MATRIZES

CONCEITO:

Um conjunto de elementos algébricos dispostos em uma tabela retangular com linhas e colunas é uma Matriz. A seguir, vemos um exemplo de Matriz de 3 linhas e 4 colunas, e que representaremos por M_{3X4}:

$$M_{3X4} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & 8 \\ 4 & 8 & 0 & -2 \\ 3 & -5 & -7 & 9 \end{bmatrix}$$

Os elementos que formam a Matriz devem ser escritos entre parênteses ou entre colchetes.

Podemos representar a Matriz por seus elementos, que serão simbolizados por "a_{ij}", onde o índice i, que é o primeiro, representa a linha e j, o segundo, a coluna onde se encontra o elemento. Então, na Matriz M , que serve de exemplo, o elemento a 23 , que se encontra na segunda linha e na terceira coluna , é igual a zero. Do mesmo modo, a12 = -3, e o elemento a 34 = 9. É conveniente sempre nos lembrarmos que a disposição dos elementos em uma Matriz é a seguinte:

$$M_{nxp} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{bmatrix}$$

EXEMPLOS:

Muitas vezes precisamos montar uma Matriz a partir de uma lei geral. Analise os exemplos a seguir:

1) Montar a Matriz $A_{2X5} = \left(a_{ij}\right)_{2X5}$ tal que: $a_{ij} = \begin{cases} 2i - j, se\ i > j \\ i + j, se\ i = j \\ 3i - 2j, se\ i < j \end{cases}$

Resolução: Esta Matriz possui 2 linhas e 5 colunas, e podemos montá-la do modo a seguir:

Assim, a Matriz solicitada será $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 & -5 & -7 \\ 3 & 4 & 0 & -2 & -4 \end{bmatrix}$

2) Obtenha a soma dos quadrados dos elementos da terceira coluna da Matriz B_{5X7} cujos elementos são dados pelas expressões: $b_{ij} = i^2 - 2j$, se $i < j$; $b_{ij} = 2^i - 3j$, se $i = j$; $b_{ij} = -4$. se $i > j$.

Resolução: Os elementos da terceira coluna, somados, formam a seguinte igualdade:

$S = b_{13} + b_{23} + b_{33} + b_{43} + b_{53} + b_{63} + b_{73}$

$S = (1^2 - 2.3) + (2^2 - 2.3) + (2^3 - 3.3) + (-4) + (-4) + (-4) + (-4)$

$S = -5 = (-2) + (-1) + (-4) + (-4) + (-4) + (-4) = -24$

3) Escreva a Matriz T_{3X3} cujos elementos são: $t_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot (i + j)$.

Resolução: Esta Matriz possui 3 linhas e 3 colunas cujos elementos são assim obtidos:

$$\begin{bmatrix} t_{11} = (-1)^{1+1}.(1+1) & t_{12} = (-1)^{1+2}.(1+2) & t_{13} = (-1)^{1+3}.(1+3) \\ t_{21} = (-1)^{2+1}.(2+1) & t_{22} = (-1)^{2+2}.(2+2) & t_{23} = (-1)^{2+3}.(2+3) \\ t_{31} = (-1)^{3+1}.(3+1) & t_{32} = (-1)^{3+2}.(3+2) & t_{33} = (-1)^{3+3}.(3+3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 4 & -5 \\ 4 & -5 & 6 \end{bmatrix}$$

EXERCÍCIOS:

Monte as Matrizes de acordo com as suas leis de formação:

1) Matriz $A_{2X3} = \left(a_{ij}\right)_{2X3}$, tal que $a_{ij} = 2i^2 - 3j + 1$.

Resposta: $A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -6 \\ 6 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

2) Matriz $M_{3X4} = \left(m_{ij}\right)$, de modo que $m_{ij} = \begin{cases} 2i + 4j, se\ i > j \\ i + 3, se\ i = j \\ 4i - j, se\ i < j \end{cases}$

Resposta: $M = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 0 \\ 8 & 5 & 5 & 4 \\ 10 & 14 & 6 & 8 \end{bmatrix}$

3) Matriz $A_{5X1} = \left(a_{ij}\right)$, onde $a_{ij} = (-2)^{i-j} \cdot i$, se $i \leq j$, e $a_{ij} = (-3)^{i+j} \cdot j$ se $i > j$.

Resposta: $A = \begin{bmatrix} 1 \\ -27 \\ 81 \\ -243 \\ 729 \end{bmatrix}$

TIPO DE UMA MATRIZ: Dizemos que uma Matriz M_{mxn} possui tipo mxn . Assim, no exercício 1, temos uma Matriz de tipo 2x3 , que devemos ler 2 por 3. A Matriz do exercício 2 é de tipo 2x4 , e a Matriz Coluna do exercício 3 possui tipo 5x1.

MATRIZES ESPECIAIS:

Existem Matrizes que possuem propriedades que as tornam especiais. Entre elas destacamos:

MATRIZ LINHA: É toda Matriz M_{1Xn}. Isto é, ela possui só uma linha e n colunas.

MATRIZ COLUNA: É toda Matriz M_{mX1}. Ou seja, ela possui m linhas e apenas uma coluna.

O exercício nº 3 da página anterior nos mostra uma Matriz Coluna. Como exemplo de Matriz Linha podemos escrever: $L_{1X6=}\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & \sqrt{5} & 8 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$

MATRIZ QUADRADA : É toda Matriz M_{mxn}. Isto é, ela possui o número de linhas igual ao de colunas.

Ordem de uma Matriz quadrada: Dada uma Matriz quadrada de tipo n x n, dizemos que ela possui ordem n. Então, uma Matriz Quadrada de tipo 4x4 possui ordem 4, ou ela é de 4ª ordem.

Numa Matriz Quadrada, os elementos a_{ij}, onde i = j, formam sua Diagonal Principal, e aqueles em que i + j = n + 1, onde n é a ordem da Matriz, formam a sua Diagonal Secundária. Observe a figura:

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

Os elementos que formam a diagonal principal são: $a_{11}, a_{22}, a_{33}\ e\ a_{44}$. Neles, $i = j$.

Os elementos que pertencem à diagonal secundária são: $a_{41}, a_{32}, a_{23}\ e\ a_{14}$. Nestes, $i + j = n + 1$.

As Matrizes Quadradas serão muito importantes logo mais, quando estudarmos os Determinantes.

MATRIZ TRIANGULAR: É toda Matriz Quadrada onde os elementos acima ou abaixo da Diagonal Principal são nulos.

Exemplo: $T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 5 & 0 \\ -3 & 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

MATRIZ DIAGONAL: É uma Matriz Quadrada onde os elementos que não pertencem à Diagonal Principal são todos nulos, e pelo menos um dos que pertencem a ela não é nulo.

Exemplo:

$$D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Podemos perceber que uma Matriz Diagonal é um caso particular de Matriz Triangular.

MATRIZ IDENTIDADE: É toda Matriz Diagonal, cujos elementos da Diagonal Principal são iguais a 1.

Simbolizamos por I_n a Matriz Identidade de ordem n. Assim, $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e assim por diante.

MATRIZ TRANSPOSTA: Dada uma Matriz A_{mXn}, sua Matriz Transposta, que será representada por A_{mXn}^t, é a que obtemos pela troca ordenada de linhas por colunas da Matriz dada.

Assim, a primeira linha de A_{mXn} será a primeira coluna de A_{mXn}^t, a segunda linha de A_{mXn} passará a ser a segunda coluna de A_{mXn}^t.

Exemplo:

Se $M_{3X4} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 5 & 7 \\ -3 & 0 & 2 & 2 \\ -7 & 5 & 8 & 6 \end{bmatrix}$, então $M_{4X3}^t = \begin{bmatrix} 4 & -3 & -7 \\ 1 & 0 & 5 \\ 5 & 2 & 8 \\ 7 & 2 & 6 \end{bmatrix}$

Podemos perceber facilmente que, se transpusermos duas vezes uma Matriz, obteremos a mesma Matriz.

Em simbologia algébrica: $A^{t^t} = A$.

IGUALDADE DE MATRIZES:

Duas Matrizes de mesmo tipo serão iguais se, e somente se seus elementos correspondentes forem respectivamente iguais.

Exemplos de aplicação: Obtenha os valores das incógnitas x e y para que as matrizes A e B sejam iguais:

1) $A = \begin{bmatrix} 5 & x+3 \\ 3-y & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 2x-5 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}$

Resolução:

Conforme a definição que acabamos de ler, se A = B, seus elementos correspondentes são respectivamente iguais. Se igualarmos tais elementos correspondentes, teremos:

$$\begin{cases} a_{11} = b_{11} \Rightarrow 5 = 5 \\ a_{12} = b_{12} \Rightarrow x+3 = 2x-5 \Rightarrow x = 8 \\ a_{21} = b_{21} \Rightarrow 3-y = -6 \Rightarrow y = 9 \\ a_{22} = b_{22} \Rightarrow 4 = 4 \end{cases}$$

Conclusão: $x = 8$ e $y = 9$

2) $A = \begin{bmatrix} -1 & x+2y \\ x-y & -6 \end{bmatrix} \; B = \begin{bmatrix} -1 & x+8 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$

Resolução:

Podemos perceber que $a_{22} \neq b_{22}$. Logo, conforme a definição, estas duas matrizes são diferentes para quaisquer valores de x e y, e, assim, o problema não tem solução.

4) Encontre os valores das incógnitas , sabendo que $A^t = B$.

$A = \begin{bmatrix} x+4 & y-2 & 0 \\ 5 & x+z & \frac{x}{z} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 10 & x-1 \\ 4-y & 8 \\ z-2 & y \end{bmatrix}$

Resolução: Devemos obter a transposta da Matriz A e igualá-la à Matriz B, para em seguida resolvemos o sistema formado pelas equações decorrentes dessa igualdade:

$$A^t = \begin{bmatrix} x+4 & 5 \\ y-2 & x+z \\ 0 & \frac{x}{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & x-1 \\ 4-y & 8 \\ z-2 & y \end{bmatrix} = B \Rightarrow \begin{cases} x+4=10 \\ 5=x-1 \\ y-2=4-y \\ x+z=8 \\ 0=z-2 \\ \frac{x}{z}=y \end{cases}$$

A solução deste sistema nos traz : $x = 6, y = 3$ e $z = 2$

EXERCÍCIOS:

1) Obtenha os valores de x, y e z de modo que sejam verdadeiras as igualdades a seguir:

a) $\begin{bmatrix} x+2 & y-1 & 2z-3 \\ 3 & x+y & 1+z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 5 \\ 3 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

Resp.: ($x = 3,\ y = 0,\ z = 4$)

b) $\begin{bmatrix} x+y & 17 \\ x-y & y+z \\ x+z & -4 \\ x-z & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & x+y+z \\ -3 & 12 \\ 9 & z-y \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Resp.: ($x = 5,\ y = 8,\ z = 4$)

c) $\begin{bmatrix} 9 & 2^y \\ -z & x^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2 & \frac{1}{16} \\ \log_3 \frac{1}{81} & -27 \end{bmatrix}$

Resp.: ($x = -3,\ y = -4,\ z = 4$)

d) $\begin{bmatrix} 2^x & y^2 \\ \log_2 32 & |z| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & 25 \\ y & 9 \end{bmatrix}$

Resp.: ($x = -3, y = 5, z = \pm 9$)

OPERAÇÕES COM MATRIZES:

ADIÇÃO DE MATRIZES:

A adição de duas Matrizes somente pode ser realizada se elas forem de mesmo tipo, e a sua soma é uma outra Matriz desse tipo e cujos elementos são tais que cada um deles é igual à soma dos elementos das Matrizes iniciais que estejam na sua posição.

Assim, se $A = \begin{bmatrix} 12 & 23 & 44 \\ 32 & -16 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 35 & 8 & -24 \\ 16 & -44 & 11 \end{bmatrix}$, então a sua soma $A + B$ será dada por $A + B = \begin{bmatrix} 12+35 & 23+8 & 44-24 \\ 32+16 & -16-44 & 0+11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 47 & 31 & 20 \\ 48 & -60 & 11 \end{bmatrix}$

Matrizes $A = (a_{ij})_{mxn}$ e $B = (b_{ij})_{mxn}$, a sua soma será obtida do seguinte modo: $A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$, onde $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$.

MATRIZ NULA: Uma Matriz é Nula se todos os seus elementos forem iguais a zero.

MATRIZES OPOSTAS: Duas Matrizes são denominadas opostas se a sua soma for igual a uma Matriz Nula.

Exemplo: Se efetuarmos a adição das Matrizes $A = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 0 & -2 \\ -6 & 1 & 4 & -4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -3 & 5 & 0 & 2 \\ 6 & -1 & -4 & 4 \end{bmatrix}$, obteremos $A + B = \begin{bmatrix} 3-3 & -5+5 & 0+0 & -2+2 \\ -6+6 & 1-1 & 4-4 & -4+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ que é uma Matriz Nula, logo as Matrizes A e B são opostas, ou B é Matriz oposta de A, ou ainda A é oposta de B, e representamos este do seguinte modo : Se A e B são Matrizes opostas, escrevemos $A = -B$, ou $B = -A$, ou $A + B = 0$, onde 0 representa a Matriz Nula.

SUBTRAÇÃO DE MATRIZES:

Dadas duas Matrizes A e B, a subtração $A - B$ pode ser obtida pela adição da Matriz A com a Matriz $-B$, Oposta de B : $A - B = A + (-B)$.

Exemplo: Sejam as Matrizes $A = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 4 & 0 \\ 6 & 1 & -2 & 5 \\ -5 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 6 & 6 & 1 & 2 \\ -9 & -1 & 2 & 7 \\ 0 & -4 & 4 & 3 \end{bmatrix}$, teremos que

$$A - B = A + (-B) = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 4 & 0 \\ 6 & 1 & -2 & 5 \\ -5 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & -6 & -1 & -2 \\ 9 & 1 & -2 & -7 \\ 0 & 4 & -4 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & -2 & 3 & -2 \\ 15 & 2 & -4 & -2 \\ -5 & 4 & -4 & 4 \end{bmatrix}$$

MULTIPLICAÇÃO DE UM NÚMERO REAL POR UMA MATRIZ

Se efetuarmos a multiplicação de um número por uma Matriz, obteremos uma nova Matriz de mesmo tipo da Matriz inicial, e cujos elementos são iguais aos produtos daquele número real por cada um dos elementos daquela Matriz.

Veja o exemplo a seguir:

O produto do número -4 pela Matriz $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 & -2 & 6 \\ 6 & 0 & 1 & -1 & 5 \\ 2 & -2 & 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ é

$$\begin{bmatrix} -4.3 & -4.1 & -4.0 & -4.(-2) & -4.6 \\ -4.6 & -4.0 & -4.1 & -4.(-1) & -4.5 \\ -4.2 & -4.(-2) & -4.3 & -4.0 & -4.4 \end{bmatrix}$$

Logo, a Matriz $-4.M$ é igual a $\begin{bmatrix} 12 & -4 & 0 & 8 & -24 \\ -24 & 0 & -4 & 4 & -20 \\ -8 & 8 & -12 & 0 & -16 \end{bmatrix}$

Exemplo: Obtenha a Matriz $M = -3.A\ 2.B - C$, sabendo que $A = (1 \quad -3 \quad 0 \quad 4 \quad -2)$, $B = (-1 \quad 4 \quad 6 \quad 6 \quad 9)$ e $C = (4 \quad 4 \quad 8 \quad 8 \quad 3)$.

Solução:

$M = -3.A + 2.B - C = -3.(1 \quad -3 \quad 0 \quad 4 \quad -2) + 2.(-1 \quad 4 \quad 6 \quad 6 \quad 9) - (4 \quad 4 \quad 8 \quad 8 \quad 3)$.

Logo, teremos: $M = (-3 \quad 9 \quad 0 \quad -12 \quad 6) + (-2 \quad 8 \quad 12 \quad 12 \quad 18) + (-4 \quad -4 \quad -8 \quad -8 \quad -3)$ e assim obteremos $M = (-3-2-4 \quad 9+8-4 \quad 0+12-8 \quad -12+12-8 \quad 6+18-3) = (-9 \quad 13 \quad 4 \quad -8 \quad 21)$.

Exemplo: Dadas as Matrizes $A^t = (20 \quad 12 \quad 5)$, $B^t = 2 \cdot (4 \quad 1 \quad 5)$ e $C^t = (-10 \quad 0 \quad 8)$, obtenha a Matriz M de modo que $2.(A + M) + C = B$.

Solução:

$$2.(A + M) + C = B \Rightarrow 2.\mathrm{A} + 2.\mathrm{M} = \mathrm{B} - \mathrm{C} \Rightarrow 2.\mathrm{M} = \mathrm{B} - \mathrm{C} - 2.\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{M} = \frac{1}{2} \cdot B - \frac{1}{2} \cdot C - A = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 10 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} -10 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 20 \\ 12 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 20 \\ 12 \\ 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathrm{M} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -20 \\ -12 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ -11 \\ -4 \end{bmatrix}$$

EXERCÍCIOS:

1) Calcular os valores desconhecidos na equação matricial (que envolve matrizes):

$$\begin{bmatrix} x-5 & 6 \\ 2+z & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & y+4 \\ z-3 & 4-w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 12 \\ 1 & w-4 \end{bmatrix}$$

Resp.: $(x = 1, y = 2, z = 1, w = 9)$

2) Calcule as variáveis da seguinte equação:

$$\begin{bmatrix} x^2 & -y^2 \\ x^2 & y^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 9 \\ 2x & -y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -7 \\ 8 & 12 \end{bmatrix}$$

Resp.: $(x = 2, \ y = 4)$

3) Dadas as Matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 0 & 5 & -4 \\ 3 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, obtenha:

a) Matriz M tal que: $M = -2.A + 4.C - 3.B^t$.

Resp.: $M = \begin{bmatrix} -2 & 7 & -20 \\ 1 & 5 & -10 \\ 12 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

b) Matriz Y tal que: $2.A^t + 4.B - 3Y = -C^t$

Resp.: $Y = \begin{bmatrix} \frac{10}{3} & \frac{11}{3} & \frac{16}{3} \\ 3 & 3 & 4 \\ -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{20}{3} \end{bmatrix}$

MULTIPLICAÇÃO DE DUAS MATRIZES:

Dadas duas Matrizes A_{mxm} e B_{nxp}, seu produto é uma terceira Matriz C_{mxp} cujos elementos c_{ij} serão iguais à soma dos produtos dos elementos da linha i da Matriz A pelos elementos correspondentes da coluna j da Matriz B.

É importante perceber que, para multiplicarmos duas Matrizes, é preciso que o número de colunas da primeira delas seja igual ao de colunas da segunda.

$$A_{mxn} \cdot B_{nxp} = C_{mxp}$$

Exemplo: Obter o produto $A\,.\,B$, sabendo que $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 1 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 5 \\ -5 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

Resolução: Podemos ver que a Matriz A é do tipo $3\ x\ 2$ e a B é do tipo $2\ x\ 4$. Assim, o número de colunas da primeira Matriz é o mesmo do de linhas da segunda. Então é possível multiplicá-las nesta ordem e seu produto é uma Matriz C, de tipo $3\ x\ 4$. Passemos agora à sua obtenção:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 1 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 5 \\ -5 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\cdot 4 + 5\cdot(-5) & 4\cdot 2 + 5\cdot 0 & 4\cdot 1 + 5\cdot 2 & 4\cdot 5 + 5\cdot 2 \\ -2\cdot 4 + 1\cdot(-5) & -2\cdot 2 + 1\cdot 0 & -2\cdot 1 + 1\cdot 2 & -2\cdot 5 + 1\cdot 2 \\ 6\cdot 4 + 0\cdot(-5) & 6\cdot 2 + 0\cdot 0 & 6\cdot 1 + 0\cdot 2 & 6\cdot 5 + 0\cdot 2 \end{bmatrix}$$

Então, $B = \begin{bmatrix} -4 & 8 & 14 & 30 \\ -13 & -4 & 0 & -8 \\ 24 & 12 & 6 & 30 \end{bmatrix}$

EXERCÍCIOS:

1) Calcular os seguintes produtos:

a) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & -3 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ Resp.: $\begin{bmatrix} 24 & 23 & 43 \\ 32 & 33 & 53 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ Resp.: $[10]$

c) $\left\{\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\right\} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ Resp.: $\begin{bmatrix} 150 & 28 \\ 221 & 42 \end{bmatrix}$

OBSERVAÇÃO:

Dada uma Matriz A, o produto $A\,.\,A$ pode ser simbolizado por A^2, e somente é possível obtê-lo se A for quadrada. Analogamente podemos as “potências” A^3, A^4, etc., e que também só existem se A for quadrada.

2) Conhecidas as Matrizes $A = (-2)$, $B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -3 \\ -4 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, obtenha:

a) A^5; b) B^3; c) C^2.

Respostas:

a) $[-32]$ b) $\begin{bmatrix} 7 & -70 \\ 35 & 42 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} -8 & 7 & -3 \\ 12 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -11 \end{bmatrix}$

OBSERVAÇÃO:

O produto de uma Matriz por sua transposta sempre é uma Matriz quadrada. Confirme esta observação nos exercícios a seguir.

EXERCÍCIOS:

Dada a Matriz $M = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 6 & -3 & 1 & 0 \\ -3 & 5 & 0 & -2 & 2 & -4 \end{bmatrix}$, obtenha:

1) $M \cdot M^t$ Resp.: $\begin{bmatrix} 34 & -18 \\ -18 & 58 \end{bmatrix}$

2) $M^t \cdot M$ Resp.: $\begin{bmatrix} 13 & -23 & 6 & 0 & -4 & 12 \\ -23 & 36 & -24 & 2 & 6 & -20 \\ 12 & -24 & 36 & -18 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & -18 & 13 & -7 & 8 \\ -5 & 4 & 6 & -7 & 5 & -8 \\ 12 & -20 & 0 & 8 & -8 & 16 \end{bmatrix}$

OBSERVAÇÃO: Estes dois exercícios nos mostram que o produto de Matrizes não é comutativo.

MATRIZ INVERSA

Tomemos as Matrizes $M = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$ e $P = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}$. Se você calcular o produto $M\,.\,P$, obterá a Matriz, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$que é a Matriz Identidade de segunda ordem, I_2. Então, podemos escrever que $M \cdot P = I_2$, e dizemos que P é a Matriz Inversa de M, ou ainda, $P = M^{-1}$.

Podemos então definir: Matriz Inversa de uma Matriz A é a Matriz A^{-1} tal que $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$, onde I_n é a Matriz Identidade de ordem igual à ordem das Matrizes A e A^{-1} que, como já sabemos, devem ser quadradas e de mesma ordem.

INVERSÃO DE UMA MATRIZ

Para obtermos a Matriz Inversa de uma Matriz dada, devemos agir conforme o exemplo a seguir. Veremos que o problema será transformado em um sistema linear cuja solução podemos obter, conforme vimos no Ensino Fundamental.

EXEMPLO:

Inverter a Matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$

Resolução: Para obtermos a Matriz A^{-1},de segunda ordem, devemos representá-la do seguinte modo:

$$A \cdot A^{-1} = I_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4x-5z & 4y-5w \\ -3x+4z & -3y+4w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Desta igualdade entre duas Matrizes decorre o seguinte sistema de 4 equações e 4 incógnitas:

$$\begin{cases} 4x - 5z = 1 \\ -3x + 4z = 0 \\ 4y - 5w = 0 \\ -3y + 4w = 1 \end{cases}$$

As duas primeiras equações deste sistema apresentam as variáveis x e z, e assim, com facilidade, podemos perceber que $x = 4$ e $z = 3$. Analogamente, se trabalharmos com o sistema das duas últimas equações, chegaremos a $y = 5$ e $w = 4$, e a Matriz procurada será: $A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

OBSERVAÇÕES:

1) Para verificarmos se a Matriz A ?1 que obtivemos é de fato a inversa de A, devemos multiplicá-las e o produto deverá ser a Matriz Identidade.

2) Se o sistema de equações for impossível de ser resolvido, dizemos que a Matriz A não é inversível, o ainda que não existe Matriz inversa.

EXERCÍCIOS:

1) Inverta as seguintes Matrizes:

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$; b) $M = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$; c) $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ -4 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$.

Respostas:

a) Não existe A^{-1}; b) $M^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$; $B^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{14} & -\frac{3}{14} & -\frac{1}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{1}{7} & -\frac{1}{14} \\ -\frac{1}{7} & -\frac{1}{14} & \frac{2}{7} \end{bmatrix}$

2) Dadas as Matrizes: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, obtenha a Matriz M tal que $M = 2 \cdot A^{-1} + B \cdot C^t$

Resp.: $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

3) Seja a Matriz $M = \begin{bmatrix} \cos\pi & sen\frac{\pi}{2} \\ sen\,\pi & \cos 2\pi \end{bmatrix}$. Obtenha a Matriz $A = M^2 + 2 \cdot M^{-1}$.

Resp.: $M = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

4) Se $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, obtenha M^2, M^3 e M^n com $n \in \mathbb{N}^*$.

Resposta: $M^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; $M^3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; $M^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

5) Definimos Traço de uma Matriz Quadrada como o número igual à soma dos elementos de sua diagonal principal . Assim, calcule o Traço da Matriz B tal que B = A . ▯1 P. A, onde as Matrizes A e P são dadas por $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

Resp.: (3)