FRAÇÕES ALGÉBRICAS

DEFINIÇÃO:

Uma fração é algébrica se seu numerador e seu denominador forem expressões algébricas. Como exemplos de tais frações podemos ter $\frac{a}{b+1}$ onde o numerador é "a" e o denominador é "b+1", $\frac{3x-7}{4m+3}$ onde o numerador é "3x-7" e o denominador é "4m+3", $\frac{3}{4}$ onde o numerador é "3" e o denominador é "4".

Você deve ter percebido que a última fração, que é numérica, também é algébrica. Isto significa que todas as frações que conhecemos são realmente algébricas.

Como você já sabe, nunca podemos dividir alguma coisa por zero, e, por este motivo, é necessário que o denominador de qualquer fração seja diferente de zero. Logo, na fração $\frac{p+2}{p-4}$ o denominador "p - 4" não pode ser igual a zero: $p-4 \neq 0$, então $p \neq 4$. Do mesmo modo, para que a fração $\frac{x+y}{x-y}$ exista devemos ter $x-y \neq 0$, e isto implica que $x \neq y$. A estas exigências para as variáveis, sejam elas representadas por x, y, p ou qualquer outra letra, damos o nome de Condições de Existência.

SIMPLIFICAÇÃO:

Simplificar uma fração é o mesmo que obter uma nova fração que seja equivalente à fração dada, mas que possua menor quantidade de símbolos. Para que possamos simplificar uma fração, devemos inicialmente fatorar os seus componentes (numerador e denominador), e, em seguida, cancelar os fatores que sejam comuns a eles.

Assim, se simplificarmos a fração $\frac{36}{27}$, teremos: $\frac{36}{27} = \frac{2^2.3^2}{3^3} = \frac{2.2.\cancel{3}.\cancel{3}}{3.\cancel{3}.\cancel{3}} = \frac{2.2}{3} = \frac{4}{3}$

A fração $\frac{18xy^3}{360x^2}$, com a fatoração dos seus componentes e posterior simplificação dos fatores comuns se torna:

$\frac{18xy^3}{360x^2} = \frac{2.3^2.x.y^3}{2^3.3^2.5.x^2} = \frac{\cancel{2}.\cancel{3}.\cancel{3}.\cancel{x}.y.y.y}{\cancel{2}.2.2.\cancel{3}.\cancel{3}.5.\cancel{x}.x} = \frac{y^3}{20x}$. (Naturalmente, devemos ter $x \neq 0$)

Simplifiquemos agora a fração $\frac{3x+6}{x^2-4}$. Devemos inicialmente fatorar seus elementos, e tal fatoração é algébrica: $\frac{3x+6}{x^2-4} = \frac{3\cancel{(x+2)}}{\cancel{(x+2)}(x-2)} = \frac{3}{x-2}$, onde $x-2 \neq 0$, e $x+2 \neq 0$, ou seja, $x \neq 2$ e $x \neq -2$.

EXERCÍCIOS: Simplifique e dê as condições de existência das frações:

1) $\frac{250a^5b}{45a^3b^4}$;

2) $\frac{121x^2y^3z}{77x^4y^3}$;

3) $\frac{3ab^2}{15a^2b^3}$;

4) $\frac{125x+250a}{x+2a}$;

5) $\frac{a^2-b^2}{2a+2b}$;

6) $\frac{4x^3-4x^2}{x^2-2x+1}$;

7) $\frac{p^2+2pq+q^2}{p^2-q^2}$;

8) $\frac{ax+ay+bx+by}{2ax+2ay}$;

9) $\frac{x^2-9y^2}{ax-3ay+bx-3by}$;

10) $\frac{3m^2-3n^2}{m^3-mn^2+m^2-n^2}$

RESPOSTAS:

1) $\frac{50a^2}{9b^3}$ com a e $b \neq 0$;

2) $\frac{11z}{7x^2}$ onde $b \neq 0$;

3) $\frac{1}{5ab}$ onde a e $b \neq 0$;

4) 125 onde $x \neq 2a$;

5) $\frac{a+b}{2}$, com $a \neq -b$;

6) $\frac{4x^2}{x-1}$, com $x \neq -1$;

7) $\frac{p+q}{p-q}$, onde $p \neq \pm q$;

8) $\frac{a+b}{2a}$, com $a \neq 0$ e $x \neq -y$;

9) $\frac{x+3y}{a+b}$, com $a \neq -b$ e $x \neq 3y$;

10) $\frac{3}{m+1}$, onde $m \neq -1$ e $m \neq \pm n$.

MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO

Para efetuarmos estas operações entre frações algébricas, devemos fatorar seus elementos, inverter as frações que estiverem logo após os sinais de divisão, multiplicá-las e, em seguida simplificar as expressões que estiverem no numerador e no denominador, do mesmo modo que fazíamos quando multiplicávamos frações numéricas.

Efetuemos as operações indicadas nos seguintes exemplos:

$\frac{3x^2y^4}{2ab^5} \cdot \frac{4a^3y^2}{27b^2x^2} : \frac{6bx^3}{8a^2y} = \frac{3x^2y^4}{2ab^5} \cdot \frac{2^2a^3y^2}{3^3b^2x^2} \cdot \frac{2^3a^2y}{2.3bx^3} = \frac{2^5 3a^5x^2y^7}{2^2.3^4ab^8x^5} = \frac{2^3a^4y^7}{3^3b^8x^3} = \frac{8a^4y^7}{27b^8x^3}$, com a,b,x e y não nulos.

2) $\frac{abc}{xyz} : \frac{a^2x^2z}{bcy} \cdot \frac{ab^2z}{cyx} = \frac{abc}{xyz} \cdot \frac{bcy}{a^2x^2z} \cdot \frac{ab^2z}{cyx} = \frac{a^2.b^4c^2yz}{a^2cx^4y^2z^2} = \frac{b^4c}{x^4yz}$, com todas as letras não nulas.

3) $\frac{a^2+2ab+b^2}{mp-m} \cdot \frac{ap-a-bp+b}{4a^2-4b^2} : \frac{a+b}{8mx} = \frac{(a+b)^2}{m(p-1)} \cdot \frac{(p-1)(a-b)}{2^2(a+b)(a-b)} \cdot \frac{2^3mx}{a+b} = \frac{2x}{1} = 2x$,
onde $m \neq 0, p \neq 1, a \neq \pm b$

EXERCÍCIOS:

Efetuar as operações indicadas:

1) $\frac{18a^3x^4}{25b^2y} \cdot \frac{75b^3x}{12a^2y^3}$;

2) $\frac{49m^3p^2}{50nq^4} : \frac{14m^2p^2}{125n^2q^3}$;

3) $\dfrac{x^2-4}{m+3}.\dfrac{m^2-9}{6x+12}$;

4) $\dfrac{ab+ac}{14a^2b}:\dfrac{b^2-c^2}{49a^3c}.\dfrac{3bc^2}{2b+2c}$;

5) $\dfrac{m^3-4m}{p^2-25}:\dfrac{5m+10}{2x+2y}.\dfrac{m^3+4m^2+4m}{x^3+x^2y-xy^2-y^3}:\dfrac{m^5-16m}{p^2-10p+25}$

RESPOSTAS:

1) $\dfrac{3abx^5}{2y^4}$ com a,b e y não nulos;

2) $\dfrac{35mnq^3}{2}$ com m,n,p,q não nulos;

3) $\dfrac{(x-2)(m-3)}{6}, m\neq -3, x\neq -2$;

4) $\dfrac{21a^2c^3}{4(b^2-c^2)}$, com $a,b,c\neq 0$ e $b\neq \pm c$

5) $\dfrac{2m(m+2)(p-5)}{5(p+5)(m^2+4)(x^2-y^2)}$, com $p\neq \pm 5,\ x\neq \pm y, m\neq 0, m\neq \pm 2$.

ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO

Como você já aprendeu adicionar e subtrair frações numéricas, você verá que o procedimento agora será praticamente o mesmo. Vejamos as duas possibilidades de cálculo:

A - As frações envolvidas possuem denominadores iguais.

Neste caso devemos apenas somar e subtrair os numeradores e repetir o denominador. Observemos os exemplos:

$$\frac{3p}{2m}+\frac{5p}{2m}-\frac{4p}{2m}=\frac{3p+5p-4p}{2m}=\frac{4p}{2m}, \text{com } m\neq 0.$$

$$\frac{8x}{2y^2}-\frac{3x-4y}{2y^2}+\frac{7y-3}{2y^2}=\frac{8x-(3x-4y)+(7y-3)}{2y^2}=\frac{8x-3x+4y+7y-3}{2y^2}=\frac{5x+11y-3}{2y^2}, y\neq 0$$

B– As frações envolvidas possuem denominadores diferentes.

Neste caso, a soma ou a subtração terão um único denominador, que será igual ao Mínimo Múltiplo Comum dos denominadores das frações. Em seguida, dividiremos o denominador comum pelo denominador de cada fração e multiplicaremos o resultado pelo seu numerador. Para terminar, efetuaremos as adições e subtrações que estiverem indicadas na expressão, e, caso seja possível, devemos simplificar a fração final.

Acompanhe os seguintes exemplos:

1) $\frac{3a}{2b}+\frac{5b}{3a}=\frac{3a.3a+2b.5b}{6ab}=\frac{9a^2+10b^2}{6ab}$ [note que MMC(2b,3a)=6ab], a e b $\neq 0$.

2) $\frac{4x}{5y}+\frac{3x}{10y}-\frac{10x}{4y}=\frac{4.4x+2.3x-5.10x}{20y}=\frac{16x+6x-50x}{20y}=-\frac{28x}{20y}=-\frac{7x}{5y}$, com y$\neq 0$.

Veja que [MMC(5y,10y,4y) = 20y], e que a fração final foi simplificada por 4 .

3) $\frac{3x^2+2y^2}{x^2-y^2}+\frac{4x}{x+y}-\frac{x-2y}{2x-2y}=\frac{3x^2+2y^2}{(x+y)(x-y)}+\frac{4x}{x+y}-\frac{x-2y}{2(x-y)}=$

$=\frac{2(3x^2+2y^2)+2(x-y)4x-(x+y)(x-2y)}{2(x+y)(x-y)}=\frac{6x^2+4y^2+8x^2-8xy-x^2+2xy-xy+2y^2}{2(x+y)(x-y)}=$

$=\frac{13x^2+6y^2-7xy}{2(x+y)(x-y)}$ [MMC(2(x+y),(x-y),(x+y)(x-y))=2(x+y)(x-y)], com $x\neq\pm y$.

EXERCÍCIOS :

Efetuar as operações indicadas:

1) $\frac{3a}{2b}+\frac{5a}{6b}-\frac{2a}{3b}$;

2) $\frac{3a}{2b}+\frac{5a}{6b}-\frac{2a}{3b}$;

3) $\frac{x}{y}+\frac{y}{x+y}+\frac{x}{x+y}$;

4) $\frac{p+q}{p-q}+\frac{p-q}{p+q}-\frac{4pq}{p^2-q^2}$

RESPOSTAS:

1) $\dfrac{5a}{3b}$;

2) $\dfrac{4ab}{a^2-b^2}$;

3) $\dfrac{x+y}{y}$;

4) zero

OBSERVAÇÃO:

Se uma expressão apresentar multiplicações, divisões, adições e subtrações onde não haja sinais de pontuação, devemos resolver antes as multiplicações e divisões, que são as operações mais fortes, e, em seguida, as adições e subtrações.

EXEMPLO:

Efetuar as operações indicadas:

1) $$\frac{2a-2b}{25xy^2}:\frac{a^2-2ab+b^2}{50x^3}-\frac{3x}{5a-5b}.\frac{5x}{9}=\frac{2(a-b)}{5^2xy^2}.\frac{2.5^2x^3}{(a-b)^2}-\frac{3x}{5(a-b)}.\frac{5x}{3^2}=$$

$$=\frac{4x^2}{a-b}-\frac{x^2}{3(a-b)}=\frac{12x^2-x^2}{3(a-b)}=\frac{11x^2}{3(a-b)}, \text{ onde } x \text{ e } y\neq 0 \text{ e } a\neq b$$

Caso a expressão possua sinais de pontuação, como parênteses, colchetes ou chaves, devemos iniciar operações por aquelas internas aos parênteses, em seguida devemos passar a resolver as internas aos colchetes, após nos dedicamos às entre as chaves, e, no fim, às operações que estejam fora de qualquer sinal de pontuação.

2) $$\left(\frac{x}{y}.\frac{y}{xz}-\frac{2}{z}\right).\frac{z}{y}+\frac{3}{z^2}:\frac{6}{z}.2-\frac{3x^2}{y}.\frac{y}{z}:\frac{x^3}{z}=\left(\frac{1}{z}-\frac{2}{z}\right).\frac{z}{y}+\frac{3}{z^2}.\frac{z}{6}.2-\frac{3x^2}{y}.\frac{y}{z}.\frac{z}{x^3}=\frac{-1}{z}.\frac{z}{y}+\frac{1}{z}-\frac{3}{x}=$$

$$=\frac{-1}{y}+\frac{1}{z}-\frac{3}{x}=\frac{-xz+xy-3yz}{xyz}, \text{ com } x, y \text{ e } z\neq 0$$

EXERCÍCIOS:

Efetue as operações indicadas, supondo a existência das expressões:

1) $\left(\frac{x}{x+2}:\frac{2x}{x-2}-\frac{2x}{x-2}\right).\frac{x+2}{6}$;

2) $\left(\frac{2a^2+2b^2}{a^2-b^2}-\frac{a-b}{a+b}\right):(-\frac{a+b}{a-b})$;

3) $\frac{3a}{4b}.\frac{3b}{8a}:\frac{6}{5a}+\frac{9b}{8a}:\frac{1}{3a}:\frac{3b}{4a}$

RESPOSTAS:

1) $\frac{-1}{3x-6}$;

2) -1;

3) $\frac{303a}{64}$
