EAD Nº 8 - ÁLGEBRA

LOGARITMOS

INTRODUÇÃO :

A invenção (ou descoberta) dos logaritmos pelos matemáticos contribuiu decisivamente para o desenvolvimento da Astronomia , da Biologia, da Economia e de outras ciências que desde o século XVI, época do surgimento desta ferramenta algébrica, eram objeto de preocupações de vários pesquisadores. Afinal, estávamos vivendo o Renascimento Europeu, um dos períodos mais férteis do desenvolvimento artístico e científico do mundo ocidental.

O nascimento dos logaritmos ocorreu no momento em que os matemáticos resolviam equações exponenciais. Conforme vimos, a equação $3^x = 81$ é facilmente resolvida se fatorarmos o número 81, e obteremos $3^x = 3^4$. Como nesta igualdade de potências as bases são iguais, então obrigatoriamente teremos x = 4, que de fato é raiz da equação.

Porém, se ao resolvermos uma equação desse tipo chegarmos à igualdade $3^x = 51$, veremos que não existe valor racional de x que a satisfaça. Porém, como $3^3 = 27$ e $3^4 = 81$, não é difícil percebermos que o valor de x que resolve a equação dada é um número irracional situado entre 3 e 4. Para chegarmos a tal valor de x será necessário desenvolvermos uma nova teoria algébrica, assunto deste capítulo, que é a teoria dos logaritmos.

DEFINIÇÃO :

Dados os números reais "a", "b" e "x", tais que $0 < a \neq 1$ e b> 0. dizemos que o logaritmo de b na base a é igual a x, se e somente se a x-ésima potência de a for igual a b.

É claro que qualquer definição algébrica escrita em uma língua, como o Português, o Espanhol , o Inglês, ou qualquer outra, não é favorável à nossa compreensão, simples mortais que somos. Por isso, se utilizarmos a linguagem algébrica, mais direta e mais simples, entenderemos melhor o que foi escrito no parágrafo anterior. Então a definição de logaritmo, cujo símbolo algébrico é log, vem a ser :

$$\text{Dados a, b e x} \in R \mid 0 < a \neq 1 \text{ e } b > 0,\ \log_a b = x \iff a^x = b$$

Se utilizarmos essa definição, poderemos escrever que :

1) $\log_2 16 = 4 \iff 2^4 = 16$
2) $\log_{25} 5 = \dfrac{1}{2} \iff 25^{\frac{1}{2}} = 5$ (lembre-se que $25^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25} = 5$)

OBSERVAÇÃO :

O símbolo "$\iff$", que significa "se e somente se", pode ser lido da esquerda para a direita ou da direita para a esquerda. Assim, é indiferente escrevermos antes dele o logaritmo e depois a potência, como antes a potência e, após, o logaritmo.

EXERCÍCIO :

Complete as frases, utilizando a definição de logaritmo :

1) $\log_4 16 =$ .... $\Leftrightarrow$ .... ; 4) $4^5 =$ .... $\Leftrightarrow$ ....;

2) $\log_3 243 =$ .... $\Leftrightarrow$ ....; 5) $10^3 =$ .... $\Leftrightarrow$ ....;

3) $\log_5 625 =$ .... $\Leftrightarrow$ ....; 6) $0{,}1^2 =$ .... $\Leftrightarrow$ ....

Resp.:(1) $2 \Leftrightarrow 4^2 = 16$; 2) $5 \Leftrightarrow 3^5 = 243$; 3) $4 \Leftrightarrow 5^4 = 625$) ;
4) $1024 \Leftrightarrow \log_4 1024=5$; 5) $1000 \Leftrightarrow \log_{10} 1000=3$; 6) $0{,}01 \Leftrightarrow \log_{0,1} 0{,}01=2$).

NOMENCLATURA :

A sentença que nos define logaritmo de um número real nos mostra duas operações, a logaritmação e a potenciação (qualquer uma delas só existe se a outra existir também) entre as quais há o símbolo $\Leftrightarrow$ cujo significado é o que acabamos de escrever sobre a existência de tais operações. Na verdade, tais operações são inversas, os elementos que as compõem possuem nomes conforme a operação a que estão sendo referidos, e esses nomes são:

$\log_a b = x$		$\Leftrightarrow$		$a^x = b$
logaritmação	$\leftarrow$	operações inversas	$\rightarrow$	potenciação
base	$\leftarrow$	a	$\rightarrow$	base
antilogaritmo	$\leftarrow$	b	$\rightarrow$	potência
logaritmo	$\leftarrow$	x	$\rightarrow$	expoente

O antilogaritmo também pode ser chamado de logaritmando.

Chamamos de Sistema de Logaritmos em uma certa base ao conjunto dos logaritmos de todos os números positivos nesta base. As bases mais importantes são a base dez e a base “e”, onde “e” é um número irracional aproximadamente igual a 2,7l83. Os logaritmos na base dez são representados somente pelo símbolo “log b”, sem especificar a base, e os de base “e” por “lnb”, logaritmo neperiano ou logaritmo natural de b.

EXEMPLO DE CÁLCULO DE UM LOGARITMO :

Vamos agora, utilizando a definição, obter o valor de um logaritmo : $\log_9 243$.

Como não sabemos o valor deste logaritmo, vamos chamá-lo de x, e escreveremos $\log_9 243 = x$.

Se utilizarmos a definição, poderemos afirmar que : $\log_9 243 = x \iff 9^x = 243$.

Obtemos então uma equação exponencial. Basta procurarmos a sua solução :

$$9^x = 243 \Rightarrow (3^2)^x = 3^5 \Rightarrow 3^{2x} = 3^5. \qquad \text{Então} \qquad 2x = 5 \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{5}{2}.$$

Conclusão : $\log_9 243 = \dfrac{5}{2}$

EXERCÍCIOS :

Calcule os seguintes logaritmos (usando a definição):

1) $\log_2 1024$; 2) $\log_{\frac{1}{5}} 625$; 3) $\log_{0,5} 16$; 4) $\log_{2\sqrt{2}} 0,125$;

5) $\log_{0,125} 2\sqrt{2}$; 6) $\log_{16} \sqrt[3]{4}$; 7) $\log_{125} \dfrac{\sqrt{5}}{5}$; 8) $\log_{8\sqrt{2}} 16\sqrt[5]{8}$;

9) $\log 0,0001$; 10) $\log\sqrt{10\sqrt{10}}$.

Resp.:

1) 10 ; 2) -4 ; 3) -4 ; 4) -2 ; 5) $-\frac{1}{2}$	6) $\frac{1}{6}$; 7) $-\frac{1}{6}$; 8) $\frac{46}{35}$; 9) -4 ; 10) 0,75.

CONDIÇÕES DE EXISTÊNCIA DOS LOGARITMOS :

Na definição, vimos que um logaritmo somente existe se os logaritmando for positivo e a base for positiva e diferente de um. Isto significa que não é possível obter um número real que seja igual a log(-2), ou $\log_{-3}$(x+1), ou ainda $\log_1 3x$, pois as condições de existência dos logaritmos não foram obedecidas.

Em resumo, somente existe $\log_a b$ se tivermos $0 < a \neq 1$ e $b > 0$. Veja que o valor do logaritmo pode ser qualquer, negativo, nulo ou positivo.

<u>EXEMPLOS :</u>

Obtenha os valores de x para os quais existem os seguintes logaritmos:

1) $\log_2 (2x-6)$

Pela definição, o antilogaritmo deve ser positivo, ou seja : $2x - 6 > 0$.
Resolvendo a inequação obtida, teremos $x > 3$.
Logo, existe o logaritmo dado para qualquer valor real de x tal que $x > 3$.

2) $\log_{3x-4} 8$

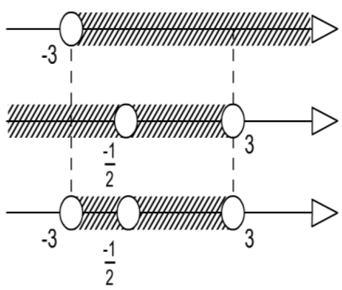
Novamente, pela definição, a base do logaritmo deve ser positiva e diferente de 1, ou ainda $0 < 3x-4 \neq 1 \rightarrow 4 < 3x \neq 5 \rightarrow \frac{4}{3} < x \neq \frac{5}{3}$. Logo, o logaritmo dado existe para valores reais de x tais que $\frac{4}{3} < x \neq \frac{5}{3}$.

3) $\log_{6-2x} (3x + 9)$

A definição nos diz que o antilogaritmo deve ser positivo e a base positiva e diferente de 1. Então isso nos remete à resolução do sistema de inequações simultâneas a seguir. A solução será obtida pela interseção das resoluções das inequações, uma vez que ambas devem ser satisfeitas ao mesmo tempo :

$$\begin{cases} 3x + 9 > 0 \Rightarrow x > -3 \Rightarrow \\ \text{e} \\ 0 < 6-2x \neq 1 \Rightarrow -\frac{1}{2} \neq x < 3 \Rightarrow \end{cases}$$

$$\cap \Rightarrow$$



Assim, o este logaritmo existe para valores reais de x tais que $-3 < x < 3$ e $x \neq -\frac{1}{2}$.

EXERCÍCIOS :

Obtenha as condições de existência dos seguintes logaritmos :

1) log (2x+6); 2) ln(x+1); 3) $\log_5 (x^2 - 2x)$;
4) $\log_{2x-6} 4$; 5) $\log_{-2} (4x+6)$; 6) $\log_{x-4} (x+4)$;
7) $\log_{x+4} (x-4)$; 8) $\log_{2x-5} (x^2 - 6x)$; 9) $\log_{x^2-4} (x^2 - 6x + 8)$.

Resp.:

1) x>-3 ; 2) x > -1 ; 3) x<0 ou x>2 ; 4) $3 < x \neq \frac{7}{2}$; 5) Impossível	6) $4 < x \neq 5$; 7) x>4 ; 8) x>6 ; 9) x<-2 ou x>4.

PROPRIEDADES DOS LOGARITMOS :

A definição nos leva a algumas conseqüências que são as propriedades iniciais dos logaritmos, desde que todos eles existam :

1) O logaritmo de 1, em qualquer base, é igual a zero:

$$\log_a 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a^0 = 1.$$

2) O logaritmo da própria base é igual a 1 :

$$\log_a a = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a^1 = a.$$

3) O logaritmo da potência da base é igual ao expoente :

$$\log_a a^n = n \quad \Leftrightarrow \quad a^n = a^n.$$

4) O logaritmo de b, na base a, é igual ao expoente de a para que se obtenha b :

$$a^{\log_a b} = b \text{, pois } a^x = b \Leftrightarrow \log_a b = x \Rightarrow \text{(por substituição) } a^{\log_a b} = b.$$

EXEMPLOS :

Calcular os seguintes logaritmos :

1) $\log 1 = 0$ (propriedade 1)

2) $\log 10 = 1$ (propriedade 2)

3) $\log 1000 = \log 10^3 = 3$ (propriedade 3)

4) $5^{\log_5 12} = 12$ (propriedade 4)

EXERCÍCIOS :

Obtenha os valores das expressões :

1) $\log_2 4^3$; 2) $\log_3 \sqrt{27}$; 3) $\log_5 25\sqrt{5}$; 4) $\log_{0,5} 64$;

5) $\log 0{,}001$; 6) $\log_6 \dfrac{1}{6}$; 7) $\log_8 2$; 8) $6^{\log 1}$;

9) $\ln e^{52}$; 10) $L = \dfrac{\log 1 + \ln e - \log 10}{1 - \log 0{,}01 + \log \sqrt{10}}$.

Resp.:

1) 6 ;	6) -1 ;
2) $\frac{3}{2}$;	7) $\frac{1}{3}$;
3) $\frac{5}{2}$;	8) 1 ;
4) -6 ;	9) 52 ;
5) -3 ;	10) 0.

PROPRIEDADES OPERATÓRIAS :

Conhecidas as propriedades iniciais, estudemos as propriedades operatórias dos logaritmos. Estas propriedades relacionam os logaritmos às operações fundamentais.

No início deste capítulo foi visto que os logaritmos contribuíram com o desenvolvimento das Ciências, e são as propriedades a seguir que justificam tal utilidade, pelo fato de simplificarem operações, substituindo as potenciações por multiplicações, radiciações por divisões .

1) Logaritmo de um produto :

O logaritmo, em qualquer base, de um produto é igual à soma dos logaritmos dos fatores, na mesma base, desde que os logaritmos envolvidos existam. Ou seja :

$$\log_a (b_1.b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2$$

Demonstração : Se fizermos $\log_a b_1 = x$ e $\log_a b_2 = y$, a definição nos garante que $a^x = b_1$ e que $a^y = b_2$. Então, se multiplicarmos membro a membro estas duas últimas igualdades, teremos : $a^x . a^y = a^{x+y} = b_1 . b_2$, pois, na multiplicação de potências de mesma base, repetimos a base e somamos os expoentes ,e se tivermos uma igualdade, o logaritmo do primeiro membro é igual ao logaritmo do segundo, desde que estejam na mesma base.

Logo, podemos escrever que :

$$\log_a (b_1.b_2) = \log_a a^{x+y} = x + y = \log_a b_1 + \log_a b_2$$

Assim fica demonstrada a propriedade.

2) Logaritmo de um quociente :

O logaritmo, em qualquer base, de um quociente é igual ao logaritmo do numerador menos o logaritmo do denominador, na mesma base, e desde que os logaritmos existam. Isto é :

$$\log_a \frac{b_1}{b_2} = \log_a b_1 - \log_a b_2$$

Demonstração : Analogamente à demonstração da propriedade anterior, como $a^x = b_1$ e $a = b_2$, se fizermos a divisão membro a membro destas igualdades, teremos : $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} = \frac{b_1}{b_2}$, pois na divisão de potências de mesma base, repetimos a base e subtraímos os expoentes e podemos também escrever que $\log_a a^{x-y} = \log_a \frac{b_1}{b_2}$. Portanto, $\log_a \frac{b_1}{b_2} = x - y$, e assim teremos : $\log_a \frac{b_1}{b_2} = \log_a b_1 - \log_a b_2$, e a propriedade fica demonstrada.

3) Logaritmo de uma potência :

O logaritmo, em qualquer base, de uma potência qualquer, é igual ao produto do expoente dessa potência pelo logaritmo da base da potência, na mesma base inicial do logaritmo, desde que os logaritmos existam. Ou seja :

$$\log_a (b^n) = n \cdot \log_a b$$

Demonstração :

$$\log_a (b^n) = \log_a (\underbrace{b.b.b.b........b}_{n\ vezes}) = \underbrace{\log_a b + \log_a b + ...+ \log_a b}_{n\ vezes} = n. \log_a b ,$$

e temos a propriedade demonstrada.

EXEMPLOS DE APLICAÇÃO :

Passemos agora a utilizar tudo o que foi visto sobre logaritmos em questões algébricas e em aplicações práticas deste assunto em outras áreas do conhecimento:

1) Sabendo que $\log_a 2 = m$, $\log_a 3 = p$ e $\log_a 5 = r$, calcule os logaritmos a seguir :

a) $\log_a 30$

Se fatorarmos o número 30, teremos 30 = 2.3.5, então :

$$\log_a 30 = \log_a (2.3.5) = \log_a 2 + \log_a 3 + \log_a 5 = m + p + r$$

b) $\log_a \frac{75}{8}$

Fatoremos os elementos da fração . Teremos então :

$$\log_a \frac{75}{8} = \log_a \frac{3.5^2}{2^3} = \log_a 3 + \log_a 5^2 - \log_a 2^3 =$$

$$= \log_a 3 + 2.\log_a 5 - 3.\log_a 2 = p + 2r - 3m$$

c) $\log_a \sqrt[3]{720}$

Fatoremos o radicando e transformemos o radical em uma potência:

$$\log_a \sqrt[3]{720} = \log_a (2^4.3^2.5)^{\frac{1}{3}} = \log_a (2^{\frac{4}{3}}.3^{\frac{2}{3}}.5^{\frac{1}{3}}) =$$

$$= \log_a 2^{\frac{4}{3}} + \log_a 3^{\frac{2}{3}} + \log_a 5^{\frac{1}{3}} = \frac{4}{3}\log_a 2 + \frac{2}{3}\log_a 3 + \frac{1}{3}\log_a 5 =$$

$$= \frac{4m}{3} + \frac{2p}{3} + \frac{r}{3} = \frac{4m+2p+r}{3}$$

2) Se log 2 = 0,3010 e log 3 = 0,4771 , calcule :

a) log 6

log 6 = log (2.3) = log 2 + log 3 = 0,3010 + 0,4771 = 0, 7781

b) log 5

$\log 5 = \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = 1 - 0{,}3010 = 0{,}6990$

c) $\log \sqrt[5]{\frac{250}{27}}$

$\log \sqrt[5]{\frac{250}{27}} = \log(\frac{2.5^3}{3^3})^{\frac{1}{5}} = \log(\frac{2^{\frac{1}{5}}.5^{\frac{3}{5}}}{3^{\frac{3}{5}}}) = \log 2^{\frac{1}{5}} + \log 5^{\frac{3}{5}} - \log 3^{\frac{3}{5}} =$

$= \frac{1}{5}\log 2 + \frac{3}{5}\log 5 - \frac{3}{5}\log 3 = \frac{0{,}3010}{5} + \frac{3.0{,}6990}{5} - \frac{3.0{,}4771}{5} =$

= 0,0602 + 0,4194 - 0,2863 = 0,1933

EXERCÍCIOS :

1) Se log 2 = 0,301 e log 3 = 0,477, calcular os seguintes logaritmos :

a) log 32 ; b) log 54 ; c) $\log \frac{2}{3}$; d) $\log (\frac{27}{25})^4$;

e) log 3,6 ; f) $\log \sqrt{60}$; g) log 0,2 ; h) $\log \frac{\sqrt[3]{50}}{\sqrt[4]{20}}$;

i) log 0,000003 ; j) log 6.25.

Resp.:

a) 1,505 ; b) 1,732; c) -0,176 ; d) 0,134 ; e) 0,556;	f) 0,889 ; g) -0,699 ; h) 0,242 ; i) -5,523 ; j) 0,796.

2) Sabendo que $\log_a x = m$, obtenha $\log_a \frac{1}{x}$

$\log_a \frac{1}{x}$ = $\log_a x^{-1}$ = -1. $\log_a x$ = - m

Obs. : Dizemos que $\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$ = $\text{colog}_a x$, e assim definimos cologaritmo do número positivo x na base a positiva e diferente de 1.

MUDANÇA DE BASE :

Como afirmamos no início deste assunto, as bases 10 e "e" definem respectivamente os sistemas decimal e natural de logaritmos, e estes são os sistemas mais importantes nas aplicações desta ferramenta. A base 10, como veremos mais à frente, está até tabelada.

Porém, há momentos em que necessitamos obter o logaritmo de um número em uma base diferente destas duas, e, para isso, não é preciso que tenhamos a tabela desta outra base. Se fosse assim, teríamos que possuir infinitas tabelas logarítmicas.

Para conseguirmos o logaritmo de um número em qualquer base, recorreremos à fórmula de mudança de base logarítmica, que é :

$$\log_c b = \frac{\log_a b}{\log_a c}$$

Demonstração :

Suponhamos conhecidos os logaritmos na base "a" e desejamos calcular logaritmos na base "b". Então, temos $\log_a b$ e desejamos conhecer $\log_c b$.

Então escrevemos :

$$\left.\begin{array}{l} \log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b \\ \\ \log_c b = y \Leftrightarrow c^y = b \end{array}\right\} \Rightarrow \quad a^x = c^y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \log_a a^x = \log_a c^y \quad \Rightarrow \quad x.\log_a a = y \log_a c \quad \Rightarrow \quad x = y.\log_a c$$

Se substituirmos x e y pelos seus valores na última igualdade, teremos :

$$\log_a b = \log_c b \;.\; \log_a c \quad \Rightarrow \quad \log_c b = \frac{\log_a b}{\log_a c}$$,como queríamos demonstrar.

EXEMPLO :

Conhecidos log 2 = 0,301 e log 3 = 0,477, calcular :

$\log_{15} \sqrt[5]{144}$

Esta questão pede o logaritmo de um número na base 15, e é dada a base 10. Para isso, devemos utilizar a fórmula de mudança de base :

$$\log_{15} \sqrt[5]{144} = \frac{log\sqrt[5]{144}}{log 15} = \frac{log\sqrt[5]{2^4.3^2}}{log 3.5} = \frac{log 2^{\frac{4}{5}} + log 3^{\frac{2}{5}}}{log 3 + log 5} = \frac{\frac{4}{5} log 2 + \frac{2}{5} log 3}{0,477 + log\frac{10}{2}} =$$

$$= \frac{\frac{4}{5}.0,301 + \frac{2}{5}.0,477}{0,477 + log 10 - log 2} = \frac{0,442}{0,477 + 1 - 0,301} = \frac{0,442}{1,176} = 0,376$$

EXERCÍCIOS :

1) Sabendo que log 2 = 0,301 e log 3 = 0,477, calcular :

a) $\log_2 3$; b) $\log_3 8$; c) $\log_5 36$; d) $\log_{16} \sqrt{128}$;

e) $\log_9 \frac{\sqrt[3]{20}}{81}$.

Resp.:

a) 1,585 ;

b) 1,893 ;

c) 1,449 ;

d) 0,875 ;

e) -2,254

2) Sabendo que $\log_a b = \mathrm{m}$, calcule $\log_b a$, com a e b positivos e diferentes de 1.

Resp.: $\log_b a = \frac{\log_a a}{\log_a b} = \frac{1}{m}$

EQUAÇÕES LOGARÍTMICAS :

Uma equação é chamada logarítmica se sua variável participar de algum antilogaritmo ou de alguma base logarítmica de sua composição.

Para resolvermos uma dessas equações, devemos recorrer à definição dos logaritmos, a alguma de suas propriedades ou à fórmula de mudança de base. Há casos em que é necessário mudar de variável.

EXEMPLOS :

Resolver em R as seguintes equações logarítmicas :

1) $\log_6(2x-5) = 2$

Se utilizarmos a definição de logaritmo, poderemos escrever $2x-5 = 6^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x - 5 = 36 \Rightarrow 2x = 41 \Rightarrow x = \frac{41}{2}$.

Porém, não podemos nos esquecer da condição de existência dos logaritmos que, neste caso é : $2x - 5 > 0 \Rightarrow 2x > 5 \Rightarrow x > \frac{5}{2}$.

Como $\frac{41}{2} > \frac{5}{2}$, e a condição de existência está satisfeita, então o Conjunto Verdade da equação é $V = \{\frac{41}{2}\}$.

2) $\log_x(x+12) = 2$

A definição nos diz que : $x + 12 = x^2 \Rightarrow x^2 - x - 12 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x' = -3, \text{ que não satisfaz a condição de existência de a base ser positiva .} \\ x'' = 4 \text{ , satisfaz a condição de existência da base e do antilogaritmo} \end{cases}$

Portanto, $V = \{4\}$.

3) $\log \log_4 \log_2 (3x-6) = 0$

A resolução desta equação exige a aplicação da definição mais de uma vez :

1ª aplicação : $\log_4 \log_2 (3x-6) = 10^0 \Rightarrow \log_4 \log_2 (3x-6) = 1$

2ª aplicação : $\log_2 (3x-6) = 4^1 \Rightarrow \log_2 (3x-6) = 4$

3ª aplicação : $3x - 6 = 2^4 \Rightarrow 3x - 6 = 16 \Rightarrow 3x = 22 \Rightarrow x = \frac{22}{3}$

Como a condição de existência fica satisfeita, então $V = \{\frac{22}{3}\}$

4) $(\log x)^2 - \log x - 2 = 0$

Se fizermos a mudança de variável log x = y, teremos a seguinte equação de 2º grau nesta variável $y^2 - y - 2 = 0$, cujas raízes são assim obtidas :

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{1-4.1.(-2)}}{2.1} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} y' = 2 \Rightarrow \log x = 2 \Leftrightarrow x = 10^2 = 100 \\ y'' = -1 \Rightarrow \log x = -1 \Leftrightarrow x = 10^{-1} = \dfrac{1}{10} \end{cases}$$

Como os dois valores de x satisfazem a definição, temos : V = { $\frac{1}{10}$,10}

5) $\log_5(x-3) + \log_5(x+2) = 1$

Se aplicarmos a propriedade que diz que a soma de logaritmos de mesma base é igual ao logaritmo do produto dos anti-logaritmos, teremos :

$\log_5(x-3)(x+2) = 1$, e se aplicarmos a definição, obteremos a equação de 2º grau : $(x-3).(x+2) = 5^1 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 5 \Rightarrow x^2 - x - 11 = 0$, cuja solução é :

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+44}}{2.1} = \frac{1 \pm \sqrt{45}}{2} = \frac{1 \pm 3\sqrt{5}}{2} = \begin{cases} x' = \dfrac{1-3\sqrt{5}}{2} & \text{que não satisfaz } x > 3. \\ x'' = \dfrac{1+3\sqrt{5}}{2} & \text{que satisfaz } x > 3. \end{cases}$$

Portanto, V = { $\frac{1+3\sqrt{5}}{2}$ }

6) $3^{x-2} = 16$, sabendo que log 2 = 0,301 e log 3 = 0,477

Se duas expressões são iguais, seus logaritmos numa mesma base também serão. Então, temos : $\log 3^{x-2} = \log 2^4 \Rightarrow (x-2).\ \log 3 = 4.\ \log 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x-2).\ 0{,}477 = 4.\ 0{,}301 \Rightarrow x - 2 = \dfrac{1{,}204}{0{,}477} \Rightarrow x - 2 = 2{,}524 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 4{,}524 \Rightarrow V = \{ 4{,}524 \}$

EXERCÍCIOS :

1) Resolva em R as seguintes equações :

a) $\log(x - 2\sqrt{10}) = \frac{1}{2}$; b) $\ln(x-e) = 1$; c) $\log_{\frac{1}{3}}(x+2) = -1$;

d) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2+4x-5) = -4$; e) $\frac{2-\log x}{3+\log x} = \frac{1}{4}$; f) $8^{\log x} = 1$;

g) $(\log_3 x)^2 - 6\log_3 x + 9 = 0$; h) $\log_{0,5}(\log_9 2x) = 1$; i) log(log(logx)))=0

Resp.:

a) $3\sqrt{10}$; b) 2e ; c) 1; d) -7.3 ; e) 10 ;	f) 1 ; g) 27 ; h) $\frac{3}{2}$; i) 10000000000.

7) Obtenha o Conjunto Solução das equações a seguir :

a) $1 + \log(x + 1) = \log(35 + x^2)$; b) $\log_2(7x+4) = 3 + \log_2(x-1)$;

c) $\log_2(x+2) = 5 - \log_2(x-2)$; d) $\log_4(3^x - 1) + \log_4 3^x = \log_4 6$

e) $\log(x^2+1)^2 = \log(x^2+1) + \log 101$; f) log(x-4) + log(x+4) = 2.log3 ;

g) $4.\,5^{2x-3} = 72$, sabendo que log 2 = 0,3010 e que log 3 = 0, 4771.

Resp.

a) S={ 5 };

b) S={ 12} ;

c) S={ 6} ;

d) S={ 1 };

e) S={ -10, 10};

f) S={ 5} ;

g) S={ 2,3967}.

EXEMPLO :

Resolva o sistema de equações :

$$\begin{cases} x - y = 48 \\ \log_2 x - \log_2 y = 2 \end{cases}$$

Da 1ª equação, temos que x = 48 + y, e a 2ª equação ficará sendo :

$$\log_2(48+y) - \log_2 y = 2 \Rightarrow \log_2 \frac{48+y}{y} = 2 \Rightarrow \frac{48+y}{y} = 2^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 48 + y = 4y \Rightarrow 3y = 48 \Rightarrow y = 16$$

Como $x - y = 48$, então $x - 16 = 48$, logo $x = 64$. Ou seja : V = {(64,16)}.

EXERCÍCIOS :

Resolva os seguintes sistemas :

a) $\begin{cases} x + y = 110 \\ \log x + \log y = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - 4y = 7 \\ \log(x+1) - \log y = 3.\log 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2.\log x + 3.\log y = 7 \\ 4.\log x - \log y = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \log_2 x = 4 - \log_4 y \\ x.y = 8 \end{cases}$

Resp. :

a) (10,100),(100,10) ;

b) (15,2) ;

c) $(\sqrt{10}, 100)$;

d) $(32, \frac{1}{4})$.)

FUNÇÃO LOGARÍTMICA :

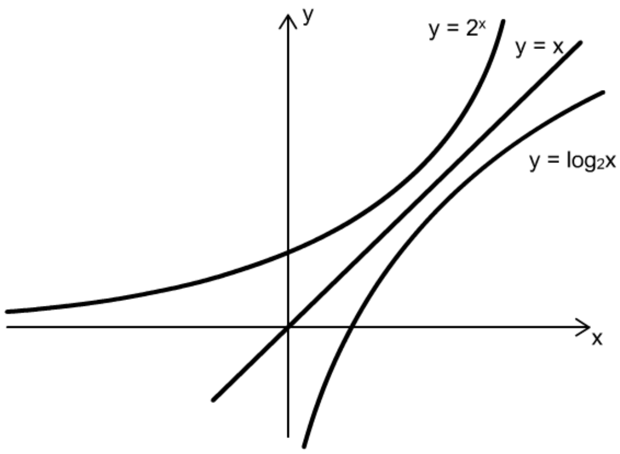
Toda função de variável x que pode ser escrita na forma $y = f(x) = \log_a x$ é chamada função logarítmica de base a positiva e diferente de 1.

De acordo com a definição de logaritmo, devemos ter x positivo.

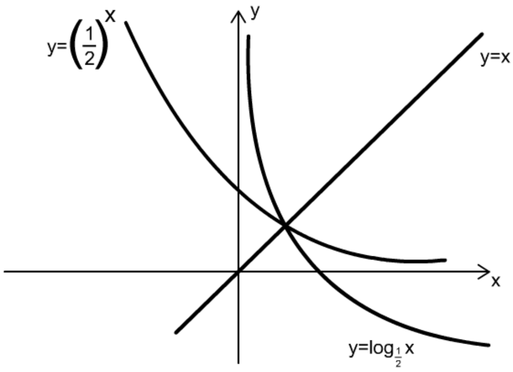
Se aplicarmos a definição de logaritmo de um número à função logarítmica, poderemos escrever : $a^y = x \Leftrightarrow y = \log_a x$, e, como a função exponencial $y = a^x$ é bijetora, ela possui função inversa, e essa inversa é a função logarítmica $y = \log_a x$.

Já sabemos que as representações gráficas de duas funções inversas são curvas simétricas em relação ao gráfico da função identidade f(x) = x, pois ela é igual à sua inversa. Vejamos os seguintes exemplos :

1) $y = \log_2 x$ (simétrica da função $y = 2^x$ em relação à Identidade)



2) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ (simétrica da função $y = (\frac{1}{2})^x$ em relação à Identidade)



Podemos perceber que quando a base é maior que 1, a função logarítmica é crescente, a curva se aproxima cada vez mais do eixo-y, para valores cada vez menores de y, conforme x se aproxima do zero à sua direita, o Domínio da função é R_+^*, e sua Imagem é R. Se a base estiver entre 0 e 1, a função logarítmica é decrescente, a curva se aproxima cada vez mais do eixo-y,para valores cada vez maiores de y, conforme x se aproxima do zero pela direita, o seu Domínio é R_+^* e sua Imagem é R .

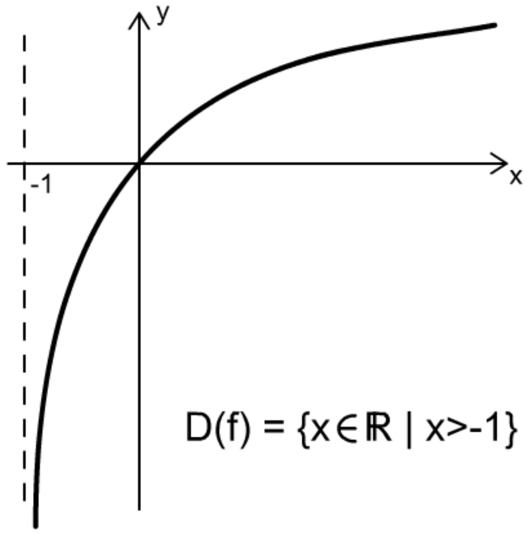
Por outro lado, para que o gráfico seja obtido com maior precisão, é aconselhável que seja montada uma tabela com valores dados convenientemente à variável independente, e os correspondentes valores da função. Veja os exemplos a seguir :

<u>EXEMPLOS :</u>

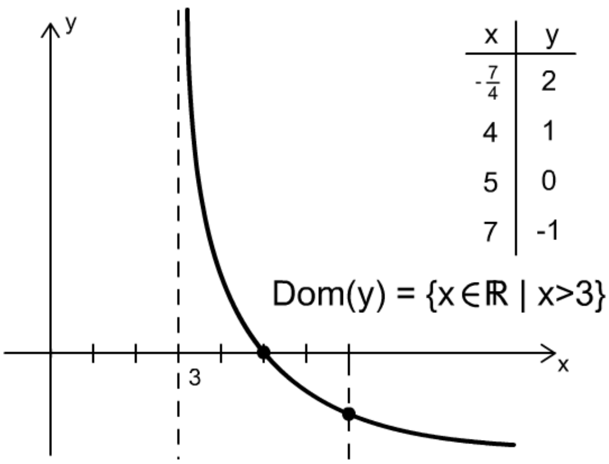
Representar graficamente as seguintes funções e dê seu Domínio :

a) $f(x) = \log_2(x+1)$

x	f(x)
$-\frac{3}{4}$	-2
$-\frac{1}{2}$	-1
0	0
1	1
3	2



b) $y = 1 + \log_{\frac{1}{2}}(x-3)$



x	y
$-\frac{7}{4}$	2
4	1
5	0
7	-1

EXERCÍCIOS :

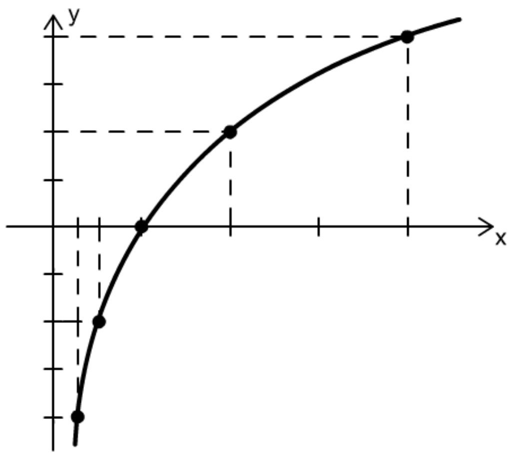
Traçar os gráficos das funções :

a) $y = 2.\log_2 x$; b) $f(x) = -\log_4 (x-3)$;

c) $f(x) = \log \sqrt{x}$; d) $f(x) = \log_{15} 15^{\log_{15} x}$.

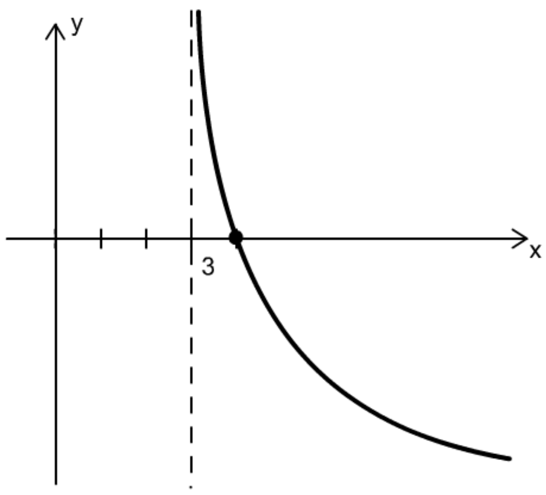
Resp.: a)

x	y
$\frac{1}{2}$	-2
$\frac{1}{4}$	-4
1	**0**
2	**2**
4	4



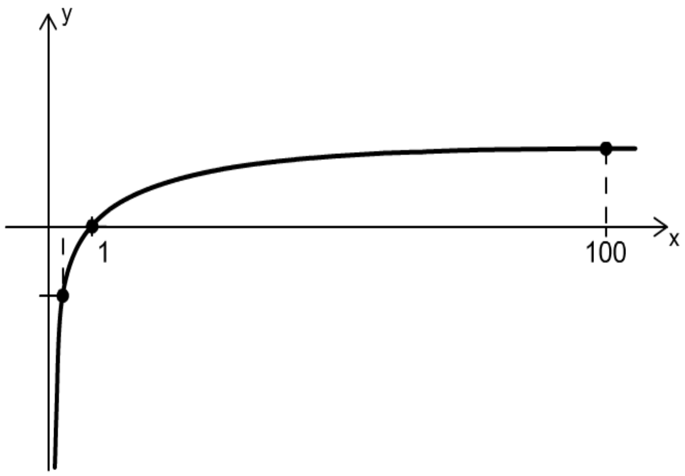
Resp.: b)

x	f(x)
4	0
5	$-\frac{1}{2}$
7	-1
3,5	$\frac{1}{2}$
11	$-\frac{3}{2}$

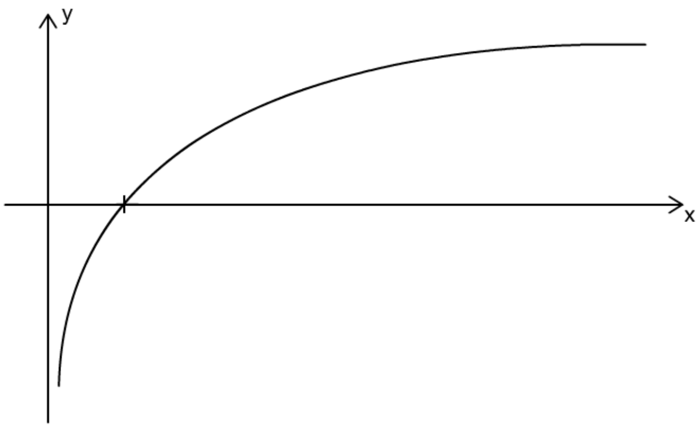


Resp.: c)

x	f(x)
1	0
100	1
$\frac{1}{100}$	-1



Resp.: d)



<u>INEQUAÇÕES LOGARÍTMICAS :</u>

Toda inequação cuja variável pertença a algum logaritmando ou a alguma base é chamada de equação logarítmica.

Para resolver uma destas inequações, além da condição de existência, devemos atentar para a base de logaritmos a que a inequação se refere, e lembrar que se a base é maior que 1 a inequação se mantém para os antilogaritmos, porém, se ela estiver entre 0 e 1, o sentido da inequação se inverte ao compararmos os antilogaritmos.

EXEMPLOS :

Resolva as inequações em R :

a) $\log_4(3x+6) < 2$

A condição de existência nos diz que 3x + 6 > 0 $\Rightarrow$ 3x > -6 $\Rightarrow$ x > -2

Além disso, a inequação pode ser escrita : $\log_4(3x+6) < \log_4 16$

Como a base 4 é maior que 1, o sentido da inequação se mantém para os antilogaritmos, e escrevemos : 3x + 6 < 16 $\Rightarrow$ x + 6 < 16 $\Rightarrow$ x < 10 , e assim teremos uma interseção de intervalos para Conjunto Verdade, e então :

V = { x $\in R$ | -2 < x < 10 }.

b) $\log_{\frac{1}{3}}(4x-10) \leq -2$ $\Rightarrow$ Condição de existência : 4x – 10 > 0 $\Rightarrow$ x > $\frac{5}{2}$, e a inequação pode ser escrita : $\log_{\frac{1}{3}}(4x-10) \leq \log_{\frac{1}{3}} 9$. Como a base $\frac{1}{3}$ se encontra entre 0 e 1, e o sentido da inequação se inverte para os antilogaritmos , escrevemos : 4 x – 10 $\geq$ $(\frac{1}{3})^{-2}$ $\Rightarrow$ 4x – 10 $\geq$ $3^2 \Rightarrow$ 4x – 10 $\geq$ 9 $\Rightarrow$ 4x $\geq$ 19$\Rightarrow$ $\Rightarrow$ x $\geq \frac{19}{4}$. Logo a interseção entre os dois intervalos será o Conjunto Verdade procurado : V = {x$\in R \mid x \geq \frac{19}{4}$}.

EXERCÍCIOS :

Resolva as seguintes inequações em R :

a) ln (2x- 3e) > 1 ;

b) 1 – log(x-1) $\leq$ 0 ;

c) $\log_{12}$ (x – 1) + $\log_{12}$ (x- 2) < 1 ;

d) $\log_{0,5} x$ - $\log_{0,5}(4x-1) < 0$;

e) $\frac{1}{2} < \log_2 6x < 1$;

f) $\log_4$ (x – 3) - $\log_2 x$ $\geq$-2 .

Resp.:

a) x > 2e ; b) x ≥ 11; c) 2<x$\leq$ 5;	d) $\frac{1}{4} < x < \frac{1}{3}$; e) $\frac{\sqrt{2}}{6} < x < \frac{1}{3}$; f) 4<x<12.

SISTEMA DECIMAL DE LOGARITMOS :

Você já deve ter percebido que os logaritmos que mais utilizamos em nossos exercícios foram os de base dez. Isto não foi por acaso. Há muitas calculadoras eletrônicas que disponibilizam os valores destes logaritmos. Porém, muito antes delas, já existiam as tábuas logarítmicas decimais que abordaremos a seguir :

Todo logaritmo decimal de um número real positivo possui característica e mantissa. A característica é sua parte inteira e a mantissa é a parte fracionária decimal.

Então, se log x = 3,2083 a característica do logaritmo é 3, e sua mantissa é 2083.

Para obtermos a característica do logaritmo decimal de um número, devemos escrevê-lo entre as duas potências inteiras de 10 que mais se aproximam dele.

Exemplos :

1) log 27 $\Rightarrow$ log 10 < log 27 < log 100 $\Rightarrow$ 1 < log 27 < 2 $\Rightarrow$ log 27 = =
1 + 0,--- $\Rightarrow característica = 1;$

2) log 6 $\Rightarrow$ log 1<log6<log 10 $\Rightarrow$ 0<log 6< 1 $\Rightarrow$ log 6 = 0+0,--- $\Rightarrow$
$\Rightarrow característica = 0;$

3) log 0,02 $\Rightarrow$ log 0,01 < log 0,02 < log 0,1 $\Rightarrow$ -2 < log 0,02 < -1 $\Rightarrow$ log 0,02 = -2 + 0,-
$\Rightarrow$ característica = -2;

4) log 348,44 $\Rightarrow$ log 100 < log 348,44 < lo

g 1000 $\Rightarrow$ 2 < log 348,44 <3 $\Rightarrow$ log 348,44=
= 2 + 0,--- $\Rightarrow característica = 2;$

5) log 0,00087 $\Rightarrow$ log 0,0001 < log 0,00087 < log 0,001 $\Rightarrow$ -4 <log 0,00087 < -3 $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ log 0,00087 = -4 + 0,--- $\Rightarrow$ característica = -4.

Podemos dizer que, o logaritmo de um número maior que 1 tem característica igual ao número de algarismos da parte inteira “menos” 1, e a do logaritmo de um número entre 0 e 1 é um número negativo cujo módulo é o número de zeros que antecedem o primeiro algarismo significativo do número dado.

A mantissa, sempre positiva, é fornecida pela tabela apresentada na próxima página. Nela constam as mantissas, com 4 casas após a vírgula ,dos logaritmos decimais dos números de zero a cem:

TABELA DE MANTISSAS

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0000	0414	0792	1139	1461	1761	2041	2304	2553	2788
2	3010	3222	3424	3617	3802	3979	4150	4314	4472	4624
3	4771	4914	5051	5185	5315	5441	5563	5682	5798	5911
4	6021	6128	6232	6335	6435	6532	6628	6721	6812	6902
5	6990	7076	7160	7243	7324	7404	7482	7559	7634	7709
6	7782	7853	7924	7993	8062	8129	8195	8261	8325	8388
7	8451	8513	8573	8633	8692	8751	8808	8865	8921	8976
8	9031	9085	9138	9191	9243	9294	9345	9395	9445	9494
9	9542	9590	9638	9685	9731	9777	9823	9868	9912	9956
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981

TABELA DE MANTISSAS

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996

EXEMPLOS :

1) Calcular os logaritmos seguintes, usando a tábua :

a) log 14 = (característica :1 , mantissa : 0,1461) = 1+ 0,1461= 1,1461
b) log 140 = (característica : 2, mantissa : 0,1461) = 2 + 0,1461= 2,1461
c) log 1,4 = (característica : 0, mantissa : 0,1461) = 0 + 0,1461 = 0,1461
d) log 0,14 = (característica : -1, mantissa : 0,1461)= -1 + 0,1461 = -0,8539
e) log 0,0014 = (característica : -3, mantissa : 0,1461) = -3 + 1461 = -2,8539
f) log 76,3 = (característica : 1, mantissa : 0,8825) = 1 + 0,8825 = 1,8825
g) log 982 = (característica : 2, mantissa : 0,9921) = 2 + 0,9921 = 2,9921

2) Calcular as expressões com o uso da tábua de logaritmos :

a) $\sqrt[5]{12{,}8^3}$

Façamos $x = \sqrt[5]{12{,}8^3} \Rightarrow \log x = \log\sqrt[5]{12{,}8^3} = \log 12{,}8^{\frac{3}{5}} = \frac{3}{5}\log 12{,}8 = 0{,}6.\ 1{,}1072$

$\Rightarrow \log x = 0{,}6643$ (característica:0, mantissa :6643) $\Rightarrow x = 4{,}62$

b) $\dfrac{\sqrt[3]{0{,}347^2}}{2{,}54}$

Seja $x = \dfrac{\sqrt[3]{0{,}347^2}}{2{,}54} \Rightarrow \log x = \log \dfrac{\sqrt[3]{0{,}347^2}}{2{,}54} = \log 0{,}347^{\frac{2}{3}} - \log 2{,}54 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log x = \frac{2}{3}\log 0{,}347 - \log 2{,}54 = 0{,}6667.\ (-1+0{,}5403) - 0{,}4048 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log x = 0{,}6667.\ (-0{,}4597) - 0{,}4048 = -0{,}7113 -1 +1 = -1 + 0{,}2887$

(característica: -1, mantissa : 0,2887) $\Rightarrow x \approx 0{,}194$

EXERCÍCIOS :

Calcular o valor das seguintes expressões numéricas :

a) $12{,}437^{3{,}48}$; b) $\sqrt[3]{0{,}0243}$; c) $\dfrac{2{,}46^{5{,}8}}{1{,}27^{2{,}6}}$; d) $\sqrt[4]{\dfrac{3\sqrt[3]{8{,}3}}{\sqrt[5]{0{,}84}}}$; e) $\sqrt{2}.\ \sqrt[3]{3}.\sqrt[4]{10}$.

Resp.: a) 6450,753 ;

b) 0, 2896;

c) 99,438 ;

d) 0,6567 ;

e) 1,5836.

APLICAÇÕES DOS LOGARITMOS :

No início deste texto vimos que a ferramenta algébrica dos logaritmos tem grande utilidade em vários ramos da Ciência. Apresentaremos a seguir algumas de suas aplicações :

1) A quantidade de álcool residual no sangue de uma pessoa, decorridas n horas após a ingestão de_cachaça, é obtida pela função pela função $f(n) = 2.(\frac{1}{2})^n$. Qual será o tempo que um motorista deverá esperar para dirigir seu veículo, se o limite máximo permitido de álcool no sangue para alguém estar apto para sentar-se ao volante é 0,8 gramas por litro ?

Como $f(n) = 0,8 \Rightarrow 0,8 = 2.\ 0,5^n \Rightarrow 0,4 = 0,5^n \Rightarrow \log 0,4 = \log 0,5^n \Rightarrow$

$\Rightarrow \log 0,4 = n.\log 0,5 \Rightarrow -1 + 0,6021 = n.(-1 + 0,6990) \Rightarrow -0,3979 = -0,3010.\ n \Rightarrow$

$\Rightarrow n = \frac{0,3979}{0,301}$ = 1,3220 horas, ou aproximadamente 1 hora e 20 minutos.

2) A igualdade que permite calcular o total de uma única aplicação de dinheiro, decorrido o tempo n meses, a uma taxa mensal é dada por $T(n) = C.(1 + i)^n$, onde i é igual à taxa escrita na forma decimal e C é o valor do Capital inicial. Então, em quantos meses, o capital de R$ 28 000,00 gera o total de R$ 37 684,30, à taxa mensal de 2 % ?

$T(n) = 37\ 684,30 \Rightarrow 37\ 684,30 = 28\ 000\ .\ 1,02^n \Rightarrow 1,3459 = 1,02^n \Rightarrow$

$\Rightarrow \log 1,3459 = \log 1,02^n \Rightarrow n.\log 1,02 = \log 1,3459 \Rightarrow n.0,0086 = 0,1288 \Rightarrow$

$\Rightarrow n = \frac{0,1288}{0,0086} \approx 15$ meses.

EXERCÍCIOS :

a) Calcule o juro da aplicação de R$ 34 500,00 aplicados à taxa de 1,2% ao mês durante 3,5 anos.

b) Ache o total da aplicação (capital + juros), ou Montante, se o capital aplicado foi igual a R$ 126 000,00, durante 10 bimestres à taxa mensal de 0,85% .

b) Certa substância radioativa se desintegra conforme a função M(t) = $M_0 .9,5^{-wt}$, onde t é o tempo em anos, w é uma constante para cada substância e M(t) é a massa residual após o tempo t. Se tivermos M(20) = 600g e M_o = 1000g , calcule o valor de w.

c) Em Físico-Química define-se pH de uma solução do seguinte modo : Dada uma solução qualquer temos pH = log $(\frac{1}{H^+})$, onde pH significa a concentração de Hidrogênio em íons-grama por litro da solução. Então, se $H^+ = 1,2.\ 10^{-8}$, calcule seu pH.

d) A intensidade de um terremoto costuma ser medida na Escala Richter. O número obtido deve estar entre 0 e 9 e é calculado com a aplicação da seguinte fórmula:

$$I = \frac{2}{3}\log\frac{E}{E_0},$$

onde I é a intensidade do terremoto, E é a energia liberada pelo terremoto em kWh e E_0 é sempre igual a 7. $10^{-3}kwh$.

1) Calcule a energia liberada no terremoto cuja intensidade na Escala Richter é 7,5.
2) Se a intensidade do terremoto for acrescida de 1 unidade por quanto a Energia liberada ficará multiplicada ?

Resp.:

a) R$ 22 437,79 ;

b) R$ 149 241,15 ;

c) 7,971 ;

d) 1: $7.10^9 kwh$; 2:10 $\sqrt{10}$).