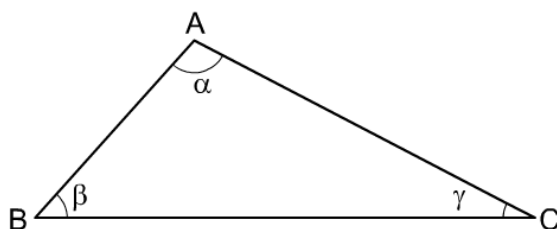


TRIÂNGULO RETÂNGULO

CONCEITUAÇÃO :

Como já sabemos, todo polígono que possui três lados é chamado triângulo. Assim, ele também possui três vértices e três ângulos internos cuja soma é igual a um ângulo raso ou de meia-volta.

ILUSTRAÇÃO :



Lados: AB, BC , AC

Vértices: A,B,C

Ângulos internos: α, β, γ

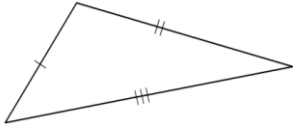
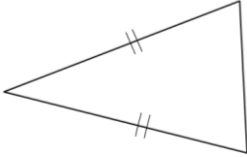
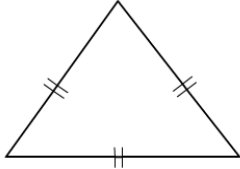
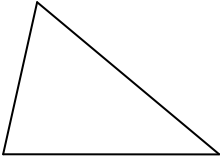
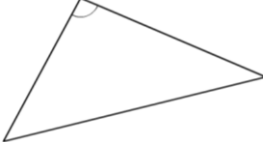
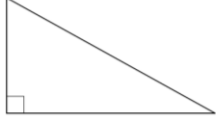
Obs : $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

USO :

O estudo dos triângulos tem extrema utilidade na Geometria e nas suas aplicações, pois qualquer outro polígono pode ser dividido ou transformado convenientemente em triângulos para o seu estudo. Como exemplo, podemos dividir um quadrilátero em 2 triângulos, ou um pentágono em 3, se utilizarmos as diagonais que partem de um único vértice, e isto pode ser útil se quisermos calcular suas áreas.

TABELA DE CLASSIFICAÇÃO :

Os triângulos podem ser classificados de acordo com dois critérios, o critério que leva em consideração os lados, e o que leva em consideração os ângulos, conforme mostra a tabela :

Quanto aos lados	Triângulo escaleno (3 lados diferentes) 	Triângulo isósceles (2 lados iguais) 	Triângulo equilátero (3 lados iguais) 
Quanto aos ângulos	Triângulo acutângulo (3 ângulos agudos) 	Triângulo obtusângulo (1 ângulo obtuso) 	Triângulo retângulo (1 ângulo reto) 

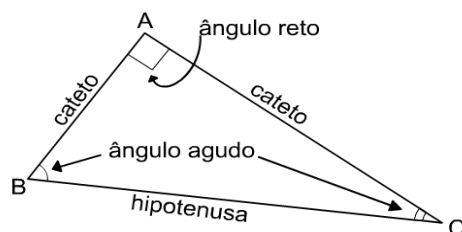
COMENTÁRIOS :

-Um ângulo é reto se for um dos quatro ângulos obtidos por duas retas que se cruzam formando 4 ângulos iguais. O ângulo agudo é menor que o reto, e o obtuso, maior que ele, porém menor que dois retos (ângulo raso).

-O Assunto deste trabalho é o triângulo retângulo que, como acabamos de ver, é aquele que tem um ângulo reto. Como os outros dois ângulos somam 90° , e nenhum deles pode ser nulo, então eles só podem ser agudos. Ou seja, o ângulo reto é único.

ELEMENTOS :

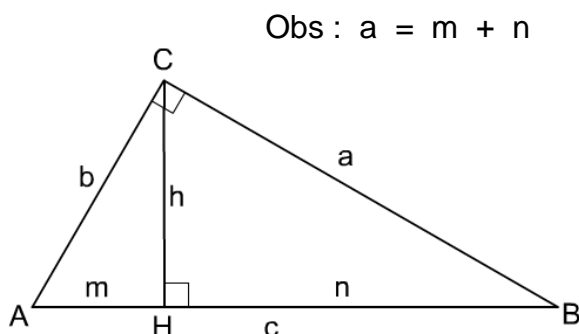
A figura nos mostra um triângulo BAC cujo ângulo reto se encontra no vértice A. O lado oposto ao ângulo reto, chamado Hipotenusa, é o maior deles, e



é o maior deles, e os lados adjacentes ao ângulo reto, ou seja, que formam o ângulo reto, são denominados Catetos.

Podemos ainda acrescentar outros elementos, mas, para isso, utilizaremos o desenho a seguir. Nele, os vértices estão nomeados no sentido anti-horário :

\hat{A} : ângulo reto ; a : hipotenusa ;
B, C : ângulos agudos ; b,c : catetos ;
h: altura relativa à hipotenusa , ou perpendicular à hipotenusa
m: projeção do cateto c sobre a hipotenusa;
n: projeção do cateto b sobre a hipotenusa.

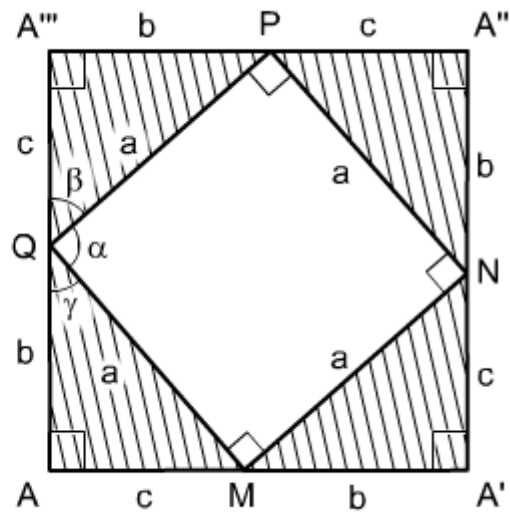
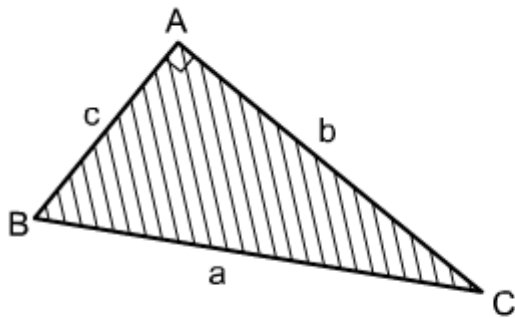


PROPRIEDADES :

Os elementos do triângulo retângulo podem ser relacionados entre si através de igualdades que são chamadas “Relações Métricas”, e a principal delas é conhecida como Teorema de Pitágoras, o mais famoso teorema de toda a geometria.

ENUNCIADO E DEMONSTRAÇÃO :

Teorema de Pitágoras : “ No triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos”.



Dado o triângulo BAC, retângulo em A, construiremos o quadrilátero AA'A''A''', que será formado pela repetição de BAC quatro vezes, conforme a figura. Como $\alpha = 90^\circ$, pois $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ e $\beta + \gamma = 90^\circ$, então o quadrilátero em questão, que possui 4 lados iguais, será um quadrado.

Se observarmos a figura, poderemos verificar que, a respeito das áreas dos polígonos envolvidos, temos :

Área quadrado AA'A''A''' = Área quadrado MNPQ + 4. (Área triângulo ABC).

$$(b + c)^2 = a^2 + 4 \cdot \frac{bc}{2}$$

$$b^2 + 2 \cdot b \cdot c + c^2 = a^2 + 2 \cdot b \cdot c$$

$b^2 + c^2 = a^2$ ou seja: O quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.

C.Q.D.

EXEMPLO :

Os catetos de um triângulo retângulo medem 6cm e 8cm. Ache sua hipotenusa.

Resolução : catetos $b = 6\text{cm}$ e $c = 8\text{cm}$, hipotenusa : $a = ?$

Teorema de Pitágoras : $a^2 = b^2 + c^2$

$$a^2 = 6^2 + 8^2$$

$$a^2 = 36 + 64$$

$$a^2 = 100$$

$$a = \pm\sqrt{100}$$

Como a é um segmento de reta, então sua medida é positiva, logo,
 $a = 10$ cm

OBSERVAÇÕES :

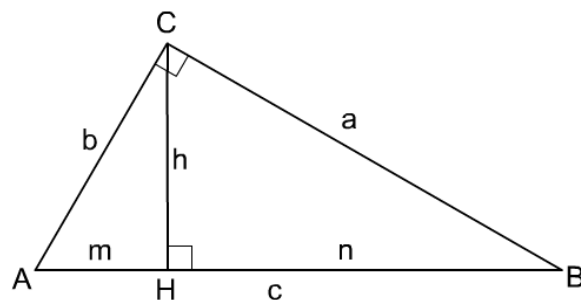
O exemplo que acabamos de mostrar nos apresenta o triângulo retângulo de lados 6,8,10. Os triângulos de lados 3,4,5, ou 9,12,15, cujos lados são múltiplos inteiros do triângulo menor são chamados triângulos pitagóricos.

A demonstração que apresentamos é bem anterior a Pitágoras. Ela já era conhecida na China e na Babilônia muitos séculos antes de seu nascimento.

DEMAIS RELAÇÕES MÉTRICAS :

$$A) b \cdot c = a \cdot h \quad ; B) h^2 = m \cdot n \quad ; C) b^2 = a \cdot m \quad ; D) c^2 = a \cdot n .$$

Para demonstrarmos estas quatro relações devemos verificar que a altura do triângulo BAC o divide em outros dois, AHB e AHC, todos eles semelhantes.



Vejam os :

AHB	BAC	AHC	
H	≅	A	≅
B	≅	B	-----
-----		C	≅
		C	
			(ângulos retos)
			(ângulo comum)
			(ângulo comum)

Pelo caso AA (Ângulo,Ângulo) de semelhança de triângulos, acabamos de mostrar que os triângulos AHB, BAC e AHC são semelhantes, e então podemos escrever as proporções :

AHB semelhante a BAC : $\frac{a}{c} = \frac{b}{h} = \frac{c}{m}$. Então, $b \cdot c = a \cdot h$ e $c^2 = a \cdot m$

BAC semelhante a AHC : $\frac{a}{b} = \frac{b}{n} = \frac{c}{h}$. Desta vez, $b^2 = a \cdot n$

AHB semelhante a AHC : $\frac{b}{c} = \frac{n}{h} = \frac{h}{m}$. Finalmente : $h^2 = m \cdot n$

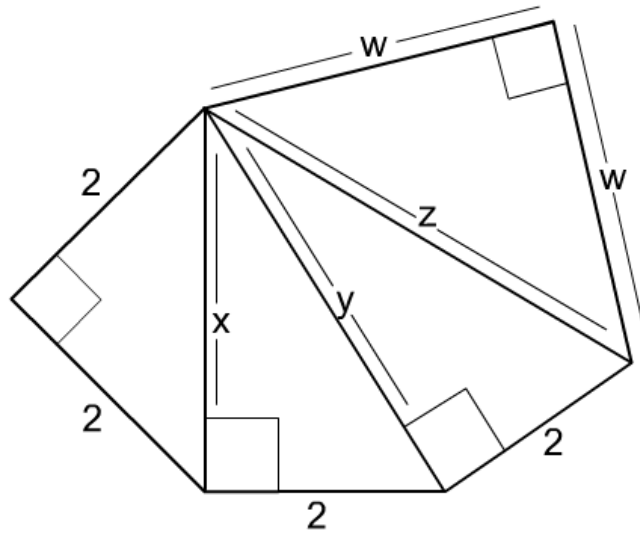
EXERCÍCIOS :

- 1) Ache os elementos do triângulo retângulo onde :
 - a) a hipotenusa mede 8cm e um dos catetos,6cm.
 - b) a hipotenusa é o dobro de um dos catetos, e o outro cateto mede 9cm.
 - c) a altura relativa à hipotenusa mede 4cm, e a hipotenusa, 10cm.
 - d) as projeções dos catetos sobre a hipotenusa medem 2cm e 6cm

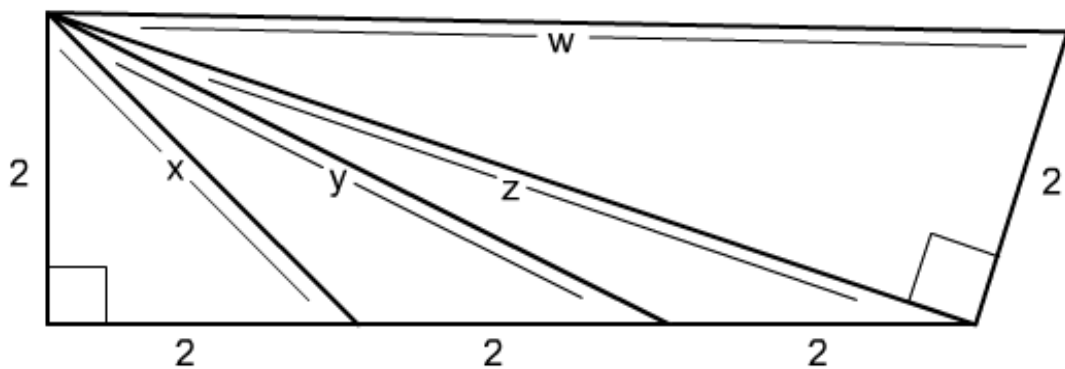
- 2) Uma escada de pintor tem 6m de comprimento e está encostada em uma parede com seu pé distante 2m dela. Obtenha a distância entre o pé da parede e o ponto de apoio da escada. Faça o desenho correspondente.

3) Ache os valores de x, y, z e w nas figuras :

a)



b)



4) Desenhando as figuras necessárias, deduza o comprimento de :

a) Altura do triângulo equilátero de 4cm de lado.

- b) Diagonal do quadrado de 32cm de perímetro.
 c) Área do triângulo equilátero de lado ℓ
 d) Raio da circunferência inscrita no hexágono regular de 24cm de perímetro.
- 5) A altura relativa à base de um triângulo isósceles excede a base em 2m. Determine o comprimento da base se o perímetro é igual a 36m.
- 6) O perímetro de um retângulo é de 30cm e sua diagonal mede $5\sqrt{5}$ cm. Calcule seus lados.

Respostas :

1) a) $c = 2\sqrt{7} \text{ cm}, h = \frac{3\sqrt{7}}{2} \text{ cm}, n = 4,5 \text{ cm}, m = 3,5 \text{ cm}$

b) $b = 3\sqrt{3} \text{ cm}, a = 6\sqrt{3} \text{ cm}, n = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ cm}, m = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ cm}$

c) $b = 4\sqrt{5} \text{ cm}, c = 2\sqrt{5} \text{ cm}, n = 8 \text{ cm}, m = 2 \text{ cm}$

d) $a = 8 \text{ cm}, h = 2\sqrt{3} \text{ cm}, b = 4\sqrt{3} \text{ cm}, c = 4 \text{ cm}$

2) $4\sqrt{2} \text{ m}$

3) a) $x = 2\sqrt{2}, y = 2\sqrt{3}, z = 4, w = 2\sqrt{2}$

b) $x = 2\sqrt{2}, y = 2\sqrt{5}, z = 2\sqrt{10}, w = 2\sqrt{11}$

4) a) $2\sqrt{3} \text{ cm}$ b) $8\sqrt{2} \text{ cm}$ c) $\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$ d) $2\sqrt{3} \text{ cm}$

5) 10m

6) 5cm, 10cm