E A D - S I S T E M A S L I N E A R E S

INTRODUÇÃO

Dizemos que uma equação é linear, ou de primeiro grau, em certa incógnita, se o maior expoente desta variável for igual a um. Ela será quadrática, ou de segundo grau, em uma incógnita se o maior expoente nesta variável for 2, e assim por diante.

Como exemplo, analise a seguinte equação: $3x + 4y - 2y^2 z = 4$. Podemos perceber que ela é linear em relação a x e em relação a z, porém é quadrática em relação a y. Além disso, ela é de terceiro grau, sem especificarmos a variável, pois o monômio - $2y^2 z$ pode ter os expoentes somados, mesmo que pertençam a variáveis diferentes, para que saibamos o seu grau.

Vejamos agora a equação 3x – 2y + z = 7. É fácil perceber que, se x = 2, y = 1 e z = 3, teremos 3. 2 – 2. 1 + 3 = 6 – 2 + 3 = 7, e a equação ficará satisfeita. Isto quer dizer que a terna ordenada (2, 1, 3) é solução da equação. Porém, o mesmo acontece com a terna (1, 0, 4) ou ainda com (0, -2, 3). Isto é um exemplo que deixa claro que uma única equação com mais de uma incógnita admite mais de uma solução.

Este fato nos mostra que, para que a solução seja única, são necessárias mais de uma equações. Verificaremos até que o número de equações deve ser, no mínimo, igual ao número de incógnitas para que possamos ter solução única para elas. Assim, tais equações com solução comum a todas elas formam um sistema de equações. Se todas as equações que compõem o sistema forem de primeiro grau em todas as suas variáveis, o sistema formado será chamado Sistema Linear de equações. Para que fique nítido que as equações formam um sistema, utilizamos chaves para reuni-las.

Um sistema linear formado por duas equações a duas incógnitas é chamado sistema 2 por 2. Se as equações forem 3, e 3 as incógnitas, o sistema será 3 por 3, e assim por diante.

A resolução de um sistema 2 por 2 foi abordada anteriormente nesta nossa Plataforma Moodle no conjunto de textos de revisão do ensino fundamental, e lá ficou claro que estes sistemas podem ser resolvidos pelos métodos de Substituição, Adição e Comparação.

Veremos agora outros métodos de resolução de um sistema linear que nos diminuem o trabalho caso tenhamos que encontrar a solução de um sistema 3 por 3, 4 por 4, e assim por diante.

Trabalharemos com os chamados Método de Cramer e Método do Escalonamento.

MÉTODO DE CRAMER

Estudaremos este método utilizando a resolução de um sistema linear como exemplo:

Resolva o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 7 \\ 2x + 5y - 3z = 0 \\ x + 4y + 2z = 12 \end{cases}$$

Por Cramer, utilizaremos Determinantes que podemos formar com os coeficientes das equações que compõem o sistema . Assim, temos:

Determinante D do sistema, formado pelos coeficientes das incógnitas das equações :

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & -3 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 30 + 8 + 6 - 5 + 36 + 8 = 83 \quad \text{(por Sarrus)}$$

Você deve ter percebido que a 1ª coluna de D é formada pelos coeficientes de x, a 2ª , pelos de y, e a 3ª , pelos de z.

Montado D, escreveremos agora o determinante da incógnita x, D_x , cujos elementos são os mesmos de D, porém com os da coluna da variável x substituídos pelos respectivos termos independentes das equações. Ou seja:

$$D_x = \begin{vmatrix} 7 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & -3 \\ 12 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 70 + 0 + 72 - 60 - 0 + 84 = 166 \quad \text{(também por Sarrus)}$$

A incógnita x será assim obtida: $x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{166}{83} = 2$

De modo análogo podemos montar D_y , y, D_z e z :

$$D_y = \begin{vmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & 12 & 2 \end{vmatrix} = 0 + 24 - 21 - 0 - 28 + 108 = 83$$

Logo, a incógnita y será: $y = \frac{D_y}{D} = \frac{83}{83} = 1$

Resta-nos agora obter z, e, para isso, montaremos D_z

$$D_z = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 7 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 4 & 12 \end{vmatrix} = 180 + 56 - 0 - 35 + 48 - 0 = 249$$

Assim, teremos : $z = \frac{D_z}{D} = \frac{249}{83} = 3$

Portanto a solução do sistema é o conjunto V = {(2, 1, 3)}

Vejamos agora a resolução do seguinte sistema :

$$\begin{cases} x + 3z = 4 \\ x - 4y + w = 3 \\ 2x - w + 2z = -5 \\ y - z - w = -9 \end{cases}$$

Antes de montar os Determinantes, é conveniente escrever as equações com as incógnitas todas na mesma ordem e, para não esquecer de nenhuma, completar as equações onde não houver alguma delas com coeficiente zero. Assim, o sistema deste exemplo ficará:

$$\begin{cases} x + 0y + 3z + 0w = 4 \\ x - 4y + 0z + w = 3 \\ 2x + 0y + 2z - w = -5 \\ 0x + y - z - w = -9 \end{cases}$$

Isto feito, passemos a montar e resolver os Determinantes:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \overset{\text{Chiò}}{=} \begin{vmatrix} -4-0 & 0-3 & 1-0 \\ 0-0 & 2-6 & -1-0 \\ 1-0 & -1-0 & -1-0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & -3 & 1 \\ 0 & -4 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \overset{\text{Sarrus}}{=} -5$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 1 \\ -5 & 0 & 2 & -1 \\ -9 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \overset{c_1 \leftrightarrow c_4}{=} - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & -5 \\ -1 & 1 & -1 & -9 \end{vmatrix} \overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{=} + \begin{vmatrix} 1 & -4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 2 & -5 \\ -1 & 1 & -1 & -9 \end{vmatrix} =$$

$$\text{Chiò} = \begin{vmatrix} 0-0 & 3-0 & 4-0 \\ 0-4 & 2+0 & -5+3 \\ 1-4 & -1+0 & -9+3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ -4 & 2 & -2 \\ -3 & -1 & -6 \end{vmatrix} \overset{\text{Sarrus}}{=} -14$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 2 & -1 \\ 0 & -9 & -1 & -1 \end{vmatrix} \overset{\text{Chio}}{=} \begin{vmatrix} 3-4 & 0-3 & 1-0 \\ -5-8 & 2-6 & -1-0 \\ -9-0 & -1-0 & -1-0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -3 & 1 \\ -13 & -4 & -1 \\ -9 & -1 & -1 \end{vmatrix} \overset{\text{Sarrus}}{=} -14$$

Logo, $x = \frac{D_x}{D} = \frac{-14}{-5} = \frac{14}{5}$, e $y = \frac{D_y}{D} = \frac{-14}{-5} = \frac{14}{5}$.

Podemos em seguida chegar às outras duas variáveis simplesmente por substituição:

Sabemos pela 1ª equação que $x + 3z = 4$, logo $\frac{14}{5} + 3z = 4$, então : $3z = 4 - \frac{14}{5}$, de onde podemos escrever $3z = \frac{6}{5}$. Logo, $z = \frac{2}{5}$.

Encerrando nosso problema, calculemos a incógnita w, e, para isso utilizaremos a última equação do sistema : $y - z - w = -9$. Se substituirmos as os valores já encontrados para y e z, teremos:

$\frac{14}{5} - \frac{2}{5} - w = -9$, de onde teremos : $-w = -9 - \frac{12}{5}$, e, em consequência, $w = \frac{57}{5}$

A solução do sistema será portanto igual a $V = \{(\frac{14}{5}, \frac{14}{5}, \frac{2}{5}, \frac{57}{5})\}$

OBSERVAÇÃO

Você deve ter percebido que este último exemplo não foi totalmente resolvido com o uso do método de Cramer. Devemos, pois, pensar do seguinte modo: Os métodos de resolução que estamos apresentando não foram desenvolvidos para prejudicar alguém, ou para deixar os nossos caros estudantes puxando seus cabelos, mas para serem ferramentas para que encontremos com mais facilidade a solução de sistemas lineares. Logo, embora tenhamos iniciado a resolução por um método, nada nos impede de, no meio do caminho, utilizar um outro método.

EXERCÍCIOS

Resolva os sistemas em seguida utilizando o método de Cramer:

1) $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ -x + 4y + z = 10 \\ x + y = 1 + 2z \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - 2y + z - 1 = 0 \\ y - z + 2 + w = 0 \\ x + y = 2z + 1 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} a + b = c + 5 \\ a - 2b - 3c = -2 \\ -a - 3b + 4c = -14 \end{cases}$

Resp. : (1) V = {(2,3,0)} ; 2) V = {(3, 2 ,2, -2)} ; 3) V = {(1, 3, -1)}).

MÉTODO DO ESCALONAMENTO

Observemos o seguinte sistema linear: $\begin{cases} 2x + 4y - z = 10 & |------ \\ \quad 3y + 2z = 14 & |------ \\ \quad\quad 3z = 12 & |----- \end{cases}$

Dizemos que este sistema está escalonado. Isto significa que, de baixo para cima, as equações que o compõem formam os degraus de uma escada.

A vantagem de o sistema se apresentar assim é que, também de baixo para cima, as incógnitas podem ser encontradas facilmente. Vejamos:

Da 3ª equação, $3z = 12$, podemos obter $z = 4$.

Da 2ª, $3y + 2z = 14$, teremos $3y + 2.\,4 = 14 \Rightarrow 3y = 14 - 8 \Rightarrow 3y = 6 \Rightarrow y = 2$.

Finalmente, da 1ª equação, $2x + 4y - z = 10 \Rightarrow 2x + 8 - 4 = 10 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3$

O conjunto verdade do sistema será: V = {3, 2, 4 }

A questão que nos resta é a seguinte: “E se o sistema não estiver escalonado?”

A resposta é: Devemos escaloná-lo, e, para isso, escreveremos a Matriz completa associada ao sistema, e a escalonaremos, utilizando convenientemente as propriedades já estudadas das matrizes.

Vejamos:

EXEMPLOS

1) Resolva o sistema por escalonamento : $\begin{cases} 4x + 8y - 20z = -20 \\ 3x - 6y - 5z = 7 \\ -5x + 4z = -6 \end{cases}$

Iniciaremos nosso trabalho escrevendo a Matriz completa a que nos referimos :

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 8 & -20 & -20 \\ 3 & -6 & -5 & 7 \\ -5 & 0 & 4 & -6 \end{pmatrix} .$$

Percebemos que M não é quadrada, mas se fosse, sua diagonal principal seria formada pelos elementos 4, -6 e 4. Para facilitar o nosso trabalho, transformaremos sempre os elementos desta diagonal no número 1. De início transformaremos o elemento a_{11}, que pertence à 1ª fila e à diagonal principal. Para isso, multiplicaremos os elementos da 1ª linha por ¼, e os das demais linhas permanecerão iguais. Simbolizaremos esta operação por (1/4). L_1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & -5 \\ 3 & -6 & -5 & 7 \\ -5 & 0 & 4 & -6 \end{pmatrix}$$

Em seguida, deveremos anular os elementos a_{21} e a_{31}.

Para isso efetuaremos as seguintes operações :

Para que a_{21} se anule, faremos: - (3).$L_1 + L_2$, e para que a_{31} também fique igual a zero, faremos (5).$L_1 + L_3$. Agora a 1ª linha não se altera, mas a 2ª e a 3ª, sim , e surgirá uma nova Matriz cuja primeira coluna estará escalonada :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & -5 \\ -3.1+3 & -3.2+(-6) & -3.(-5)+(-5) & -3.(-5)+7 \\ 5.1+(-5) & 5.2+0 & 5.(-5)+4 & 5.(-5)+(-6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & -5 \\ 0 & -12 & 10 & 22 \\ 0 & 10 & -21 & -31 \end{pmatrix}$$

Escalonaremos agora a segunda coluna, e, para isso, devemos transformar o elemento a_{22} em 1, por ser ele o elemento da diagonal principal que pertence também à 2ª coluna. Para isso, multiplicaremos a 2ª linha por -1/12. As demais linhas permanecerão como estão. Então surgirá a matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & -5 \\ (-1/12).0 & (-1/12).(-12) & (-1/12).10 & (-1/12).22 \\ 0 & 10 & -21 & -31 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & -5 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{6} & -\frac{11}{6} \\ 0 & 10 & -21 & -31 \end{pmatrix}$$

Agora, como já é de se esperar, faremos a operação $-10.L_2 + L_3$, e a única linha a se alterar será a terceira, e teremos então a nova Matriz :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & -5 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{6} & -\frac{11}{6} \\ -10.0+0 & -10.1+10 & -10.(-\frac{5}{6})-21 & -10.(-\frac{11}{6})-31 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & -5 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{6} & -\frac{11}{6} \\ 0 & 0 & -\frac{38}{3} & -\frac{38}{3} \end{pmatrix}$$

Passamos agora a ter uma última matriz escalonada. Como as 3 primeiras colunas se referem às variáveis x, y e z, então podemos escrever as equações a seguir, e, com elas obter as incógnitas que solucionarão o sistema:

$-\frac{38}{3}z = -\frac{38}{3}$, então, z = 1. Pela 2ª equação: $1.y - \frac{5}{6}.1 = -\frac{11}{6} \Rightarrow y = -\frac{11}{6} + \frac{5}{6} \Rightarrow y = -1$.

Pela 1ª equação, podemos ter: x+2.(-1)-5.1= -5 , então : x-2-5= -5 , logo x = 2.

Assim, V = {(2, -1, 1)}

2) Resolva por escalonamento : $\begin{cases} 3x - 2y + z = -11 \\ x + 2y + 4w = 4 \\ y + w - 3x = 9 \\ 3z + 4y - w = 15 \end{cases}$

Iniciemos nosso trabalho escrevendo a matriz associada ao sistema, sem nos esquecermos de colocar sempre na mesma ordem as colunas das incógnitas:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 & -11 \\ 1 & 2 & 0 & 4 & 4 \\ -3 & 1 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 4 & 3 & -1 & 15 \end{pmatrix} \xrightarrow[3.L_1 + L_3]{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & -11 \\ 0 & 7 & 0 & 13 & 21 \\ 0 & 4 & 3 & -1 & 15 \end{pmatrix} \xrightarrow{-3.L_1 + L_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & -8 & 1 & -12 & -23 \\ -3 & 1 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 4 & 3 & -1 & 15 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_3 \leftrightarrow c_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & -8 & -12 & -23 \\ 0 & 0 & 7 & 13 & 21 \\ 0 & 3 & 4 & -1 & 15 \end{pmatrix} \xrightarrow{-3.L_2 + L_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & -8 & -12 & -23 \\ 0 & 0 & 7 & 13 & 21 \\ 0 & 0 & 28 & 35 & 84 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1/7).L_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & -8 & -12 & -23 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{13}{7} & 3 \\ 0 & 0 & 28 & 35 & 84 \end{pmatrix} \xrightarrow{-28.L_3 + L_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & -8 & -12 & -23 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{13}{7} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -17 & 0 \end{pmatrix}$$

Encerrando nossos cálculos, obtenhamos os valores das incógnitas:

$-17w = 0$, logo : $w = 0$. Da penúltima equação, $1y + \frac{13}{7}w = 3$. Como w = 0, teremos y = 3.

Se utilizarmos a 2ª equação, z - 8y -12w = -23, e substituirmos os valores já calculados, escreveremos : z – 8.3 – 12.0 = -23 , então : z – 24 = -23 , e assim, z = 1.

Por fim, vamos calcular a incógnita x , com o uso da primeira equação do sistema:

$x + 2y + 4w = 4 \rightarrow x + 6 + 4.0 = 4 \rightarrow x = -2.$

Conjunto Verdade: V = {(-2, 3 , 1, 0)}

EXERCÍCIOS

Resolva os seguintes sistemas lineares por escalonamento:

1) $\begin{cases} 3x + 4y + 2z = 0 \\ 4y - 2x + z = -11 \\ 2z - 3y + x = 10 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y - z - w = 10 \\ x - y - z + w = 0 \\ x - y - z - w = 6 \\ x + y + z + w = 0 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} -a + 4b - 2c + 3d = -3 \\ 2a - b - 3c = 2 \\ a - 2c + d = -1 \\ b - 3c + d = -1 \end{cases}$

Resp.: (1) V = {(2, -2, 1)} ; 2) V = {(3, 2, -2, -3)} ; 3) V = {(2, 2, 0, -3)}).

CONCEITO

Vamos resolver o seguinte sistema: $\begin{cases} 2x - 3y + z = 8 \\ 3x + y - 4z = 6 \\ -x + 7y - 6z = 9 \end{cases}$

Acabamos de conhecer dois novos métodos de resolução, o método de Cramer e o do escalonamento. Como podemos escolher o método a ser usado, utilizaremos Cramer:

Teremos então, do sistema, os seguintes Determinantes:

Determinante do sistema: $D = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ -1 & 7 & -6 \end{vmatrix} = -12 + 21 - 12 + 1 - 54 + 56 = 0$

Determinantes das incógnitas:

$$D_x = \begin{vmatrix} 8 & -3 & 1 \\ 6 & 1 & -4 \\ 9 & 7 & -6 \end{vmatrix} = -48 + 42 + 27 - 9 - 108 + 224 = 128 \rightarrow x = \frac{D_x}{D} = \frac{128}{0} \text{ (IMPOSSÍVEL)}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 8 & 1 \\ 3 & 6 & -4 \\ -1 & 9 & -6 \end{vmatrix} = -72 + 27 + 32 + 6 + 144 + 72 = 209 \rightarrow y = \frac{D_y}{D} = \frac{209}{0} \text{ (IMPOSSÍVEL)}$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 8 \\ 3 & 1 & 6 \\ -1 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 18 + 568 + 18 + 8 + 81 - 84 = 609 \rightarrow z = \frac{D_z}{D} = \frac{609}{0} \quad \text{(IMPOSSÍVEL)}$$

Vemos que tanto x, como y, como z , não podem ser obtidos por serem resultados de divisões impossíveis. Então, dizemos que o sistema é impossível, e seu conjunto verdade é V = ϕ.

Utilizemos agora o método do escalonamento para resolver o mesmo sistema: Temos então a matriz M associada ao sistema, e trabalharemos com as propriedades das matrizes que forem convenientes às nossas necessidade:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 8 \\ 3 & 1 & -4 & 6 \\ -1 & 7 & -6 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} -1 & 7 & -6 & 9 \\ 3 & 1 & -4 & 6 \\ 2 & -3 & 1 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-1).L_1} \begin{pmatrix} 1 & -7 & 6 & -9 \\ 3 & 1 & -4 & 6 \\ 2 & -3 & 1 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[(-2).L_1+L_3]{(-3).L_1+L_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -7 & 6 & -9 \\ 0 & 22 & -22 & 33 \\ 0 & 11 & -11 & 26 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1/22).L_2} \begin{pmatrix} 1 & -7 & 6 & -9 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 11 & -11 & 26 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-11).L_2+L_3} \begin{pmatrix} 1 & -7 & 6 & -9 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{19}{2} \end{pmatrix}$$

A última linha da última matriz nos mostra que $0.z = -\frac{19}{2}$ que é uma equação impossível. Logo o sistema de equações também será impossível, e seu conjunto verdade será V = ϕ .

Vimos então que, por qualquer que seja o método escolhido, o sistema estudado se revelou Impossível, e seu conjunto verdade, vazio.

CONCLUSÃO

Para resumir nosso estudo, podemos estabelecer que:

1) O sistema de equações lineares é um SPD, sistema possível e determinado, se e só se:

- se o resolvermos por Cramer, o determinante do sistema não for nulo.

- se o resolvermos por escalonamento, a última linha da matriz for $0 \quad 0 \quad 0 \; .... \; 0 \quad \alpha \quad \beta$, com $\alpha \neq 0$.

2) O sistema linear é um SPI, sistema possível e indeterminado, se e apenas se :

- se o resolvermos por Cramer, o determinante do sistema for nulo, e todos os determinantes das incógnitas forem nulos também.
- se o resolvermos por escalonamento, a última linha da matriz for formada só de zeros.

3) O sistema linear é um SI, sistema impossível, se e só se:

- se o resolvermos por Cramer, o determinante do sistema for nulo, e haverá ao menos um dos determinantes das incógnitas não nulo.
- se o resolvermos por escalonamento, a última linha da matriz for formada por zeros exceto a última, que naturalmente não poderá ser nula.

EXERCÍCIOS

1) Classifique os sistemas quanto à existência das raízes (SPD, SPI, SI), utilizando Cramer:

a) $\begin{cases} 3x + 2y + 4z = 6 \\ -x + 4y - 7z = 2 \\ 2x + 6y - 3z = 8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -x + y - 2z = 11 \\ 3x - 3y + 6z = 8 \\ x + 5y - 2z = 10 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + 2y - z = 12 \\ 2x - y + 4z = 15 \\ -x - 3y + z = 9 \end{cases}$

Resp.; (a) SPI ; b) SI ; c) SPD .)

2) Classifique os sistemas quanto à existência das raízes, utilizando o método do escalonamento:

a) $\begin{cases} x + y = 10 \\ y + z = 8 \\ x + z = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - z = 10 \\ 2x + 3y + 4z = 9 \\ x + 3y + 5z = 19 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y - z = 4 \\ x + 3y - 2z = 14 \\ z - x - y = -4 \end{cases}$

Resp.: (a) SPD ; b) SI ; c) SPI)

EXEMPLOS

1) Discutir o seguinte sistema linear: $\begin{cases} mx + 6my = 6 \\ 2x + my = 4 \end{cases}$

De acordo com Cramer, o determinante do sistema é D = $\begin{vmatrix} m & 6m \\ 2 & m \end{vmatrix} = m^2 - 12m$

Se $m^2 - 12m = 0 \rightarrow \begin{cases} m = 0 \rightarrow \text{o sistema fica : } \begin{cases} 0 + 0 = 6 \\ 2x + 0 = 4 \end{cases} \rightarrow \text{SI} \\ \text{ou} \\ m = 12 \rightarrow \text{o sistema fica : } \begin{cases} 12x + 72y = 6 \\ 2x + 12y = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x + 12y = 1 \\ 2x + 12y = 4 \end{cases} \rightarrow \text{SI} \end{cases}$

Se $m^2 - 12m \neq 0 \rightarrow m \neq 0$ e $m \neq 12 \rightarrow$ SPD

2) Podemos também trabalhar este exercício se usarmos escalonamento, que o resultado não se alterará. Vejamos:

A Matriz associada ao sistema é :

$$\begin{pmatrix} m & 6m & 6 \\ 2 & m & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} 2 & m & 4 \\ m & 6m & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1/2).L_1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{m}{2} & 2 \\ m & 6m & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-m).L_1 + L_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{m}{2} & 2 \\ 0 & -\frac{m^2}{2} + 6m & 6 - 2m \end{pmatrix} \rightarrow -\frac{m^2}{2} + 6m = 0 \rightarrow \begin{cases} m = 0 \rightarrow \text{última linha fica } 0 \quad 0 \quad 6 \rightarrow \text{SI} \\ m = 12 \rightarrow \text{última linha fica } 0 \quad 0 \quad -18 \rightarrow \text{SI} \end{cases}$$

Se $-\frac{m^2}{2}+6m \neq 0 \rightarrow m \neq 0$ e $m \neq 12 \rightarrow$ SPD.

Note então que podemos escolher qualquer dos dois métodos para resolver tais problemas.

3) Classifique o sistema: $\begin{cases} x + y = 4 \\ 3x + 3y = 12 \\ 5x + 5y = 10 \end{cases}$

É visível que este sistema de 3 equações possui apenas 2 incógnitas. Podemos afirmar que ele equivale aos seguintes 3 sistemas que devem ser resolvidos simultaneamente:

Sistema I : $\begin{cases} x + y = 4 \\ 3x + 3y = 12 \end{cases}$; Sistema II : $\begin{cases} x + y = 4 \\ 5x + 5y = 10 \end{cases}$; Sistema III : $\begin{cases} 3x + 3y = 12 \\ 5x + 5y = 10 \end{cases}$

Analisemos agora cada um deles utilizando o escalonamento :

Sistema I : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-3).L_1+L_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$ SPI

Sistema II : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 5 & 5 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-5).L_1+L_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix} \rightarrow$ SI

Sistema III: $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 12 \\ 5 & 5 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-1/3).L_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 5 & 5 & 10 \end{pmatrix}$ igual ao Sistema II, logo SI

Como há ao menos um sistema 2x2 SI, o sistema 3x2 também será SI.

EXERCÍCIOS

1) Obtenha o parâmetro real k para que o sistema seja possível e determinado :

a) $\begin{cases} 2x - ky = 10 \\ kx + 3y = 16 \end{cases}$ b) $\begin{cases} kx + y - z = 8 \\ x + ky + z = 6 \\ x - y = 4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + ky = 4 \\ kx + y = 4 \end{cases}$

Resp.:(1a) Qualquer k real; 1b) $k \neq -1$ e $k \neq 2$; 1c) $k \pm 1$.)

2) Discuta em função do parâmetro o sistema linear:

a) $\begin{cases} (k+2)x + y = 2 \\ x - y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} kx - 10y = 8 \\ -9x + 15y = -12 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x - my + z = -7 \\ 4x + y + 2z = 13 \\ x - y + mz = 3 \end{cases}$

Resp.: (2a) $k \neq -1 \rightarrow SPD, k = -1 \rightarrow SI$; 2b) $k = 6 \rightarrow SPI$, $k \neq 6 \rightarrow$ SPD ; 2c)

$m \neq -\frac{1}{2}$ ou $m \neq \frac{1}{2} \rightarrow$ SPD, $m = \pm \frac{1}{2} \rightarrow$ SI .

CONCEITO

Um sistema linear é chamado homogêneo se os termos independentes de todas as suas equações forem iguais a zero. Exemplo:

$$\begin{cases} 2x + y - 4z = 0 \\ -x + 2z = 0 \\ 4x - 3y + z = 0 \end{cases}$$

É fácil perceber que a terna (0, 0, 0) é solução do sistema apresentado. Logo, um sistema homogêneo sempre é possível. Porém, se ele possuir, além da nula, uma solução que não seja ela, poderemos afirmar que ele é possível e indeterminado.

Então, um sistema linear homogêneo de n equações a n incógnitas, n>1, possui sempre a ênupla (0, 0, 0, ... , 0) como solução, e esta solução é chamada solução trivial do sistema.

EXEMPLOS

1) O sistema linear $\begin{cases} 4x + 9y = 0 \\ 5x - 6y = 0 \end{cases}$ é homogêneo. Para resolvê-lo por Cramer, calculemos seu determinante : $D = \begin{vmatrix} 4 & 9 \\ 5 & -6 \end{vmatrix} = -69 \neq 0$, logo temos um SPD, e a solução única só

pode ser a trivial. Portanto, V = {(0, 0)}.

2) Vejamos agora o sistema homogêneo: $\begin{cases} 12x + 8y = 0 \\ 15x + 10y = 0 \end{cases}$. Se calcularmos o seu determinante, teremos : $D = \begin{vmatrix} 12 & 8 \\ 15 & 10 \end{vmatrix} = 0$, e estaremos tratando agora de um SPI. Seu conjunto verdade será então : $V = \{(k, \frac{3k}{2}), k \text{ real}\}$

EXERCÍCIOS

1) Verifique se o sistema é determinado ou não : $\begin{cases} x - y - z = 0 \\ -2x + 2y + 2z = 0 \\ 1000x - 1000y - 1000z = 0 \end{cases}$

2) Para quais valores do parâmetro o sistema a seguir admitirá apenas a solução trivial?

$$\begin{cases} px + 3y = 0 \\ px + py = 0 \end{cases}$$

3) Obtenha o parâmetro das equações de modo que o sistema linear a seguir seja indeterminado : $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + my + z = 0 \\ x + y + mz = 0 \end{cases}$

Resp.: (1) Sistema indeterminado, pois o seu determinante é nulo e o sistema é homogêneo; 2) $p \neq 0$ e $p \neq 3$; 3) m = 1 .