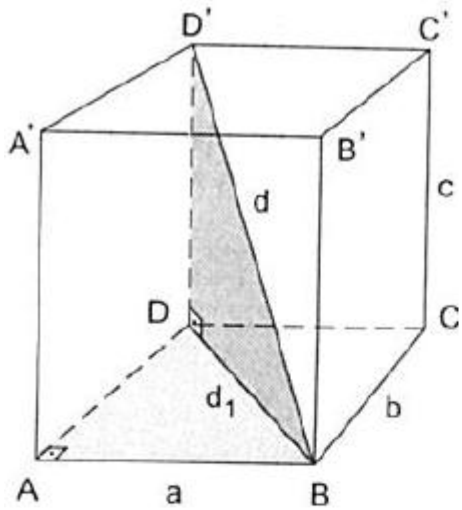
GEOMETRIA MÉTRICA ESPACIAL

1.1. PARALELEPÍPEDOS RETÂNGULOS

Um paralelepípedo retângulo é um prisma reto cujas bases são retângulos.



$AB = CD = A'B' = C'D' = a \ (COMPRIMENTO)$

$BC = AD = B'C' = A'D' = b \ (LARGURA)$

$AA' = BB' = CC' = DD' = c \ (ALTURA)$

$BD' = B'D = A'C = AC' = d \ \left(COMPRIMENTO \quad DAS \quad DIAGONAIS\right)$

$BD = d_1 \ \left(COMPRIMENTO \quad DE \quad UMA \quad DIAGONAL \quad DE \quad UMA \quad BASE\right)$

Sendo A a área total e V o volume do paralelepípedo retângulo, são verdadeiras as seguintes relações:

$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ (1)

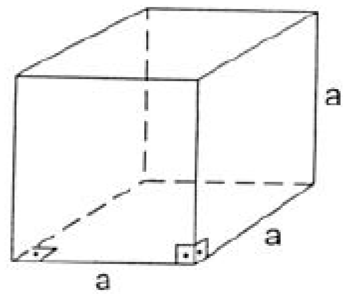
$A = 2.(ab + bc + ac)$ (2)

$V = a.b.c$ (3)

$(a + b + c)^2 = d^2 + A$ (4)

1.2. CUBOS

Um cubo é um paralelepípedo retângulo no qual as dimensões são iguais $(a = b = c)$. Assim, se as arestas de um cubo medem a, então:



$d = a\sqrt{3}$ (5)

$A = 6a^2$ (6)

$V = a^3$ (7)

1.3. PRISMAS

As duas bases de um prisma são polígonos congruentes. As faces laterais são quadriláteros (paralelogramos, retângulos, losangos, quadrados). Altura é a distância entre as bases. A reunião das faces laterais é chamada superfície lateral do prisma. A reunião das faces laterais com as bases é chamada superfície total do prisma.

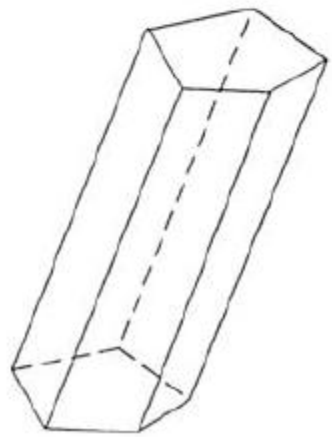
Um prisma reto é um prisma cujas arestas laterais são perpendiculares aos planos das bases $\left(r \perp \alpha_1 \quad e \quad r \perp \alpha_2 \right)$.

Um prisma oblíquo é um prisma cujas arestas laterais são oblíquas aos planos das bases.

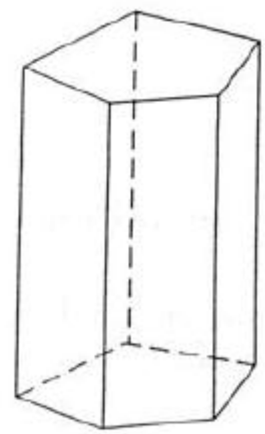
Um prisma regular é um prisma reto cujas bases são polígonos regulares.

Observemos que as faces laterais de um prisma reto são regiões retangulares.

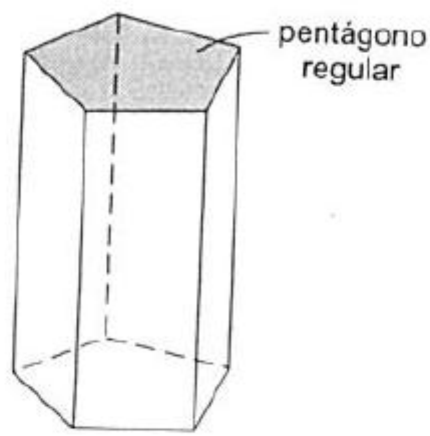
Prisma Oblíquo (pentagonal)



Prisma Reto (pentagonal)



Prisma Regular (pentagonal)



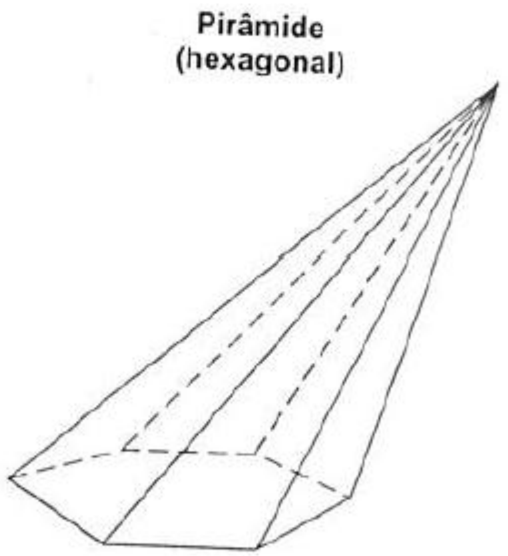
Sendo B a área da base, A_L a área lateral, A_T a área total, V o volume e h a altura de um prisma, são verdadeiras as seguintes relações:

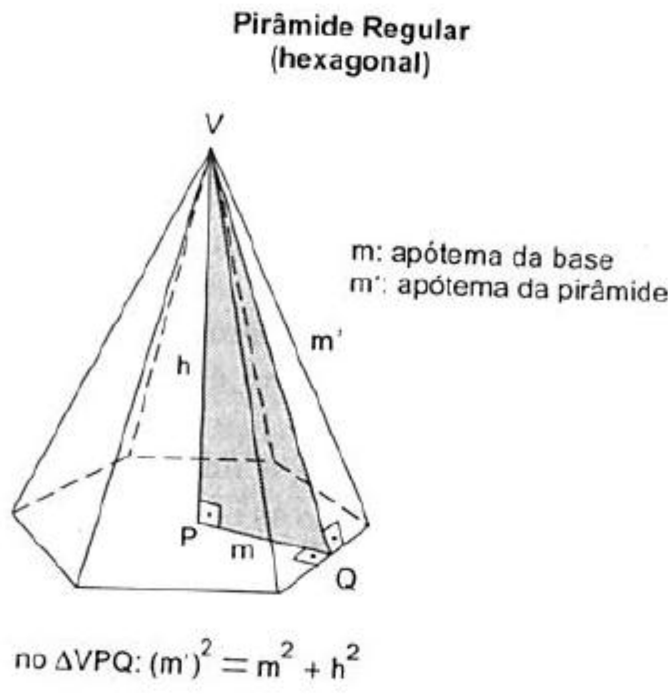
$$A_T = A_L + 2B \qquad\qquad V = B.h \qquad\qquad (8)$$

1.4. PIRÂMIDES

Uma pirâmide tem apenas uma base (polígono). As faces laterais são triângulos. A altura é a distância entre o vértice oposto à base e o plano da base. A reunião das faces laterais com a base é chamada superfície total da pirâmide.

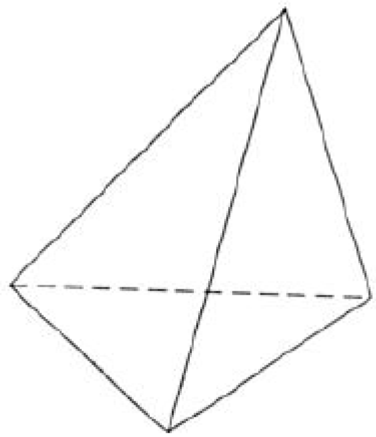
Uma pirâmide regular é uma pirâmide cuja base é um polígono regular e cuja projeção ortogonal ao vértice sobre o plano da base é o centro da base. Em toda pirâmide regular as arestas laterais são triângulos isósceles (ou equiláteros) congruentes. Chamamos de apótema de uma pirâmide regular a medida de qualquer segmento de extremidades no vértice da pirâmide e no ponto médio da aresta da base (m').

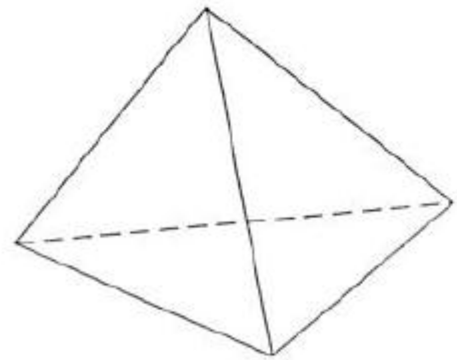




Um tetraedro é uma pirâmide triangular.

Um tetraedro regular é um tetraedro que possui as seis arestas congruentes. As faces do tetraedro regular são triângulos equiláteros congruentes.





Sendo B a área da base, A_L a área lateral, A_T a área total, V o volume e h a altura de uma pirâmide, são verdadeiras as seguintes relações:

$$A_T = A_L + 2B \qquad V = \frac{1}{3}.B.h \qquad (9)$$

1.5. CILINDROS

As duas bases de um cilindro são círculos congruentes. Altura é a distância entre as bases. A reta que une os centros das bases é chamada eixo do cilindro e os segmentos paralelos ao eixo com extremidades na circunferência das bases são chamados geratrizes do cilindro. A reunião das geratrizes é chamada superfície lateral e a reunião da superfície lateral com as bases é chamada de superfície total do cilindro.

Um cilindro reto (ou cilindro de revolução) é um cilindro cujo eixo é perpendicular às bases.

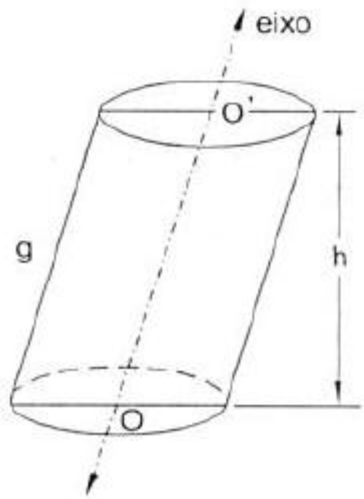
Um cilindro oblíquo é um cilindro cujo eixo é obliquo em relação às bases.

Uma secção meridiana de um cilindro reto é a intersecção do cilindro com um plano que contém seu eixo. As secções meridianas de um cilindro reto são retângulos.

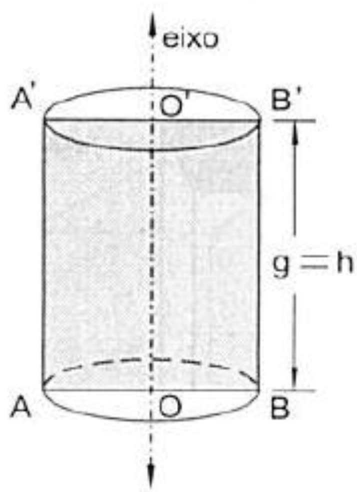
Um cilindro equilátero é um cilindro reto cujas secções meridianas são quadrados.

Num cilindro equilátero, as geratrizes e os diâmetros das bases são congruentes.

Cilindro Oblíquo

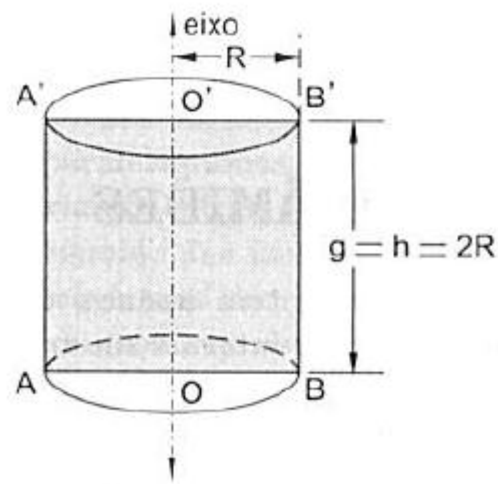


Cilindro Reto



□ABB'A' é secção meridiana
□ABB'A' é retângulo

Cilindro Eqüilátero



□ABB'A' é quadrado

Sendo R o raio da base, B a área da base, A_L a área lateral, A_T a área total, V o volume e h a altura de um cilindro, são verdadeiras as seguintes relações:

Cilindro reto:

$B = \pi R^2$ $\quad A_L = 2.\pi.R.h$ $\quad A_T = A_L + 2B$ $\quad V = B.h$ (10)

Cilindro: $V = \pi.R^2.h$

1.6. CONE

Um cone tem apenas uma base, que é um círculo. Altura é a distância entre o vértice e o plano da base. A reta que passa pelo vértice e pelo centro da base é chamada eixo do cone e os segmentos com extremidades no vértice e na circunferência da base são chamados geratrizes do cone.

Um cone reto (ou cone de revolução) é um cone cujo eixo é perpendicular à base.

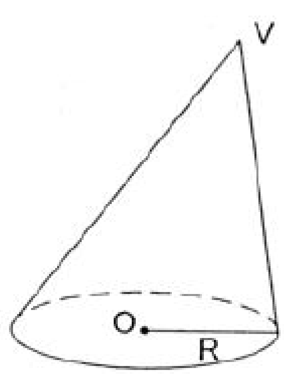
Um cone oblíquo é um cone cujo eixo é oblíquo em relação à base.

Uma secção meridiana de um cone reto é a intersecção do cone com um plano que contém seu eixo. As secções meridianas de um cone reto são triângulos isósceles congruentes.

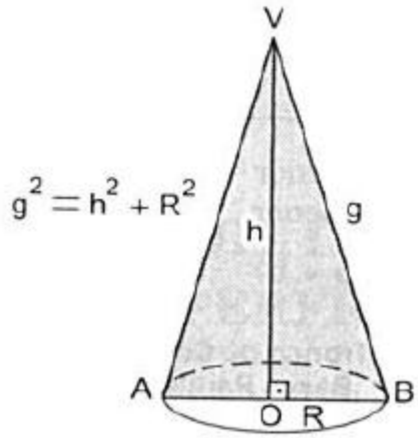
Um cone equilátero é um cone reto cuja secção meridiana é um triângulo equilátero.

Num cone equilátero, as geratrizes e os diâmetros da base são congruentes.

Cone Oblíquo

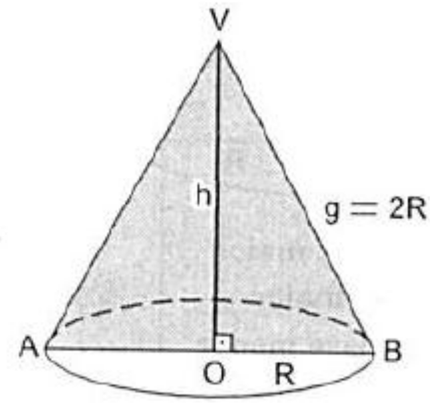


Cone Reto



ΔVAB é secção meridiana
ΔVAB é isósceles

Cone Eqüilátero



ΔVAB é eqüilátero

Sendo R o raio da base, B a área da base, A_L a área lateral, A_T a área total, V o volume e h a altura de um cone, são verdadeiras as seguintes relações:

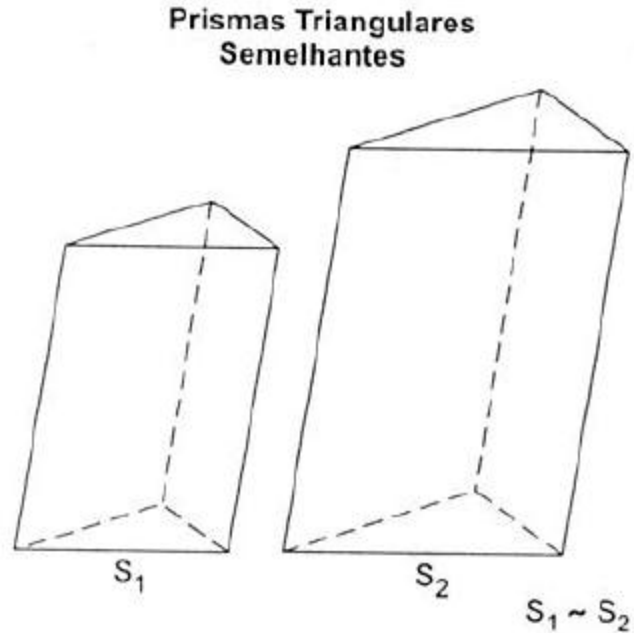
Cone reto:

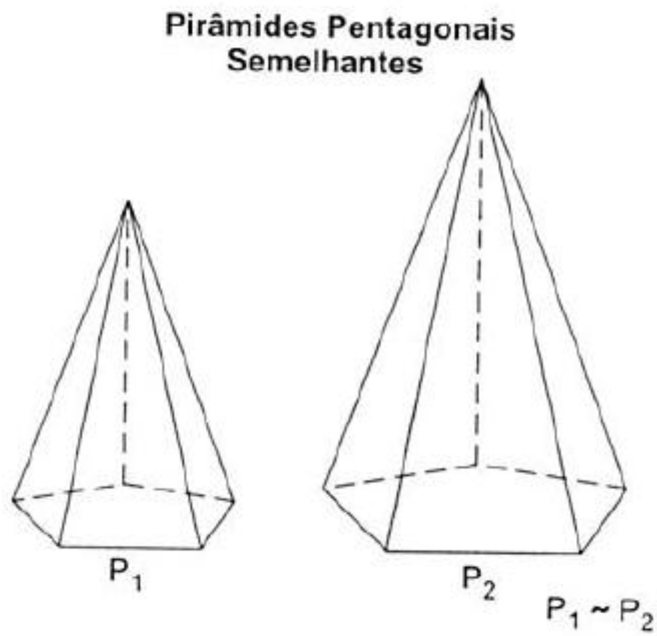
$$B = \pi R^2 \qquad A_L = \pi.R.g \qquad A_T = A_L + 2B \qquad V = \frac{1}{3}.B.h \qquad (11)$$

Cone: $V = \frac{1}{3}.\pi.R^2.h$

1.7. SEMELHANÇA DE SÓLIDOS

1) Dois sólidos de mesma natureza são ditos semelhantes se, e somente se, possuem os elementos homólogos ordenadamente proporcionais.





Chamaremos razão de semelhança (k) à razão entre dois elementos lineares homólogos (correspondentes) de sólidos semelhantes.

Se dois sólidos são semelhantes e k é a razão de semelhança, temos:

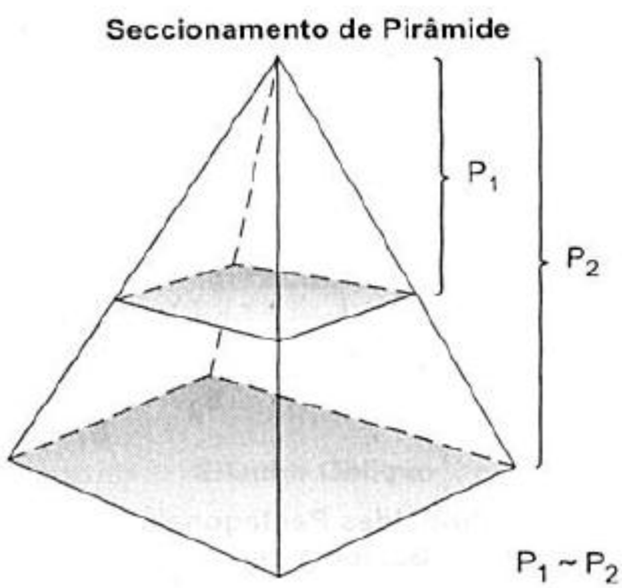
- k = razão entre arestas de faces homólogas;
- k = razão entre alturas homólogas;
- k = razão entre raios de bases homólogas;
- k = razão entre geratrizes homólogas.

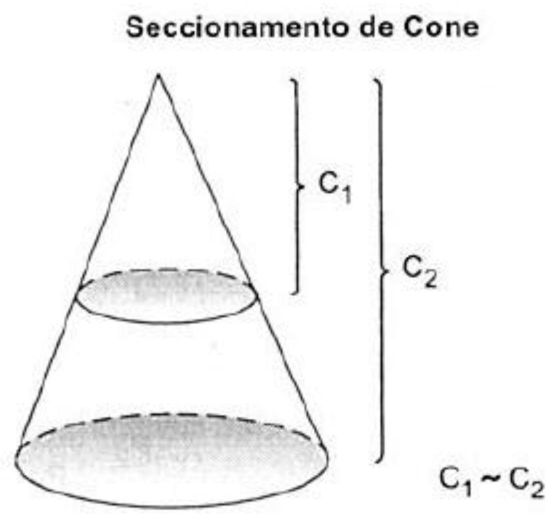
2) A razão entre áreas homólogas de sólidos semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança. Assim:

- k^2 = razão entre áreas de bases;
- k^2 = razão entre áreas laterais;
- k^2 = razão entre áreas totais.

Importante: Secções em Pirâmides e Cones

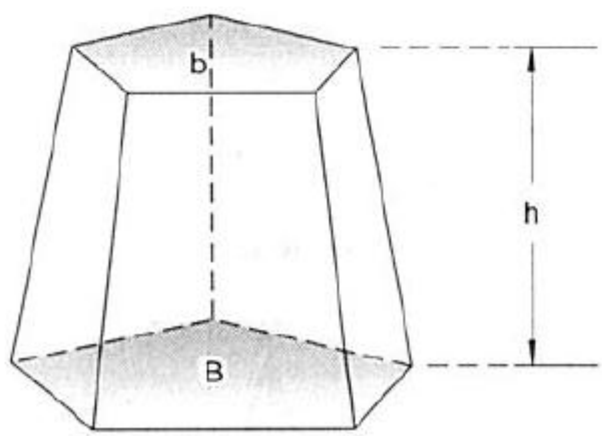
Pode-se demonstrar facilmente (usando semelhança de triângulos) que, seccionando-se uma pirâmide ou um cone por um plano paralelo ao plano da base, obtém-se uma nova pirâmide ou cone semelhante ao sólido primitivo.





1.8. TRONCO DE PIRÂMIDE E TRONCO DE CONE

De acordo com a observação do item anterior, vimos que, seccionando-se uma pirâmide ou um cone por um plano paralelo ao plano da base, obtém-se uma nova pirâmide ou um novo cone semelhante ao cone primitivo. Assim sendo, o sólido que sobra é chamado de tronco de pirâmide ou tronco de cone. As bases de tais troncos são paralelas.

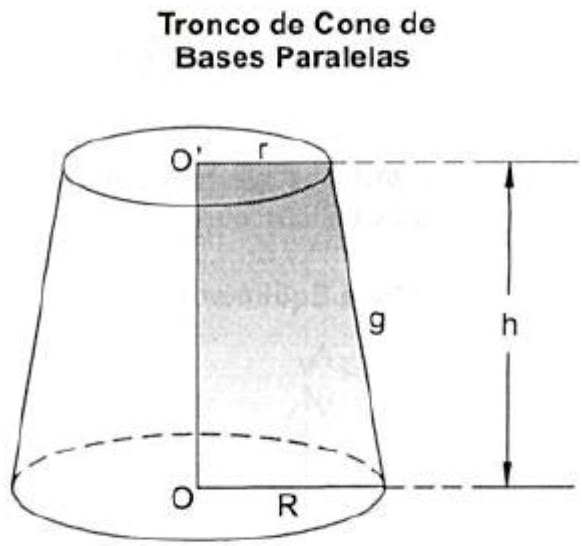


B : área da base maior

b : área da base menor

h : altura

$$V = \frac{1}{3}\left(B + \sqrt{Bb} + b\right) \qquad (14)$$



O: centro da base maior

R: raio da base maior

O': centro da base menor

r: raio da base menor

h: altura

g: geratriz

$$A_L = \pi(R + r)g \qquad (15)$$

$$V = \frac{\pi h}{3}\left(R^2 + Rr + r^2\right) \qquad (16)$$

A fórmula (15) só vale se $\overline{OO'}$ for perpendicular às bases (tronco de cone reto).

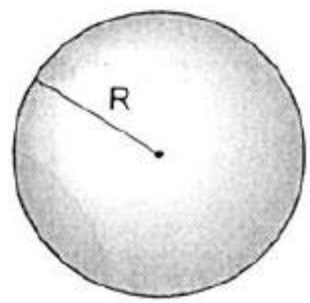
1.9. SUPERFÍCIES ESFÉRICAS E ESFERAS

Definições:

Seja P um ponto e R um número positivo. A superfície esférica de centro P e raio R é o conjunto de todos os pontos do espaço cuja distância a P é igual a R.

A esfera de centro P e raio R é o conjunto de todos os pontos do espaço cuja distância a P é menor ou igual a R.

Pode-se provar que a área de uma superfície esférica e o volume de uma esfera de raio R são respectivamente iguais a $4\pi R^2$ e $\frac{4}{3}\pi R^3$.



Assim:

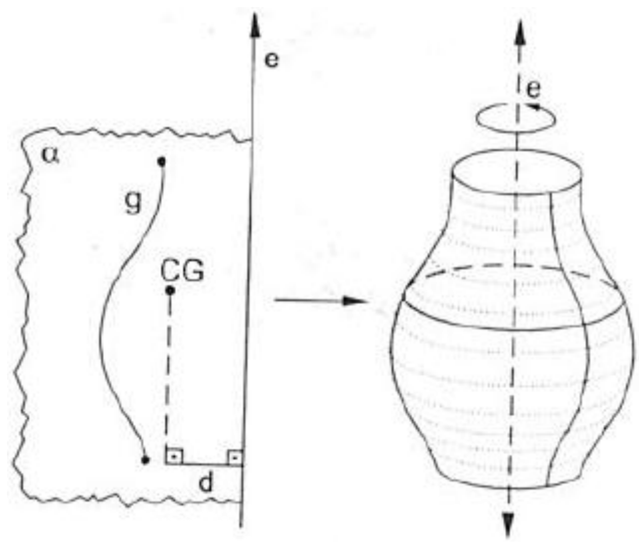
$$A = 4\pi R^2 \qquad (17)$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \qquad (18)$$

1.10. ROTAÇÃO DE LINHAS E SUPERFÍCIES

Superfícies de Revolução

Seja α um semiplano de origem e (eixo) e nele uma linha g (geratriz) que não intercepta o eixo. Girando esse semiplano em torno de e, a linha g gera uma superfície chamada superfície de revolução.



O cálculo da área de uma superfície de revolução pode ser feito de dois modos:

1º) Usando as expressões de área lateral e total que já são conhecidas (cilindro, cone, troncos, etc.)

2º) Usando a fórmula $A = 2.\pi.\ell.d$ (19)

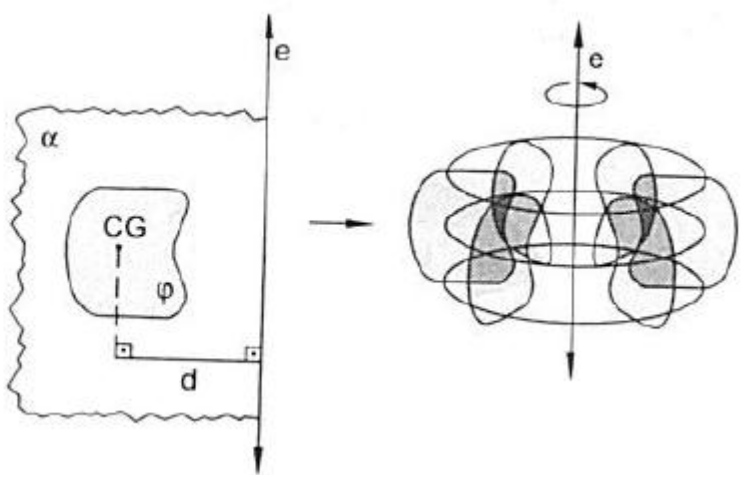
Onde:

- A = área da superfície gerada;
- ℓ = comprimento da geratriz;
- d = distância do centro de gravidade da geratriz ao eixo de rotação.

A expressão anterior é chamada de fórmula de Pappus-Guldin para o cálculo de superfícies geradas por rotação em torno de um eixo.

Sólidos de Revolução

Seja α um semiplano de origem e (eixo) e nele uma superfície φ (geratriz) que não intercepta o eixo. Girando esse semiplano em torno de e, a superfície φ gera um sólido chamado sólido de revolução.



O cálculo do volume de sólidos de revolução pode ser feito de dois modos:

1º) Usando as expressões de volumes dos sólidos que já são conhecidos (cilindro, cone, troncos, etc.)

2º) Usando a fórmula $V = 2.\pi.S.d$ (20)

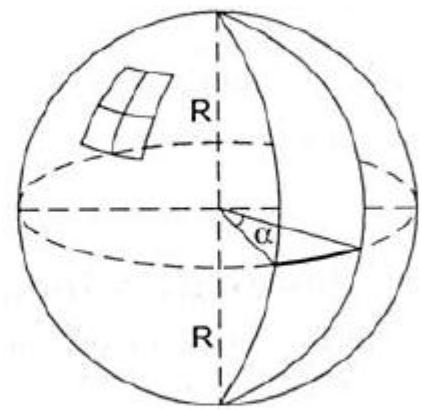
Onde:

- V = volume do sólido gerado;
- S = área da superfície geradora;
- d = distância do centro de gravidade da superfície ao eixo de rotação.

A expressão anterior é chamada de fórmula de Pappus-Guldin para o cálculo de volume de sólidos gerados por rotação em torno de um eixo.

1.11. SUBCONJUNTOS DE UMA SUPERFÍCIE ESFÉRICA

Fuso esférico

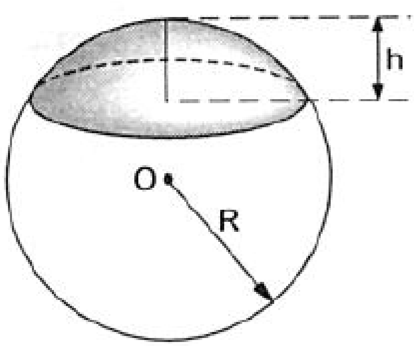


R : raio da superfície esférica

α : ângulo central do fuso

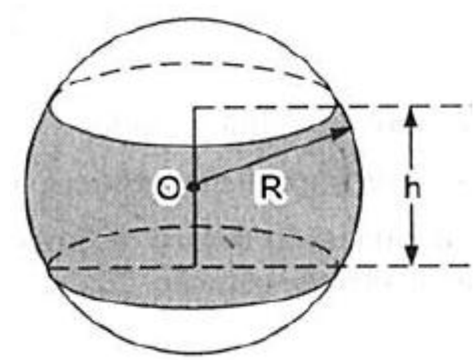
$$A_{fuso} = \frac{\pi R^2 \alpha}{90} \qquad (\alpha \text{ medido em graus})$$

Calota esférica



$$A_{calota} = 2\pi R h$$

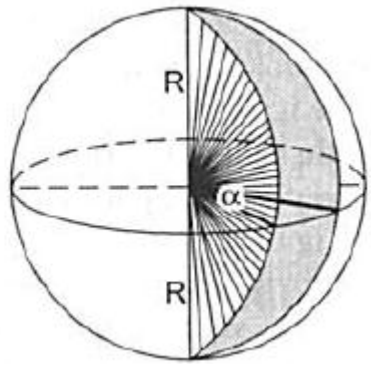
Zona esférica



$$A_{zona} = 2\pi R h$$

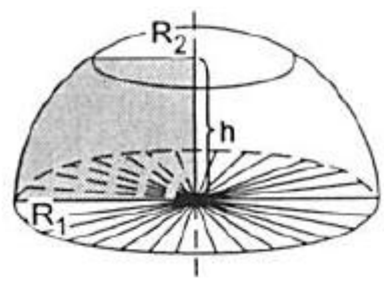
1.12. SUBCONJUNTOS DE UMA ESFERA

Cunha esférica



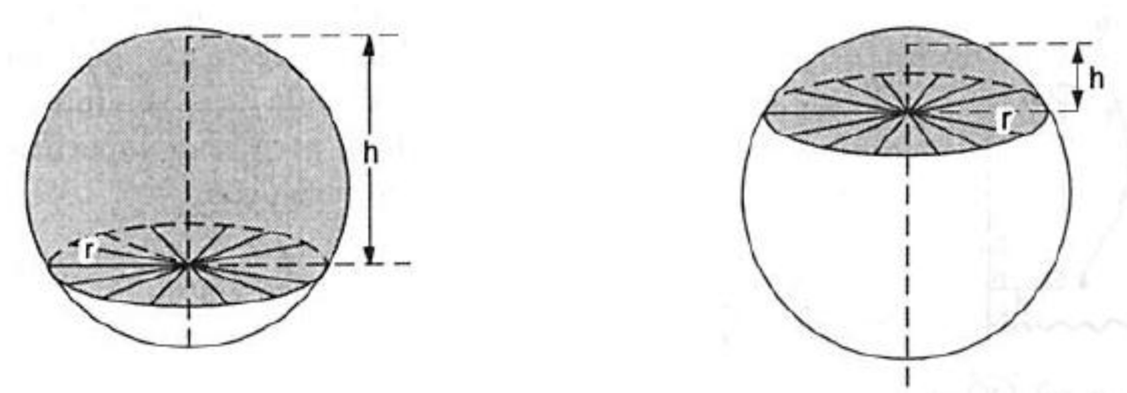
$$V_{cunha} = \frac{\pi R^3 \alpha}{270}$$ (α medido em graus)

Segmento esférico de duas bases



$$V = \frac{\pi h}{6}\left[3\left(R_1^2 + R_2^2\right) + h^2\right]$$

Segmento esférico de uma base



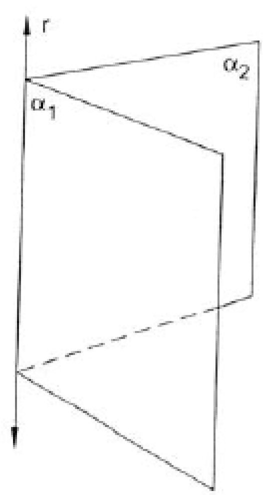
$$V = \frac{\pi h}{6}\left(3r^2 + h^2\right)$$

1.13. COMPLEMENTOS DE GEOMETRIA

Diedros (ou Ângulos Diédricos)

Definições:

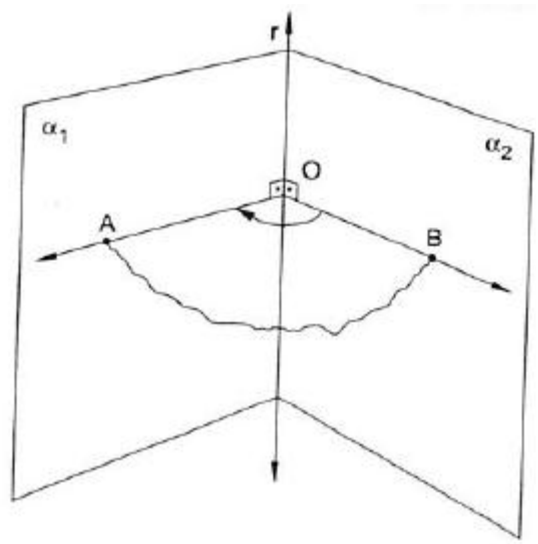
Sejam α_1 e α_2 dois semiplanos com origem em numa reta r. A reunião dos semiplanos α_1 e α_2 é chamada diedro (ou ângulo diédrico). A reta r é chamada de aresta do diedro e os semiplanos α_1 e α_2 são chamados faces do diedro.



Secção Reta e Medida de um Diedro

Seja $\alpha_1 r \alpha_2$ um diedro com aresta r e faces α_1 e α_2.

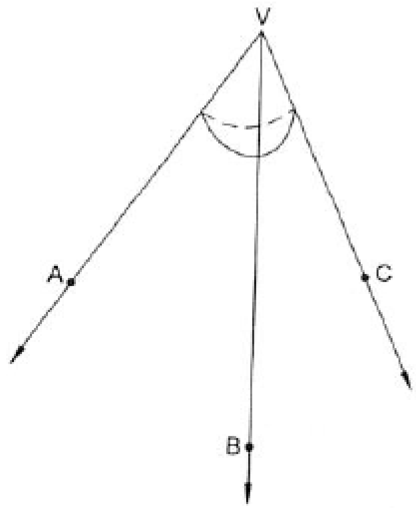
Seja $\overrightarrow{OA}$ uma semi-reta contida em α_1 tal que $O \in r$ e $\overrightarrow{OA} \perp r$ e seja $\overrightarrow{OB}$ uma semi-reta contida em α_2 tal que $O \in r$ e $\overrightarrow{OB} \perp r$. O ângulo $A\hat{O}B$ é chamado de secção reta do diedro e, por definição, a medida do diedro é a medida do ângulo $A\hat{O}B$. As medidas dos diedros são usadas para comparar e classificar os mesmos. Assim sendo, podemos definir expressões como diedro agudo, diedro reto, diedro obtuso, diedros complementares, diedros suplementares, etc.



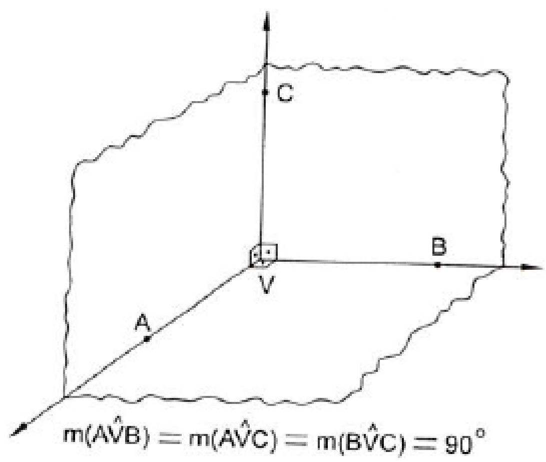
Triedros (ou Ângulos Triédricos)

Sejam $\overrightarrow{VA}$, $\overrightarrow{VB}$ e $\overrightarrow{VC}$ três semi-retas não-coplanares com origem no ponto V. A reunião dos ângulos $A\hat{V}B$, $A\hat{V}C$ e $B\hat{V}C$ é chamada triedro (ou ângulo triédrico) $V(A,B,C)$.

O ponto V é chamado vértice do triedro; as semi-retas $\overrightarrow{VA}$, $\overrightarrow{VB}$ e $\overrightarrow{VC}$ são chamadas arestas do triedro e os ângulos $A\hat{V}B$, $A\hat{V}C$ e $B\hat{V}C$ são chamados faces do triedro.



Um triedro que tem as faces retas (ângulos retos) é chamado triedro triretângulo (ou triedro triortogonal).



Teorema 1: f_1, f_2 e f_3 são medidas das faces de um triedro se, e somente se, $f_1 + f_2 + f_3 < 360°$ e $|f_1 - f_2| < f_3 < f_1 + f_2$.

Teorema 2: d_1, d_2 e d_3 são medidas de diedros de um triedro se, e somente se, $180° < d_1 + d_2 + d_3 < 540°$ e $|(180° - d_1) - (180° - d_2)| < (180° - d_3) < (180° - d_1) + (180° - d_2)$.

Ângulos Poliédricos Convexos

Definições:

Seja $\overrightarrow{VA_1}$, $\overrightarrow{VA_2}$, ..., $\overrightarrow{VA_n}$, $(n \geq 3)$, uma sequência de n semi-retas não-coplanares com mesma origem V, de modo que o plano determinado por duas semi-retas consecutivas deixa as $(n-2)$ restantes num mesmo semi-espaço. A reunião dos ângulos $A_1\hat{V}A_2$, $A_2\hat{V}A_3$, ..., $A_n\hat{V}A_1$ é chamada ângulo poliédrico convexo. O ponto V é chamado vértice, as semi-retas $\overrightarrow{VA_1}$, $\overrightarrow{VA_2}$, ..., $\overrightarrow{VA_n}$ são chamadas arestas e os ângulos $A_1\hat{V}A_2$, $A_2\hat{V}A_3$, ..., $A_n\hat{V}A_1$ são chamados faces do ângulo poliédrico convexo.

Teorema: As medidas das faces de um ângulo poliédrico convexo são tais que cada uma é menor que a soma das demais e a soma das medidas de todas as faces é menor que $360°$.

Ângulos Poliédricos Convexos

Definições:

Consideremos um número natural n $(n \geq 4)$ de polígonos convexos tais que:

a) dois polígonos não estão num mesmo plano.

b) cada lado de polígono é comum a dois polígonos no máximo.

c) o plano de cada polígono deixa os demais num mesmo semi-espaço.

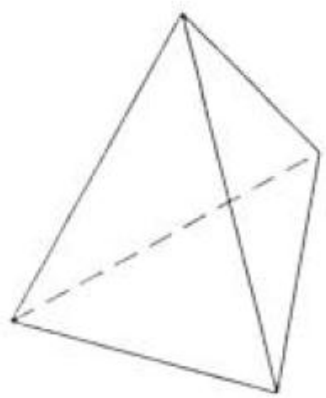
O sólido limitado por dois todos os n polígonos considerados é chamado poliedro convexo. Um poliedro convexo possui os seguintes elementos:

- vértices: são os vértices dos n polígonos convexos.
- arestas: são as arestas dos n polígonos convexos.
- faces: são os n polígonos considerados.

A reunião das faces é chamada superfície do poliedro convexo.

Teorema de Euler: Se V é o número de vértices, A o número de arestas e F o número de faces de um poliedro convexo, então $V - A + F = 2$.

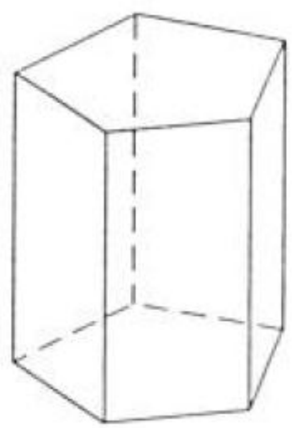
Exemplos:



$V = 4$

$A = 6$

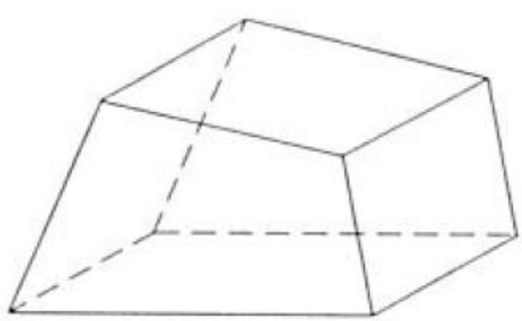
$F = 4$



$V = 10$

$A = 15$

$F = 7$



$V = 8$

$A = 12$

$F = 6$

Em qualquer um dos três casos apresentados anteriormente, $V - A + F = 2$.

Se retirarmos de um poliedro convexo (fechado) um polígono (face), obteremos um poliedro convexo aberto $V - A + F = 1$.

<u>Teorema:</u> A soma S das medidas dos ângulos das faces (polígonos) de um poliedro convexo que possui V vértices é $S = (V - 2).360°$.

Poliedros de Platão

Definições:

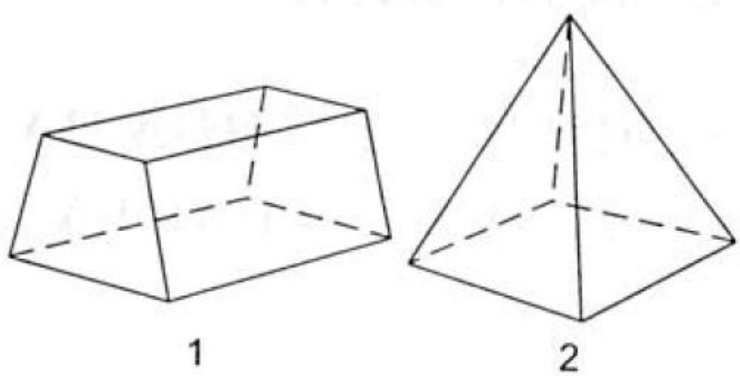
Um poliedro é chamado poliedro de Platão se:

a) todas as faces têm o mesmo número n de arestas.

b) todos os ângulos poliédricos têm o mesmo número m de arestas.

c) vale o Teorema de Euler $V - A + F = 2$.

Como exemplo, consideremos as duas figuras a seguir:



O poliedro (1) é de Platão, pois todas as faces são quadrangulares $(n = 4)$, todos os ângulos são triédricos $(m = 3)$ e $V - A + F = 8 - 12 + 6 = 2$.

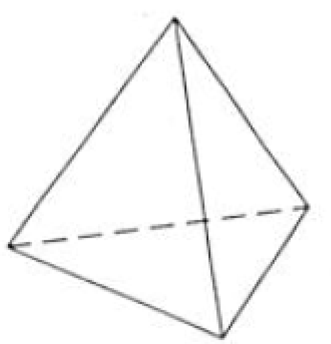
O poliedro (2) não é poliedro de Platão, pois há quatro faces triangulares e uma quadrangular.

Teorema: Existem cinco, e somente cinco, classes de poliedros de Platão.

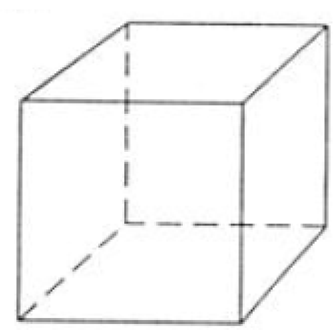
Nome	m	n	V	A	F
Tetraedro	3	3	4	6	4
Hexaedro	3	4	8	12	6
Octaedro	4	3	6	12	8
Dodecaedro	3	5	20	30	12
Icosaedro	5	3	12	30	20

Poliedros Regulares

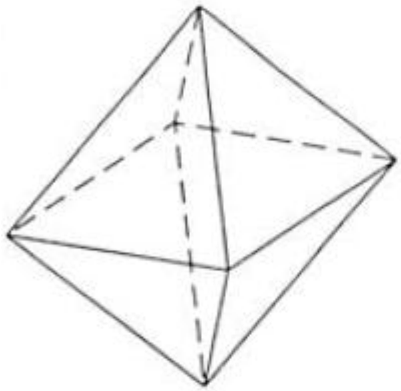
Um poliedro de Platão é chamado poliedro regular se todas as faces são polígonos regulares congruentes e todos os ângulos poliédricos são congruentes. Há exatamente cinco poliedros regulares:



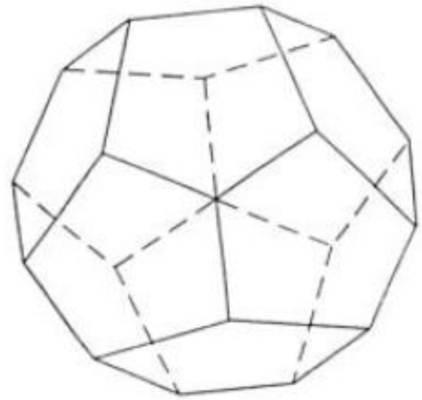
tetraedro regular



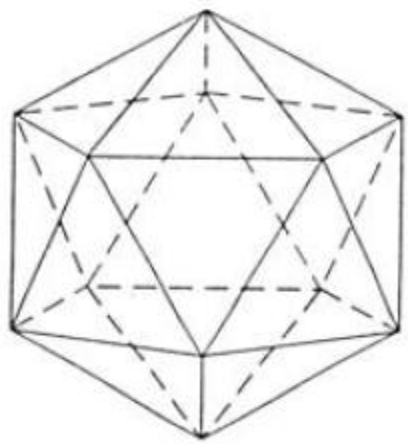
hexaedro regular



octaedro regular



dodecaedro regular



icosaedro regular