INEQUAÇÕES :

Conceito:

Toda inequação é uma desigualdade aberta, o que significa que ela contém ao menos uma incógnita. Trabalharemos a seguir com inequações de 1º e de 2º graus com uma só incógnita, e para isso utilizaremos os estudos de sinais das funções que acabamos de fazer.

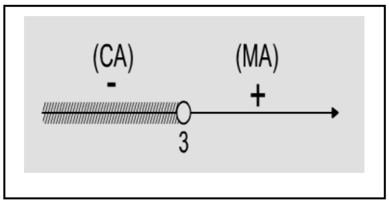
EXEMPLOS :

Resolva as inequações em R :

1) 2x-6 < 0

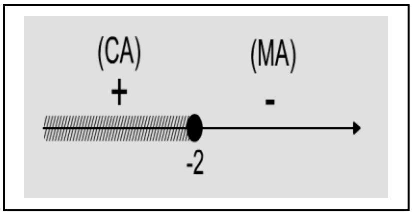
A função y = 2x-6, de primeiro grau, tem os sinais -,+ (CA,MA)

e raiz $-\frac{b}{a} = \frac{6}{2} = 3$. Como a inequação pede que a função 2x-6 seja menor que zero, hachuraremos a região do eixo x onde o sinal seja negativo, e veremos que a solução é x < 3. Assim, V = $\{x \in R \mid x < 3\}$.



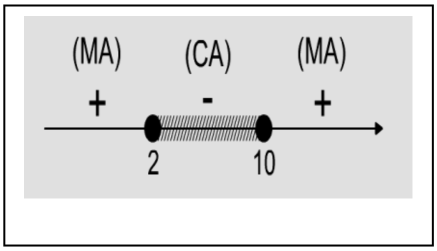
2) $-3x-6 \geq 0$

A função y - -3x-6, de 1º grau, tem os sinais +,- (CA,MA) e raiz igual a -2. A função -3x-6 deve ser maior ou igual a zero. Então vamos hachurar a raiz, além da região onde o sinal é positivo, e a solução da inequação será: V = $\{x \in R \mid x \leq -2\}$.



3) $x^2 - 12x + 20 \leq 0$

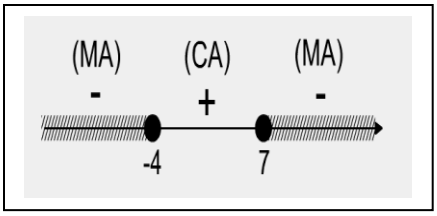
Os sinais da função y = $x^2 - 12x + 20$, de 2º grau, são +,-,+ (MA, CA,MA) e suas raízes são 2 e 10. Como a função dada deve ser menor ou igual a zero, hachuraremos as raízes e a região onde o sinal é



negativo, e a solução será: $V = \{x \in R \mid 2 \le x \le 10\}$.

4) $-x^2 + 3x + 28 \le 0$

Sinais da função : -,+,- (MA,CA,MA). Raízes -4 e 7. A função deve ser menor ou igual a zero. Hachuraremos então as raízes e a região do eixo x onde o sinal é negativo, e teremos o seguinte Conjunto Verdade : $V = \{x \in R \mid x \le -4 \text{ ou } x \ge 7\}$.



EXERCÍCIOS : Resolva as inequações em R :

a) $4x+6<0$ b) $5x+7>0$ c) $3-10x<6-8x$ d) $x^2-7x+6<0$

e) $2-5x>-3x+12$ f) $-x^2+10x-9\ge 0$ g) $81-25x^2\le 0$ h) $-x^2+6x-9<0$

i) $x^2+4\ge 0$ j) $-x^2-100\ge 0$ k) $-4x^2<0$ l) $-x^2+\sqrt{12}\le 0$

(Resp.: a) V=$\{x \in R \mid x < -\frac{3}{2}\}$; b) V=$\{x \in R \mid x > -\frac{7}{5}\}$; c) V=$\{x \in R \mid x > -\frac{3}{2}\}$; d) V = [1,6] ;

e) V=$\{x \in R \mid x < -5\}$; f) V=$\{x \in R \mid 1 \le x \le 9\}$; g) V = $\{x \in R \mid x \le -\frac{9}{5} \text{ ou } x \ge \frac{9}{5}\}$; h) V=R-{3};

i) V= R ; j) V = ϕ; k) V = R; l) V = $\{x \in R \mid x \le -2\sqrt{3} \text{ ou } x \ge 2\sqrt{3}\}$.)

CONCEITO :

<u>Sistemas de inequações</u> : Consideramos que um conjunto de inequações com a mesma variável constitui um sistema se a sua solução contemplar a todas as inequações que dele fazem parte. Para tanto, o Conjunto Verdade do sistema deverá ser a interseção dos Conjuntos Verdade de todas as inequações que o formam.

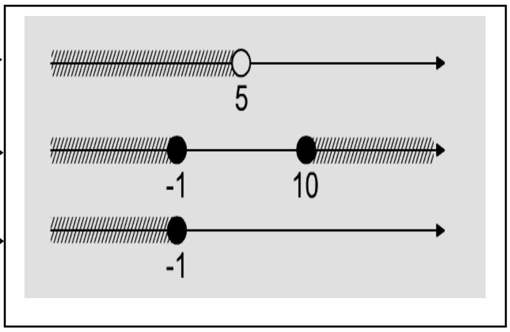
EXEMPLO : Resolva o sistema $\begin{cases} 3x-6 < 9 \\ x^2 - 9x \geq 10 \end{cases}$

Inicialmente vamos resolver cada inequação :

a) $3x-15 < 0$ (CA,MA) (-,+) $\rightarrow$ $x<5$ $\rightarrow$

b) $x^2 - 9x - 10 \geq 0$ (MA<CA<MA) (+,-,+) $\rightarrow x \leq -1$ ou $x \geq 10$ $\rightarrow$

c) Em seguida , a interseção dos conjuntos: $\cap$ $\rightarrow$



Conclusão : V = $\{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1 \}$.

<u>EXERCÍCIOS :</u> Resolva os seguintes sistemas de inequações :

a) $\begin{cases} 4x + 3 < 2 - 3x + 8 \\ 2x + 9 \geq 3 + 5x \\ -3x - 7 < 2 + 4x \end{cases}$

(Resp.: V = $]-\frac{9}{7},1]$)

b) $\begin{cases} x^2 + 2x - 8 < 0 \\ -x^2 + 6x \geq 0 \\ x^2 - 9 < 0 \end{cases}$

(Resp.: V = $[0,3[$)

c) $\begin{cases} x^2 - 3x - 28 \leq 0 \\ -4x + 28 > 0 \\ 6x + 24 > 0 \end{cases}$

(Resp.: V = $]-4,7[$

d) $\begin{cases} x + 4 > -1 \\ -x - 6 < 5 \\ 2x + 7 < 19 \\ x^2 - 2x - 35 \leq 0 \end{cases}$

(Resp.: V=$]-5,6[$)

e) $\begin{cases} x^2 - 10x + 25 < 0 \\ 4 - 2x > 0 \end{cases}$

(Resp.: V = ϕ)

f) $\begin{cases} 9 - 4x^2 \leq 0 \\ x^2 - 4 \leq 0 \end{cases}$

(Resp.: V= $[-2,-\frac{2}{3}] \cup [\frac{2}{3},2]$)

CONCEITO :

Inequações simultâneas : A sentença algébrica -3 < 2x – 5 ≤ 4 nos apresenta duas inequações. Uma delas é -3 < 2x -5 e a outra, 2x -5 ≤ 4. Por estarem escritas em uma única sentença, elas devem ter uma solução única, que será a interseção das soluções das inequações separadas. Para isso, devemos tratá-las como sendo um sistema de inequações, conforme estudamos no conceito anterior.

EXEMPLO : Resolva as inequações simultâneas : -3 < 2x – 5 ≤ 4.

Conforme você acabou de ler, devemos resolver o sistema $\begin{cases} -3 < 2x - 5 \\ 2x - 5 \leq 4 \end{cases}$ e assim teremos a solução $V = \{x \in R \mid 1 < x \leq \frac{9}{2}\}$.

EXERCÍCIOS : Resolva as inequações :

a) $4 < 3x - 2 \leq 15$; b) $2x \leq x^2 - 10x \leq 2x^2$; c) $4 < 3x - 2 < 1$; d) $x^2 \leq 2x^2 + 6x \leq 3x$

(Resp.: a) V = [2,5] ; b) $V = \{x \in R \mid x \leq -10$ ou $x = 0$ ou $x \geq 12\}$; c) $V = \phi$; d) $V = \{0\}$.)

CONCEITO :

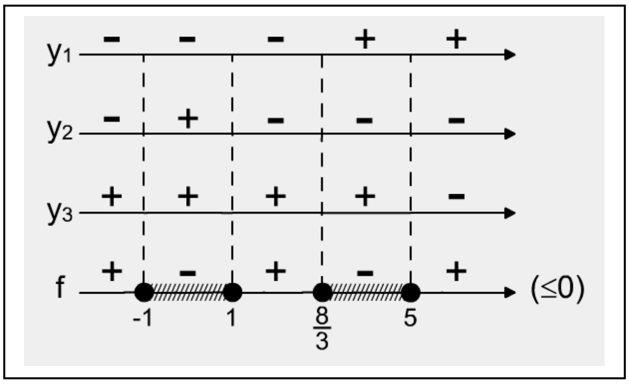
Inequações formadas por produtos ou quocientes de funções :

Para resolvermos este tipo de inequação, devemos estudar os sinais das funções que a compõem, multiplicá-los e verificar os intervalos onde estes produtos obedecem ao sinal que a inequação pede.

EXEMPLOS: Resolva as inequações em R :

1) $(3x - 8).(-x^2 + 1).(10 - 2x) \leq 0$

Esta inequação é formada pelas funções $y_1 = 3x - 8$, $y_2 = -x^2 + 1$ e $y_3 = 10 - 2x$, cujos sinais representaremos em 3 eixos paralelos, e utilizaremos um quarto eixo para os sinais do produto desses sinais e para hachurar o Conjunto Verdade.

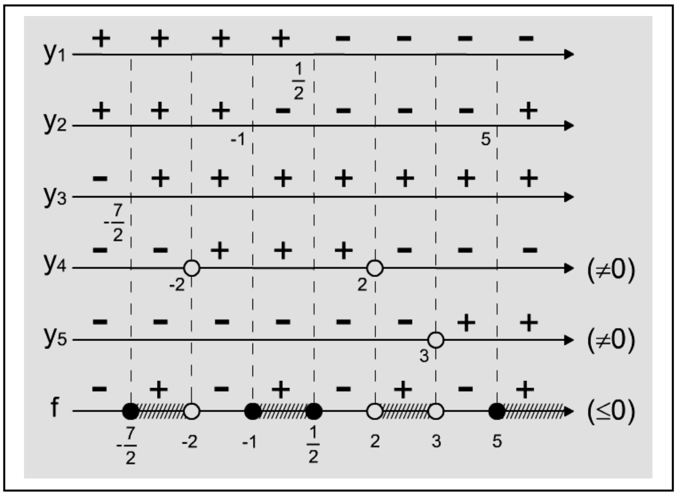


Então temos o seguinte Conjunto Verdade : V = $\{x \in R \mid -1 \le x \le 1 \text{ ou } \frac{8}{3} \le x \le 5\}$

2) $\dfrac{(-4x+2).(x^2-4x-5).(2x+7)}{(4-x^2).(x-3)} \ge 0$

Funções $y_1 = -4x+2$, $y_2 = x^2-4x-5$, $y_3 = 2x+7$ no numerador e funções $y_4 = 4-x^2, y_5 = x-3$ no denominador, e , por isso diferentes de zero. Isto quer dizer que as raízes das funções y_4 e y_5 devem ser excluídas do Conjunto Verdade da inequação.

Trabalharemos agora com os 5 eixos das funções e um sexto para a multiplicação dos sinais e a representação do Conjunto Verdade :



V = $\{x \in R \mid -\frac{7}{2} \le x < -2 \text{ ou } -1 \le x \le \frac{1}{2} \text{ ou } 2 < x < 3 \text{ ou } x \ge 5\}$.

EXERCÍCIOS : Resolva as inequações em R :

a) $(x-2).(-x-4).(x^2 - 9) \geq 0$ (Resp.: V= $\{x \in R \mid x \leq 4$ ou $-3 \leq x \leq 2$ ou $x \geq 3\}$)

b) $-(3x+8).(-x^2+12x-11).(x^2+2) < 0$ (Resp.: V = $\{x \in R \mid x < \frac{8}{3}$ ou $1 < x < 11\}$)

c) $\dfrac{(2-x).(3+x)(x-4)}{(5-x).(x^2-9x+14)} \leq 0$ (Resp.: V = ([-3.4] U]5,7[ )–{2})

d) $\dfrac{(2x-1).(2x-2).(2x-3)}{(3x-1).(3x-2).(3x-3)} \geq 0$ (Resp.: V = $\{ x \in R \mid x < \frac{1}{3}$ ou $\frac{1}{2} \leq x < \frac{2}{3}$ ou $x \geq \frac{3}{2}\}$)

e) $\dfrac{x-2}{x+2} + \dfrac{x+2}{x-2} \leq 2$ (Resp.: V = $\{x \in R \mid x < -2$ ou x . 2 })

f) $\dfrac{x-3}{x+3} - \dfrac{x+3}{x-3} \geq \dfrac{2}{3}$ (Resp.: V = $\{x \in R \mid x < -3$ ou $9-3\sqrt{10} \leq x < 3$ ou $x \geq 9+3\sqrt{10}\}$)

g) (x-1).(x-2).(x-3).....(x-9).(x-10) >0

(Resp.: V=$\{x \in R \mid x<1$ ou $2<x<3$ ou $4<x<5$ ou $6<x<7$ ou $8<x<9$ ou $x>10\}$)

APLICAÇÕES :

Existem funções que envolvem radicais e frações algébricas. Tais funções nem sempre possuem o conjunto R como seu Domínio, pois, como sabemos, se o radicando de uma raiz de índice par for negativo, a raiz não será um número real, e se o valor de uma expressão for zero, ela não poderá ser o denominador de nenhuma fração.

Logo, podemos dizer que, se uma função for um polinômio de grau qualquer, seu Domínio será igual a R. Porém, se a função envolver algum radical com índice par, seu radicando deverá ser positivo ou nulo, e, por fim, se a função for uma fração algébrica, seu denominador deverá ser diferente de zero.

EXEMPLO : Obtenha o Domínio de Validade das funções :

a) f(x) = $\sqrt{2x-3}$

Se o radical tem índice par, então seu radicando deve ser maior ou igual a zero. Isto nos leva à inequação $2x - 3 \geq 0$, cuja solução é $x \geq \frac{3}{2}$. Então, temos :

$$\text{Dom(f)} = \{x \in R \mid x \geq \frac{3}{2}\}$$

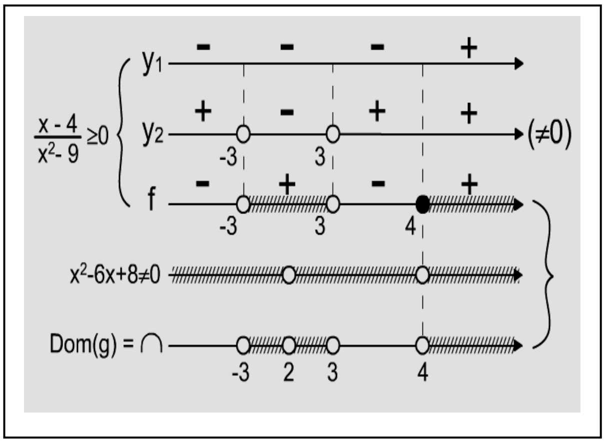
b) $f(x) = \sqrt[4]{\frac{3-6x}{x+1}}$

Novamente o índice da raiz é par, logo o radicando não pode ser negativo , ou $\frac{3-6x}{x+1} \geq 0$. Se resolvermos esta inequação, conforme já estudamos, teremos o seguinte Domínio de Validade :

$$\text{Dom(f)} = \{x \in R \mid -1 < x \leq \frac{1}{2}\}$$

c) $g(x) = \dfrac{2x - \sqrt{\frac{x-4}{x^2-9}}}{x^2 - 6x + 8}$

Neste caso, devemos resolver o sistema de inequações resultante de o radicando ser maior ou igual a zero, e de o denominador ser diferente de zero. O Domínio deverá ser a interseção das duas condições de existência : Dom(g) $= \{x \in R \mid -3 < x < 3$ e $x \neq 2$ ou $x > 4\}$



EXERCÍCIOS : Obtenha o Domínio de cada uma das funções :

a) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+2}}$; b) $g(x) = 1 + x + 2x^2 - \sqrt{x^2 - 4}$; c) $j(x) = \frac{x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$; d) $f(x) = \frac{x-3}{\sqrt{3}}$;

e) f(x) = $\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}+....+\sqrt{x-9}+\sqrt{x-10}$; f) h(t) = $\dfrac{\sqrt{1-3t}+\sqrt{1+3t}}{\sqrt{1-2t}}$

(Resp.: a) Dom(f) = $\{x \in R \mid x > -2\}$; b) Dom(g) = $\{x \in R \mid x \le -2$ ou $x \ge 2\}$; c) Dom(j) = R^*_+ ;

d) Dom(f) = R ; e) Dom(f) = R $-\{1,2,3,.....,9,10\}$;f) Dom(h) = $\{t \in R \mid -\frac{1}{3} \le t \le \frac{1}{3}\}$)