exposto é o adotado no início do texto de Lima (1996).

O princípio norteador da definição usada no texto acima é o “desejo” de para todo real positivo x e para todo $a > 0$, sendo a diferente de 1, podermos dar um significado para o que entendemos ser (no sentido do Capítulo 1) $\log_a x$, ou seja, que para todo x e a nestas condições esteja garantida a existência de um expoente real y de modo que $a^y = x$. Esta definição é a seguinte:

Definição: (*Função Logarítmica)*: Uma função real $Log: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, definida para todos os reais positivos, é uma *função logarítmica* ou um *sistema de logaritmos* se possui as seguintes propriedades:

i) A função Log é crescente (ou seja: se $x < y$, então $Log(x) < Log(y)$);

ii) $Log(x.y) = Log(x) + Log(y)$, para todo x e y no domínio da função.

Uma questão acerca desta definição: será que a existência de uma função satisfazendo as condições i) e ii) acima nos leva de encontro ao “desejado” como colocado anteriormente? Será que tais condições são suficientes para se obter uma função com as propriedades que desejamos que ela tenha? Sobre isso, teremos um certo trabalho adiante. Mas fica pendente outra questão: o fato de fornecermos uma definição matemática rigorosa de um objeto *não implica na existência desse objeto*. O que queremos dizer é: a definição acima e tudo que dela irá ser demonstrado somente terá importância se conseguirmos *construir uma função que satisfaça às condições da definição dada.* Nas próximas seções deste capítulo, será feita uma construção geométrica de uma tal função (note que a definição dada deixa claro a existência de várias funções logarítmicas; isto é um fato verdadeiro, conforme veremos). O que iremos discutir no que segue desta seção é sobre propriedades algébricas e analíticas que deve ter tal função (independentemente de termos em mãos uma tal função!).

Uma outra observação importante: qualquer função satisfazendo as condições i) e ii) não pode estar definida em 0. De fato: seja f uma tal função. Para todo $x \neq 0$, teríamos:

$f(0) = f(0.x) = f(0) + f(x)$ (propriedade ii) $\Rightarrow$ $f(x) = 0$, ou seja, f seria uma função constante, o que contraria a condição i). Assim, *nenhuma função logarítmica pode estar definida em 0.*

Seguem propriedades da função Log decorrentes de sua definição:

Propriedade 1- Uma função logarítmica é sempre injetora.

Demonstração:

Decorre imediatamente da condição i) da definição de função logarítmica.

Propriedade 2- $Log\ (1) = 0$

Demonstração:

De acordo com a condição ii) temos:

$$Log\ (1) = Log\ (1 \cdot 1) = Log\ (1) + Log\ (1) \Longrightarrow Log\ (1) = 0$$

Propriedade 3- Se $x > 1$ então $Log\ (x) > 0$; se $0 < y < 1$ então $Log\ (y) < 0$

Demonstração:

Pela condição i) da definição, Log é crescente, então se $0 < x < 1 < y$, temos que $Log\ (x) < Log\ (1) < Log\ (y)$. Assim Propriedade 2 podemos concluir que $Log\ (x) < 0 < Log\ (y)$

Propriedade 4- Para todo $x > 0$, temos que $Log\ \left(\frac{1}{x}\right) = -Log\ (x)$

Demonstração:

Sendo $x > 0$, temos que existe seu inverso $\frac{1}{x}$ e que este número é positivo. Assim o valor de uma função logarítmica está bem definida para o número $x \cdot \left(\frac{1}{x}\right)$, assim como para x e $\frac{1}{x}$. Temos que: $Log\left[x \cdot \left(\frac{1}{x}\right)\right] = Log\ (1) = 0$; por outro lado, $Log\left[x \cdot \left(\frac{1}{x}\right)\right] = Log\ (x) + Log\ \left(\frac{1}{x}\right)$. Portanto $Log\ (x) + Log\ \left(\frac{1}{x}\right) = 0$, donde:

$$Log\ \left(\frac{1}{x}\right) = -Log\ (x)$$

como queríamos demonstrar.

Propriedade 5- Se x e y são reais positivos, temos que $Log\ \left(\frac{x}{y}\right) = Log\ (x) - Log\ (y)$

Demonstração:

Como $\frac{x}{y} = x \cdot \left(\frac{1}{y}\right)$ temos que:

$$Log\ \left(\frac{x}{y}\right) = Log\left[x \cdot \left(\frac{1}{y}\right)\right] = Log\ (x) + Log\ \left(\frac{1}{y}\right) = Log\ (x) - Log\ (y)$$

(esta última igualdade segue da propriedade anterior).

Propriedade 6- Para todo $x > 0$ e para todo número racional r temos que:

$$Log(x^r) = r.Log(x)$$

Demonstração:

Primeiro vamos supor que r seja um número natural. Neste caso utilizaremos o Princípio de Indução Finita.

I) Para $r = 1$ temos que: $Log\ (x^1) = Log\ (x) = 1.Log\ (x)$

II) Suponha que vale a propriedade para o termo $r = k$, $k \in \mathbb{N}$, temos:

$$Log\ (x^k) = k.Log\ (x)$$

III) Vamos provar que vale a propriedade para $r = k + 1$, $k \in \mathbb{N}$. Temos:

$$Log\ (x^{k+1}) = Log\ (x^k.x) = Log\ (x^k) + Log(x)$$

Por hipótese $Log\ (x^k) = k.Log\ (x)$, assim temos que:

$$Log\ (x^{k+1}) = Log\ (x^k.x) = k.Log\ (x) + Log\ (x) = (k + 1).Log\ (x)$$

Assim, a propriedade fica demonstrada no caso de r ser natural.

Se $r = -n$, onde n é um natural, temos que r é um inteiro negativo. Neste caso, para todo $x > 0$, temos:

$$Log(x^{-n}) = Log\left(\frac{1}{x^n}\right) = Log(1) - Log(x^n) \text{ (propriedade 5)}$$

$$\Rightarrow Log(x^{-n}) = 0 - Log(x^n) = -n.Log(x).$$

Assim, a propriedade do enunciado vale para os inteiros negativos.

Seja agora $r = \frac{m}{n}$ um racional qualquer, com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$ (e, portanto, $n \neq 0$). Dos casos mostrados anteriormente, segue que

$$m.Log(x) = Log(x^m) = Log\left(\left(x^{\frac{m}{n}}\right)^n\right) = n.Log\left(x^{\frac{m}{n}}\right);$$

Da igualdade acima segue que $Log\left(x^{\frac{m}{n}}\right) = \left(\frac{m}{n}\right).Log(x)$.

Isto conclui a demonstração da propriedade 6.

As propriedades de 1 a 6 são propriedades relativas à manipulação algébrica das funções logarítmicas, e nos mostram que tais funções têm as desejadas propriedades que os “logaritmos convencionais” devem ter. Os resultados a seguir são de natureza analítica, ou seja, se referem ao comportamento das funções logarítmicas.

Antes de enunciar a propriedade a seguir, vamos relembrar que uma função $f: A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é não limitada se para quaisquer números reais α e β fixados, existir x e y em A de forma que $f(x) > \alpha$ e $f(y) < \beta$. Tendo feito esta colocação temos:

Propriedade 7- Uma função logarítmica é não limitada.

Demonstração:

Seja dado um real α. Se α for negativo, pela propriedade 3, temos que qualquer $x > 0$ satisfaz $Log(x) > \alpha$. Suponhamos que $\alpha > 0$. Como $2 > 1$, temos que $Log(2) > 0$, de modo que o número $\frac{\alpha}{Log(2)}$ é um número positivo. Como os naturais não são limitados em $\mathbb{R}$, existe um natural N tal que $N > \frac{\alpha}{Log(2)}$, donde $N.Log(2) = Log(2^N) > \alpha$. Encontramos assim um número positivo cujo logaritmo é maior que α, provando a primeira parte da propriedade. Para terminarmos a demonstração, observemos o seguinte: se $\beta > 0$, pela propriedade 3 temos que, para todo y com $0 < y < 1$, $Log(y) < 0$. Se $\beta < 0$, temos que $-\beta < 0$, e pela primeira parte da demonstração vimos que existe x positivo tal que $Log(x) > -\beta$. Assim, $0 > \beta > -Log(x) = Log\left(\frac{1}{x}\right)$; como $\frac{1}{x} > 0$, encontramos um real positivo cujo logaritmo é menor que β. Com isso, concluímos a demonstração.

Propriedade 8- Se f é uma função logarítmica e c é uma constante real positiva, então a função $c.f$ é uma função logarítmica.

Demonstração:

Decorre das definições e propriedades anteriores.

O teorema a seguir, de grande importância na caracterização das funções logarítmicas, de uma certa forma é a generalização da propriedade 8.

Teorema 1 – Sejam f e g duas funções logarítmicas. Então, existe uma constante positiva c de forma que $g(x) = c.f(x)$, para todo $x > 0$. Ou seja: duas funções logarítmicas diferem apenas de uma constante positiva multiplicativa.

Essa demonstração pode ser encontrada em Lima (1996).

O fato de a função logarítmica ser crescente em seu domínio de definição nos diz que o logaritmo é uma função injetora. De fato, sejam x, y números reais positivos tal que $x < y$, como a função logarítmica é crescente então $Log\ (x) < Log\ (y)$, analogamente para $x > y$ temos que $Log(x) > Log\ (y)$, assim podemos concluir que para $x \neq y \Rightarrow Log\ (x) \neq Log(y)$, portanto a função é injetora.

O nosso próximo passo é estabelecer que o logaritmo também é uma função sobrejetora, e que, portanto, uma função logarítmica é uma bijeção entre $\mathbb{R}^+$ e $\mathbb{R}$. Para estabelecer a sobrejetividade, vamos começar pelo:

Lema 1: Seja $F: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ uma função logarítmica. Dados números reais arbitrários α e β, com $\alpha < \beta$. Então, existe $x > 0$ tal que $\alpha < F(x) < \beta$.

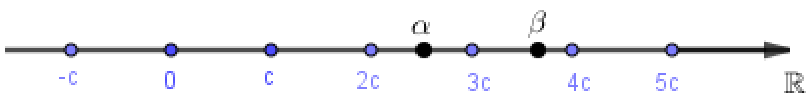
Demonstração:

Seja n um número natural fixo tal que $\frac{F(2)}{n} < \beta - \alpha$. Considere $c = \frac{F(2)}{n}$. Seja $m \in \mathbb{Z}$ temos que os múltiplos inteiros de c são dados por:

$$m \cdot c = \frac{m}{n} F(2) = F\left(2^{\frac{m}{n}}\right)$$

Esses múltiplos decompõem a reta real em intervalos justapostos, cujo comprimento c é menor que o comprimento de $\beta - \alpha$ do intervalo aberto $I =]\alpha ; \beta[$. Geometricamente temos:

Figura 1- Distribuição dos múltiplos de c na reta real



Fonte: Elaborada pelo autor

Portanto, pelo menos um dos múltiplos inteiros de c está no interior do intervalo $I =]\alpha ; \beta[$. Assim se $x = 2^{\frac{m}{n}}$, então $\alpha < F\left(2^{\frac{m}{n}}\right) < \beta$

Teorema 2 – Toda função logarítmica F é sobrejetiva; assim, dado qualquer número real y, existe um positivo x tal que $F(x) = y$. Em particular, para toda função logarítmica existe um real positivo b tal que $F(b) = 1$. O número b assim determinado é denominado "*a base do sistema de logaritmos F*".

Demonstração:

Antes de demonstrar o teorema, vamos recordar que todo número real α admite uma representação decimal única da forma: $\alpha = a_0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \cdots$, em que a_0 é um número inteiro qualquer e os algarismos decimais a_n, $n \geq 1$ pertencem ao conjunto $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$. Ainda com relação a α, ressaltamos que para todo $n \geq 0$, podemos escrever: $\alpha_n = a_0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \cdots + \frac{a_n}{10^n}$, de modo que $\alpha_n \leq \alpha$ e ainda que $\alpha - \alpha_n < \frac{1}{10^n}$, mesmo no caso de α ser finito, ou seja, o caso em que $a_n = 0$ para todo n a partir do natural j.

Se $x \in \mathbb{R}$ e $x < \alpha$ então $\alpha - x > 0$ e, tomando n suficientemente grande, temos que: $\frac{1}{10^n} < \alpha - x$. Logo temos que:

$$\alpha - \alpha_n < \frac{1}{10^n} < \alpha - x$$

$$\Longrightarrow \alpha - \alpha_n < \alpha - x$$

$$\Rightarrow x < \alpha_n$$

Pretendemos mostrar que dado um número real y, conseguimos obter um número real positivo α tal que $F(\alpha) = y$. Para obtermos α, vamos utilizar um método que consiste em determinar cada um dos inteiros a_0, a_1, a_2, ..., a_n,... que formam a representação decimal do número real

$$\alpha = a_0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots$$

Para determinar o valor de a_0, vamos utilizar o fato que a função F é crescente e não limitada, logo existem inteiros k tais que $F(k) > y$. Seja $a_0 + 1$ o menor inteiro tal que $F(a_0 + 1) > y$, então $F(a_0) \leq y < F(a_0 + 1)$. Agora vamos considerar a sequência de números abaixo:

$$a_0,\ a_0 + \frac{1}{10}, a_0 + \frac{2}{10}, a_0 + \frac{3}{10}, \dots, a_0 + \frac{9}{10}, a_0 + 1$$

Como $F(a_0) \leq y < F(a_0 + 1)$, então existem dois números consecutivos dessa sequência α_1 e $\alpha_1 + \frac{1}{10}$, tais que $F(\alpha_1) \leq y < F\left(\alpha_1 + \frac{1}{10}\right)$, ou seja, existe um inteiro a_1, com $0 \leq a_1 \leq 9$ tal que:

$$\alpha_1 = a_0, a_1 = a_0 + \frac{a_1}{10}$$

De maneira análoga podemos considerar a sequência de números:

$$\alpha_1, \alpha_1 + \frac{1}{10^2}, \alpha_1 + \frac{2}{10^2}, \alpha_1 + \frac{3}{10^2}, \dots, \alpha_1 + \frac{9}{10^2}, \alpha_1 + \frac{1}{10}$$

E assim verificamos que existe a_2, $0 \leq a_2 \leq 9$ tal que:

$$\alpha_2 = a_0, a_1 a_2 = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2}$$

Temos então $F(\alpha_2) \leq y < F\left(\alpha_2 + \frac{1}{10^2}\right)$. Se existir n de forma que $F(\alpha_n) = y$, fazemos $\alpha = \alpha_n$ e nada mais há a demonstrar. Vamos supor que tal n não exista, de modo que o processo acima continue infinitamente. Desta forma, obtemos a representação decimal de um número real:

$$\alpha = a_0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \cdots$$

Se, como antes, $\alpha_n = a_0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n$ temos que:

$$F(\alpha_n) \leq y < F\left(\alpha_n + \frac{1}{10^n}\right), \forall n \geq 0 \text{ (*)}$$

Afirmação $F(\alpha) = y$.

De fato: Se $F(\alpha) < y$, pelo Lema 1 existe $x > 0$ tal que $F(\alpha) < F(x) < y$. Como F é uma função crescente decorre que $\alpha < x$. Então, tomando n suficientemente grande de modo que: $x - \alpha > \frac{1}{10^n}$ ou $\alpha + \frac{1}{10^n} < x$, decorre que:

$$\alpha_n + \frac{1}{10^n} \leq \alpha + \frac{1}{10^n} < x$$

Novamente pelo fato de F ser crescente temos que:

$$F\left(\alpha_n + \frac{1}{10^n}\right) \leq F\left(\alpha + \frac{1}{10^n}\right) < F(x)$$

Porém, por (*), segue que

$$y < F\left(\alpha_n + \frac{1}{10^n}\right)$$

E, portanto,

$$y < F(x)$$

Uma contradição com nossa escolha de x.

Se $F(\alpha) > y$, pelo Lema 1 existe $x > 0$ tal que $F(\alpha) > F(x) > y$. Como F é uma função crescente decorre que $\alpha > x$, logo $x < \alpha_n$ para algum $n \geq 0$. Assim $F(x) < F(\alpha_n) \leq y$, o que é contradição, pois o número x foi obtido para satisfazer a inequação $F(x) > y$.

Portanto a afirmação $F(\alpha) = y$ é verdadeira, isto conclui a demonstração do teorema.

Anteriormente, já havíamos feito a observação de que, pelo fato de uma função logarítmica ser estritamente crescente, ela é injetora. Pela luz do último teorema concluímos então que:

Toda função logarítmica estabelece uma relação bijetora entre $\mathbb{R}^+$ *e* $\mathbb{R}$

Assim, para todo sistema de logaritmos, vale a afirmação de que para cada y real existe um único $x > 0$ de forma que o logaritmo de x é y.

3.2. Função logarítmica natural

Na seção anterior, definimos o que seria uma função logarítmica e, a partir desta definição, estabelecemos todas as propriedades que uma tal função deve possuir. O problema é que não mostramos um exemplo concreto de função logarítmica. O propósito desta seção é exibir uma tal função explicitamente, ou seja, construir uma função definida em $\mathbb{R}^+$ e tomando valores em $\mathbb{R}$ e que seja uma bijeção crescente. Além disso, devemos mostrar que tal função também possui a propriedade que seu valor para o produto de dois reais positivos quaisquer é igual à soma das imagens dos fatores do produto.

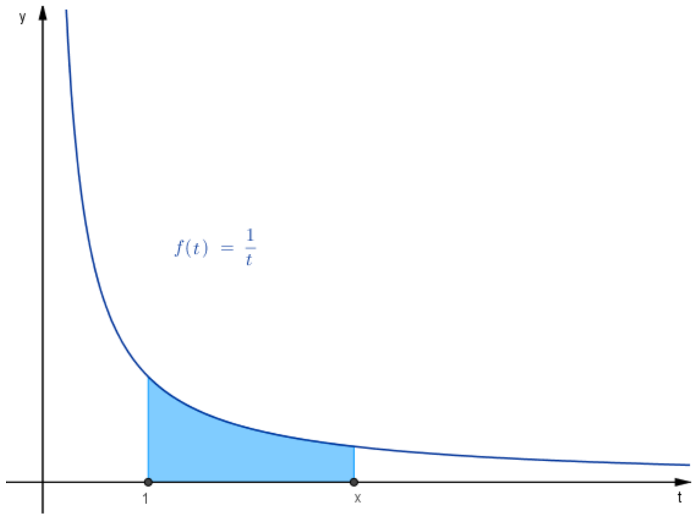
Os primeiros trabalhos que nos levam à definição a seguir são creditados aos matemáticos Gregory St. Vincent (1584-1667) e Alfonso de Sarasa (1618-1667) (recomendamos dois artigos para entender esses trabalhos, ver referências Burn (2000) e Burn (2001)). Os estudos desses matemáticos são os primeiros de que se tem registro de estabelecer uma forte relação entre logaritmos (no sentido desenvolvido por Napier e Briggs) e a área de uma faixa vertical entre a hipérbole equilátera $\frac{1}{t}$ e o eixo t do sistema cartesiano. No contexto do Cálculo Diferencial e

Integral atual, esta área seria a integral entre o número 1 e um valor real positivo x qualquer. Isto nos leva à definição:

Definição (Logaritmo Natural) - Seja x um número real positivo. Definimos o logaritmo natural de x como a área da região abaixo da hipérbole equilátera definida por $f(t) = \frac{1}{t}$ a partir do ponto de abcissa $t = 1$ até x, mais especificamente, o logaritmo natural é uma função $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, a qual denotaremos por $\ln x$, dada pela relação:

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

Figura 2 - Área abaixo da hipérbole



Fonte: Elaborada pelo autor

Embora vários autores se refiram a esta função como logaritmo neperiano, vamos aqui preferir manter o nome logaritmo natural.

Como consequências imediatas desta definição e das propriedades da integral definida, temos as seguintes:

1) $\ln 1 = \int_1^1 \frac{1}{t} dt = 0$

2) Se $x > 1$ então $\ln x > 0$

3) Se $0 < x < 1$ então $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt < 0$

Não há a necessidade de provarmos que esta função possui todas as propriedades e satisfaz os teoremas colocados na seção anterior, pois para provarmos que essa função é logarítmica basta provar que ln(x) satisfaz as duas condições i) e ii) da definição da seção 1 deste capítulo. Vamos começar por:

Proposição 1: A função logaritmo natural acima definida satisfaz a igualdade

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y:$$

Demonstração:

A demonstração a seguir está baseada nas propriedades da integral definida conhecida nos cursos de Cálculo Diferencial e Integral. Sejam $x, y \in \mathbb{R}^+$ temos que:

$$\ln(xy) = \int_1^{xy} \frac{1}{t} dt$$

$$\Rightarrow \ln(xy) = \int_1^{x} \frac{1}{t} dt + \int_x^{xy} \frac{1}{t} dt$$

Se $t = x \cdot u$ então $dt = x \cdot du$ logo fazendo a substituição na segunda integral do lado direito obtemos:

$$\ln(xy) = \int_1^{x} \frac{1}{t} dt + \int_1^{y} \frac{1}{x \cdot u} (x \cdot du)$$

$$\Rightarrow \ln(xy) = \int_1^{x} \frac{1}{t} dt + \int_1^{y} \frac{1}{u} du$$

$$\Rightarrow \ln(xy) = \ln x + \ln y$$

conforme queríamos demonstrar.

Vamos mostrar agora que

Proposição 2. A função $f(x) = \ln x$ é uma função crescente

Demonstração:

Seja $f(x) = \ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$ temos que:

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{d}{dx} \int_1^{x} \frac{1}{t} dt$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo podemos concluir que:

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$$

Como $x > 0$ então a derivada $\frac{d}{dx}f(x) = \frac{1}{x}$ é sempre positiva, o que permite concluir que a função $f(x) = \ln x$ é crescente e ainda podemos concluir que $f(x)$ é uma função injetora.

Teorema 3: A função logaritmo natural é uma função logarítmica

Demonstração:

Decorre imediatamente das proposições 1 e 2 e da definição da primeira seção deste capítulo.

Assim, a função $\ln(x)$ satisfaz todas as propriedades e resultados estabelecidos na seção anterior.

Vamos estudar melhor algumas características do gráfico desta função. Já sabemos que a função é estritamente crescente. Pela propriedade 7 e o teorema 2 deste capítulo, sabemos também que $\ln(x)$ é ilimitada superior e inferiormente e é sobrejetora. Fazendo a derivada de segunda ordem da função $f(x) = \ln x$ obtemos:

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\ln x\right) = -\frac{1}{x^2}$$

Como $x > 0$ então a derivada de segunda ordem é negativa, assim o gráfico de $f(x) = \ln x$ tem <u>concavidade para baixo</u>. De todos estes fatos deduzimos que:

$$\lim_{x\to+\infty}\ln(x) = +\infty \text{ e } \lim_{x\to 0^{(+)}}\ln(x) = -\infty.$$

É interessante demonstrar estes limites de uma forma direta, a partir das propriedades dos logaritmos. Primeiro, consideremos a sequência $a_n = \ln(2^n)$, onde n é um natural positivo. Pela propriedade 6 temos que $a_n = n.\ln(2) > 0$ para todo n, já que $\ln(2) > \ln(1) = 0$. Assim, temos que $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$. Como a função logarítmica é crescente, concluímos que

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{x\to+\infty}\ln(x) = +\infty.$$

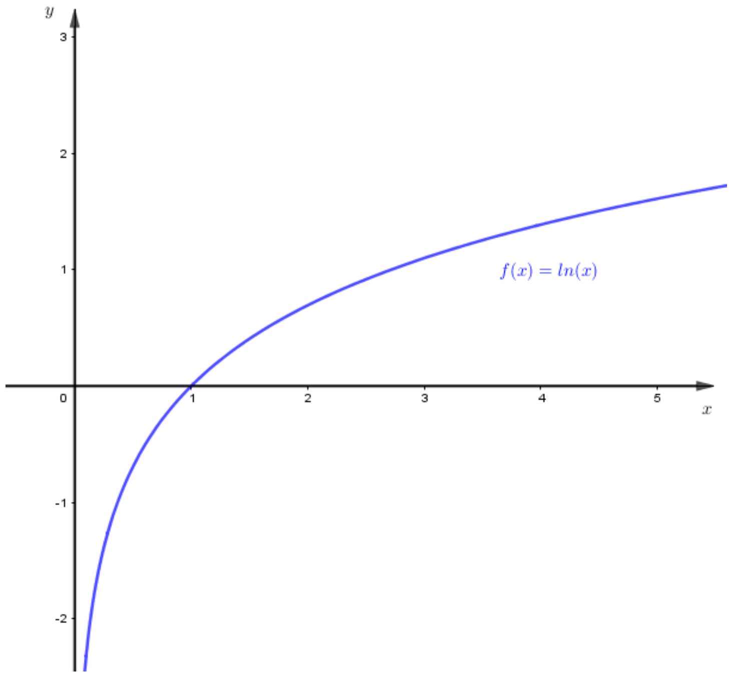
Façamos agora $t = \frac{1}{x}$; se $x \to 0^+$ temos que $t \to +\infty$; usando o resultado acima, temos que

$$\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = \lim_{t \to +\infty} \ln\left(\frac{1}{t}\right) = \lim_{t \to +\infty} \ln(t^{-1}) = \lim_{t \to +\infty} (-\ln(t)) = -\infty.$$

Isto estabelece o segundo limite.

De posse de todas essas informações, pode-se construir o gráfico da função $f(x) = \ln x$ é como se segue:

Figura 3- Gráfico da função logarítmica natural



Fonte: Elaborada pelo autor

Apesar de termos construído uma função logarítmica, ainda não estabelecemos uma relação entre esta função e os logaritmos "convencionais" no sentido de Napier e Briggs. Se adotarmos a convenção de chamarmos a função logaritmo natural de *sistema de logaritmos na base* e (o número *e* será inserido neste contexto na próxima seção), qual será sua relação com os sistemas de logaritmos em outras bases, como a base 10? Bem, isto será melhor estabelecido na seção 3.4.

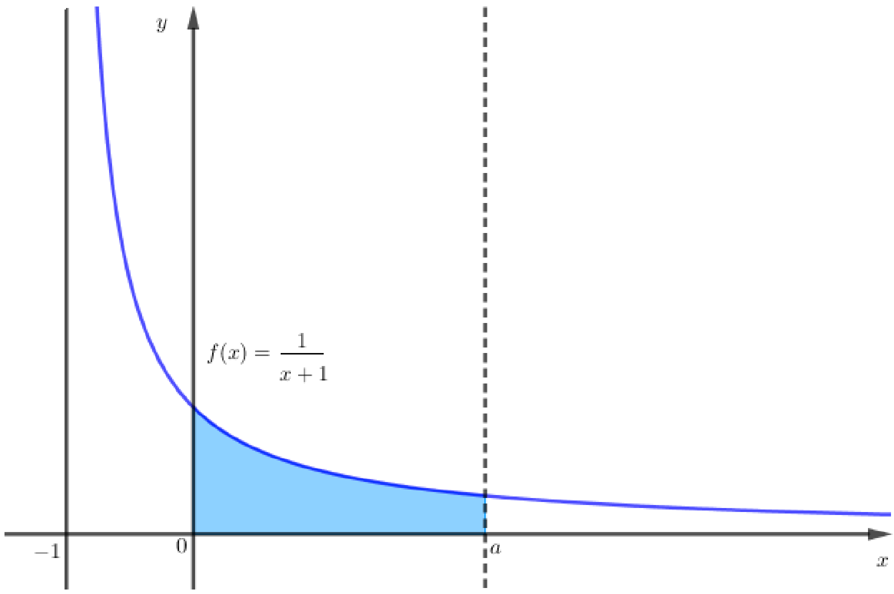
No momento, chamamos a atenção de que, embora com uma função logarítmica em mãos, não sabemos ainda como fazer cálculos práticos com ela. Utilizar processos com limites para obter a área correspondente dada por $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$, seja com a utilização de retângulos ou trapézios inscritos na hipérbole, é um procedimento nada fácil e não muito prático. Um método seria a utilização de tabelas de logaritmos decimais e com a utilização da fórmula de conversão de base

$$\ln(x) = \frac{\log_{10} x}{\log_{10} e}$$

(ver seção 3.4).

O outro caminho para a realização deste cálculo é através das ideias de Isaac Newton (1643- 1727) e Nicholas Mercator (1620-1687). Nos anos 1660, Newton e Mercator, de forma independente, fizeram aproximações das áreas correspondente à hipérbole $f(t) = \frac{1}{t}$ e, portanto, do cálculo de logaritmos, cuja relação já havia sido estabelecida por St. Vincent, conforme dissemos no início desta seção. Na verdade, o interesse principal de Newton era o estudo da curva $y(x+1) = 1$, ou seja, $y = \frac{1}{x+1}$. Essencialmente, esta é a mesma hipérbole que a anterior, mas deslocada de uma unidade para a esquerda. Podemos dizer que o interesse de Newton era praticamente o mesmo: definir um método para obter uma aproximação da área entre a hipérbole $y = \frac{1}{x+1}$ e o eixo x entre x igual a 0 e um valor arbitrário de x positivo (correspondente à linha vertical pontilhada à direita na figura a seguir):

Figura 4- Área abaixo da hipérbole deslocada



Fonte: Elaborada pelo autor

Utilizando uma linguagem moderna, Isaac Newton desejava o cálculo da integral

$$A(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t} dt$$

Para isso, usou o teorema binomial

$$(1+x)^r = 1 + rx + \frac{r.(r-1)}{2!}x^2 + \frac{r.(r-1)(r-2)}{3!}x^3 + \cdots.$$

supostamente válido para todo r real e aplicou à expressão:

$$\frac{1}{1+t} = (1+t)^{-1} = 1 - t + t^2 - t^3 + t^4 - \cdots$$

de modo a obter

$$A(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \int_0^x (1 - t + t^2 - t^3 + t^4 - \cdots) dt = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} \ldots$$

Para efetuar a integração, Newton usou a já conhecida por Fermat e Wallis.

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad n \neq -1$$

Devemos notar que Newton tratou das somas infinitas acima como expressões polinomiais algébricas, sem o rigor que mais tarde se mostraria necessário. Não considerou questões de convergência ou se a integração de uma soma de infinitas parcelas era realmente igual à soma de infinitas parcelas com as correspondentes integrais. Mas de todas as formas, Newton percebeu que para valores “pequenos” de x, a técnica acima era uma boa aproximação do cálculo estimado para os logaritmos; assim, podemos dizer que a relação[5]

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t} dt = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} \ldots$$

ainda hoje é utilizada como a principal ferramenta utilizada em calculadoras e computadores científicos para o cálculo do logaritmo (em qualquer base). Ainda serve de base para o cálculo de tabelas logarítmicas na base 10, com alta precisão.

[5]É historicamente válido que Gregory St. Vincent e Nicholas Mercator tenham, de forma independente, desenvolvido resultados muito próximos.

3.3. Função exponencial natural

Vamos agora começar a tratar do problema de dar um significado à expressão

$$a^{\alpha}$$

Onde a > 0, $a \neq 1$ e α é um *real qualquer.*

Utilizando a definição da função $f(x) = \ln x$ vista acima e de acordo com o Teorema 2 que diz que toda função logarítmica é sobrejetora sobre $\mathbb{R}$, sabemos que existe um único número real (que chamaremos de e) tal que $\ln e = 1$. Como a função logarítmica é bijetora, sabemos que este número é único. Este número maior que 1 representa o único número x tal que

$$\ln x = \int_{1}^{x} \frac{1}{t}\, dt = 1$$

Pelo fato de $f(x) = \ln(x)$ ser bijetora, podemos definir a sua função inversa $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+}$. Pela construção da função logarítmica natural, temos que $f^{-1}(x) = y$, onde y pode ser definido da seguinte forma:

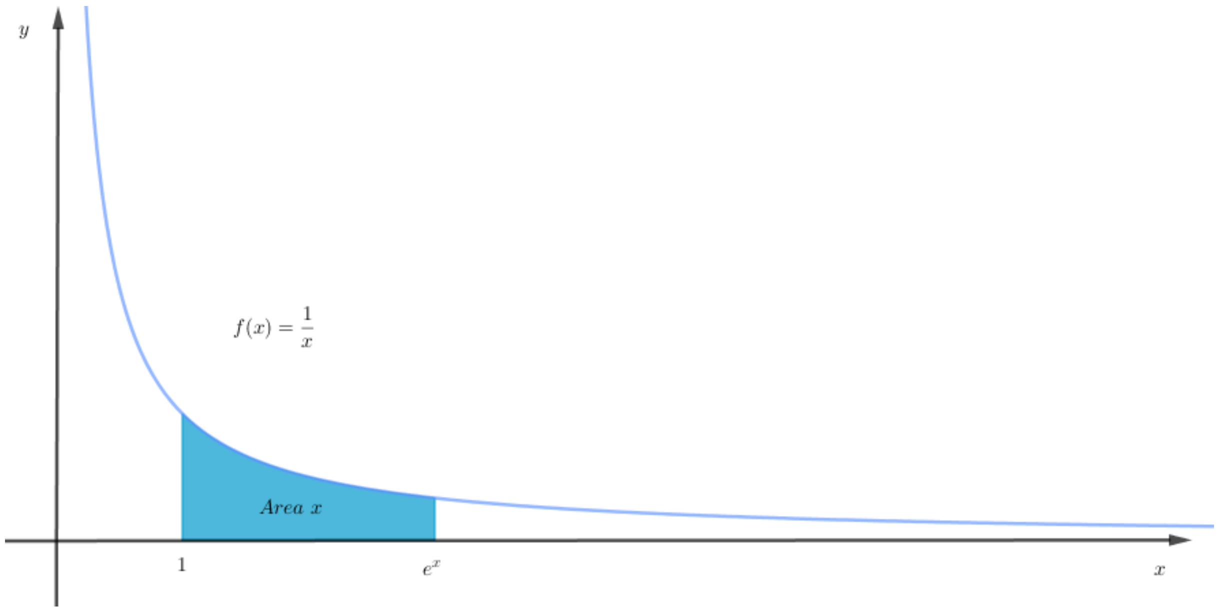
Dado um número real x, y é o único número positivo cujo logaritmo natural vale x, ou seja, de modo que a expressão a seguir é válida:

$$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow \ln(y) = x$$

Vamos denotar a função $f^{-1}(x)$ por $\exp(x)$, denominada a *função exponencial natural.*

Geometricamente $y = \exp(x)$ é o valor da abcissa que devemos tomar para que a área abaixo da curva $\frac{1}{x}$ seja igual a x, esta situação é representada no gráfico a seguir:

Figura 5- Relação entre área da hipérbole e a função exponencial



Fonte: Elaborada pelo autor

É possível notar que $e^x > 0$ para todo x, e $e^x > 1$ para $x > 0$ e que $0 < e^x < 1$ para $x < 0$.

Como a função exponencial natural é a inversa da função logarítmica natural, e sendo esta última uma função contínua (uma consequência do teorema fundamental do cálculo: se $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, onde a esta no domínio de $f(t)$, então $F(x)$ é contínua para todo x no seu domínio). Além disso, recordemos o teorema:

Teorema: Se f é uma função inversível com inversa g, e se f for derivável em $q = g(p)$, com $f'(p) \neq 0$ e se g for contínua em p, então g será derivável em p.

Devemos notar que este é o caso acima, já que $\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{x}$, para todo x > 0. Para calcularmos a derivada de $\exp(x)$ procedemos da seguinte forma: podemos usar a relação de composição de funções inversas:

$$(f \circ f^{-1})(x) = x \Rightarrow f\left(f^{-1}(x)\right) = x \ (*)$$

De forma que as igualdades abaixo sejam válidas:

$$\ln(\exp(x)) = x \text{ e } \exp(\ln(x)) = x$$

Derivando em relação a x ambos os lados da equação $\ln(\exp(x)) = x$ a derivação da função composta nos dá:

$$\left(\frac{d}{dx}\ln(\exp(x))\right) = \frac{1}{\exp(x)}.\left(\frac{d}{dx}\exp(x)\right) = 1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{d}{dx}\exp(x)\right) = \exp(x)$$

Ou seja: a derivada da função exponencial natural é ela própria. Com isso, concluímos que a função exponencial natural não se altera com a operação de derivação. Vamos mostrar que essa é a única função que possui essa característica.

Suponha que exista outra função $g(x)$ que também possua a característica de $\frac{d}{dx}g(x) = g(x)$, considere a função $h(x) = \exp(-x) \cdot g(x)$. Derivando $h(x)$ obtemos:

$$\frac{d}{dx}h(x) = \frac{d}{dx}[\exp(-x) \cdot g(x)] = -\exp(-x) \cdot g(x) + \exp(-x) \cdot \left[\frac{d}{dx}g(x)\right]$$

$$= -\exp(-x) \cdot g(x) + \exp(-x) \cdot g(x) = 0$$

Assim podemos concluir que $h(x)$ é uma função constante $h(x) = c$. Logo:

$$\exp(-x).g(x) = c \quad (**)$$

Por outro lado, devemos observar o seguinte: se $\exp(-x) = y > 0$, então $\ln(y) = -x \Rightarrow x = -\ln(y) = \ln\left(\frac{1}{y}\right) \Rightarrow \exp(x) = \frac{1}{y} = \frac{1}{\exp(-x)}$. De (**) segue então que

$$g(x) = c.\exp(x)$$

Portanto, a função exponencial natural é a única cuja derivada é ela própria, *a menos de uma constante multiplicativa.*

Vamos voltar agora ao número real $e > 1$ definido no início desta seção. Vamos recordar que $\ln e = 1$ e que este é o único número real com esta propriedade. Das propriedades vistas na seção anterior, sabemos que para todo racional r o número real positivo e^r está definido e que

$$\ln(e^r) = r.\ln(e) = r.1 = r$$

de forma que

$$\exp(r) = e^r$$

para todo racional.

Por outro lado, a função $\exp(x)$ está definida para *todo* número real x, em particular para todo número irracional. Seja então α um número irracional. Devemos lembrar que os racionais são densos na reta (veja por exemplo: Guidorizzi (2001)) e assim, existe (pelo menos) uma sequência de racionais $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$tal que $r_n \longrightarrow \alpha$ quando $n \longrightarrow \infty$. Pela continuidade da função exp temos que $\exp(r_n) \longrightarrow \exp(\alpha) > 0$. Decorre daí que $e^{r_n} \rightarrow \exp(\alpha)$ quando $n \rightarrow \infty$. Assim, definimos

$$e^{\alpha} = \exp(\alpha)$$

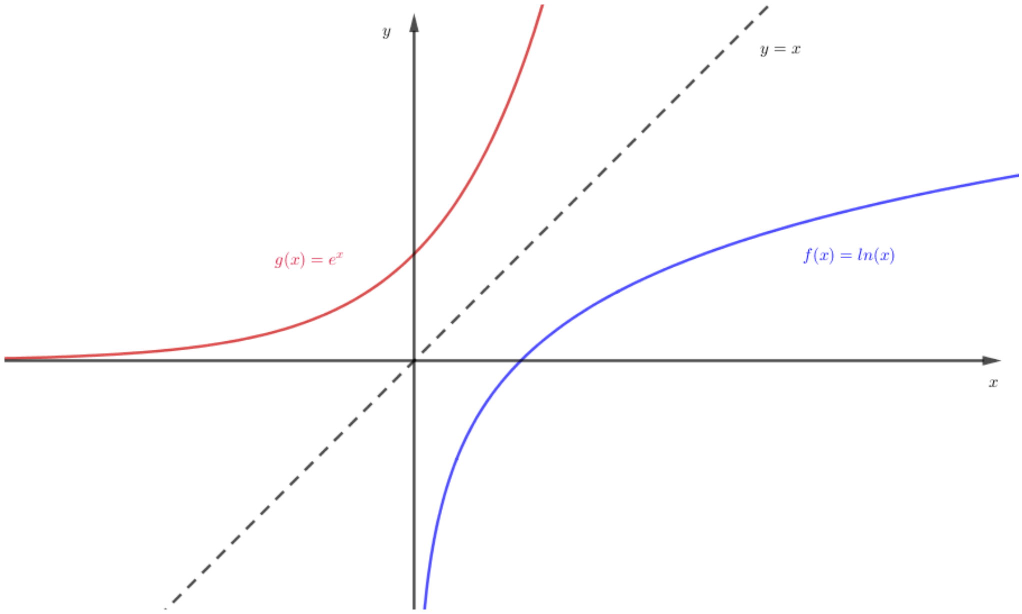
para todo α irracional. Note que esta definição *não* depende da escolha da sequência de racionais escolhida, já que a função exponencial natural é contínua.

O procedimento acima dá sentido à expressão e^x, para todo x real. Geometricamente, e^x é o <u>único</u> real positivo tal que a área sob a hipérbole equilátera $\frac{1}{t}$ de 1 até e^x é igual a x, ou seja, é o único número real tal que $\ln(e^x) = x$. Como $e^x = \exp(x)$ para todo x real, $f(x) = e^x$ é uma função definida em $\mathbb{R}$ e tomando valores em $\mathbb{R}^+$, bijetora, contínua e derivável, e cuja derivada é: $\frac{d}{dx}e^x = e^x$.

A definição das funções $g(x) = a^x$ para outra base a será dada na seção seguinte.

Apresentamos a seguir os gráficos da função exponencial natural e da função logaritmo natural.

Figura 6- Simetria entre a função logarítmica natural e exponencial natural



Fonte: Elaborada pelo autor

<u>Daqui para a frente, sempre iremos denominar a função $\exp(x)$ por e^x.</u>

Vamos verificar algumas propriedades da função exponencial natural $f^{-1}(x) = e^x$.

Propriedade 1- Para todos os números reais x, y vale que $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$

Demonstração:

Como ln é uma função logarítmica e como e^x é sua função inversa temos que:

$$\ln(e^x \cdot e^y) = \ln(e^x) + \ln(e^y)$$

$$\Rightarrow \ln(e^x \cdot e^y) = x + y$$

$$\Rightarrow e^x \cdot e^y = e^{x+y}$$

Propriedade 2- Para todo número real, $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$.

Demonstração:

Como $\ln 1 = 0$ por definição $e^0 = 1$, assim:

$$e^{-x} \cdot e^x = e^{-x+x} = e^0 = 1$$

$$\Rightarrow e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$

Propriedade 3- A função exponencial natural $f^{-1}(x) = e^x$ é crescente e seu conjunto imagem é igual $Im\, f^{-1} =]\, 0;\, +\infty\, [$

Demonstração:

Para mostrar que a função $f^{-1}(x) = e^x$ é crescente, basta provar que se $x, y \in \mathbb{R}$ tal que $x < y$ então $f^{-1}(x) < f^{-1}(y)$.

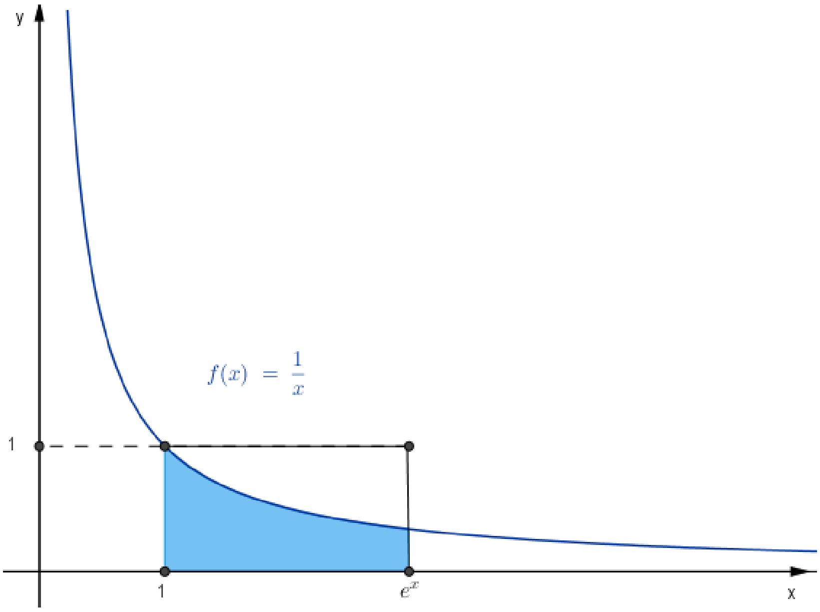
Seja $x, y \in \mathbb{R}$ tal que $x < y$ e como $x = \ln(e^x)$ e $y = \ln(e^y)$ então $\ln(e^x) < \ln(e^y)$. Como provamos anteriormente que a função ln é uma função logarítmica, então é necessariamente crescente, logo se $\ln(e^x) < \ln(e^y)$ então $e^x < e^y$. Assim se $x < y$ então $e^x < e^y$, portanto a função $f^{-1}(x) = e^x$ é crescente.

Vamos provar agora que a imagem da função é todos os números reais positivos. Considere um número real $a > 0$, temos que $e^{\ln a} = a$, ou seja a é o valor da função exponencial e^x quando $x = \ln a$. Vamos analisar os seguintes limites:

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = \infty \text{ e } \lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

Consideremos a ideia geométrica da função exponencial natural:

Figura 7 - Área da hipérbole inscrita no retângulo



Fonte: Elaborada pelo autor

Quando $x > 0$ a área abaixo do gráfico de $\frac{1}{t}$ no intervalo $[1; e^x]$ é igual a x. Como essa área é menor do que a área do retângulo de base medindo $e^x - 1$ e altura igual a 1, temos

$$x < e^x - 1 \Rightarrow x + 1 < e^x, \text{ para todo } x > 0.$$

Portanto

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = \infty$$

Para $x < 0$ considere $y = -x$, então

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = \lim_{y \to +\infty} e^{-y} = \lim_{y \to +\infty} \left(\frac{1}{e^y}\right) = 0$$

Para um procedimento a fim de calcular os valores da função e^x, veja o apêndice A.

3.4. Logaritmos e exponenciais em outras bases

Na seção anterior vimos que um número positivo a pode ser escrito como $e^{\ln a}$, assim para qualquer número real x temos que:

$$a^x = e^{\ln(a^x)} = e^{x \cdot \ln a}$$

Podemos observar que a^x é sempre positivo para qualquer x real, devido a e^x ser estritamente positiva.

A função $f(x) = a^x$ é chamada função exponencial na base a. Essa função também possui as propriedades 1, 2 e 3 da função exponencial natural vista na seção anterior. Vamos agora calcular a derivada dessa função exponencial:

$$\frac{d}{dx} a^x = \frac{d}{dx}\left(e^{x \cdot \ln a}\right) = e^{x \cdot \ln a}\left(\frac{d}{dx} x \cdot \ln a\right) = a^x \ln a$$

Se $a > 1$, então $\ln a > 0$, assim $\frac{d}{dx} a^x = a^x \ln a > 0$, logo $f(x) = a^x$ é uma função crescente. Se $0 < a < 1$ $\ln a < 0$, assim $\frac{d}{dx} a^x = a^x \ln a < 0$, logo $f(x) = a^x$ é uma função decrescente.

Até o momento vimos nesse capítulo que os logaritmos naturais eram definidos como a área abaixo da hipérbole de equação $y = \frac{1}{x}$, porém esse é um caso específico de hipérbole, podemos fazer um estudo semelhante com a hipérbole $y = \frac{k}{x}$ onde k é uma constante positiva. Assim para cada k existe um sistema de logaritmos ligado a ele. Portanto definimos outros logaritmos como:

$$\log x = \int_1^x \frac{k}{t} dt$$

$$\log x = k \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

$$\log x = k \cdot \ln x$$

Assim os logaritmos em outras bases diferem do logaritmo natural apenas por uma constante multiplicativa, veremos a seguir a base desses logaritmos.

Sabemos que a base de um sistema de logaritmos é o único valor $a > 0$ tal que $\log a = 1$, logo temos que:

$$\log a = k \cdot \ln a \Longrightarrow \ln a = \frac{1}{k} \Longrightarrow a = e^{\frac{1}{k}}$$

A notação utilizada para logaritmo de x numa base a é: $\log_a x$. Assim de acordo com a definição de logaritmos na base a e a relação $\ln a = \frac{1}{k}$ podemos concluir que:

$$\log_a x = \frac{1}{\ln a} \cdot \ln x \Longrightarrow \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Portanto para cada $a > 1$ a função $g: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = \log_a x$, definida para todo $x > 0$ é uma função logarítmica. (Essa restrição de $a > 1$ é devido a nossa construção das funções logarítmicas necessitarem serem crescentes, caso $0 < a < 1$ a função definida por este será decrescente). Novamente para provarmos que uma função é logarítmica basta provar que valem as propriedades $g(xy) = g(x) + g(y)$ e $g(x)$ ser uma função crescente.

Demonstração:

De fato,

$$\log_a(xy) = \frac{\ln(xy)}{\ln a} = \frac{\ln x + \ln y}{\ln a} = \frac{\ln x}{\ln a} + \frac{\ln y}{\ln a} = \log_a x + \log_a y$$

Logo vale a primeira propriedade.

Como $a > 1$, então $\ln a > 0$. Assim $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ possui o mesmo comportamento da função $\ln x$ que é crescente.

Portanto a função $g(x) = \log_a x$ é uma função logarítmica.

A derivada da função logarítmica na base a é imediata se notarmos que $\ln a$ é uma constante, temos:

$$\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\ln x}{\ln a}\right) = \frac{1}{\ln a}\left(\frac{d}{dx}\ln x\right) = \frac{1}{x \ln a}$$

3.5. Logaritmo natural e o número e

Vamos nesta seção provar que $\lim_{x \to +\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$, tomando $h = \frac{1}{x}$ com $x \neq 0$, temos que, quando x tende para o infinito, o valor de h tende a zero. Portanto mostraremos a validade da igualdade $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ utilizando um outro limite equivalente. Seja $h = \frac{1}{x}$, se $x \to +\infty$, então $h \to 0^+$, logo:

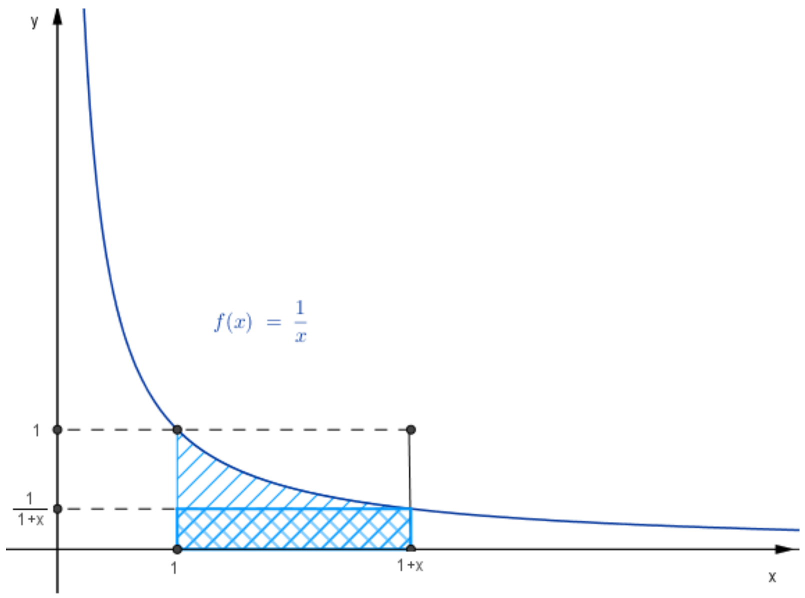
$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{h\to 0^+}(1+h)^{\frac{1}{h}}$$

Demonstração:

Inicialmente assumiremos que $x > 0$, então temos que a área $\ln(1+x) = \int_1^{1+x}\frac{1}{x}dx$ está contida num retângulo de base medindo x e altura medindo 1. Como a área do retângulo é x, assim podemos estabelecer que:

$$\ln(1+x) < x$$

Figura 8- Retângulos com área maior e menor que a área $\boldsymbol{ln}\,(\mathbf{1}+\boldsymbol{x})$



Fonte: Elaborada pelo autor

Como por hipótese $x > 0$, dividindo ambos os lados da inequação por x obtemos:

$$\left(\frac{1}{x}\right)\ln(1+x) < 1$$

Utilizando a propriedade de logaritmos temos:

$$\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} < 1$$

Portanto podemos concluir que para $x > 0$, $(1+x)^{\frac{1}{x}} < e$

Consideremos agora o retângulo de base x e altura medindo $\frac{1}{1+x}$, cuja área é $\frac{x}{1+x}$. Pela figura acima, podemos notar que

$$\frac{\mathrm{x}}{1+\mathrm{x}} < \ln(1+x)$$

$$\frac{1}{1+\mathrm{x}} < \left(\frac{1}{x}\right)\ln(1+x)$$

$$\frac{1}{1+\mathrm{x}} < \ln(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

Como vimos anteriormente a função logarítmica natural possui a função exponencial natural como inversa, logo ao aplicar exponenciais de ambos os lados da inequação e lembrando que a função exponencial é crescente, obtemos:

$$e^{\frac{1}{1+\mathrm{x}}} < (1+x)^{\frac{1}{x}}$$

Assim utilizando ambas as desigualdades podemos obter a desigualdade dupla:

$$e^{\frac{1}{1+\mathrm{x}}} < (1+x)^{\frac{1}{x}} < e$$

Fazendo x tender a zero, percebemos que $e^{\frac{1}{1+\mathrm{x}}}$ tende ao número e. Utilizando o Teorema do Confronto: “Seja $g(x)$, $f(x)$ e $h(x)$ tal que $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ para todo x no intervalo aberto I contendo a, exceto possivelmente em $x = a$. Se $\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$ então $\lim_{x\to a} f(x) = L$ ", segue que se $x > 0$ então:

$$\lim_{x\to 0^+}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

Portanto pela equivalência do início dessa seção concluímos que

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

Agora iremos analisar o limite $\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$.Tomando $k = -\frac{1}{x}$, se $x \to -\infty$, então $k \to 0^+$, logo:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{k\to 0^+}(1-k)^{-\frac{1}{k}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{k\to 0^+}\left(\frac{1}{1-k}\right)^{\frac{1}{k}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \lim_{k\to0^+}\left(1+\frac{k}{1-k}\right)^{\frac{1}{k}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \lim_{k\to0^+}\left[\frac{\left(1+\frac{k}{1-k}\right)^{\frac{1}{k}}}{\left(1+\frac{k}{1-k}\right)}\cdot\left(1+\frac{k}{1-k}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \lim_{k\to0^+}\left[\left(1+\frac{k}{1-k}\right)^{\frac{1-k}{k}}\cdot\left(1+\frac{k}{1-k}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \lim_{k\to0^+}\left[\left(1+\frac{k}{1-k}\right)^{\frac{1}{\left(\frac{k}{1-k}\right)}}\cdot\left(1+\frac{k}{1-k}\right)\right]$$

Em relação às passagens acima, devemos levar em consideração o seguinte: como x tende a menos infinito, estamos fazendo a suposição de que k está suficientemente próximo de 0 por valores positivos, de modo que k é muito menor do que 1. Assim, os denominadores $1-k$ não são nulos.

Assim temos que $\left(\frac{k}{1-k}\right)$ é um valor positivo e k tende a zero, quando x tende a menos infinito, logo o primeiro fator do produto tende ao número e e o segundo fator tende a 1. Portanto $\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$.

Considerando esse último limite provado acima podemos verificar o seguinte limite $\lim_{x\to0^-}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$. Tomando $t=\frac{1}{x}$, se $x\to-\infty$, então se $t\to0^-$, logo:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \lim_{t\to0^-}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e$$

Pelos limites laterais

$$\lim_{x\to0^+}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to0^-}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

Concluímos que $\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

Por fim um outro limite importante que decorre deste é o seguinte:

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{e^x-1}{x}\right) = 1$$

De fato: fazendo $u = e^x - 1$, temos $x = \ln(u+1)$. Manipulando algebricamente, temos:

$$\frac{e^x - 1}{x} = \frac{u}{\ln(u+1)} = \frac{1}{\frac{1}{u}.\ln(u+1)} = \frac{1}{ln(u+1)^{\frac{1}{u}}}$$

A manipulação acima é válida, já que $u > -1$por definição. Evidentemente se $x \to 0$, $u \to 0$ e portanto

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x - 1}{x}\right) = \lim_{u\to 0}\left(\frac{1}{ln(u+1)^{\frac{1}{u}}}\right) = \frac{1}{ln\left(\lim_{u\to 0}(u+1)^{\frac{1}{u}}\right)} = \frac{1}{\ln(e)} = 1$$

Note: a segunda igualdade é possível já que a função ln é contínua.

Os limites estabelecidos nesta seção constituem fundamentação de vários cálculos e desenvolvimentos matemáticos importantes.

4. IRRACIONALIDADE E TRANSCENDÊNCIA

Neste capitulo vamos apresentar uma demonstração da irracionalidade e da transcendência do número de Euler, seguindo os passos sugeridos no livro *Números irracionais e transcendentes* de Figueiredo (2011).

4.1. Irracionalidade do número de Euler

Para provarmos que o número e é irracional vamos utilizar a definição do número como:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$$

Como acontece em diversas provas de álgebra vamos utilizar o método de demonstração por absurdo.

Suponhamos que e seja racional e, portanto, da forma $e = \frac{p}{q}$ em que $p, q \in \mathbb{Z}$ com $q \neq 0$. Como *e* é maior que 2 e menor que 3, temos que $q > 1$, assim multiplicamos ambos os lados da igualdade acima por $q!$:

$$q!\, e = q!\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots\right)$$

$$\Rightarrow q!\left(\frac{p}{q}\right) = q!\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots\right)$$

$$\Rightarrow q!\left(\frac{p}{q}\right) = \left(q! + \frac{q!}{1!} + \frac{q!}{2!} + \frac{q!}{3!} + \cdots + \frac{q!}{n!} + \cdots\right)$$

O lado esquerdo da igualdade resulta em $p[2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (q-1)]$ que é um número inteiro e no lado direito da igualdade temos: $q! + q! + (3 \cdot 4 \cdots q) + (4 \cdot 5 \cdots q) + \cdots + q + 1 + \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \cdots$ (lembramos que a multiplicação de ambos os lados da igualdade por $q!$ é válida pelo fato da série infinita no lado direito convergir); assim, no lado direito, ao agrupar os termos inteiros e os termos fracionários temos: $q! + q! + (3 \cdot 4 \cdots q) + (4 \cdot 5 \cdots q) + \cdots + q + 1 + \left[\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \cdots\right]$. A soma dos números inteiros fora dos colchetes resulta em um número inteiro e a soma dos números fracionários dentro dos colchetes resulta em um número fracionário não inteiro, pois:

$$\frac{1}{q+1}+\frac{1}{(q+1)(q+2)}+\cdots \leq \frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\cdots \leq \frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots < \frac{1}{2}$$

porque a penúltima expressão da desigualdade é uma serie geométrica com $a_1 = \frac{1}{3}$ e $r = \frac{1}{3}$, logo:

$$S = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} \Rightarrow S = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} \Rightarrow S = \frac{1}{2}$$

Com isso chegamos numa igualdade: $q!\left(\frac{p}{q}\right) = \left(q! + \frac{q!}{1!} + \frac{q!}{2!} + \frac{q!}{3!} + \cdots + \frac{q!}{n!} + \cdots\right)$, na qual do lado esquerdo temos um número inteiro e o lado direito temos um número racional não inteiro, uma contradição. Assim, temos que e é irracional.

4.2. Transcendência do número de Euler

Para provarmos a transcendência do número e vamos precisar de algumas proposições que seguem a seguir:

Seja a equação polinomial:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0, a_i \in \mathbb{Z}, \forall i \in \{0, 1, \ldots, n\}$$

O número real α é chamado algébrico se satisfizer essa equação polinomial, caso contrário α é chamado transcendente.

Proposição 1.1: Seja $P(x)$ um polinômio de grau n e definimos a função $F(x) = P(x) + P^1(x) + \cdots + P^n(x)$, em que $P^i(x)$ com $i \in \{0, 1, \ldots n\}$ representa a i-ésima derivada de $P(x)$. Então $\frac{d}{dx}(e^{-x}F(x)) = -e^{-x}P(x)$.

Demonstração:

Temos que:

$$e^{-x}F(x) = e^{-x}P(x) + e^{-x}P^1(x) + \cdots + e^{-x}P^n(x)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(e^{-x}F(x)\right) = \frac{d}{dx}\left(e^{-x}P(x)\right) + \frac{d}{dx}\left(e^{-x}P^1(x)\right) + \cdots + \frac{d}{dx}(e^{-x}P^n(x))$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(e^{-x}F(x)\right)$$
$$= [-e^{-x}P(x) + e^{-x}P^1(x)] + [-e^{-x}P^1(x) + e^{-x}P^2(x)] + \cdots$$
$$+ [-e^{-x}P^{n-1}(x) + e^{-x}P^n(x)] + [-e^{-x}P^n(x) + e^{-x}P^{n+1}(x)]$$

Podemos observar que nas derivadas de cada $e^{-x}P^i(x)$ aparece um termo que se cancela com um dos termos da derivada do $e^{-x}P^{i+1}(x)$, com exceção dos termos $-e^{-x}P(x)$ e $e^{-x}P^{n+1}(x)$. Porém como o polinômio $P(x)$ é de grau n a derivada $P^{n+1}(x) = 0$. Logo: $\frac{d}{dx}\left(e^{-x}F(x)\right) = -e^{-x}P(x)$.

Proposição 1.2: Considere uma função $G(x) = e^{-x}F(x)$, sendo $F(x)$ definida como na Proposição 1.1, seja $k \in \mathbb{R}^*$ e θ_k um número entre 0 e 1, então $F(k) - e^kF(0) = -ke^{k(1-\theta_k)}P(k\theta_k)$.

Demonstração:

Sabemos que $G(x)$ é uma função contínua no intervalo fechado $[0;k]$ e é derivável no intervalo aberto $(0;k)$, logo pelo Teorema do Valor Médio existe um número $c \in (0;k)$ tal que: $G(k) - G(0) = G^1(c)(k-0)$. Assim:

$$e^{-k}F(k) - e^{-0}F(0) = \frac{d}{dx}\left(e^{-c}F(c)\right)(k-0)$$

$$\Rightarrow e^{-k}F(k) - F(0) = -ke^{-c}P(c)$$

$$\Rightarrow \left[\frac{F(k)}{e^k} - F(0)\right] \cdot (e^k) = [-ke^{-c}P(c)] \cdot (e^k)$$

$$\Rightarrow F(k) - e^kF(0) = -ke^{k-c}P(c)$$

$$\Rightarrow F(k) - e^kF(0) = -ke^{k\left(1-\frac{c}{k}\right)}P(c)$$

Como $c \in (0;k)$, temos que $0 < \frac{c}{k} < 1$ e seja $\theta_k = \frac{c}{k} \Rightarrow c = k\theta_k$, portanto:

$$\Rightarrow F(k) - e^kF(0) = -ke^{k(1-\theta_k)}P(k\theta_k)$$

Proposição 1.3: Seja $\varepsilon_k = -ke^{k(1-\theta_k)}P(k\theta_k)$ e suponha que o número *e* seja algébrico, assim existem inteiros $c_n, c_{n-1}, \ldots, c_1, c_0$ de modo que: $c_ne^n + c_{n-1}e^{n-1} + \cdots + c_1e + c_0 = 0$ então:

$$c_nF(n) + \cdots + c_1F(1) + c_0F(0) = c_n\varepsilon_n + \cdots + c_1\varepsilon_1$$

Demonstração:

Como $\varepsilon_k = -ke^{k(1-k\theta_k)}P(k\theta_k)$ então $\varepsilon_k = F(k) - e^k F(0)$, assim temos que:

$$c_n\varepsilon_n + \cdots + c_1\varepsilon_1 = c_n\big(F(n) - e^n F(0)\big) + \cdots + c_1\big(F(1) - e^1 F(0)\big)$$

$$\Rightarrow c_n\varepsilon_n + \cdots + c_1\varepsilon_1 = c_nF(n) - c_ne^nF(0) + \cdots + c_1F(1) - c_1e^1F(0)$$

$$\Rightarrow c_n\varepsilon_n + \cdots + c_1\varepsilon_1 = c_nF(n) + \cdots + c_1F(1) - F(0)(c_ne^n + \cdots + c_1e^1)$$

Por hipótese $c_ne^n + c_{n-1}e^{n-1} + \cdots + c_1e + c_0 = 0$, logo $\Rightarrow c_ne^n + c_{n-1}e^{n-1} + \cdots + c_1e = -c_0$, substituindo temos:

$$\Rightarrow c_n\varepsilon_n + \cdots + c_1\varepsilon_1 = c_nF(n) + \cdots + c_1F(1) - F(0)(-c_0)$$

$$\Rightarrow c_n\varepsilon_n + \cdots + c_1\varepsilon_1 = c_nF(n) + \cdots + c_1F(1) + c_0F(0)$$

Na expressão $c_nF(n) + \cdots + c_1F(1) + c_0F(0) = c_n\varepsilon_n + \cdots + c_1\varepsilon_1$ vamos mostrar que o lado esquerdo dessa igualdade é divisível por um primo p e o lado direito não é divisível por p o que seria uma contradição.

Proposição 1.4: Seja o polinômio definido por:

$$Q(x) = \sum_{j=0}^{r} a_j\, x^j$$

em que $p < r$ e $a_j \in \mathbb{Z}$, então:

$$Q^i(x) = \sum_{j=i}^{r} \frac{j!}{(j-i)!} a_j\, x^{j-i}, i \leq r$$

Demonstração:

Seja $Q(x) = a_0 + a_1x^1 + \cdots + a_{r-1}x^{r-1} + a_rx^r$ temos que:

$$Q^1(x) = a_1 + 2a_2x + \cdots + (r-1)a_{r-1}x^{r-2} + ra_rx^{r-1}$$

$$\Rightarrow Q^2(x) = 2a_2 + 3\cdot 2a_3x \ldots + (r-1)(r-2)a_{r-1}x^{r-3} + r(r-1)a_rx^{r-2}$$

$$\Rightarrow Q^3(x) = 3\cdot 2a_3 + 4\cdot 3\cdot 2a_4x + \cdots + (r-1)(r-2)(r-3)a_{r-1}x^{r-4} + r(r-1)(r-2)a_rx^{r-3}$$

Podemos observar que os coeficientes de $Q^1(x)$ são $\{1, 2, 3, \ldots, r-1, r\}$ e podem ser reescritos como: $\left\{\left[\frac{1!}{0!}\right]a_1, \left[\frac{2!}{1!}\right]a_2, \left[\frac{3!}{2!}\right]a_3, \ldots, \left[\frac{(r-1)!}{(r-2)!}\right]a_{r-1}, \left[\frac{r!}{(r-1)!}\right]a_r\right\}$, ou seja, o coeficiente é dado por: $\left[\frac{n!}{(n-1)!}\right]a_n$, com $n \in \{1, 2, \ldots, r\}$. Em $Q^2(x)$ os coeficientes são $\{2, 3\cdot 2, 4\cdot 3, \ldots, (r-1)(r-2), r(r-1)\}$ que também podem ser reescritos como: $\left\{\left[\frac{2!}{0!}\right]a_2, \left[\frac{3!}{1!}\right]a_3, \left[\frac{4!}{2!}\right]a_4, \ldots, \left[\frac{(r-1)!}{(r-3)!}\right]a_{r-1}, \left[\frac{r!}{(r-2)!}\right]a_r\right\}$, ou seja, o coeficiente é dado por: $\left[\frac{n!}{(n-2)!}\right]a_n$, com $n \in \{2, 3, \ldots, r\}$, em $Q^3(x)$ o raciocínio é análogo e assim a fórmula $Q^i(x) = \sum_{j=i}^{r} \frac{j!}{(j-i)!} a_j\, x^{j-i}, i \leq r$ está sendo válida para $i = 1, 2$ e 3. Vamos provar que essa formula é válida usando o Princípio de Indução Finita sobre i.

Seja $Q(x) = a_0 + a_1x^1 + \cdots + a_{r-1}x^{r-1} + a_rx^r$ e para $i = 1$ temos que:

$$Q^1(x) = a_1 + 2a_2x + \cdots + (r-1)a_{r-1}x^{r-2} + ra_rx^{r-1}$$

$$\Rightarrow Q^1(x) = \left[\frac{1!}{0!}\right]a_1 + \left[\frac{2!}{1!}\right]a_2x + \cdots + \left[\frac{(r-1)!}{(r-2)!}\right]a_{r-1}x^{r-2} + \left[\frac{r!}{(r-1)!}\right]a_rx^{r-1}$$

$$\Rightarrow Q^1(x) = \sum_{j=1}^{r} \frac{j!}{(j-1)!} a_j\, x^{j-1}$$

Portanto $Q^i(x)$ é válida para $i = 1$.

Suponha que $Q^i(x)$ seja válida para $i = k$, logo:

$$Q^k(x) = \sum_{j=k}^{r} \frac{j!}{(j-k)!} a_j\, x^{j-k}$$

Vamos provar que $Q^i(x)$ é válida para $i = k + 1$, temos por hipótese que:

$$Q^k(x) = \left[\frac{k!}{0!}\right]a_k + \left[\frac{(k+1)!}{1!}\right]a_{k+1}x + \cdots + \left[\frac{(r-1)!}{((r-1)-k)!}\right]a_{r-1}x^{(r-1)-k} + \left[\frac{r!}{(r-k)!}\right]a_rx^{r-k}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}[Q^k(x)] = \left[\frac{(k+1)!}{1!}\right]a_{k+1} + \left[\frac{(k+2)!}{2!}\right]2a_{k+2}x + \cdots + \left[\frac{(r-1)!}{((r-1)-k)!}\right]((r-1)-k)a_{r-1}x^{((r-1)-k)-1} + \left[\frac{r!}{(r-k)!}\right](r-k)a_rx^{(r-k)-1}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}[Q^k(x)] = \left[\frac{(k+1)!}{0!}\right] a_{k+1} + \left[\frac{(k+2)!}{(2-1)!}\right] a_{k+2}x + \cdots + \left[\frac{(r-1)!}{\big(((r-1)-k)-1\big)!}\right] a_{r-1}x^{(r-1-k)-1}$$
$$+ \left[\frac{r!}{\big((r-k)-1\big)!}\right] a_r x^{(r-k)-1}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}[Q^k(x)] = \left[\frac{(k+1)!}{0!}\right] a_{k+1} + \left[\frac{(k+2)!}{1!}\right] a_{k+2}x + \cdots$$
$$+ \left[\frac{(r-1)!}{\big((r-1)-(k+1)\big)!}\right] a_{r-1}x^{(r-1)-(k+1)} + \left[\frac{r!}{\big(r-(k+1)\big)!}\right] a_r x^{r-(k+1)}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}[Q^k(x)] = \sum_{j=k+1}^{r} \frac{j!}{(j-(k+1))!} a_j\, x^{j-(k+1)}$$

$$\Rightarrow Q^{k+1}(x) = \sum_{j=k+1}^{r} \frac{j!}{(j-(k+1))!} a_j\, x^{j-(k+1)}$$

Assim $Q^i(x)$ é válida para $i = k+1$, portanto pelo Princípio de Indução Finita a fórmula $Q^i(x)$ vale para todo número natural $i \leq r$.

Proposição 1.5: Considere $Q(x)$ definido na Proposição 1.4 e o polinômio $\left(\frac{1}{(p-1)!}\right) Q^i(x)$ para $i \geq p$, então os coeficientes desse polinômio são divisíveis por p.

Demonstração:

$$\left(\frac{1}{(p-1)!}\right) Q^i(x) = \left(\frac{1}{(p-1)!}\right) \sum_{j=i}^{r} \frac{j!}{(j-i)!} a_j\, x^{j-i}$$

$$= \sum_{j=i}^{r} \left(\frac{1}{(p-1)!}\right) \frac{j!}{(j-i)!} a_j\, x^{j-i}$$

$$= \sum_{j=i}^{r} \left(\frac{p}{p!}\right) \frac{j!}{(j-i)!} a_j\, x^{j-i}$$

$$= p \cdot \sum_{j=i}^{r} \frac{j!}{p!\,(j-i)!} a_j\, x^{j-i}$$

Como $i \geq p$ então $j \geq p$, assim temos:

$$= p \cdot \sum_{j=i}^{r} \frac{j(j-1)(j-2)\ldots(p+1)p!}{p!\,(j-i)!} a_j\, x^{j-i}$$

$$= p \cdot \sum_{j=i}^{r} \frac{j(j-1)(j-2)\ldots(p+1)}{(j-i)!} a_j\, x^{j-i}$$

Logo o polinômio é divisível p, pois todos os coeficientes inteiros foram multiplicados por p.

Proposição 1.6: Considere o polinômio $P(x) = \left(\frac{1}{(p-1)!}\right) x^{p-1}(1-x)^p(2-x)^p \ldots (n-x)^p$ então $P(x)$ é da forma:

$$P(x) = \left(\frac{(n!)^p}{(p-1)!}\right) x^{p-1} + \frac{b_1}{(p-1)!} x^p + \cdots$$

Demonstração:

Inicialmente consideremos o polinômio $S(x) = (1-x)(2-x)(3-x)\ldots(n-x)$, assim $S(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + n!$, em que $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1$ são números inteiros. Temos que:

$$[S(x)]^p = (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + n!)^p$$

$$\Rightarrow [S(x)]^p = b_{np}x^{np} + b_{np-1}x^{pn-1} + \cdots + b_1 x + (n!)^p$$

em que as constantes $b_{np}, b_{np-1}, \ldots, b_1$ também são números inteiros. Portanto:

$$P(x) = \left(\frac{1}{(p-1)!}\right) x^{p-1}[S(x)]^p$$

$$\Rightarrow P(x) = \left(\frac{1}{(p-1)!}\right) x^{p-1}\left(b_{np}x^{np} + b_{np-1}x^{pn-1} + \cdots + b_1 x + (n!)^p\right)$$

$$\Rightarrow P(x) = \left(\frac{1}{(p-1)!}\right)\left(b_{np}x^{(p-1)+np} + b_{np-1}x^{(p-1)+pn-1} + \cdots + b_1 x^{(p-1)+1} + (n!)^p x^{p-1}\right)$$

$$\Longrightarrow P(x) = \left(\frac{1}{(p-1)!}\right) b_{np}x^{p(n+1)-1} + \left(\frac{1}{(p-1)!}\right) b_{np-1}x^{p(n+1)-2} + \cdots + \left(\frac{1}{(p-1)!}\right) b_1 x^p + \left(\frac{1}{(p-1)!}\right)(n!)^p x^{p-1}$$

E por fim reorganizando na ordem contrária concluímos que:

$$P(x) = \left(\frac{1}{(p-1)!}\right)(n!)^p x^{p-1} + \left(\frac{1}{(p-1)!}\right) b_1 x^p + \cdots$$

Proposição 1.7: Seja $P(x)$ definido da mesma forma que na Proposição 1.6, então $P^i(k) = 0$, sendo $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ e $i < p$

Demonstração:

Seja $P(x) = \left(\frac{1}{(p-1)!}\right) x^{p-1}(1-x)^p(2-x)^p \ldots (n-x)^p$, considere $I(x) = (k-x)^p$ e $H(x) = \left(\frac{1}{(p-1)!}\right) x^{p-1}(1-x)^p \ldots (k-1-x)^p(k+1-x)^p \ldots (n-x)^p$, temos que $P(x) = I(x)H(x)$. Utilizando a derivação do produto podemos calcular $\frac{d}{dx}P(x)$ como:

$$\frac{d}{dx}P(x) = p(k-x)^{p-1}H(x) + (k-x)^p\left(\frac{d}{dx}H(x)\right)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}P(x) = (k-x)^{p-1}\left[pH(x) + (k-x)\left(\frac{d}{dx}H(x)\right)\right]$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}P(k) = (k-k)^{p-1}\left[pH(k) + (k-k)\left(\frac{d}{dx}H(k)\right)\right]$$

$$\Longrightarrow \frac{d}{dx}P(k) = 0$$

Sem perda de generalidade, para $i < p$ podemos concluir que para: $P^i(x) = (k-x)^{p-i}J(x) \Longrightarrow P^i(k) = 0$.

Proposição 1.8: Seja $P(x)$ definido do mesmo modo que na Proposição 1.6, então $P^{(p-1)}(0) = (n!)^p$ e $P^i(0) = 0$, sendo $i < p-1$

Demonstração:

Seja $P(x) = \left(\frac{1}{(p-1)!}\right)(n!)^p x^{p-1} + \left(\frac{1}{(p-1)!}\right) b_1 x^p + \cdots$, derivando sucessivas vezes temos que: $P^{(p-1)}(x) = \left(\frac{1}{(p-1)!}\right)(n!)^p(p-1)! + \left(\frac{1}{(p-1)!}\right) b_1(p!)x^1 + \left(\frac{1}{(p-1)!}\right) b_2(p+1)!\,x^2 + \cdots$, em que todos os termos a partir do segundo têm uma potência não nula de x, logo: $P^{(p-1)}(0) = \left(\frac{1}{(p-1)!}\right)(n!)^p(p-1)! + \left(\frac{1}{(p-1)!}\right) b_1(p!)0^1 + \left(\frac{1}{(p-1)!}\right) b_2(p+1)!\,0^2 + \cdots \Longrightarrow$ $P^{(p-1)}(0) = \left(\frac{1}{(p-1)!}\right)(n!)^p(p-1)! \Longrightarrow P^{(p-1)}(0) = (n!)^p$

Se $i < p-1$ então $0 < (p-1) - i$. Derivando "i" vezes obtemos:

$$P^i(x) = \left(\frac{1}{(p-1)!}\right)(n!)^p(p-1)(p-2)\dots(p-i)x^{(p-1)-i}$$
$$+\left(\frac{1}{(p-1)!}\right)b_1(p-1)(p-2)\dots(p-i+1)x^{p-i}+\cdots$$

em que todos os termos possuem uma potência não nula de x, logo:

$$P^i(0) = \left(\frac{1}{(p-1)!}\right)(n!)^p(p-1)(p-2)\dots(p-i)(0)^{(p-1)-i}$$
$$+\left(\frac{1}{(p-1)!}\right)b_1(p-1)(p-2)\dots(p-i+1)(0)^{p-i}+\cdots$$

$$\Longrightarrow P^i(0) = 0$$

Proposição 1.9: Se d_i, $i = 0,1,\dots,r$ são inteiros, tais que os d_i, para $i \geq 1$ são divisíveis por p, e d_0 não é divisível por p, então $\sum_{i=0}^{d} d_i$ não é divisível por p.

Demonstração:

Sejam $d_1, d_2, d_3, \dots, d_r$ números inteiros divisíveis por p, logo: $d_1 = p \cdot c_1$, $d_2 = p \cdot c_2$, $d_3 = p \cdot c_3$, ... , $d_r = p \cdot c_r$, em que $c_1, c_2, c_3, \dots, c_r$ são inteiros. Seja d_0 um inteiro não divisível por p, logo $d_0 \neq p \cdot c_0$, $\forall c_0 \in \mathbb{Z}$. Suponha por absurdo que $\sum_{i=0}^{d} d_i$ é divisível por p, então $\sum_{i=0}^{d} d_i$ pode ser escrito como $p \cdot k$,em que $k \in \mathbb{Z}$,logo:

$$d_0 + d_1 + d_2 + d_3 + \cdots + d_r = p \cdot k$$

$$\Rightarrow d_0 + p \cdot c_1 + p \cdot c_2 + p \cdot c_3 + \cdots + p \cdot c_r = p \cdot k$$

$$\Rightarrow d_0 = p \cdot k - p \cdot c_1 - p \cdot c_2 - p \cdot c_3 - \cdots - p \cdot c_r$$

$$\Rightarrow d_0 = p \cdot (k - c_1 - c_2 - c_3 - \cdots - c_r)$$

Sabemos que $C = (k - c_1 - c_2 - c_3 - \cdots - c_r) \in \mathbb{Z}$, portanto $d_o = p \cdot C$, ou seja d_0 é um número divisível por p. O que é um absurdo, pois por hipótese d_0 não é divisível por p.

Proposição 2.0: Seja $F(x) = P(x) + P^1(x) + P^2(x) + \cdots + P^r(x)$, então $F(k)$ é um inteiro divisível por p e $F(0)$ é um inteiro não divisível por p. Sendo $P(x) = \left(\frac{1}{(p-1)!}\right)x^{p-1}(1-x)^p(2-x)^p \dots (n-x)^p$ e $k \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Demonstração:

Seja $F(0) = P(0) + P^1(0) + P^2(0) + \cdots + P^{p-2}(0) + P^{p-1}(0) + P^p(0) + \cdots + P^r(0)$, pela Proposição 1.8 temos que $P^i(0) = 0$ se $i < p - 1$, e ainda que $P^{p-1}(0) = (n!)^p$, logo: $F(0) = (n!)^p + P^p(0) + \cdots + P^r(0)$. Pela Proposição 1.6 temos que $P(x) = \left(\frac{1}{(p-1)!}\right)(n!)^p x^{p-1} + \left(\frac{1}{(p-1)!}\right) b_1 x^p + \cdots$, então todo $P^i(x)$ sendo $i > p$ pode ser escrito como $\left(\frac{1}{(p-1)!}\right) Q^i(x)$ em que $Q^i(x)$ é dado pela Proposição 1.4 e ainda pela Proposição 1.5 temos que $\left(\frac{1}{(p-1)!}\right) Q^i(x)$ possui coeficientes inteiros divisíveis por p como $P^p(0) = \frac{p!b_1}{(p-1)!}$, assim $F(0) = (n!)^p + pb_1$, no qual não é divisível por p, pois $n < p$ e p é primo.

Seja $F(k) = P(k) + P^1(k) + P^2(k) + \cdots + P^{p-2}(k) + P^{p-1}(k) + P^p(k) + \cdots + P^r(0)$, como $P(x) = \left(\frac{1}{(p-1)!}\right) x^{p-1}(1-x)^p(2-x)^p \ldots (n-x)^p$ para $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ temos que $P(k) = 0$. Pela Proposição 1.7 temos que $P^i(k) = 0$ se $i < p$, logo $F(k) = P^p(k) + \cdots + P^r(k)$. Temos ainda que $P^i(x)$ pode ser escrito na forma $P^i(x) = \left(\frac{1}{(p-1)!}\right) Q^i(x)$ para $i \geq p$ e assim pelo teorema $P^i(x)$ é um polinômio com coeficientes inteiros divisíveis por p. Portanto $F(k)$ é divisível por p.

Proposição 2.1: Sendo $0 < c_0 < p$ então $c_n F(n) + \cdots + c_1 F(1) + c_0 F(0)$ é um inteiro não divisível por p.

Demonstração:

Seja $w = c_n F(n) + \cdots + c_1 F(1) + c_0 F(0)$ sendo $c_0, c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{Z}$ temos pela Proposição 2.1 que $F(k)$ é divisível por p para $k = 1, 2, \ldots, n$, assim $w = c_n(q_n p) + \cdots + c_1(q_1 p) + c_0 F(0) \Longrightarrow w = p[c_n(q_n) + \cdots + c_1(q_1)] + c_0 F(0)$ em que $q_1, q_2, \ldots, q_n \in \mathbb{Z}$. E ainda pela Proposição 2.1, $F(0)$ não é divisível por p, e como $c_0 < p$ então $c_0 F(0)$ não é divisível por p, logo pela Proposição 1.9 o número $w = p[c_n(q_n) + \cdots + c_1(q_1)] + c_0 F(0)$ é um inteiro não é divisível por p.

Proposição 2.2: Seja $\varepsilon_k = -ke^{k(1-\theta_k)} P(k\theta_k)$ em que $P(k\theta_k)$ é calculado utilizando o polinômio $P(x) = \left(\frac{1}{(p-1)!}\right) x^{p-1}(1-x)^p(2-x)^p \ldots (n-x)^p$ então $|\varepsilon_k| \leq \frac{e^n n^p (n!)^p}{(p-1)!}$ para $k \leq n$.

Demonstração:

Temos que $P(k\theta_k) = \left(\frac{1}{(p-1)!}\right)(k\theta_k)^{p-1}(1-k\theta_k)^p(2-k\theta_k)^p \ldots (n-k\theta_k)^p$ logo:

$$\varepsilon_k = -ke^{k(1-\theta_k)}\left[\left(\frac{1}{(p-1)!}\right)(k\theta_k)^{p-1}(1-k\theta_k)^p(2-k\theta_k)^p \dots (n-k\theta_k)^p\right]$$

$$\Longrightarrow |\varepsilon_k| = \left|-ke^{k(1-\theta_k)}\left(\frac{1}{(p-1)!}\right)(k\theta_k)^{p-1}(1-k\theta_k)^p(2-k\theta_k)^p \dots (n-k\theta_k)^p\right|$$

$$\Longrightarrow |\varepsilon_k| = \left|-ke^{k(1-\theta_k)}\left(\frac{1}{(p-1)!}\right)(k)^{p-1}(\theta_k)^{p-1}(1-k\theta_k)^p(2-k\theta_k)^p \dots (n-k\theta_k)^p\right|$$

Como $0 < \theta_k < 1$ então $j - k\theta_k < j$ em que $j = 1, 2, \dots, n$, logo:

$$|\varepsilon_k| \leq \left|-ke^{k(1-\theta_k)}\left(\frac{1}{(p-1)!}\right)(k)^{p-1}(\theta_k)^{p-1}(1)^p(2)^p \dots (n)^p\right|$$

$$\Rightarrow |\varepsilon_k| \leq \left|-e^{k(1-\theta_k)}\left(\frac{1}{(p-1)!}\right)(k)^p(\theta_k)^{p-1}(n!)^p\right|$$

Como $0 < \theta_k < 1$ então $k(1-\theta_k) < k$ assim:

$$|\varepsilon_k| \leq \left|-e^{k}\left(\frac{1}{(p-1)!}\right)(k)^p(1)^{p-1}(n!)^p\right|$$

$$\Rightarrow |\varepsilon_k| \leq e^{k}\left(\frac{1}{(p-1)!}\right)(k)^p(1)^{p-1}(n!)^p$$

Sendo $k \leq n$ então concluímos que:

$$|\varepsilon_k| \leq e^{n}\left(\frac{1}{(p-1)!}\right)(n)^p(1)^{p-1}(n!)^p$$

$$\Rightarrow |\varepsilon_k| \leq \left(\frac{1}{(p-1)!}\right)e^{n}(n)^p(n!)^p$$

Proposição 2.3: Seja p um primo suficientemente grande então $|c_1\varepsilon_1 + \cdots + c_n\varepsilon_n| < 1$ sendo $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ definidos na Proposição 1.3.

Demonstração:

Temos que:

$$|c_1\varepsilon_1 + c_2\varepsilon_2 \dots + c_n\varepsilon_n| \leq |c_1\varepsilon_1| + |c_2\varepsilon_2| + \cdots + |c_n\varepsilon_n|$$

$$\Rightarrow |c_1\varepsilon_1 + c_2\varepsilon_2 \dots + c_n\varepsilon_n| \leq |c_1||\varepsilon_1| + |c_2||\varepsilon_2| + \cdots + |c_n||\varepsilon_n|$$

Pela Proposição 2.2 sabemos que para $k \leq n$ temos $|\varepsilon_k| \leq \frac{e^n n^p (n!)^p}{(p-1)!}$, logo:

$$|c_1\varepsilon_1 + c_2\varepsilon_2 \ldots + c_n\varepsilon_n| \leq |c_1|\left(\frac{e^n n^p (n!)^p}{(p-1)!}\right) + |c_2|\left(\frac{e^n n^p (n!)^p}{(p-1)!}\right) + \cdots + |c_n|\left(\frac{e^n n^p (n!)^p}{(p-1)!}\right)$$

$$\Rightarrow |c_1\varepsilon_1 + c_2\varepsilon_2 \ldots + c_n\varepsilon_n| \leq (|c_1| + |c_2| + \cdots + |c_n|)\left(\frac{e^n n^p (n!)^p}{(p-1)!}\right)$$

Basta provar que $\lim_{p\to\infty}\left(\frac{e^n n^p (n!)^p}{(p-1)!}\right) = 0$. De fato:

$$\lim_{p\to\infty}\left(\frac{e^n n^p (n!)^p}{(p-1)!}\right) = e^n \lim_{p\to\infty}\left(\frac{[n(n!)]^p}{(p-1)!}\right)$$

Para provarmos esse limite vamos utilizar o Teorema do Confronto já enunciado na seção 3.4.

Para melhor compreensão considere a substituição $a = n(n!)$ e seja M um número natural tal que $M > a$, logo $\frac{a}{M} < 1$ e assim $\lim_{p\to\infty}\left(\frac{a}{M}\right)^p = 0$. Como existe um primo p tal que $p - 1 > M$ então:

$$\frac{a^p}{(p-1)!} = \frac{a^p}{1\cdot 2\cdot 3 \cdots M\cdot(M+1)\cdot(M+2)\cdots(p-1)}$$

Porém $(M+1)\cdot(M+2)\cdots(p-1)$ possui $(p-1-M)$ termos, logo:

$$\frac{a^p}{1\cdot 2\cdot 3 \cdots M\cdot(M+1)\cdot(M+2)\cdots(p-1)} \leq \frac{a^p}{M!\cdot M^{p-(1+M)}}$$

$$\Rightarrow \frac{a^p}{(p-1)!} \leq \frac{a^p\cdot M^{1+M}}{M!\cdot M^p}$$

$$\Rightarrow \frac{a^p}{(p-1)!} \leq \left(\frac{a}{M}\right)^p\cdot\frac{M^{1+M}}{M!}$$

Fazendo o $\lim_{p\to\infty}\left[\left(\frac{a}{M}\right)^p\cdot\frac{M^{1+M}}{M!}\right]$ concluímos que esse limite é igual a zero. Portanto utilizando o Teorema do Confronto concluímos que $\lim_{p\to\infty}\left(\frac{a^p}{(p-1)!}\right) = 0$.

Proposição 2.4: O número de Euler e é transcendente.

Demonstração:

Na proposição 1.3 fizemos a suposição que o número e é algébrico, ou seja, existem inteiros $c_n, c_{n-1}, \ldots, c_1, c_0$ de modo que $c_n e^n + c_{n-1}e^{n-1} + \cdots + c_1 e + c_0 = 0$ e mostramos que: $c_nF(n) + \cdots + c_1F(1) + c_0F(0) = c_n\varepsilon_n + \cdots + c_1\varepsilon_1$. Na proposição 2.1 mostramos que $c_nF(n) + \cdots + c_1F(1) + c_0F(0)$ é um inteiro não divisível por p, logo esse número é diferente de zero e ainda na proposição 2.3 mostramos que $|c_1\varepsilon_1 + \cdots + c_n\varepsilon_n| < 1$ o que é um absurdo, pois o módulo qualquer número inteiro diferente de zero, é sempre maior ou igual a 1. Logo assumir que o número e é algébrico leva a um absurdo, portanto o número e é transcendente.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho buscou apresentar por meio de uma breve investigação bibliográfica as ideias que levaram ao aparecimento do número de Euler na Matemática, por meio do conceito de juros compostos e de logaritmos neperianos. Apresentamos através de uma abordagem de sequências e séries, as principais formas de se definir o número de Euler que são $e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)$ e $e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

A partir dos estudos realizados compreendemos uma forma alternativa de abordar o conceito de logaritmos e exponenciais, utilizando uma ideia geométrica, que se torna vantajosa, pois dessa forma expressões do tipo e^x com x irracional passam a fazer um sentido mais significativo do que a abordagem clássica das exponenciais. Além disso, compreendemos a complexidade do processo para se demonstrar a transcendência e a irracionalidade do número de Euler.

Durante o curso de licenciatura em Matemática nos deparamos muitas vezes com funções ou situações que envolvem o número e ou o número π, utilizando-os apenas como números iguais a quaisquer outros, entretanto os números e e π possuem uma trajetória na Matemática diferente dos outros números, além de terem características peculiares, como estarem relacionados aos logaritmos e as circunferências, respectivamente. Neste trabalho focamos apenas nos logaritmos e no número e, pelo aspecto da Matemática, embora seja possível fazer um estudo sobre as aplicações do número de Euler nas áreas das ciências como Biologia, Física, Química, Geografia, entre outras, e além disso também é possível realizar de maneira semelhante, um estudo aprofundado do número π.

REFERÊNCIAS

BURN, R. P. **Alphonse Antonio de Sarasa and Logarithms.** Historia Mathematica, vol. 28, p. 1-17, fev. 2001.

BURN, Bob. **Gregory St. Vincent and the Rectangular Hyperbola.** The Mathematical Gazette, vol 84 nº 501, p. 480-485, nov. 2000.

DUNHAM, William. **Euler: The Master of Us All.** The Mathematical Association of America, 1999.

D' AMBROSIO, Ubiratan. **Educação Matemática: Da Teoria à Prática.** 17ª Ed. Campinas, SP: Papirus Editora, 1996.

EVES, Howard. **Introdução a história da matemática.** Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2004.

FIGUEIREDO, Djairo L. **Números Irracionais e Transcendentes.** 3ª Ed. Rio de Janeiro: Editora SBM, 2011.

FIGUEIREDO, Djairo L. **Análise 1.** 2ª Ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora S.A, 1996.

GUIDORIZZI, Hamilton L. **Um Curso de Cálculo Volume 1**. 5ª Ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora S.A, 2001.

IEZZI, Gelson, **Fundamentos de Matemática Elementar Volume 2 - Logaritmos**. 3ª Ed. São Paulo: Atual Editora, 1977.

LIMA, Elon L. **Curso de Análise: Volume 1.** 6ª Ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora S.A, 1982.

LIMA, Elon L. **Logaritmos.** 2ª Ed. Rio de Janeiro: Editora SBM, 1996.

MAOR, Eli. ***e*: A história de um número**. 4ª Ed. Rio de Janeiro: Record, 2008.

SIMMONS, George F. **Cálculo com Geometria Analítica: volume 1.** 1ª Ed. São Paulo: Editora Pearson Education do Brasil, 1987.

SIMMONS, George F. **Cálculo com Geometria Analítica: volume 2.** 1ª Ed. São Paulo: Editora Pearson Education do Brasil, 1996.

STEWART, James. **Cálculo: volume 2.** 7ª Ed. São Paulo: Editora Cengage Learning, 2015.

THOMAS, George B. **Cálculo: volume 2.** 12ª Ed. São Paulo: Editora Pearson Education do Brasil, 2012.

VASCONCELOS, Getulio de Assis. **A irracionalidade e transcendência do número $\boldsymbol{e}$.** Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) UNESP, Rio Claro- SP, 2013.

APÊNDICE A – Euler e as Séries Infinitas

Segundo Eves (2004) o suíço Leonhard Euler nasceu na Basiléia em 1707, filho do clérigo Paul Euler que desejava que seu filho seguisse seus passos. Assim como o pai, Euler teve aulas particulares com integrantes da família Bernoulli, sendo Johann Bernoulli o principal incentivador para que o pai Paul deixasse Euler investir nos estudos de Matemática. Em 1720 Euler entrou para a Universidade da Basiléia e se formou após dois anos e quando completou vinte anos Euler aceitou ingressar na Academia de São Petersburgo por convite de Daniel Bernoulli e Nicolaus Bernoulli. Em 1733 com a volta de Daniel para Basiléia, Euler assumiu a cadeia de professor de matemática em que permaneceu por catorze anos. Em 1741 foi para a Prússia ser o responsável pela seção de Matemática da Academia de Berlim por convite de Frederico, o Grande. Devido a sua carreira como matemático e admirações alcançadas na Rússia, em 1766 Euler volta à Academia de São Petersburgo em que permanece os últimos de dezessete anos de sua vida.

As produções matemáticas de Euler tiveram inúmeras contribuições em muitas áreas da Matemática sendo que mesmo após a perda da visão continuou com suas produções. Dentre suas principais contribuições estão:

- a notação $f(x)$ para representar funções, i para representar a unidade imaginária $\sqrt{-1}$ e a letra e para representar a base dos logaritmos naturais;
- no campo de equações diferenciais introduziu o fator integrante e um método sistemático para resolução de equações diferenciais lineares com coeficientes constantes;
- um dos primeiros matemáticos a encontrar a relação $V - A + F = 2$, válida para qualquer poliedro simples sendo $V = vértices,\ A = arestas,\ F = faces$;
- descobertas sobre séries infinitas e frações continuas, como por exemplo as séries que representam e^x e $\ln(1 + x)$, além de provar que a série $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$. Mostrou como escrever uma série infinita como uma fração infinita.

Euler desenvolveu a expansão em série da função exponencial $y = a^x$, sendo $a > 1$. Inicialmente ele considerou um número ω infinitamente pequeno, mas não nulo, assim $a^\omega = 1 + \psi$, em que ψ é infinitamente pequeno e a diferença $\psi = a^\omega - 1$ é infinitesimal. Euler conseguiu estabelecer uma relação linear entre os números ψ e ω

adicionando uma constante k de modo que $\psi = \mathrm{k}\omega$, logo $a^{\omega} = 1 + \mathrm{k}\omega$. Para melhor compreensão de sua ideia, Euler utilizou exemplos numéricos como $a = 10$ e $\omega = 0{,}000001$, assim $10^{0{,}000001} = 1 + \mathrm{k}(0{,}000001)$, resolvendo essa equação utilizando uma tabela logarítmica concluísse que $k = 2{,}3026$. Porém ao utilizar $a = 5$ e $\omega = 0{,}000001$, descobriu que $k = 1{,}60944$, assim Euler concluiu que a constante k varia dependendo da base a escolhida.

Para um número finito x, Euler ainda buscava a expansão de a^x, novamente recorreu a introduzir uma nova variável j no problema, em que $j = \frac{x}{\omega}$. Assim $(a^{\omega})^{\frac{x}{\omega}} = (1 + k\omega)^j \Longrightarrow a^x = \left(1 + \frac{kx}{j}\right)^j$ e utilizando o binômio de Newton conseguimos a expansão:

$$a^x = 1 + j \cdot \left(\frac{kx}{j}\right) + \frac{j!}{2!\,(j-2)!} \cdot \left(\frac{kx}{j}\right)^2 + \frac{j!}{3!\,(j-3)!} \cdot \left(\frac{kx}{j}\right)^3 + \cdots$$

$$\Rightarrow a^x = 1 + kx + \frac{j(j-1)}{1 \cdot 2} \cdot \left(\frac{k^2x^2}{j^2}\right) + \frac{j(j-1)(j-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \left(\frac{k^3x^3}{j^3}\right) + \cdots$$

$$\Longrightarrow a^x = 1 + kx + \frac{(j-1)}{j} \cdot \left(\frac{k^2x^2}{1 \cdot 2}\right) + \frac{(j-1)(j-2)}{j^2} \cdot \left(\frac{k^3x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}\right) + \cdots$$

Como x é finito e ω é infinitamente pequeno então $j = \frac{x}{\omega}$ é infinitamente grande, assim embora Euler na época não possuísse o conceito de limite de maneira formal, não foi um empecilho para que concluísse que todas as divisões $\frac{j-1}{j}, \frac{j-2}{j}, \frac{j-3}{j}$, ... são iguais a 1, no caso da nossa notação atual $\lim_{j \to \infty} \frac{j-n}{j} = 1, \forall n \in \mathbb{N}$. Logo:

$$a^x = 1 + kx + \left(\frac{k^2x^2}{1 \cdot 2}\right) + \left(\frac{k^3x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}\right) + \left(\frac{k^4x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}\right) + \cdots$$

Com isso Euler concluiu imediatamente que para $x = 1$ temos uma série que representa a base a em termos da constante k:

$$a = 1 + k + \left(\frac{k^2}{1 \cdot 2}\right) + \left(\frac{k^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}\right) + \left(\frac{k^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}\right) + \cdots$$

E para estudar um caso específico em que $x = k = 1$ teríamos que $a^{\omega} = 1 + \omega$, em que novamente ω seria um número infinitamente pequeno, assim:

$$a = 1 + 1 + \left(\frac{1}{1 \cdot 2}\right) + \left(\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}\right) + \left(\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}\right) + \cdots$$

Esse número a encontrado é nomeado em homenagem ao próprio Euler como número de Euler e seu símbolo *e* foi criado por ele mesmo, o motivo dessa nomenclatura segundo os historiadores matemáticos está no fato de ser a primeira letra de seu nome ou o fato de ser a primeira letra da palavra exponencial. Portanto no caso em que $k = 1$ e $a = e$, Euler conseguiu uma série que representava a exponencial natural:

$$e^x = 1 + x + \left(\frac{x^2}{1 \cdot 2}\right) + \left(\frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}\right) + \left(\frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}\right) + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Após essa descoberta Euler estava interessado em encontrar a série de expansão que representa a função logarítmica natural, ou seja, $\mathrm{y} = \log_e x$ que Euler denotou como $y = \ln x$. Euler seguiu da mesma afirmação anterior:

$$e^{\omega} = 1 + \omega$$

$$\Rightarrow \ln e^{\omega} = \ln(1 + \omega)$$

$$\Rightarrow \omega = \ln(1 + \omega)$$

Novamente Euler adiciona uma nova variável j, que é multiplicada na equação acima: $j\omega = j \cdot \ln(1 + \omega) \Rightarrow j\omega = \ln(1 + \omega)^j$. Temos que

$(1 + \omega)^j > 1$, pois embora ω seja infinitamente pequeno, a soma $1 + \omega$ ainda será maior que 1. Com isso Euler definiu um número positivo x como $x = (1 + \omega)^j - 1$ e ao desenvolver essa igualdade obteve:

$$x = (1 + \omega)^j - 1 \Rightarrow 1 + x = (1 + \omega)^j$$

$$\Rightarrow (1 + x)^{\frac{1}{j}} = 1 + \omega \ \Rightarrow \omega = (1 + x)^{\frac{1}{j}} - 1$$

Logo a equação $j\omega = \ln(1 + \omega)^j$ pode ser reescrita e utilizando a expansão binominal de Newton obtemos:

$$\Longrightarrow j\left[(1 + x)^{\frac{1}{j}} - 1\right] = \ln(1 + x)$$

$$\Longrightarrow \ln(1+x) = j\left[1+\left(\frac{1}{j}\right)x+\frac{\left(\frac{1}{j}\right)\left(\frac{1}{j}-1\right)}{2\cdot 1}x^2+\frac{\left(\frac{1}{j}\right)\left(\frac{1}{j}-1\right)\left(\frac{1}{j}-2\right)}{3\cdot 2\cdot 1}x^3+\cdots\right]-j$$

$$\Longrightarrow \ln(1+x) = \left[j+x+\frac{\left(\frac{1}{j}-1\right)}{2\cdot 1}x^2+\frac{\left(\frac{1}{j}-1\right)\left(\frac{1}{j}-2\right)}{3\cdot 2\cdot 1}x^3+\cdots\right]-j$$

$$\Longrightarrow \ln(1+x) = x+\frac{(1-j)}{2!\,j}x^2+\frac{(1-j)(1-2j)}{3!\,j^2}x^3+\frac{(1-j)(1-2j)(1-3j)}{4!\,j^3}x^4+\cdots$$

$$\Longrightarrow \ln(1+x) = x-\frac{(j-1)}{2!\,j}x^2+\frac{(j-1)(2j-1)}{3!\,j^2}x^3-\frac{(j-1)(2j-1)(3j-1)}{4!\,j^3}x^4+\cdots$$

$$\Longrightarrow \ln(1+x) = x-\frac{(j-1)}{2j}x^2+\frac{(j-1)(2j-1)}{3j\cdot 2j}x^3-\frac{(j-1)(2j-1)(3j-1)}{4j\cdot 3j\cdot 2j}x^4+\cdots$$

Podemos observar que o valor de j cresce, as frações $\frac{(j-1)}{2j}$, $\frac{(2j-1)}{3j}$, $\frac{(3j-1)}{4j}$ se aproximam de $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$ respectivamente, generalizando a ideia temos que $\lim_{j\to\infty}\frac{(nj-1)}{(n+1)j}=\frac{n}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$. Assim Euler conseguiu mostrar a expansão da série logaritmo natural para logaritmando igual $1+x$ como:

$$\Longrightarrow \ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots$$

Porém Euler percebeu que essa expressão não parece convergir para qualquer valor de x, por exemplo para calcular o logaritmo natural de 6 teríamos $\ln(1+5) = 5-\frac{5^2}{2}+\frac{5^3}{3}-\frac{5^4}{4}+\cdots$. Diante dessa situação Euler conseguiu estabelecer outra série de logaritmo natural que convergia mais rapidamente, para isso substituiu o x por $-x$ resultando em:

$$\ln(1-x) = -x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots$$

E ao subtrair essas duas expressões obteve:

$$\ln(1+x)-\ln(1-x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots-\left(-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\right)$$

$$\Rightarrow \ln\frac{(1+x)}{(1-x)} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots$$

$$\Rightarrow \ln\frac{(1+x)}{(1-x)} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots\right)$$

Embora esse logaritmo esteja definido apenas para o intervalo $-1 < x < 1$, a expressão $\frac{(1+x)}{(1-x)}$ pode assumir o valor de qualquer número positivo, além disso essa série converge mais rapidamente que a série $\ln(1+x)$. Por exemplo para $x = \frac{1}{2}$ temos:

$$\ln\frac{\left(1+\frac{1}{2}\right)}{\left(1-\frac{1}{2}\right)} = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{5} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^7}{7} \ldots\right)$$

$$\Rightarrow \ln 3 = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{24} + \frac{1}{160} + \frac{1}{896} + \cdots\right) \sim 1{,}09806\ldots$$

Voltando ao exemplo de calcular o $\log 5$ veremos como o método de séries infinitas desenvolvido por Euler resolve esse problema, para $x = \frac{1}{9}$ e para $x = \frac{1}{3}$ temos:

$$\ln\frac{\left(1+\frac{1}{9}\right)}{\left(1-\frac{1}{9}\right)} = 2\left(\frac{1}{9} + \frac{\left(\frac{1}{9}\right)^3}{3} + \frac{\left(\frac{1}{9}\right)^5}{5} + \cdots\right)$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{5}{4}\right) = 2\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{2187} + \frac{1}{295245} + \cdots\right) \cong 0{,}223143$$

e

$$\ln\frac{\left(1+\frac{1}{3}\right)}{\left(1-\frac{1}{3}\right)} = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^3}{3} + \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^5}{5} + \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^7}{7} \ldots\right)$$

$$\Rightarrow \ln 2 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{81} + \frac{1}{1215} + \frac{1}{15309} + \cdots\right) \cong 0{,}693135$$

Logo: $\ln 5 = \ln\left(\frac{5}{4}\right) + \ln 2 + \ln 2 \Rightarrow \ln 5 = 0{,}223143 + 2(0{,}693135) \Longrightarrow \ln 5 = 1{,}609413.$

E utilizando propriedades de logaritmos sabemos que:

$$\log 5 = \frac{\ln 5}{\ln 10}$$

$$\Rightarrow \log 5 = \frac{\ln 5}{\ln(2 \cdot 5)}$$

$$\Rightarrow \log 5 = \frac{\ln 5}{\ln 5 + \ln 2}$$

$$\Rightarrow \log 5 = \frac{1{,}609413}{1{,}609413 + 0{,}693135} = 0{,}698970$$

Esse valor de logaritmo tem uma precisão até a sexta casa decimal, no qual é mais preciso que o método utilizado por Henry Brigss cuja precisão era até a quarta casa decimal.

As manipulações de Euler muitas vezes provaram-se corretas décadas depois de sua morte, uma das mais famosas de suas manipulações refere-se à ligação entre a função exponencial e os números complexos que veremos a seguir:

Sabemos que para $x \in \mathbb{R}$ temos que $e^x = 1 + x + \left(\frac{x^2}{2!}\right) + \left(\frac{x^3}{3!}\right) + \left(\frac{x^4}{4!}\right) + \cdots$, Euler então substituiu a variável x por ix sendo x um número real e i a unidade imaginaria, obtendo assim:

$$e^{ix} = 1 + ix + \left(\frac{(ix)^2}{2!}\right) + \left(\frac{(ix)^3}{3!}\right) + \left(\frac{(ix)^4}{4!}\right) + \left(\frac{(ix)^5}{5!}\right) + \left(\frac{(ix)^6}{6!}\right) + \cdots$$

$$\Longrightarrow e^{ix} = 1 + ix - \left(\frac{x^2}{2!}\right) - i\left(\frac{x^3}{3!}\right) + \left(\frac{x^4}{4!}\right) + i\left(\frac{x^5}{5!}\right) - \left(\frac{x^6}{6!}\right) + \cdots$$

$$\Longrightarrow e^{ix} = \left[1 - \left(\frac{x^2}{2!}\right) + \left(\frac{x^4}{4!}\right) - \left(\frac{x^6}{6!}\right) + \cdots\right] + i\left[x - \left(\frac{x^3}{3!}\right) + \left(\frac{x^5}{5!}\right) - \left(\frac{x^7}{7!}\right) + \cdots\right]$$

As séries dentro dos colchetes já eram conhecidas por Euler como as expansões de $cos\ x$ e $\operatorname{sen} x$ respectivamente, logo:

$$e^{ix} = \cos x + i \cdot sen\ x$$

Tomando $x = \pi$ temos:

$$e^{i\pi} = \cos \pi + i \cdot sen\ \pi$$

$$\Longrightarrow e^{i\pi} = -1 + i \cdot 0$$

$$\Longrightarrow e^{i\pi} = -1$$

$$\Longrightarrow e^{i\pi} + 1 = 0$$

A igualdade $e^{i\pi} + 1 = 0$ é considerada por muitos matemáticos a fórmula mais bela da Matemática, pois relaciona cinco números importantes para a Matemática: o número irracional π, o número irracional e, o número imaginário i, o elemento neutro do produto 1 e o elemento neutro da adição 0, além de estarem relacionados pelas operações matemáticas mais importantes que são adição, produto e exponenciação.