

FUNÇÕES

INTRODUÇÃO :

Para podermos nos dedicar ao assunto Funções, há necessidade de abordarmos alguns temas iniciais, sem os quais, nosso trabalho se complicaria bastante. Vamos a eles :

Conjunto : Esta é uma ideia tão inicial, tão básica, que não é possível defini-la. Supomos que todos os seres humanos, e até alguns animais, saibam o que seja um conjunto, embora não consigam colocar em palavras. O mesmo ocorre com a ideia de elemento e a de pertinência, que significa o fato de um elemento pertencer ou não a um certo conjunto. Você já percebeu que uma criança com menos de 2 anos de idade se reconhece como elemento de um conjunto muito especial para ela que é a sua família ? Já percebeu também que ela sabe que um amiguinho de escola não pertence à sua família ?

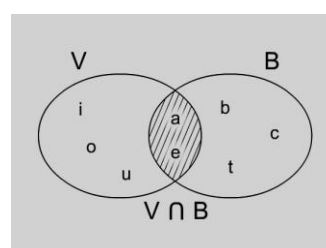
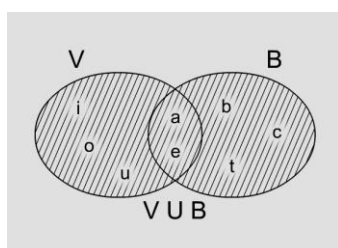
Isto mostra que a criança já tem ideia do significado dos termos Elemento, Conjunto, Pertence e Não pertence, embora não consiga explicá-los.

Normalmente utilizamos letras maiúsculas para representar conjuntos e minúsculas para elementos. O símbolo \in significa pertence, e \notin é a sua negação. Se um conjunto for identificado pelos seus elementos, devemos escrevê-los entre chaves.

Exemplo : Seja o conjunto V das vogais do nosso alfabeto. Então, $V = \{a, e, i, o, u\}$, e vemos que, por exemplo, $a \in V$ e $b \notin V$. Seja agora o conjunto B formado pelas letras da palavra “abacate”. Então, $B = \{a, b, c, t, e\}$.

Se efetuarmos a operação de União entre o conjunto V e o conjunto B, que simbolizaremos por $B \cup V$, teremos o conjunto $B \cup V = \{a, b, c, e, i, o, t, u\}$, pois aí estarão os elementos que pertencem a B **ou** a V.

Os elementos que são comuns a B e a V formam o conjunto Interseção entre V e B, formada pelos elementos que pertencem a B **e** a V, e usaremos a simbologia : $B \cap V = \{a, e\}$. A figura mostra os diagramas de Venn que podem representar o que acabamos de mostrar.



Propositadamente, estamos escrevendo, ora $B \cup V$ e $B \cap V$, ora $V \cup B$ e $V \cap B$, para mostrar sua comutatividade.

Definimos ainda o conjunto $B - V$ como sendo formado pelos elementos que pertencem a B e que não pertencem a V . Então, $B - V = \{b, c, t\}$ e $V - B = \{i, o, u\}$. Agora, a comutatividade não está vigorando.



Se todos os elementos de um certo conjunto A pertencem a um conjunto B , dizemos que A está contido em B , $A \subset B$, ou que B contém A , $B \supset A$, ou que A é subconjunto de B .

Dois conjuntos muito importantes, sem os quais a Teoria dos Conjuntos não teria a validade que possui, são o Conjunto Vazio e o Conjunto Universo: O Vazio, cujo símbolo é $\{\}$ ou \emptyset é aquele que não possui elementos, e o Universo U é aquele ao qual todos os elementos pertencem.

Assim, são verdadeiras as sentenças: (Obs: \forall = qualquer)

- a) $\forall x, x \in U$; b) $\forall x, x \notin \emptyset$; c) $\forall A, A \supset \emptyset$; d) $\forall A, A \subset U$

EXERCÍCIOS:

1) A gerência de uma loja verificou que no mês passado, 230 consumidores compraram creme dental de uma certa marca, 190 compraram iogurte em embalagens de um litro, 50 compraram aquela marca de creme dental e o iogurte de 1 litro, e as demais 80 pessoas não consumiram nem o creme dental nem o iogurte de 1 litro. Calcular:

- a) Número de pessoas consultadas. (Resp.: 450)
 b) Número dos que consomem apenas o creme dental (Resp.: 180)
 c) Número dos que não consomem o iogurte de 1 litro (Resp.: 260)

2) Quinhentas pessoas aceitaram responder a uma pesquisa a respeito de suas preferências sobre as marcas A e B de um certo produto, e chegou-se a estes valores percentuais : 10% declararam consumir o produto independentemente da marca, 38% preferem a marca A, 28% preferem a marca B , e o restante não se interessa pelo consumo do produto. Calcular :

- a) Porcentagem daqueles que não se interessam pelo produto. (Resp.: 24%)
- b) Número de pessoas que não se interessam pelo produto. (Resp.: 120)
- c) Quantidade de pessoas que se interessam só por A. (Resp.: 190)

CONCEITO :

Produto Cartesiano : Se tivermos dois conjuntos A e B não vazios, o Produto Cartesiano de A em B é o conjunto de duplas ordenadas, ou pares ordenados (x,y), tais que x está em A e y em B.

Se utilizarmos uma simbologia mais apropriada, teremos : $A \times B = \{(x, y) | x \in A \text{ e } y \in B\}$.

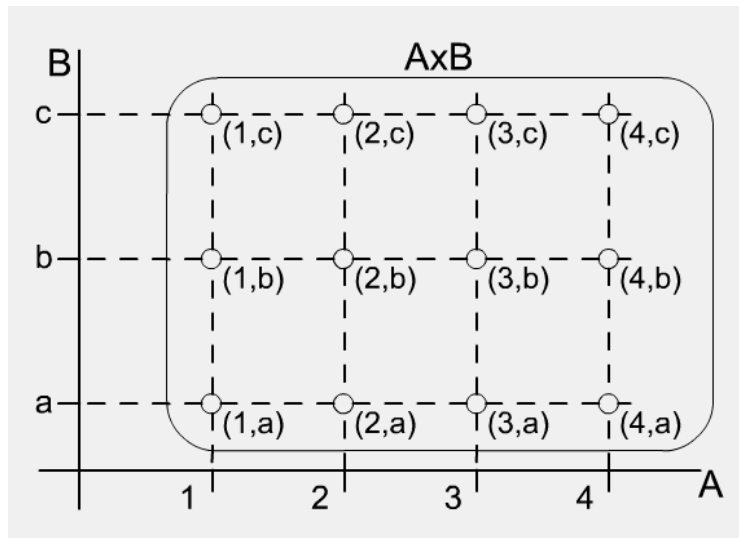
CONCEITO :

Relação : Todo subconjunto não vazio de $A \times B$ é chamado de Relação de A em B. Ou seja :

$$R \text{ é relação de A em B} \Rightarrow R \subset A \times B \text{ e } R \neq \emptyset.$$

Exemplo : Sejam os conjuntos $A = \{1,2,3,4\}$ e $B = \{a,b,c\}$. O conjunto $A \times B$, conforme a definição, será $A \times B = \{(1,a); (1,b); (1,c); (2,a); (2,b); (2,c); (3,a); (3,b); (3,c); (4,a); (4,b); (4,c)\}$ que possui $3 \times 4 = 12$ elementos que são pares ordenados. Podemos também escrever o produto $B \times A$: $B \times A = \{(a,1); (a,2); (a,3); (a,4); (b,1); (b,2); (b,3); (b,4); (c,1); (c,2); (c,3); (c,4)\}$ que também tem 12 elementos.

O produto cartesiano pode também ser construído graficamente (desenho) conforme o exemplo a seguir, onde há a vantagem de não correremos o perigo de repetir pares ordenados ou de esquecermos algum deles :

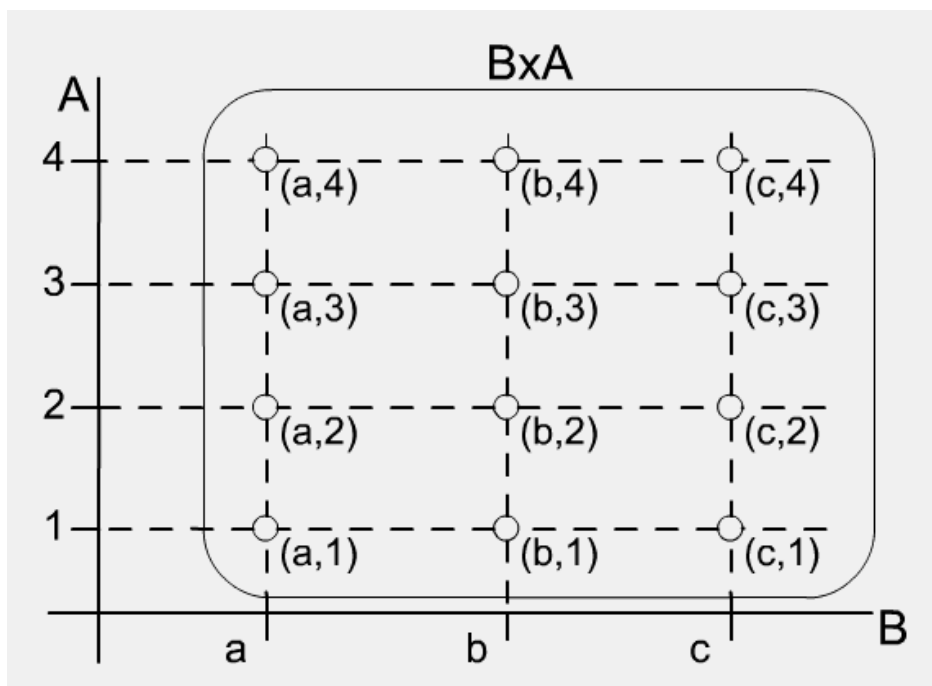


Vemos que a cada ponto deste plano há em correspondência um só par ordenado, e a tal par voltamos ao mesmo ponto. A isto damos o nome de Correspondência Biunívoca entre pontos e Pares Ordenados. É possível pensarmos que o par ordenado (x,y) é o endereço algébrico do ponto do plano.

Se ainda pensarmos no produto $A \times B$ já abordado, podemos afirmar que o conjunto $R = \{(2,b); (3,a); (4,a)\}$ é um exemplo de subconjunto não vazio de $A \times B$, e portanto é uma Relação de A em B. Se utilizarmos a nossa simbologia algébrica, $\phi \neq R \subset A \times B \Rightarrow R$ é relação de A em B.

Exercício : Sejam os conjuntos $A = \{1,2,3,4\}$ e $B = \{a,b,c\}$. Represente graficamente o conjunto $B \times A$ com seus pares ordenados e escreva uma relação S como exemplo.





Resp.:

CONCEITO :

FUNÇÃO : Função de A em B é toda relação de A em B que a cada elemento de A faz corresponder um só elemento de B.

Para entendermos melhor esta delicada definição, voltemos aos conjuntos $A = \{1,2,3,4\}$ e $B = \{a,b,c\}$, cujo produto cartesiano montamos. O subconjunto $F = \{(1,b); (2,b); (3,c); (4,b)\}$ é uma relação de A em B pois é um subconjunto não vazio de $A \times B$. Além disso, ao elemento 1, de A, F faz corresponder só b de B, a 2 de A, só b de B, a 3 de A, só c de B e a 4 de A, só b de B.

Ou seja : a cada elemento de A F faz corresponder só um elemento de B. Logo F é função de A em B, e representamos este fato por $F : A \rightarrow B$.

Vejamos uma outra relação de A em B : $S = \{(1,b); (2,c); (4,a); (4,b)\}$. Podemos constatar que ao elemento 1 de A, S faz corresponder só b de B, ao 2 de A, só c de B, ao 3 de A, S não faz corresponder nenhum elemento de B. Logo, S não é uma função de A em B. Além disso, ao elemento 4 de A, S faz corresponder dois elementos diferentes de B, e, por mais um motivo, S não é

função de A em B.

EXERCÍCIO : Sejam os conjuntos $A = \{1,2,3,4\}$ e $B = \{2,4,7,9,13\}$. Responda :

a) Quantos elementos tem $A \times B$? (Resp.: 20)

b) Verifique qual das relações a seguir é ou não uma função de A em B. Justifique :

1) $R = \{(1,2); (2,2); (3,13); (4,9)\}$ (Resp.: sim,

pois a cada elemento de A, R faz corresponder um único elemento de B.)

2) $R' = \{(4,4); (3,2); (1,2); (2,1)\}$ (Resp.: não,

pois ao elemento 2 de A, R' faz corresponder o elemento 1, que não é de B.)

3) $R'' = \{(1,7); (2,7); (3,7); (4,7)\}$ (Resp.: sim,

pois a cada elemento de A, R'' faz corresponder um só de B.)

4) $R^* = \{(1,4); (2,7); (2,9); (3,4); (4,4)\}$ (Resp.: não,

pois ao elemento 2 de A, R^* faz corresponder mais de um elemento de B.)

5) $R\# = \{(1,4); (2,7); (2,10); (3,4); (4,7)\}$ (Resp.: sim,

pois a cada elemento de A, $R\#$ faz corresponder um único de B.)

CONCEITO :

DOMÍNIO, CONTRADOMÍNIO E IMAGEM : Dada uma função f de A em B, chamamos de Domínio de f , cujo símbolo é $\text{Dom}(f)$, ao conjunto A, e de Contradomínio de f , de símbolo $\text{CDom}(f)$, ao conjunto B. O conjunto formado pelos segundos elementos dos pares ordenados que pertencem a f é chamado de Imagem de f , e seu símbolo é $\text{Im}(f)$.

EXEMPLOS: Sejam as funções R'' e $R\#$ do exercício anterior. Podemos ver que $\text{Dom}(R'') = \text{Dom}(R\#) = A = \{1,2,3,4\}$ e $\text{CDom}(R\#) = \text{CDom}(R'') = B = \{2,4,7,9,13\}$. Porém, as suas imagens não coincidem, pois $\text{Im}(R'') = \{7\}$ e $\text{Im}(R\#) = \{4,7,10\}$.

INTRODUÇÃO : A seguir trataremos dos conjuntos numéricos, naturalmente de importância fundamental em qualquer estudo que envolva nossa disciplina. A ideia de número é tão básica quanto as de elemento e conjunto. Isto é tão verdade que até os animais a possuem. Basta observar as reações de seu cão ou gato ao perceber que algo que ele possuía não está mais no seu campo visual. Os animais não são capazes de contar e efetuar operações, mas eles sabem, por exemplo, que um conjunto com 3 pedaços de carne tem “algo” diferente de um conjunto com 2 pedaços. E o que caracteriza tal diferença ? Como você já percebeu, é a quantidade de elementos, e número nada mais é do que uma ideia de quantidade. Tal ideia para ser falada, escrita, ou, de alguma forma, comunicada a alguém, necessita de símbolos que são chamados algarismos.

CONCEITOS :

Os números naturais N : Este conjunto numérico é definido como $N = \{0,1,2,3,4,\dots\}$. Vemos que o primeiro natural é o zero e não há último natural. Logo N é um conjunto infinito. Este conjunto recebeu o nome que tem pelo fato de ter surgido da necessidade de o homem, desde primárias eras, necessitar controlar a quantidade de seus bens, como ovelhas e animais em geral, e até esposas, quem diria ! Podemos até pensar que o zero não é tão natural assim, pois quando nada tinha, não havia a necessidade imediata de o interessado registrar nada. Porém, para os matemáticos o zero é importante por ser o elemento neutro da adição. Logo, ele foi incorporado ao conjunto N.

Os números inteiros Z : Este conjunto é $Z = \{\dots,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,\dots\}$. Aqui já não há primeiro nem último elemento. A necessidade deste conjunto numérico surgiu como forma de registrar quantias que representavam dívidas, pois -2 era perfeito para representar que, em uma negociação, restara uma dívida de 2 ovelhas, ou 2 frutas, ou até 2... esposas !

É importante notar que todo número natural é inteiro, então $N \subset Z$.

Os números racionais Q : Em um determinado momento da história da humanidade, bem posterior ao do surgimento do conjunto Z, surgiu a necessidade de um símbolo que representasse pedaços de um número inteiro, como por exemplo a metade de um animal, ou de uma fruta (de uma esposa ?...). Para isso surgiram as frações do tipo $\frac{p}{q}$, como $\frac{3}{4}$ ou $\frac{2}{7}$, e então foram definidos os números racionais Q do seguinte modo :

$$Q = \left\{ \frac{p}{q}, \text{ tal que } p \text{ e } q \in Z \text{ e } q \neq 0 \right\}$$

O símbolo Q vem da palavra Quociente, que é o resultado da divisão de p por q. Como é impossível dividir por zero, temos que ter q não nulo. Podemos ainda acrescentar que todo número racional, quociente entre dois números inteiros, sendo o segundo diferente de zero, é sempre igual a uma dízima periódica. Assim, temos :

$$\frac{2}{3} = 0,666\dots, \frac{3}{4} = 0,750000\dots, \frac{8}{2} = 4,000\dots, \text{etc.}$$

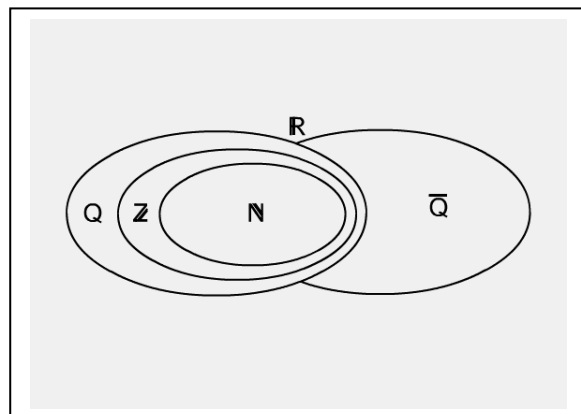
Podemos ver que os números inteiros também são racionais, o último exemplo mostra isso. Logo, $Z \subset Q$.

Os números Irracionais \bar{Q} : Este conjunto surgiu muito depois dos racionais, e seu nome mostra que eles não são racionais. Seu símbolo é \bar{Q} , onde o traço sobre a letra Q significa não Q, e podemos definir este conjunto como sendo formado pelas frações que não são dízimas periódicas, como por exemplo $\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt[3]{7}, \pi, \text{etc.}$

Os números reais R: Se unirmos o conjunto dos números racionais ao conjunto dos irracionais obteremos um novo conjunto que será chamado Conjunto dos Números Reais, cujo símbolo é R.

Então, o conjunto R contém todos os conjuntos anteriores, e podemos desenhar o diagrama ao lado. No diagrama podemos verificar que: $N \subset Z \subset Q \subset R$

e que $\bar{Q} \subset R$ e ainda $Q \cap \bar{Q} = \emptyset$.

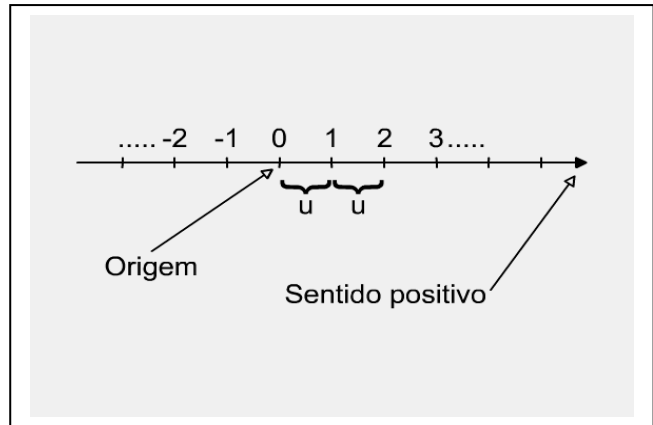


Nesta figura fica nítido que não existe número que seja simultaneamente racional e irracional.

REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA: O conjunto R dos números reais pode ser representado geometricamente (por um desenho) pela reta numérica. Esta é uma reta que possui sentido positivo de percurso, ponto Origem e segmento unitário, conforme a figura. À origem

atribuímos o número zero, e, obedecendo o sentido positivo de percurso (normalmente da esquerda para a direita), a cada marcação do segmento unitário, atribuímos o próximo número inteiro. Os números racionais e irracionais

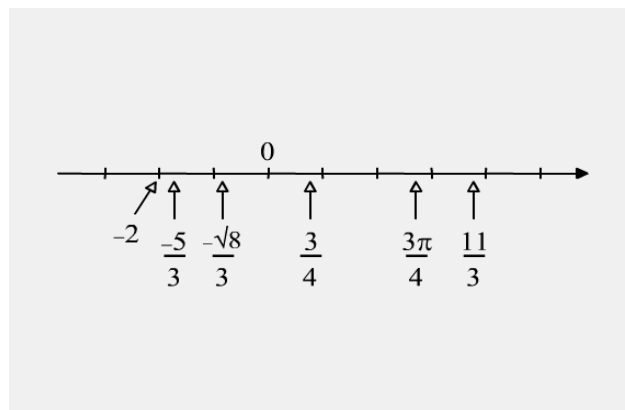
são representados pelos pontos entre os dos números inteiros. Os números negativos estão nos pontos à esquerda da Origem. Quanto mais à direita estiver, maior será o número representado pelo ponto. Outros nomes que as retas numéricas recebem são o de “eixo” e “reta real”.



EXERCÍCIOS :

1) Localize em um eixo os números $-2, -\frac{5}{3}, \frac{3}{4}, \frac{11}{3}, -\frac{\sqrt{8}}{3}, \frac{3\pi}{4}$.

(Resp.:)



2) Escreva os conjuntos a seguir mostrando seus elementos :

- a) $A = \{x \in R \mid 2x+1=6\}$ (Resp.: $A = \{\frac{5}{2}\}$)
- b) $B = \{x \in R \mid x^2-7x = -12\}$ (Resp.: $B = \{3,4\}$)
- c) $C = \{x \in N \mid x^2+10x+16 = 0\}$ (Resp.: $C = \phi$)

CONCEITO :

Intervalos numéricos : Dados dois números reais a e b tais que $a < b$, definimos os seguintes intervalos :

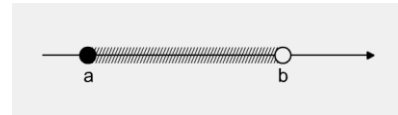
Intervalo fechado : $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$. Representação :



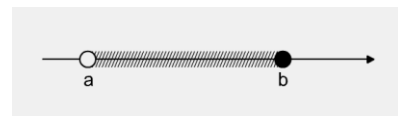
Intervalo aberto : $]a,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$. Representação :



Intervalos mistos : $[a,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$. Representação :



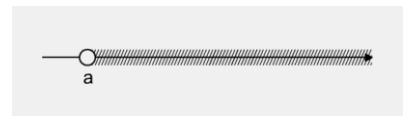
$]a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$. Representação :



Intervalos impróprios : $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$. Representação :



$]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$. Representação :



$] -\infty, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$. Representação :

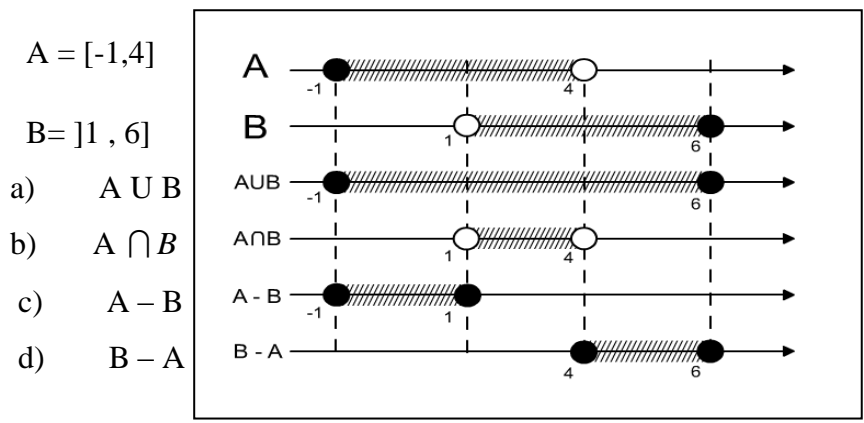


$] -\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$. Representação :



EXEMPLO :

Os intervalos, conjuntos que são, podem sofrer as operações de União, Interseção e diferença que já estão definidas. Assim, como exemplo, se $A = [-1,4[$ e $B =]1,6]$ poderemos obter os intervalos $A \cup B$, $A \cap B$ e $A - B$, do seguinte modo :



Obtemos então : $A \cup B = [-1, 6[$, $A \cap B =]1, 4[$, $A - B = [-1, 1[$, e $B - A = [4, 6]$.

EXERCÍCIOS :

1) Dados os conjuntos $A = [-2, 7]$, $B = \{ x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 6 \}$ e $C = [-1, 6]$ obtenha: $A \cup B$, $B \cup A$, $B - C$, $C \cap A$, $A - \phi$, $C - B$, $(C \cup B) - A$.

(Resp.: $A \cup B = [-2, 7]$, $B \cup A = [-2, 7]$, $B - C = \phi$, $C \cap A = \phi$, $A - \phi = A$, $C - B = [-1, 0] \cup \{6\}$, $(C \cup B) - A = \phi$.)

2) Sabendo que $M = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x \leq 6\}$, $N = [2, 6[$ e $P = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < 5\}$ obtenha os conjuntos :

- a) $M \cup N$ b) $P \cap N$ c) $(M \cap N) - P$ d) $(P \cup N) - (P \cap M)$

(Resp.: a) $[2, 6]$, b) $[2, 5[$, c) $[5, 6[$, d) $[1, 2] \cup [5, 6[$)

APLICAÇÕES :

Quando estudamos o conceito de função, vimos que, dada uma função $f: A \rightarrow B$, o conjunto A era denominado Domínio de f , cujo símbolo era $\text{Dom}(f)$. Suponhamos que f seja uma função de variável x , e anotaremos este fato por $f(x)$. Então, $\text{Dom}(f)$ é o conjunto dos possíveis valores que a variável x pode assumir. Assim, se $x \in \text{Dom}(f)$, então $f(x) \in \text{Im}(f)$.

Vemos que uma função tem sentido quando sabemos quais são os valores que sua variável independente x pode assumir. Então é muito importante conhecermos este conjunto :

Se a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é um polinômio na variável x , fica já acertado que x pode ter qualquer valor real, e então $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$. Se $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$, ocorre o mesmo, e $\text{Dom}(f) = \mathbb{Z}$. Se o mesmo polinômio for uma função $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$, seu domínio será $[a,b]$.

Porém, se $f(x) = \frac{2x-3}{9x^2-4}$, deveremos nos lembrar que o denominador deve ser diferente de zero, logo $9x^2-4 \neq 0$, e obteremos $x \neq \pm \frac{2}{3}$, então $\text{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \pm \frac{2}{3}\}$.

EXEMPLOS : Obtenha o Domínio das funções :

1) $f(x) = \frac{3x+4}{4x-3}$

Como $4x-3 \neq 0$, então $x \neq \frac{3}{4}$. Portanto : $\text{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{3}{4}\} = \mathbb{R} - \{\frac{3}{4}\}$

2) $f(x) = \sqrt{5-4x}$:

Sabemos que o radicando de uma raiz com índice par deve ser maior ou igual a zero, senão a raiz não será um número real. Portanto, $5-4x \geq 0$ e isto nos levará a $x \leq \frac{5}{4}$. Portanto, podemos escrever que $\text{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{5}{4}\}$

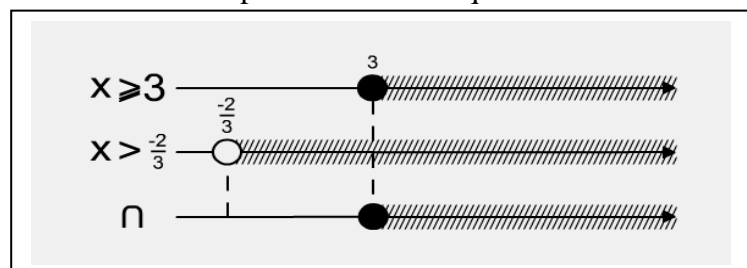
3) $f(x) = \frac{3+\sqrt{2x-6}}{\sqrt{3x+2}}$

Esta função apresenta dois radicais com índice par. Assim, o radicando do numerador deve ser maior ou igual a zero, porém o do denominador somente poderá ser maior que zero :

$2x-6 \geq 0 \rightarrow x \geq 3 \rightarrow$

$3x+2 > 0 \rightarrow x > -\frac{2}{3} \rightarrow$

$\cap \rightarrow$



Portanto, $\text{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\}$

ANOTAÇÃO: O Domínio desta função foi obtido pela interseção de dois intervalos, pois cada um desses intervalos é um domínio referente a cada radicando. Como a função só pode existir caso os dois domínios sejam satisfeitos, então há a necessidade de interceptá-los.

EXERCÍCIOS:

Obtenha o domínio das seguintes funções:

1) $f(x) = \sqrt[3]{x+2}$ (Resp.: \mathbb{R})

2) $f(x) = \sqrt{x+2}$ (Resp.: $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -2\}$)

3) $f(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x}$ (Resp.: $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 4\}$)

4) $f(x) = \frac{2x-4}{x-2}$ (Resp.: $\mathbb{R} - \{2\}$)

5) $f(x) = \frac{3 - \sqrt{2x-6}}{\sqrt{x+4}}$ (Resp.: $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\}$)

6) $f(x) = \frac{5x + \sqrt{x-3}}{\sqrt[6]{3-x}}$ (Resp.: \emptyset)

7) $f(x) = \frac{x}{x-5} + 2\sqrt{2x+3}$ (Resp.: $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -\frac{3}{2} \text{ e } x \neq 5\}$)

CONCEITO:

Função Composta:

Sejam f e g duas funções tais que $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow C$, onde o Domínio de g é o mesmo Contradomínio de f . A função composta de f e g é a função $h : A \rightarrow C$, cujo Domínio é o $\text{Dom}(f)$ e cujo contradomínio é $\text{CDom}(g)$, é dada por $h(x) = f(g(x))$ que será obtida pela composição das funções iniciais, conforme os exemplos:

EXEMPLOS:

1) Sejam $f(x) = x^2 + 6x - 3$ e $g(x) = 2x + 1$. Obtenha a forma algébrica de $f(g(x))$ e de $g(f(x))$.

a) $f(g(x)) = f(2x+1) = (2x+1)^2 + 6 \cdot (2x+1) - 3 = 4x^2 + 4x + 1 + 12x + 6 - 3 = 4x^2 + 16x + 4$

$$b) g(f(x)) = g(x^2 + 6x - 3) = 2 \cdot (x^2 + 6x - 3) + 1 = 2x^2 + 12x - 5$$

2) Se $f(x) = 2x^2 - 10x + 12$ e $g(x) = x - 3$, ache as raízes da equação $f(g(x)) = 0$.

$$f(g(x)) = f(x-3) = 2(x-3)^2 - 10(x-3) + 12 = 2x^2 - 12x + 18 - 10x + 30 + 12 = 2x^2 - 22x + 60 = 0$$

Se resolvermos esta equação, obteremos as raízes 5 e 6.

3) Se $f(x) = 2x + 7$ e $g(x) = 4 - 6x^2$, resolva a equação $f(g(x)) = g(f(x))$

$$f(g(x)) = f(4 - 6x^2) = 2 \cdot (4 - 6x^2) + 7 = 8 - 12x^2 + 7 = 15 - 12x^2$$

$$g(f(x)) = g(2x+7) = 4 - 6(2x+7)^2 = 4 - 24x^2 - 168x - 294 = -24x^2 - 168x - 290$$

Logo, $15 - 12x^2 = -24x^2 - 168x - 290 \rightarrow 12x^2 + 168x + 305 = 0$, cujas raízes são :

$$x = \frac{-168 \pm \sqrt{28224 - 14640}}{24} = \frac{-168 \pm \sqrt{13584}}{24} = \frac{-168 \pm 4\sqrt{283}}{24} = \frac{-42 \pm \sqrt{283}}{6}$$

EXERCÍCIOS :

1) Dadas as funções $f(x) = 3x - 4$ e $g(x) = 2 - 5x$, obtenha: a) $f(g(x))$, b) $g(f(x))$, c) $f(f(x))$, d) $g(g(x))$.

(Resp.: a) $2 - 15x$, b) $22 - 15x$, c) $9x - 16$, d) $25x - 8$)

2) Seja a função $h(x) = 3x + 5$. Obtenha a função $h(h(h(h(x))))$.

(Resp.: $81x + 200$)

3) Um homem muito crente entrou em uma igreja, aproximou-se do altar de São Longuinho, e disse para o santo :

- Oh, meu São Longuinho ! Se dobrares o dinheiro que eu tenho nesta sacola, eu lhe darei R\$ 10,00.

O homem percebe uma movimentação dentro da sacola e, crente que é, retira-se satisfeito e vai ao altar de São Cominho, onde repete o pedido, prometendo R\$ 10,00 para o santo.

O milagre novamente se realiza, e ele corre agora para o altar de São Pertinho. Tudo acontece novamente, pedido e milagre. Ele se afasta de São Pertinho e vai renovar o pedido para São Curtinho, São Lerdinho e São Pergaminho, o milagre se repetindo.

Cansado de tanta oração, o fiel e crente homem se retira da igreja, e aí percebe que a sacola de dinheiro está vazia !

Quanto ele tinha ao entrar na igreja ?

(Resp.:R\$ 9,84)

4) Sejam $f(t) = 4t+1$ e $g(t) = 3t^2+3t - 4$. Obtenha :

a) $t \in R \mid f(g(t)) = 2$; b) $g(f(-1))$; c) $f(g(g(0)))$

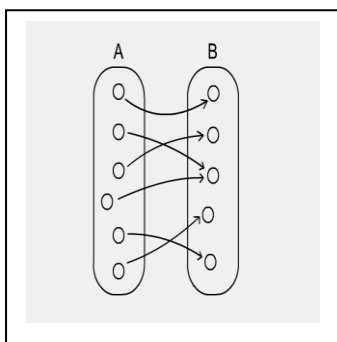
(Resp.: a) $\frac{-3 \pm 2\sqrt{15}}{6}$; b) 14 ; c) 129)

CONCEITO :

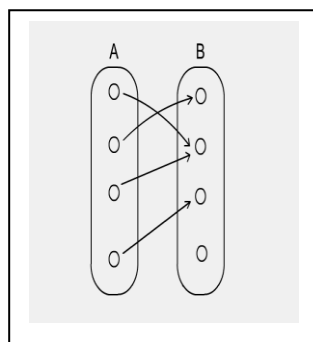
Classificação de uma função :

Toda função $f: A \rightarrow B$, que possui A como Domínio , B como Contra-Domínio e cuja Imagem é, naturalmente, um subconjunto do Contra-Domínio será chamada :

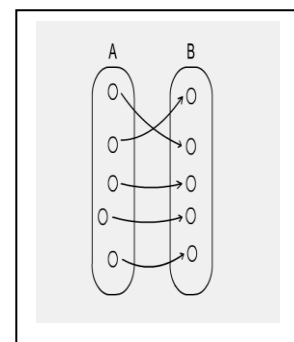
- a) Sobrejetora se e somente se sua Imagem for igual ao seu Contra-Domínio.
- b) Injetora se e só se, para elementos diferentes de A ela associar elementos diferentes de B.
- c) Bijetora se e apenas se ela for sobrejetora e injetora.



Função Sobrejetora



Função Injetora



Função Bijetora

EXEMPLOS :

Dados os conjuntos $A = \{-1,0,1,2,3,4\}$, $B = \{-1,1,3,5,7,9\}$ e $B' = \{0,2,8,18,32\}$. Classifique as seguintes funções e justifique a sua resposta :

a) $f: A \rightarrow B \mid f(x) = 2x+1$

Podemos perceber que $\text{Im}(f) = \{-1,1,3,5,7,9\} = B = \text{CDom}(f)$. Logo $f(x) = 2x+1$ é Sobrejetora. Por outro lado, dados dois elementos diferentes de A, suas imagens são diferentes, e a função é Injetora. Deste modo, $f(x) = 2x+1$, de A em B dados na questão, é Bijetora.

b) $g: A \rightarrow B' \mid g(x) = 2x^2$

Vemos que $\text{Im}(g) = \{0,2,8,18,32\} = B' = \text{CDom}(g)$, o que a faz Sobrejetora. Porém, os elementos -1 e 1 de seu Domínio são associados ao mesmo elemento 2, e, por isso, ela não pode ser classificada como Injetora e nem como Bijetora.

EXERCÍCIOS :

Sejam os conjuntos $A = \{-2,-1,0,1,2,3,4\}$, $B = \{-1,0,3,8,15\}$, $C = \{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$ e $D = \{-4,-2,0,2,4,6,8,10\}$. Classifique as seguintes funções :

a) $f: A \rightarrow B, f(x) = x^2 - 1$; b) $g: A \rightarrow C \mid g(x) = -x+1$; c) $h: A \rightarrow D \mid h(t) = 2t$; d) $j: A \rightarrow B$ tal que $j(r) = r$

(Resp.: a) f é Sobrejetora ; b) g é Bijetora ; c) h é Injetora ; d) Não é função de A em B)

CONCEITO :

Função Inversa :

Observe as funções $f(x) = 2x-2$ e $g(x) = \frac{x}{2} + 1$. Vamos atribuir valores de x em f(x). Ex:

Se $x = 1$, então $f(1) = 2.1-2 = 0$. Se atribuirmos $x = 0$ em g(x), teremos $g(0) = \frac{0}{2} + 1 = 1$, que é o

valor inicial de x. Se $x = 4$, $f(4) = 2.4-2 = 6$. Se calcularmos g(6), teremos : $g(6) = \frac{6}{2} + 1 = 4$, e o

valor inicial de x é novamente obtido. Ou seja, o cálculo obtido por f(x) foi “desfeito” por g(x).

Percebemos que f(x) percorre caminho inverso ao de g(x), e vice-versa, e, por isso, dizemos

que g(x) é a função inversa de f(x), e vice-versa. É importante perceber que ambas são bijetoras.

Ou seja, para que uma função seja inversível é necessário que ela seja bijetora, e o mesmo ocorre com a função inversa obtida. O símbolo que usamos para a função inversa de $f(x)$ é $f^{-1}(x)$.

Se tomarmos $f(x) = x^2$, veremos que $g(x) = \pm\sqrt{x}$, sua possível inversa, não é função. Isto ocorre pelo fato de $f(x)$ não ser bijetora, pois a valores diferentes de x , são associadas imagens iguais de $f(x)$ e ela deixa de ser injetora.

PROCEDIMENTO :

Dada uma função $f(x)$, bijetora, como obter a sua inversa $f^{-1}(x)$?

Para tanto devemos : 1- Trocar a variável x por y e a variável y por x ; 2- Isolar a variável y .

EXEMPLOS :

Obtenha a função inversa de: a) $f(x) = 3x-4$; b) $y = \frac{x-3}{2x-1} (x \neq \frac{1}{2})$

a) $f(x) = 3x-4$

1- Trocar x por y e y por x : $y = 3x - 4 \rightarrow x = 3y - 4$

2- Isolar y : $x + 4 = 3y \rightarrow y = \frac{x+4}{3} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+4}{3}$

Como exemplo de verificação, se $x = 5$ teremos $f(5) = 3 \cdot 5 - 4 = 11$. Se calcularmos agora $f^{-1}(11)$ teremos $f^{-1}(11) = \frac{11+4}{3} = 5$, que é o valor de onde partimos.

b) $y = \frac{x-3}{2x-1} (x \neq \frac{1}{2})$

1- Trocar x por y e y por x : $x = \frac{y-3}{2y-1}$

2- Isolar y : $x \cdot (2y-1) = y-3 \rightarrow 2xy - x - y = -3 \rightarrow y \cdot (2x-1) = x-3 \rightarrow y = \frac{x-3}{2x-1} (x \neq \frac{1}{2})$.

Faça você uma verificação como exemplo.

EXERCÍCIOS :

Inverta as funções : a) $y = x-10$; b) $f(x) = -2x+1$; c) $y = \frac{x-1}{x+1} (x \neq -1)$; d) $f(x) = \sqrt[3]{x+2}$;

e) $f(x) = \frac{2}{x^2} (x \neq 0)$; f) $y = \frac{3x+4}{x-2} (x \neq 2)$

(Resp. : a) $y=x+10$;

$$\text{b) } g(x) = \frac{1-x}{2};$$

$$\text{c) } y = -\frac{x+1}{x-1} \quad (x \neq 1);$$

$$\text{d) } f^{-1}(x) = x^3 - 2;$$

e) Não há inversa;

$$\text{f) } y = \frac{2x+4}{x-3} \quad (x \neq 3)$$
