



## **Jogos Matemáticos nas Aulas do Ensino Médio: Pife-Trigonométrico**

Leandro Zeferino

Trabalho de Conclusão de Curso Superior em Licenciatura em Matemática,  
orientado pelo Prof. Dr. Rogério Ferreira da Fonseca.

IFSP  
São Paulo  
2015

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

---

Zeferino, Leandro

Jogos Matemáticos nas aulas do Ensino Médio: Pife  
Trigonométrico Curso de Licenciatura em Matemática / Leandro  
Zeferino. - São Paulo: IFSP, 2015.  
56f

Trabalho de Conclusão do Curso Superior de Licenciatura em  
Matemática - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de  
São Paulo

Orientador(es): Rogerio Ferreira da Fonseca.

1. Jogo para Ensino Médio. 2. Trigonometria. 3. Ensino  
Aprendizagem. I. Título do trabalho.

---

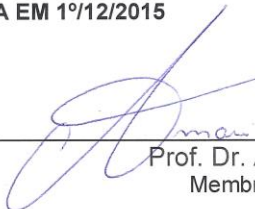
LEANDRO ZEFERINO

JOGOS MATEMÁTICOS NAS AULAS DO ENSINO MÉDIO:  
PIFE-TRIGONOMÉTRICO

Monografia apresentada ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, em cumprimento ao requisito exigido para a obtenção do grau acadêmico de Licenciado em Matemática.

APROVADA EM 1º/12/2015

CONCEITO: 10,0 (Dez)

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Amári Goulart  
Membro da Banca

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Henrique Marins de Carvalho  
Membro da Banca

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Rogério Ferreira da Fonseca  
Orientador

  
\_\_\_\_\_  
Aluno: Leandro Zeferino



*“Não basta ensinar ao homem uma especialidade. Porque se tornará assim uma máquina utilizável, mas não uma personalidade. É necessário que se adquira um senso prático daquilo que vale a pena ser empreendido, daquilo que é belo, do que é moralmente correto. A não ser assim, ele se assemelhará, com seus conhecimentos profissionais, mais a um cão ensinado do que uma criatura harmoniosamente desenvolvida. Deve aprender a compreender as motivações dos homens, suas quimeras e suas angústias para determinar com exatidão seu lugar exato em relação a seus próximos e à comunidade. Os excessos do sistema de competição e de especialização prematura, sob o falacioso pretexto da eficácia, assassinam o espírito, impossibilitam qualquer vida cultural e chegam a suprimir os progressos nas ciências do futuro. É preciso, enfim, tendo em vista a realização de uma educação perfeita, desenvolver o espírito crítico na inteligência do jovem.”*

*Albert Einstein*



*A minha mãe Maria*

*Aos meus irmãos, David, Daniel,*

*Marinês e Eulália*





## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço a todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para que eu chegasse até aqui e que ajudaram me tornar uma pessoa melhor.

Agradeço a minha mãe Maria do Socorro Costa que, apesar de não ser alfabetizada, é uma pessoa de grande sabedoria que me ensinou os principais valores da vida, como respeito, honestidade, amizade, entre outros.

Agradeço aos meus irmãos David, Daniel, Marinês e Eulália que sempre me apoiaram nos momentos difíceis e foram de fundamental importância na minha formação como cidadão.

Agradeço ao meu cunhado Fábio Campos, como se fosse um irmão.

Aos amigos Renato e Osmar.

Aos meus amigos do curso Alberto, Ana Olímpia, Anderson (Perucão), André, Arnaldo, Diego, Diogo (Paçoca), Filipe, Jorge, Leonardo, Marcos (Marcão), Paulo Leonardelli, Rafael Polesi, Thais Matos, Orlando, Wilian (Bomba).

Agradeço aos professores e funcionários do IFSP-SP que contribuíram para minha formação.

Em especial agradeço a orientação do Prof. Dr. Rogério Ferreira da Fonseca; ao Prof. Dr. Henrique Marins de Carvalho; a Profa. Me. Lia Corrêa da Costa Souza, e aos professores da banca examinadora.

Agradeço a todos que contribuíram para que esse momento se tornasse realidade.



## RESUMO

O presente trabalho surge da necessidade de se pensar o ensino de Matemática de forma diferenciada e acessível, para isso foi criado um jogo, com intuito de aproximar os alunos do conteúdo abordado, utilizando o senso de disputa entre os estudantes em prol do ensino e aprendizagem, assim os alunos jogadores se dedicam a conhecer as regras e o conteúdo abordado, para se saírem vitoriosos nas partidas. Denominado Pife-trigonométrico, tem por objetivo utilizar o jogo como procedimento didático com vistas a dinamizar o ensino e aprendizado da Matemática, em especial, a trigonometria, tendo em vista resultados de pesquisas desenvolvidas no âmbito da Educação Matemática darem conta ser esse um assunto que os alunos têm dificuldades de compreensão e assimilação.

**Palavras-chaves:** Jogos, Matemática, Trigonometria, Ensino e Aprendizagem.



## MATHEMATICAL GAMES IN HIGH SCHOOL CLASSES: PIPE - TRIGONOMETRIC

### ABSTRACT

This paper was born from the necessity of teaching mathematics in a differentiated and accessible way, therefore it was created a game, aiming to bring the students closer to the content taught, using the sense of dispute among them in favor of teaching and learning process, as players, they will be dedicated to know the rules and the content approached, in order to make them win the matches. Named Pipe-Trigonometric, the goal is to use the game as a teaching methodology turning the teaching and learning of mathematics process dynamic, mainly what it is connected to trigonometry area, according to searches developed in mathematics education this is a topic that students have difficulties in understanding and assimilation.

**Keywords:** Games, Mathematics, Trigonometry, teaching and learning



## SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO .....	17
2. DIFICULDADE NO ENSINO E NA APRENDIZAGEM DE TRIGONOMETRIA .....	21
3. JOGOS COMO METODOLOGIA NAS AULAS .....	29
4. O JOGO E SUAS REGRAS (PIFE TRIGONOMÉTRICO).....	39
4.1 Relato de uma experiência com o jogo .....	41
5. CONSIDERAÇÕES FINAIS .....	45
6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	47





## 1 INTRODUÇÃO

O início da docência na Rede Pública de Ensino do Estado de São Paulo, em uma unidade localizada na zona leste da capital, trouxe um grande desafio. O desinteresse dos alunos com o estudo da Matemática saltava aos olhos, especialmente se o assunto abordado fosse Trigonometria. Esse desinteresse não se limita apenas a algumas séries, de acordo com Oliveira (2006), Lima e Bulos (2011), Silva e Frota (2010), entre outros, esse desinteresse vai do Ensino Fundamental II até o Ensino Médio, pois os estudantes têm dificuldades em diferenciar lado e ângulo de um triângulo, e o professor, por sua vez, se preocupa mais com a parte algébrica e excesso de formalismo.

Cardoso (2008) afirma que a Matemática é a disciplina que mais reprova devido ao modo como é apresentada aos alunos, com aulas expositivas, sem a participação ativa dos estudantes na construção do conhecimento, contribuindo com a aversão quase que generalizada com a Matemática.

Lima e Bulos (2011) evidenciam que conteúdos desvinculados da realidade fazem que os alunos percam ou nem despertem o interesse em aprender. Isso se torna perceptível quando observadas avaliações sobre determinados assuntos, dentre eles a Trigonometria, devido à falta de interesse por parte dos discentes e a desmotivação dos docentes.

Considerando que a falta de atenção dos alunos dificulta extremamente o desenvolvimento do trabalho em sala de aula, foi necessário estabelecer uma reflexão acerca de estratégias que pudessem captar sua atenção e desenvolver o gosto pela disciplina.

A inspiração surgiu ao observar alguns alunos do sétimo ano, quando em certa ocasião pediram para usar a lousa. O que normalmente acontece nesses casos é que os alunos fiquem desenhando. Entretanto, iniciaram um jogo matemático chamado relógio, cuja regra é: cada aluno desenha um relógio analógico; no centro coloca-se um número que será o indicador da tabuada; nos números que indicam as horas desse relógio é colocado o resultado correspondente desta operação, logo, vence o jogo quem termina primeiro e corretamente.

A observação dessa situação apontou para a possibilidade de utilizar um tipo de jogo para abordar o conteúdo de Trigonometria no Triângulo Retângulo. Foi possível observar também que os alunos pareciam indicar certa predileção por um jogo chamado Uno, espécie de baralho.

A observação do referido jogo na lousa e da preferência pelo Uno nos levou a considerar a adaptação do jogo de cartas Pife para auxiliar no ensino de Trigonometria, mais que isso, adaptar o jogo para que pudesse despertar interesse e tornar agradável o ensino desse tópico da Matemática. A partir daí começou o desenvolvimento do baralho trigonométrico e do jogo.

O jogo é composto por um baralho com 49 cartas (razões trigonométricas no triângulo retângulo), para jogar são necessários no mínimo dois jogadores e no máximo quatro. Um participante deve embaralhar as cartas e pedir para o próximo no sentido anti-horário dividir o baralho em dois montes a sua escolha, o jogador que embaralhou deve recolher o monte que ficou embaixo e colocar encima do outro e depois distribuir seis cartas para cada um dos participantes.

O jogador que dividiu o baralho em dois montes inicia o jogo, pegando uma carta do monte que sobrou, caso sirva para formar um trio ou até mesmo par com outra carta que estava em sua mão, ele segura essa carta e descarta outra com a face para cima, seguindo no sentido anti-horário o próximo participante pode pegar a carta que foi descartada pelo seu oponente ou pegar no monte, assim dando continuidade ao jogo até que um dos participantes consiga formar dois trios de razões trigonométricas equivalentes e apresentar aos seus adversários para vencer a partida.

Acreditamos que esse jogo pode dinamizar o aprendizado em Trigonometria, de forma alternativa, concisa e agradável. Com a prática, o esperado é minimizar o desinteresse desses alunos em relação à disciplina de Matemática e fazer que se apropriem do conteúdo abordado, potencializando sua participação e fortalecendo seu saber. Grando (2004, p.30) afirma que “o jogo apresenta-se como um problema que ‘dispara’ para construção do conceito, de forma lúdica, dinâmica, desafiadora e motivando o aluno”.

Muitas pesquisas foram realizadas sobre a inserção de jogos nas aulas de Matemática, cada vez mais necessárias, pois estão ligadas as necessidades das crianças e adolescentes. Piaget e Vygotsky (*apud* Grando, 2004) apontavam para a importância dos jogos no desenvolvimento da criança, isso sugere que, trabalhar com jogos pode favorecer a compreensão de conteúdos e conceitos matemáticos.

Dionizio e Brandt (2011) afirmam que existem diversos problemas na aprendizagem dos alunos, como a dificuldade de conceitualização dos objetos matemáticos e de conhecimentos básicos de Trigonometria, pois se apresentam de forma abstrata. Uma das possíveis soluções para tais dificuldades é o uso de jogos matemáticos, articulando os conteúdos abordados com a estrutura lógica dos jogos, assim como a característica do entretenimento vinculado ao aprendizado.

A inserção de jogos como recurso didático possibilita um ambiente acolhedor e interativo, buscando oportunidades e resoluções para situações de dificuldade no ensino-aprendizado da Matemática.

Justifica-se, assim, este trabalho, com a hipótese de que os jogos matemáticos favorecem o desenvolvimento do educando, melhorando o rendimento e a interação entre os envolvidos, bem como a aceitação da Matemática.

Pelos motivos acima apresentados esse trabalho tem como objetivo ressaltar as potencialidades dos jogos matemáticos como metodologia de ensino, em especial um jogo que permite explorar aspectos da Trigonometria no Triângulo Retângulo.

O jogo foi adaptado para auxiliar o aprendizado dos alunos, com o intuito de maximizar o interesse pela disciplina de Matemática em especial a Trigonometria no Triângulo Retângulo, estimulando a realização de operações que envolvam o cálculo de seno, cosseno, tangente e cotangente dos ângulos notáveis. Por exemplo, se esse jogo for explorado com alunos do Ensino Médio, será possível resgatar o que foi apresentado no 9º ano do Ensino Fundamental.

O trabalho está organizado em quatro capítulos. O capítulo um trata das dificuldades no ensino-aprendizagem de Trigonometria no Triângulo Retângulo, fato este já amplamente observado por vários pesquisadores, que indicam excesso de formalismo por parte dos professores ou desinteresse dos alunos.

O capítulo dois apresenta o uso de jogos como metodologia de ensino, pois diversos pesquisadores apresentam os benefícios do uso de jogos matemáticos, tais como, melhora a socialização entre os estudantes, trabalha o raciocínio lógico e aproxima o estudante do conteúdo abordado.

O capítulo três apresenta o jogo Pife-Trigonométrico, suas regras e algumas considerações acerca de uma oficina oferecida na Semana de Educação Ciência e Tecnologia do IFSP, Campus São Paulo, da qual participaram alunos do Curso de Licenciatura em Matemática (diversos semestres) e de Engenharia.

Ao final, apresentamos algumas considerações, não como conclusões, mas como reflexões de nossos resultados.

## 2 DIFICULDADE NO ENSINO E NA APRENDIZAGEM DE TRIGONOMETRIA

O contato com uma turma de primeiro ano do Ensino Médio, em 2011, na rede pública do Estado de São Paulo, indicou que a maioria dos alunos estavam desmotivados. Foi possível notar também as grandes dificuldades em aprender Trigonometria no Triângulo Retângulo. Notava-se que a maioria dos alunos não conseguia sequer identificar os componentes do Triângulo Retângulo.

Mesmo nos casos em que há interesse da parte do aluno, há também grande dificuldade no desenvolvimento do aprendizado. Dúvidas básicas, palavras que fogem ao seu vocabulário usual (como adjacente, por exemplo), a diferenciação entre os conceitos de lado e ângulo, entre outras, acabam tornando o assunto cada vez mais distante. Ainda hoje, é possível notar que as dúvidas são as mesmas; as questões acima relacionadas foram, em grande parte, responsáveis pela reflexão acerca de um método alternativo para explorar o conteúdo. Outros autores também observaram tais dificuldades por parte dos alunos:

Em aproximadamente 18 anos de trabalho com turmas de oitava série e do Ensino Médio, observamos a dificuldade apresentada pelos alunos durante as aulas de trigonometria, ou quando abordamos problemas a ela relacionados, ou mesmo alguns problemas de física que usam algum conceito trigonométrico básico (OLIVEIRA, 2006, p. 11).

O assunto de Trigonometria é deixado para o último bimestre do nono ano (antiga oitava série), pois na maioria das vezes, não há tempo suficiente para contemplar o conteúdo do componente curricular e alguns professores deixam de apresentar este assunto, por estarem próximos ao fechamento do ano letivo, prejudicando assim o entendimento futuro do aluno em Trigonometria, desmotivando-os ainda mais (DIONIZIO; BRANDT, 2011).

Problemas no ensino de Trigonometria não são de exclusividade do nono ano do Ensino Fundamental II, as dúvidas permanecem as mesmas como relatam Dionizio e Brandt (2011) em sua pesquisa com alunos do segundo ano do Ensino Médio.

Além das dificuldades apresentadas como falta de tempo, Oliveira (2006) destaca a desmotivação dos estudantes, o excesso de formalismo por parte dos professores, pois muitos reproduzem da mesma maneira que lhes foi apresentado na época em que cursavam o ensino superior, modelo esse ainda presente na formação

universitária, não respeitando o conhecimento prévio do estudante e não aproximando o conteúdo da realidade, isso prejudica a formação dos alunos desmotivando-os ainda mais.

Apesar de a Matemática estar presente em diversas áreas do conhecimento e até mesmo no nosso cotidiano, esse fato é pouco explorado por professores, que podem utilizar algumas aplicações da Matemática para que o ensino fique menos distante da realidade e mais agradável, dando significado ao aprendizado, não causando frustrações aos estudantes, como evidencia Lima e Bulos (2011) em relação ao aprendizado que tiveram em Trigonometria.

Durante a minha escolaridade básica, os professores não se preocupavam em contextualizar o ensino da matemática, trabalhavam os assuntos de forma mecânica, desvinculados da realidade, sem dar muito sentido/significado ao aprendizado dos alunos, os quais ficavam se indagando, como e onde iriam aplicar certos conteúdos, que não tinham nenhuma utilidade real para eles. Por isso, eram perceptíveis as dificuldades e frustrações dos alunos (colegas de classe) em relação a determinados conceitos, dentre eles, os de trigonometria. Esse conteúdo era apresentado através de um amontoado de fórmulas, sem mostrar como as mesmas surgiram e quais foram os caminhos percorridos para chegar a elas, fazendo com que os alunos perdessem ou nem despertassem o interesse de aprender (LIMA; BULOS, 2011, p.1).

Para diminuir algumas dificuldades é necessária uma abordagem diferenciada a fim de potencializar o aprendizado, pois os pesquisadores que ecoamos também observaram que o ensino descontextualizado dificulta o aprendizado do aluno.

Já os PCN+ (2002), mostram a importância da contextualização da Matemática, integrada e relacionada a outros conhecimentos, que desenvolvem competências e habilidades necessárias para a instrumentação e estruturação do estudante, tornando-o capaz de compreender, interpretar, tomar decisões e generalizar, melhorando sua argumentação e conclusão.

Como evidencia Lima e Bulos (2011), o ensino de Matemática da forma tradicional, não parece ser eficaz, pois com a apresentação de fórmulas e repetições permanece na memória do estudante por pouco tempo, assim, posteriormente quando lhe é exigido o conhecimento adquirido não é possível resgatá-lo, mesmo quando lembram a fórmula não conseguem utilizá-la, pois não teve um sentido ou significado para o aluno, assim percebe-se a importância da vinculação da

Trigonometria com a realidade do estudante, para tornar a informação em aprendizado.

Para D'Ambrósio (1991, *apud* BEZERRA; BANDEIRA, 2008, p.2), “[...] há algo de errado com a Matemática que estamos ensinando. O conteúdo que tentamos passar adiante através dos sistemas escolares é obsoleto, desinteressante e inútil”, isso sugere que devemos abandonar o tradicionalismo (abordagem apenas por meio de definição, exemplos e exercícios, nessa ordem), pois essa Matemática desperta medos em crianças, jovens e adultos, além de ser a disciplina que mais reprova isso mostra a necessidade de pensarmos em uma maneira diferente para ensinar Matemática, assim, deixando de lado o paradigma que ela é para poucos.

Como dito anteriormente devemos procurar formas diferenciadas para efetivar o ensino e aprendizagem da Matemática, um exemplo disso é o uso da História da Matemática que, segundo Lima e Bulos (2011), pode sanar diversas dúvidas dos alunos, já que entendendo a origem do conteúdo e o período em que foi formalizado, o assunto pode ficar mais claro.

Com esta atitude, a assimilação do conteúdo e o interesse aumentam de forma significativa, transformando o que era inatingível em algo próximo, acessível e possível de compreender, fazendo-o perceber que o que foi aprendido não está tão distante do seu dia a dia, devemos deixar claro que aproximar a Matemática do cotidiano do estudante não quer dizer abandonar o rigor matemático e sim prepará-lo para tal situação, que facilitará o entendimento posterior de novos conceitos.

Outro fato observado é que a dificuldade dos alunos entenderem Trigonometria pode estar associada à defasagem do ensino, pois muitos não conseguem distinguir a diferença entre lado e ângulo de um triângulo, acreditamos que conhecer o triângulo e seus componentes será fundamental para o sucesso na aprendizagem de noções relacionadas à Trigonometria no Triângulo Retângulo. Essas dificuldades também foram observadas pelos pesquisadores Silva e Frota (2010).

Reflexões acerca das dificuldades encontradas pelos alunos nos levam a levantar a hipótese que, por vezes, as dificuldades podem decorrer da conexão exigida entre os estudos de trigonometria e de geometria; a defasagem na aprendizagem de geometria pode, por vezes, influenciar negativamente a aprendizagem da trigonometria, provocando certa aversão ao seu estudo (SILVA; FROTA, 2010, p.2).

Dionizio e brandt (2011) tiveram atividades realizadas com alunos do segundo ano do ensino médio, em que eram necessários os conhecimentos sobre Trigonometria no Triângulo Retângulo para resolver a primeira parte. Na segunda parte o estudante poderia resolver com a Trigonometria no Triângulo Retângulo ou com o Teorema de Pitágoras. O enunciado da atividade segue abaixo.

DIONIZIO DE BRANDT (2011, pg. 5) “A rampa de acesso a um estacionamento de automóveis faz um ângulo de  $30^\circ$  com o solo e, ao subi-la, um carro desloca-se oito metros de distância, conforme o desenho”.



Figura 1 – Rampa inclinada

Fonte: DIONIZIO E BRANDT (2011).

De acordo com os dados, responda:

- Qual a altura da rampa, representada por  $h$  no desenho?
- Qual o comprimento da rampa inclinada?

Segundo Dionizio e Brandt (2011) 22 alunos participaram da atividade, e apenas cinco acertaram o item a, no item b, quatro acertaram usando razão trigonométrica e um acertou usando o Teorema de Pitágoras, quatro não fizeram o item a, oito não fizeram o item b, sete confundiram a razão trigonométrica no item a e cinco confundiram a razão trigonométrica no b, três cometeram erros básicos nos itens a e b, três desses alunos trataram medida de ângulo e medida distância como sendo iguais no item a e um no item b.

Esta atividade proposta por Dionizio e Brandt (2011) mostra que a dificuldade continua nas séries posteriores caso não sejam sanadas, isso nos leva a crer que tais dificuldades continuarão até a conclusão do Ensino Médio.



Silva e Frota (2010) observaram que alguns professores ao apresentarem a Trigonometria preocupam-se muito com cálculos algébricos, deixando de lado as aplicações práticas da Trigonometria, não explorando os exercícios de maneira significativa. Assim, valoriza-se somente o resultado obtido, tornando o aprendizado mecânico, isso pode ser devido à falta de prática dos alunos em resolverem atividades em que precisem ler, interpretar, entender e depois fazer os cálculos, resolvendo assim o exercício, o professor pode questionar o resultado obtido para dar significado ao cálculo feito pelos estudantes.

Dionizio e Brandt (2011) na sua segunda atividade, proposta à mesma turma citada anteriormente confirmam que os alunos têm dificuldades em transpor da língua materna para a linguagem Matemática. Eles citam o seguinte caso: “O ângulo de elevação do pé de uma árvore, ao topo de uma encosta é de  $60^\circ$  e ela está a cinquenta metros da base desta encosta. Que medida deve ter um cabo para ligar o pé da árvore ao topo da encosta?” (DIONIZIO; BRANDT, 2011, p. 6).

Nesta atividade o conhecimento necessário para resolução é Trigonometria no Triângulo Retângulo, porém Dionizio e Brandt (2011) relatam que apenas três alunos acertaram, assim confirma que os estudantes apresentam dificuldades em passar da língua materna para a linguagem Matemática.

A defasagem dos alunos em aprender Matemática, especialmente em Trigonometria é, na maioria das vezes, justificada pela falta de tempo e/ou desinteresse, pois os estudantes não encontram sentido/significado no conteúdo apresentado.

Outro fator agravante é a aproximação do fechamento do ano letivo e a “quase aprovação automática” (Ensino Público), o que pode levar alguns professores a ensinar a Trigonometria de maneira quase mecânica, sem mostrar aplicações, o que costuma dificultar a compreensão deste conteúdo, prejudicando o aprofundamento nas séries subsequentes.

A aprendizagem significativa requer algumas condições para acontecer, uma delas é que o material a ser aprendido esteja dentro do domínio da capacidade do aprendiz, e a natureza da estrutura cognitiva do mesmo deve estar disponível aos subsunçores específicos (algo que o aprendiz já sabe com as quais o novo material é relacionável). Outra condição é que o aprendiz tenha vontade de relacionar com os outros campos do conhecimento o novo material a ser aprendido, sem a intenção de simplesmente memorizá-lo. Por isso, é de grande interesse dar importância

aos conhecimentos prévios (o que o aluno já sabe) e a maneira como esse conhecimento foi adquirido. (LIMA; BULOS, 2011, p.6).

Para Lima e Bulos (2011), o professor deve trazer novas abordagens sobre o conteúdo, para que os estudantes se interessem, e o aprendizado tenha significado, pois é o responsável em motivar, estimular a curiosidade e a criatividade do aluno, assim tornando o conteúdo agradável e compreensivo.

Brasil (1999) afirma que a aprendizagem de Trigonometria é de suma importância para formação do cidadão, pois está diretamente ligada ao desenvolvimento de habilidades e competências, além de ser indispensável para os estudantes que queiram ingressar em um curso superior ou até mesmo em um curso técnico, tendo em vista que diversos cursos usam a Matemática como ferramenta, nesse sentido, se faz necessário o domínio do conteúdo. Outra questão importante a se considerar é que a falta do conhecimento necessário pode acarretar no aumento da reprovação ou até mesmo o abandono da graduação, Miranda *et al* relatam a experiência que tiveram na falta de aprofundamento da Trigonometria.

Quando se fez necessário o saber de alguns conceitos de Trigonometria para o cálculo de limites e de derivadas, por exemplo, a nossa aprendizagem passou a ser cada vez mais rara, ficando cada vez mais evidente, para nós, a necessidade de dominar os conteúdos de Trigonometria. Dessa forma, era preciso a busca por aprender o que havia ficado para trás. Pois, certamente, necessitaríamos muito deste conhecimento para nossa vida acadêmica e, principalmente para nossa vida profissional de professoras de Matemática. (MIRANDA; PADILHA; CIANI, 2013, p.4).

Miranda *et al* (2013) descrevem outra situação que pode minimizar possíveis dificuldades no ensino e aprendizagem em Trigonometria, o uso de materiais manipuláveis, facilitando a compreensão, já que diversas pessoas precisam ter algo concreto para assimilar o que está sendo apresentado, portanto o que está sendo dito faz sentido e tem um significado efetivando o aprendizado, logo quando necessário poderão lembrar o que lhes foi apresentado em outra ocasião. Ainda segundo os autores o uso de tais materiais poderia auxiliar em outros conteúdos apresentados no Ensino Médio.

Devido ao que foi apresentado anteriormente, a não compreensão da Trigonometria no Triângulo Retângulo, poderá prejudicar o aprofundamento do conteúdo, que, por sua vez, é pouco acessível, pois a maioria dos alunos afirmam que Matemática é coisa de “nerd” e que não têm vínculos com o mundo real. Esse é mais um motivo

de afirmar que o ensino atual de Matemática, em especial a Trigonometria, está desvinculado da realidade.

Outra situação é que alguns estudantes se preocupam somente com a aprovação e o professor, por sua vez, com a nota tirada pelo aluno na avaliação, deixando de lado o que é realmente importante, isto é, o aprendizado obtido, esse que deve ser levado com o aluno pelo resto de sua vida, indiferentemente de sua vontade de dar continuidade aos estudos.

Segundo Pasdiora (2008) criou-se um “saber escolar” distante do “mundo real” em que os alunos vivem e trabalham. Além disso, a forma como os conteúdos são apresentados não atrai a atenção e o interesse do educando, pelo contrário, provoca nele uma “aversão” pelo estudo da Matemática. Outros autores como Miranda *et al* (2013) evidenciam que a maneira a que fomos ensinados não nos faz despertar um interesse no conteúdo e nem o hábito de estudar.

Somos “ensinados” que a nota e a promoção independem do conhecimento e do esforço, e acabamos nos acostumando a isso. Infelizmente, não criamos e nem desenvolvemos o hábito de estudar, sendo que a escola deveria ser o lugar mais adequado para o cultivo deste hábito tão importante. (MIRANDA; PADILHA; CIANI, 2013, p.6 e 7).

Estes trabalhos mostram as dificuldades dos alunos em aprenderem Matemática. Para amenizar esta defasagem devemos buscar formas alternativas, seja com uso da História da Matemática, resolução de problemas, jogos matemáticos, entre outras ações, para que possamos tornar a Matemática mais acessível e assim quebrar o paradigma de que é uma disciplina difícil.

Acreditamos que cabe ao professor sair de sua zona de conforto e desafiar a criatividade dos estudantes, aproximando o conteúdo à realidade do aluno, mostrando que todos são capazes de aprender. Basta os alunos se dedicarem e estarem dispostos a romper as barreiras, não desistindo nas primeiras dificuldades, pois o tempo de aprendizado é diferente para cada pessoa.

Este trabalho tem como foco principal o uso de jogos matemáticos para incentivar o ensino aprendizagem de Matemática, pois acreditamos que por meio de jogos a Matemática pode ficar mais prazerosa, desafiadora e transformar a vida social, política e cultural do estudante, como destacam Bezerra e Bandeira.

Acredita-se que os jogos, além de úteis para o desenvolvimento do raciocínio lógico, a criatividade e a capacidade de manejar situações reais, podem, ainda, servir de elemento facilitador no despertar do aluno para a importância da matemática para a sua vida social, cultural e política (BEZERRA; BANDEIRA, 2008, p.3).

Neste capítulo indicamos que, para enfrentar todas as dificuldades relatadas anteriormente em relação ao ensino e aprendizagem, vamos utilizar um determinado tipo de jogo, pois acreditamos que os jogos matemáticos podem minimizar o desinteresse pela disciplina criando um ambiente acolhedor e desafiador para o estudante. No próximo capítulo falaremos sobre as vantagens e desvantagens no uso do jogo no ensino de matemática, deixando no capítulo três a apresentação de nossa proposta de jogo e a apresentação de um relato de experiência com o mesmo.

### 3 JOGOS COMO METODOLOGIA NAS AULAS

Desde pequenos nos deparamos com disputas, apostas e concorrências, por exemplo: discussão de qual time é o melhor, quem consegue virar mais figurinhas, quem tira mais bolinhas de gude do triângulo, quem é o mais rápido, quem é o melhor jogador futebol etc. Essa competitividade, aparentemente presente na maioria dos seres humanos, seria um terreno extremamente fértil para o desenvolvimento de jogos que ajudassem a fixar conteúdos escolares, neste caso, matemáticos, em especial de Trigonometria.

Esses são alguns motivos que nos levaram a pensar em utilizar jogos, para fixar os conteúdos matemáticos, em especial a Trigonometria, estimulando a competitividade do ser humano em prol do aprendizado, como relata SILVA (2013).

O jogo sempre fez parte da vida do ser humano, portanto este é um motivo pelo qual fortalece o pensamento em pesquisar sobre os jogos, em específico sobre jogos matemáticos, e mostrar que essa ferramenta para o ensino da matemática não deve ser esquecida ou posta de lado (SILVA, 2013, p. 23).

Segundo Costa (2006) os jogos contribuem em diversos aspectos, pois além do conhecimento envolvido na atividade, os alunos aprendem a lidar com a derrota e, aqueles que no começo brigavam, por serem derrotados, voltam para o final da fila para competir novamente, mas a alegria e a participação superavam o fato da derrota e em cada partida que jogavam se empolgavam mais, mudando assim suas expressões e atitudes, ficavam atentos e conversando com seus colegas.

De acordo com Grandó (2004) os jogos matemáticos trazem diversos benefícios aos estudantes, pois em determinadas situações os jogadores precisam criar hipóteses para surpreender o adversário. Com isso, eles criam soluções e antecipam as possíveis jogadas. A contribuição disso é que no futuro facilitará a resolução de problemas no cotidiano (trabalho, casa etc).

Segundo Pasdiora (2008) os jogos são utilizados como estratégia para uma aprendizagem significativa, pois durante o jogo o educando tem a possibilidade de criar estratégias, colocá-las em prática, interagir com os demais alunos, expressar suas ideias e também aprender e fixar conceitos matemáticos, o PCN também aponta benefícios na utilização de jogos matemáticos para a formação do educando.

Nos jogos de estratégia (busca de procedimentos para ganhar) parte-se da realização de exemplos práticos (e não da repetição de modelos de procedimentos criados por outros) que levam ao desenvolvimento de habilidades específicas para a resolução de problemas e os modos típicos do pensamento matemático (BRASIL, 1998, p.47).

O PCN (1998) mostra a importância do uso de jogos e seus benefícios, porém esses devem ser divertidos e dinâmicos, por outro lado não devemos esquecer qual é a real intenção de aplicar jogos nas aulas de Matemática, a de assimilação e compreensão ou fixação do conteúdo em questão.

No entanto, é extremamente importante que esse instrumento não se transforme apenas em um momento de prazer, que possa levar o aluno à sensação de estar apenas “matando tempo”. A atividade, embora divertida e prazerosa, deve estar atrelada à aprendizagem do aluno.

Os jogos servem de atrativo para os alunos que não prestam atenção na aula ou não gostam de Matemática, quando os estudantes se envolvem com o jogo conseguimos aproximá-los da disciplina, estimulando a criatividade e curiosidade do educando. Outro fato importante é que os estudantes que participam dos jogos melhoram sua socialização.

Pasdiora (2008) diz que é indispensável a utilização de jogos e brincadeiras no desenvolvimento infantil. Os jogos na atualidade são aplicados na educação com o objetivo de tornar a aprendizagem uma atividade mais atrativa para o aluno, diminuindo a aversão pela Matemática.

Grando (2004) afirma que é natural pensarmos em jogo como sendo uma coisa concreta, que muitas vezes utilizamos em sala de aula, assim motivando os alunos a estudarem Matemática e terem sucesso no jogo, desta maneira os estudantes se esforçam ainda mais para superar seu adversário, o que trará o aprendizado como benefício para o aluno.

Grando (2004) afirma que o ser humano sente necessidade de desenvolver atividades lúdicas com finalidade de lhes proporcionar prazer, simplesmente executando a atividade, fato esse que independe da idade, pois há vários jogos destinados a adultos como, por exemplo: truco, bilhar, dominó, pife etc.

Percebemos, assim, a necessidade de interação com outras pessoas, pois os jogos citados para serem executados são necessários no mínimo dois participantes.

Grando (2004) recomenda ao professor que fique atento aos jogos desenvolvidos por alunos em sala de aula, porque tais jogos podem possuir conhecimentos matemáticos, assim o educador ao verificar que existem conceitos matemáticos pode aproveitar o jogo, dessa maneira o estudante aprenderá a Matemática envolvida e o professor, por sua vez, formalizará o conteúdo contido no jogo, caso seja pertinente ao momento, se não for possível o uso nesse instante, deve comunicar o aluno que aproveitará tal atividade posteriormente, assim aguçando a curiosidade do estudante.

O pesquisador, ao se deparar com um grupo de alunos de sétima série do Ensino Fundamental jogando algo desvinculado da aula, percebe que na atividade praticada pelos estudantes estavam presentes conceitos como: simetria de reflexão e propriedades relacionadas, visualização espacial, entre outras.

Segundo Grando (2004) os jogos fazem parte da formação do indivíduo, pois muitos estudantes quando chegam à escola conhecem diversos tipos de jogos, sejam praticadas em sua própria casa ou na rua com seus colegas, atividades essas que, algumas vezes, possuem noções matemáticas que, em muitos casos, quando utilizadas nas escolas estão sujeitas à punição, isso mostra que não devemos ficar alheios às atividades praticadas pelos alunos em nossas aulas.

A autora deixa claro que devemos ficar atentos ao utilizarmos jogos nas aulas de Matemática, considerando que muitos professores se preocupam somente com o cumprimento das regras, com isso fica evidente ser importante planejar com o que fazer pós-jogo, encaminhando para que se possa dar continuidade ao trabalho, de modo a não estagnar somente no caráter motivacional, é necessária também uma reflexão sobre o que está sendo abordado e assim contribuir no processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

Segundo a pesquisadora, na escola nos deparamos com crianças que só querem brincar, não prestam atenção na aula, parece que vivem em outro mundo e as atividades propostas pela escola não fazem parte de sua realidade, sendo algo que atrapalha sua brincadeira, e que a qualquer momento pode sofrer uma repressão

por ser ela mesma, tornando a escola um lugar chato com pessoas dizendo todo tempo como se portar.

Para Macedo e Machado (2006) a escola deve ser um lugar divertido, acolhedor, de aprendizado, de socialização etc. O que realmente vemos é que as escolas não são dessa maneira, os estudantes as veem com um lugar chato onde existe um sem número de regras a serem seguidas e o que lhes é oferecido não faz sentido para eles, nem é apresentado de maneira interessante.

Na escola atual, na maior parte do tempo os estudantes ficam dentro de salas com aproximadamente quarenta crianças e um adulto escrevendo na lousa uma série de conceitos sem sentido e significado aos seus olhos, isso nos faz refletir sobre como deve ser a escola para que haja um aprendizado significativo.

Segundo Grando (2004) há um destaque no desenvolvimento através de jogos e brincadeiras nas funções psicossociais, afetivas e intelectuais básicas no desenvolvimento infantil, o jogo é apresentado como uma atividade dinâmica que vem satisfazer uma necessidade da criança, dentre outras, de “movimento”, ação.

Devemos aproveitar os jogos para trabalhar essas funções, aproximando os alunos, desta maneira, quem sabe, diminuindo o pré-conceito entre eles, fazendo que aprendam não somente o conteúdo abordado, mas também a conviver e respeitar as diferenças, aprendendo uns com os outros.

Grando (2004) diz que os jogos mexem com a imaginação das crianças, elas vão além do que estão vendo, agem segundo as regras, os objetos se transformam, criam um mundo ideal para o jogo, assim trabalhando o pensamento abstrato, essencial para o desenvolvimento dos conceitos matemáticos.

Precisamos inserir atividades que vão da experimentação à abstração, para que a criança crie suas hipóteses e teste as conjecturas, refletindo, analisando, sintetizando e criando diversas estratégias para resolução dos problemas em jogos, pois o processo de criação está ligado com a imaginação.

Atividades que envolvem jogos são de extrema importância para que possamos desmistificar a ideia de que a Matemática é uma disciplina para poucos, essas atividades podem evidenciar que a Matemática é acessível para todos os



estudantes, já que são capazes de aprender desde que estejam empenhados, dispostos a não desistir em momentos de dificuldades, assim torna-se possível a compreensão do conteúdo apresentado.

Espera-se que esse instrumental seja visto, muito mais do que simples meios de transmissão de conteúdos, como formas estimulantes do raciocínio e da capacidade de resolução de problemas do dia-a-dia. Espera-se, ainda, contribuir para a quebra do velho paradigma da matemática como a disciplina mais difícil, reservada aos mais inteligentes e inacessível a uma boa parte dos alunos (BEZERRA; BANDEIRA, 2008 p.2).

Para Grando (2004) a imaginação é importantíssima para o desenvolvimento da criança, pois amplia a capacidade de criar experiências e relatar tais situações a outros. E no jogo pelo jogo a criança é capaz de atribuir aos objetos diferentes significados, desenvolvendo sua capacidade de abstração agindo independentemente daquilo que vê, assim percebemos que até o fato de simplesmente jogar traz grandes benefícios para a formação do educando.

Os jogos com regras são importantes para o desenvolvimento lógico, pois a sistematização leva à dedução, assim o entendimento de novos conceitos matemáticos fica mais simples, facilitando sua assimilação e compreensão por parte dos alunos, pois eles possivelmente iniciarão sistematizações e deduções já que estão se acostumando com este tipo de atividade, vivenciada no jogo com regras tornando a Matemática acessível e menos traumática aos estudantes. Assim observado por Bezerra e Bandeira (2008. p.4) “que os jogos com regras são importantes para o desenvolvimento do pensamento lógico, pois a aplicação sistemática das mesmas encaminha a deduções”.

Bezerra e Bandeira (2008) relatam que os jogos têm similaridades com a Matemática, pois possuem regras, instruções, operações, definições, desenvolvimento, utilização de normas e novos conhecimentos. Tais similaridades entre jogos e Matemática mostram a necessidade de unificar esses assuntos e, assim, extrair do jogo que se tem de melhor para dinamizar e ensino-aprendizagem da Matemática.

O jogo pode representar uma simulação matemática, caracterizando uma situação irreal, criada pelo professor ou pelo aluno, para dar significado a um conceito que deve ser compreendido por ele, pois elementos do jogo representam entes

concretos, o que leva a imaginação à abstração de um conceito matemático, nas palavras de Grandó (2004).

Segundo a autora a Matemática existe a partir do pensamento humano, dependendo da imaginação para definir seus conceitos e regularidades, isso torna necessário ampliar as experiências das crianças proporcionando-lhes atividades criativas, o jogo propicia este ambiente de criatividade e imaginação, tanto para criança quanto para o adulto.

É de fundamental importância à escola ater-se ao processo imaginativo para constituir o pensamento abstrato, note que a ação do jogo é determinada pelas ideias do indivíduo e não pelos objetos, por isso, a capacidade de elaborar previsões, exceções e análise levam à abstração. A escola deve preocupar-se em aproveitar os jogos como atividades escolares.

É necessário que a escola esteja atenta à importância do processo imaginativo na constituição do pensamento abstrato, ou seja, é importante notar que a ação regida por regras – o jogo – é determinada pelas ideias do indivíduo e não pelos objetos. Por isso sua capacidade de elaborar estratégias, previsões, exceções e análise de possibilidades acerca da situação de jogo perfaz um caminho que leva à abstração (GRANDÓ, 2004, p. 21).

Nos jogos com regras há uma interdependência entre os jogadores, pois se constata antecipações, construções de estratégias e se percebem regularidades criando hipóteses para vencer o jogo.

Grandó (2004) deixa claro que tanto Piaget quanto Vygotsky, apontam a importância dos jogos no desenvolvimento da criança. Isso mostra que levar jogos para o ambiente escolar é de fato um caminho interessante a seguir, principalmente para as aulas de Matemática.

Os PCN também apontam aspectos positivos para uso de jogos nas aulas de Matemática, evidenciando a contribuição deles para a formação do cidadão que, por sua vez, poderá almejar um futuro cheio de expectativas positivas, pois sua formação foi constituída por situações que favoreceram seu desenvolvimento social e moral.

Como se vê em Brasil (1998, p. 47): “a participação em jogos em grupo também representa uma conquista cognitiva, emocional, moral e social para o estudante e um estímulo para o desenvolvimento de sua competência Matemática”.

Analisando a inserção de jogos em situações de ensino, fica evidente que tais atividades envolvem o desejo, a competição e o desafio de conhecer e superar seus próprios limites motivados pela busca da vitória, adquirindo confiança e coragem para se arriscar, o que contribuirá para torna-lo um cidadão mais confiante e promissor em busca de seus objetivos.

Grando (2004) evidencia que há um grande interesse pelo material do jogo, pelas regras ou pelo desafio proposto, já que o interesse pelo jogo é de senso comum, porém alguns professores acreditam que somente com a participação dos estudantes na atividade proposta estará garantida a aprendizagem, o configura um equívoco e deixa claro ser necessário mais que simplesmente jogar, para o jogo ser relevante ao aprendizado é preciso uma intervenção pedagógica, principalmente com adolescentes e adultos.

O professor, antes de utilizar jogos nas aulas de Matemática, deve analisar as possíveis vantagens e desvantagens do uso desta metodologia, por isso apresentamos abaixo vantagens e desvantagem que Grando (2004) considera importantes a serem verificadas para melhor aproveitamento do jogo.

VANTAGENS
<ul style="list-style-type: none"> <li>- <b>(re)significado de conceitos</b> já aprendidos de uma forma motivadora para o aluno;</li> <li>- <b>introdução e desenvolvimento de conceitos</b> de difícil compreensão;</li> <li>- desenvolvimento de <b>estratégias de resolução de problemas</b> (desafio dos jogos);</li> <li>- aprender a <b>tomar decisões</b> e saber <b>avalia-las</b>;</li> <li>- <b>significação</b> para conceitos aparentemente incompreensíveis;</li> <li>- propicia o relacionamento das diferentes disciplinas (<b>interdisciplinaridade</b>);</li> <li>- o jogo requer a <b>participação ativa do aluno</b> na <b>construção</b> de seu próprio <b>conhecimento</b>;</li> <li>- o jogo favorece a <b>interação social</b> entre os alunos e conscientização de <b>trabalho em grupo</b>;</li> <li>- a utilização dos jogos é um fator de <b>interesse</b> para os alunos;</li> <li>- dentre outras coisas, o jogo favorece o desenvolvimento da <b>criatividade</b>, do <b>senso crítico</b>, da <b>participação</b>, da <b>competição</b> “sadia”, da <b>observação</b>, das várias formas de uso da linguagem e do resgate do <b>prazer em aprender</b>;</li> <li>- as atividades com jogos podem ser utilizadas para desenvolver habilidades de que os alunos necessitam. É útil no trabalho com alunos de diferentes níveis.</li> <li>- as atividades com jogos permitem ao professor identificar e diagnosticar algumas dificuldades dos alunos.</li> </ul>
DESvantagens

- quando os jogos são mal utilizados, existe o perigo de dar ao jogo um **caráter puramente aleatório**, tornando-se um **“apêndice” em sala de aula**. Os alunos jogam e se sentem motivados apenas pelo jogo, **sem saber porque jogam**;
- o **tempo gasto** com as atividades de jogo em sala de aula **é maior** e, se o professor não estiver preparado, pode existir um sacrifício de outros conteúdos por falta de tempo;
- as **falsas concepções** de que se devem **ensinar todos os conceitos através de jogos**. Então as aulas, em geral, transformam-se em verdadeiros cassinos, também sem sentido algum para o aluno;
- a **perda da “ludicidade” do jogo** pela interferência constante do professor, destruindo a essência do jogo;
- a **coerção do professor**, exigindo que o aluno jogue, mesmo que ele não queira, **destruindo a voluntariedade** pertencente à natureza do jogo;
- a dificuldade de acesso e disponibilidade de material sobre o uso de jogos no ensino, que possam vir a subsidiar o trabalho docente.

Quadro 1 – Vantagens e Desvantagens  
(Fonte: GRANDO, 2004, pp.31-32.)

Bezerra e Bandeira (2008) também apresentam possíveis vantagens e cuidados na aplicação de jogos nas aulas de Matemática, porém as vantagens e desvantagens são similares às relatadas por Grandó (2004).

Macedo e Machado (2006) dizem que, no jogo, a criança curiosa, lúdica e interessada que existe em nós, faz questionamentos frequentes e fica pasma com as respostas encontradas. O que deixa claro que não importa a idade para o uso desse tipo de material para auxiliar no ensino-aprendizado de Matemática, pois o desafio nos leva a buscar respostas e se interessar pelo conteúdo envolvido em tal atividade.

Grandó (2004) ressalta que, ao utilizarmos jogos nas aulas de Matemática, consideramos que tenha utilidade a todo nível de ensino, mas os objetivos do jogo devem estar bem claros e a metodologia deve ser adequada ao nível em que se está trabalhando, sendo uma atividade desafiadora para o aluno desencadeando o processo, assim conseguindo aproximar-se do objetivo esperado.

Como evidencia Silva (2010), a aplicação do jogo não deve ser vista como fórmula mágica para os problemas que enfrentam no dia-a-dia da sala de aula. Por isso o professor necessita ter clareza das razões fundamentais pelas quais os jogos são importantes para o ensino-aprendizagem da Matemática e, normalmente são necessários, conhecendo o melhor momento que devem ser usados.

Não justificando somente pelo seu caráter "motivador" ou pelo simples fato de se ter "ouvido falar" que o ensino da matemática tem de partir do concreto ou, ainda, porque através dele as aulas ficam mais alegres e os alunos passam a gostar da Matemática.

O jogo propicia a socialização, pois há uma relação entre regras e seres pensantes que agem de maneiras diferentes, mesmo o aluno derrotado pode conhecer-se, estabelecendo sua competência enquanto jogador reavaliando seu trabalho para evitar uma próxima derrota.

Portanto, o jogo em seu aspecto pedagógico é um facilitador na aprendizagem de estruturas matemáticas de difícil assimilação, desenvolvendo no aluno sua capacidade de pensar, refletir, analisar, compreender conceitos matemáticos, levantar hipóteses, testá-las e avalia-las, com autonomia e cooperação.

O quadro I apresentado anteriormente com as vantagens e desvantagens do uso de jogos na sala de aula de Matemática, alerta que devem ser analisadas, refletidas e assumidas pelos professores possíveis dificuldades de um trabalho pedagógico com jogos.

Segundo Grando (2004) as considerações delimitadas no quadro I são de extrema importância, para inserção do jogo no contexto de ensino-aprendizagem, sendo de responsabilidade do professor verificar a viabilidade junto ao projeto pedagógico da escola, pois é necessário para o sucesso do trabalho, assim o professor não desencadeia a ação sozinho, já que a responsabilidade pela formação escolar do aluno é do grupo.

Grando (2004) recomenda separar em grupos com quatro pessoas já que a quantidade média de alunos por sala é de quarenta alunos e para efetuar tal atividade serão necessários dez jogos diminuindo a quantidade de material, outro aspecto positivo quando propicia situações de atividades e grupos, pois desta maneira tornam-se capazes de compreender e respeitar as diversas maneiras dos colegas participarem e, assim, tratando de um exercício de autoconhecimento, sabendo quais são seus limites para desenvolver um trabalho melhor e respeitando a opinião dos outros integrantes do grupo.

Apesar de verificar que existem diversos pontos a serem analisados atentamente para inserção de jogos nas aulas de Matemática e que possivelmente haverá algumas perdas, como tempo para abordar outros conteúdos e alunos que não querem ou não podem jogar, o jogo se mantém como uma boa alternativa para auxiliar nas aulas de Matemática, pois, como visto no quadro I, existem muitos pontos positivos, numa analogia de prós e contras, emergem mais pontos favoráveis.

Neste capítulo vimos que existem diversos pontos a serem considerados antes de utilizarmos jogos como metodologia de ensino para a aprendizagem nas aulas de Matemática, logo perceberemos que este tipo de atividade pode levar o aluno a um melhor entendimento e assimilação do conteúdo abordado, porém devemos ter alguns cuidados para que as aulas não sejam momentos de jogatina, atentos ao principal objetivo: o aprendizado do educando, no próximo capítulo trataremos sobre o desenvolvimento do jogo e suas regras.

#### 4 O JOGO E SUAS REGRAS (PIFE TRIGONOMÉTRICO)

Na disciplina Metodologia do Trabalho Científico (MTC) no primeiro semestre de 2012, o requisito para aprovação era a criação de um anteprojeto de pesquisa, e que de preferência fosse uma prévia do Trabalho de Conclusão de Curso (TCC), assim haveria mais tempo para amadurecermos a ideia e quando fossemos desenvolver o trabalho teríamos a convicção do tema abordado e iniciado a pesquisa aproveitando parte do anteprojeto.

A ideia de adaptar o jogo pife para auxiliar no ensino e aprendizagem de Trigonometria no Triângulo Retângulo, foi apresentada como anteprojeto ao professor Henrique Marins de Carvalho, responsável pela disciplina, que indicou alguns caminhos a seguir. A partir de então demos início ao desenvolvimento do jogo. Era necessário definir o estilo, as regras e analisar possíveis vantagens e desvantagens no uso de jogos nas aulas de Matemática.

Quando se iniciou a pesquisa de fato para o TCC o jogo já estava pronto, com as regras definidas, porém pesquisamos outros jogos que usavam a Trigonometria. A partir de pesquisas realizadas encontramos os autores Lima e Freitas (2013) e Rita (2012).

Lima e Freitas (2013) relatam que a experiência foi devido à disciplina Estágio Supervisionado III, realizado em uma escola pública de Uberlândia, foi então que propuseram ao professor responsável pela turma uma atividade diferenciada envolvendo o conteúdo Trigonometria, a atividade foi aplicada para alunos do segundo ano do Ensino Médio.

Criaram, então, o “Baralho Trigonométrico” com trinta cartas de relações trigonométricas. Destas trinta cartas, quinze cartas possuíam relações envolvendo elementos do Triângulo Retângulo e as outras quinze ilustravam as relações trigonométricas correspondentes. O objetivo do jogo era formar pares correspondentes.

Segundo os pesquisadores a atividade proposta provocou situações de interação, socialização e colaboração, já que o jogo era em grupo, além disso, se sentiram motivados e deixaram conversas paralelas e celulares em segundo plano.

Rita (2012) criou um plano de aula tendo como público alvo o nono ano do Ensino Fundamental II e o primeiro ano do Ensino Médio, envolvendo conceitos básicos em Trigonometria, com intuito de motivar, estimular e auxiliar compreensão dos estudantes, para isso, construiu um jogo chamado dominó trigonométrico com 35 peças, donde 28 peças podem ser utilizadas para qualquer série que tenha estudado Trigonometria e as outras sete podem ser substituídas para aumentar o nível de complexidade.

Para executar tal atividade Rita (2012) separou os alunos em grupos de quatro estudantes em cada. A regra do jogo é igual a do dominó convencional; após aplicar o jogo, constatou que cada grupo estabeleceu estratégias, ficaram motivados e participaram efetivamente da atividade. Para utilizar o jogo adaptado, é necessário no mínimo dois jogadores e no máximo quatro.

O jogo é composto por um baralho trigonométrico com 49 cartas, um jogador deve embaralhar as cartas, depois de embaralhado, um outro jogador deverá separar o baralho em duas partes onde achar conveniente, após isso se deve juntar novamente os montes da seguinte maneira: a que estava embaixo, fica em cima e o jogador que embaralhou irá distribuir as cartas, são seis cartas para cada participante (sugestão uma carta por vez para cada jogador).

Das seis cartas recebidas, cada jogador deve formar duas trincas, de razões trigonométricas equivalentes, exemplo: caso o jogador faça um jogo com as razões do seno  $30^\circ$ : a medida do *cateto oposto* ( $30^\circ$ ) dividido pela medida da *hipotenusa* =  $\text{sen } 30^\circ = \frac{1}{2}$ . A carta triângulo (com ângulos de  $30^\circ$ ,  $60^\circ$  e  $90^\circ$ ) que será um coringa da razão acima, podendo substituir uma carta, assim completando a terna. O jogador que fizer dois trios primeiro e mostrar ao adversário ganha o jogo, somando um ponto, e se fizer um trio e uma sequência relacionando quatro cartas ele ganha com sete cartas (mas corre o risco de perder caso o outro jogador apresente as duas ternas primeiro), neste caso ele somará três pontos. Ganha aquele jogador que fizer dez pontos primeiro.

Verificando as razões abaixo vemos que cada razão tem um trio formado, mas podemos associar outras ternas como:  $\text{sen } 45^\circ = \text{cos } 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$  o que nos possibilita



fazer um jogo já que o resultado da razão é o mesmo, as jogadas que tiverem a mesma representação como:  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{2}$  e  $\frac{1}{2}$  não serão válidas, pois o intuito é associar cartas equivalentes e representações distintas.

Quem inicia o jogo é o jogador que separou o baralho em duas partes depois de embaralhado, ele deverá pegar uma carta do monte que sobrou e verificar se consegue formar uma trinca ou até mesmo um par, deve descartar uma carta a sua escolha com a face para cima ao lado do monte, o próximo jogador será o que estiver à esquerda de quem iniciou, o jogador seguinte pode pegar a carta descartada anteriormente caso sirva para ele, ou se preferir pegar no monte e descartar uma de sua preferência assim dando continuidade ao jogo até que um ganhe o jogo.

Quando jogado com três ou mais participantes e o descarte de um jogador servir para completar a trinca que falta para outro jogador ganhar, ele poderá antecipar-se ao jogador seguinte assim vencendo aquela partida, porém caso se engane só poderá vencer pegando a carta do monte.

#### **4.1. Relato de uma experiência com o jogo**

No dia vinte e dois de setembro de dois mil e quatorze, das oito horas às nove horas e quarenta minutos, foi oferecida uma oficina para os estudantes do IFSP/SPO sobre o Pife Trigonométrico.

Ao término da organização da sala usada para aplicação da oficina, os estudantes entraram e se sentaram de maneira aleatória, porém pedi para formassem grupos com quatro pessoas, apresentamos os slides com a ideia da oficina, nesses slides constava a criação do jogo, motivação para tal trabalho e algumas regras básicas (quantidade de cartas para cada jogador, trios com equivalências trigonométricas e que um deveria embaralhar e outro dividir em dois montes) de como jogar. Na oficina não utilizamos a soma de pontos como a proposto anteriormente, deixamos como partidas individuais (pontuação direta, ou seja, cada partida contava um ponto). Foi comunicado aos participantes que tal atividade era parte do desenvolvimento do Trabalho de Conclusão de Curso.

Quando alertados a respeito de eventuais dúvidas, não houve questionamentos por parte dos participantes sobre as regras, pois como os slides informavam que o jogo era semelhante ao pife do baralho tradicional e a maioria dos participantes já conhecia tal jogo, se interessaram de início na prática da atividade; uma indagação surgida foi sobre o público alvo e quem criou o jogo.

Uma vez respondidas às questões, distribuímos os baralhos nas mesas juntamente com uma tabela de razões trigonométricas, um aluno de cada mesa pegou o baralho e o embaralhou, sugerimos que a distribuição seguisse a ordem do pife tradicional.

A oficina contou com a participação de quatorze alunos todos do IFSP/SPO, ministrada por mim, auxiliado pelos alunos Orlando Alves e Rafael Polesi e os demais participantes jogadores foram dos cursos de Licenciatura em Matemática (diversos semestres) e das Engenharias.

Nas primeiras partidas o jogo demorou aproximadamente dez minutos, até os alunos que não tinham muito contato com baralho tradicional se acostumarem com as regras (como dito anteriormente, a forma de jogar é similar ao pife tradicional), pois já com o conteúdo abordado eles não tinham grandes dificuldades, conhecendo as regras o jogo ficou dinâmico e com a prática eles criavam hipóteses. Um aluno de engenharia percebeu que se ele tivesse a carta um em sua mão, teria mais chance de completar o trio mais rapidamente em relação as demais cartas, pois a quantidade de representações distintas é maior, assim aumenta sua chance de vitória, dificultando o sucesso de seu oponente.

Algumas dúvidas sobre o jogo: se a jogada  $\text{sen } 30^\circ$   $\text{sen } 45^\circ$  e  $\text{sen } 60^\circ$  era válida, pois no jogo de pife as sequências são válidas, exemplo dois, três e quatro do mesmo naipe, porém no pife trigonométrico não é válido, porque não satisfaz a regra do jogo, “formar trios de representações equivalentes”, outra dificuldade aparente foi com os participantes que não conhecem esses tipos de jogos, os mesmos demoram mais para entender as regras tornando o jogo lento.

Os participantes que não tinham contato com jogos de baralho demoraram a acostumar-se com tal tipo de jogo, pois havia dúvidas sobre a sequência de distribuição de cartas, próximo a embaralhar, quem dividiria o monte em dois, quem iniciaria e quando tomar a frente do oponente para vencer.

A oficina oferecida foi muito importante, pois mostra que o jogo é interessante e pode ser aproveitado para auxiliar na fixação do conteúdo abordado, porém devemos disponibilizar mais tempo para os alunos que não conhecem jogos de baralho e unindo-os com os que têm facilidade com jogos, para que um auxilie o outro a progredir no jogo e no conteúdo, pois na oficina os alunos que conheciam jogos de baralhos ajudaram os que não estavam acostumados com tais jogos.

Ao término da oficina os estudantes foram convidados a opinar sobre o jogo e suas dificuldades. A conversa indicou que gostaram do jogo, entenderam as regras sem maiores dificuldades. Entre as sugestões, se destacaram: que fosse pensado para séries com maior conhecimento do conteúdo, viabilizar o aumento das cartas, fazer que a leitura das cartas seja em sentidos duplos não existindo parte superior e inferior, disponibilidade das cartas e regras para ajudarem os estudantes ingressantes que tivessem dificuldade no conteúdo.



## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho demandou a realização de pesquisas sobre dificuldades no ensino e aprendizagem em Matemática, visto que diversos pesquisadores apontam tais dificuldades, principalmente no que se refere à Trigonometria, devido ao excesso de formalismo, descontextualização, desinteresse, desvinculação com a realidade, outro fato é que muitos alunos apresentam dificuldades em conceitos básicos como em Geometria Euclidiana, porém alguns professores ao trabalharem abordam mais a parte algébrica na Trigonometria, essa que por sua vez está relacionada com diversas áreas como Física, Engenharia, Biologia, Química entre outras.

Visto este conteúdo ser essencial para formação do aluno, optamos por adaptar um jogo para auxiliar a fixação do conteúdo de Trigonometria no Triângulo Retângulo, de todo modo, por se tratar de uma metodologia que usa jogo para auxiliar no ensino e aprendizagem de Trigonometria, pesquisamos, previamente sobre o uso de jogos no ensino de Matemática.

O uso de jogos nas aulas de Matemática propicia um ambiente favorável ao ensino e aprendizagem, como evidenciam alguns pesquisadores mostrando que também implica em outros benefícios, melhorando a socialização dos estudantes, o entendimento do conteúdo, criação de hipóteses, formalização de conceitos, aceitação e superação em caso de derrota.

Por outro lado não podemos simplesmente deixar de lado os jogos que os alunos praticam, supostamente sem nenhuma vinculação com a aula, pois alguns desses jogos podem envolver conceitos matemáticos, por isso se faz necessário verificar a atividade em que os estudantes estão envolvidos, e não somente puni-los, pois tais atividades podem servir de auxílio para determinado conteúdo.

Este trabalho revisional teve como principal referência Grandó (2004) que nos relata situações de ensino e aprendizagem em Matemática por meio de jogos, mostrando o quanto tais atividades podem aproximar os estudantes da Matemática, assim criando um ambiente prazeroso e acolhedor e não se esquecendo do principal objetivo, o da aprendizagem, tornando os alunos cidadãos críticos e melhor preparados para enfrentarem problemas de seu cotidiano.

Acreditamos que o jogo criado seja de possível utilização para alunos do primeiro ano do Ensino Médio, por analogia, pois ao aplicá-lo na Semana de Educação, Ciência e Tecnologia do IFSP/SPO, para estudantes de licenciatura em Matemática e de Engenharias, não tivemos problemas. Por se tratar de um jogo, houve uma pequena demora até que se acostumassem às regras, já que esses alunos não tinham dificuldades com o conteúdo abordado, porém para usá-lo com estudantes do primeiro ano do Ensino Médio o professor deve verificar se tiveram contato com o conteúdo e ficar ciente que o tempo necessário para aplicar o jogo será maior do que em relação à aula expositiva.

Apesar de o tempo de aplicação do jogo ser maior que de uma aula expositiva, possivelmente o rendimento do estudante, após a atividade será melhor, possibilitando a assimilação do conteúdo, e quando for necessário retomar o conhecimento adquirido, possivelmente o educando terá facilidades em lembrar, porque houve uma abordagem acessível e prazerosa para o aluno.

O trabalho possibilitou estudar e aprofundar o uso de jogos nas aulas de Matemática, tendo, assim, um conhecimento de outra metodologia de ensino nas aulas de Matemática, o uso de tal atividade provavelmente irá desmistificar, aproximar, dinamizar o aprendizado do aluno.

Esperamos que esse jogo seja apresentado para diversos alunos do nono ano do Ensino Fundamental II e Ensino Médio, e que os professores possam utilizá-lo para fixar o conteúdo nele abordado. Fica aqui, também, a prerrogativa de uma aplicação e coleta de dados para verificar os resultados obtidos, ou ainda usar o princípio deste para desenvolver um jogo que envolva Trigonometria na Circunferência.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BRASIL. Secretaria da educação fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática** - Brasília: MEC / SEF, 1998.

BRASIL, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **PCN+ Ensino Médio: Orientações Educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais**. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/SEMT, 2002, 144p.

BEZERRA, N.J.F.; BANDEIRA, S. M. C; **Metodologias Alternativas No Ensino Da Matemática - jogos e oficinas pedagógicas** –. Rio Branco; 2008. Disponível em: [http://www.lematec.no-ip.org/CDS/ENEM10/artigos/RE/ T3\\_RE2216.pdf](http://www.lematec.no-ip.org/CDS/ENEM10/artigos/RE/ T3_RE2216.pdf)> Acessado em: 09 abril 2014.

CARDOSO, Andrea; JÚNIOR, J. C. S; OLIVEIRA, H.; STORTI, L. B. **Aprendizagem de trigonometria dinâmica**. Alfenas: INIFAL-MG; 2011. Disponível em: [http://www.br-ie.org/sbie-wie2011/WIE-Trilha1/93149\\_1.pdf](http://www.br-ie.org/sbie-wie2011/WIE-Trilha1/93149_1.pdf)> Acessado em: 09 abril 2014.

DIONIZIO, F. Q; BRANDT, C. F. **Análise das dificuldades apresentadas pelos alunos do ensino médio em trigonometria**. X Congresso Nacional de Educação - EDUCERE; Curitiba; 2011. Disponível em: [http://educere.bruc.com.br/CD2011/pdf/4728\\_2885.pdf](http://educere.bruc.com.br/CD2011/pdf/4728_2885.pdf)> Acessado em: 03 abril 2014.

GRANDO, R. C. **O jogo e a Matemática no contexto da sala de aula**. São Paulo: Paulus; 2004.

LIMA, N. J; BULOS, A. M. M. **O Ensino e a Aprendizagem de Trigonometria**. XIII CIAEM-IACME; Recife; 2011. Disponível em: <https://www.yumpu.com/pt/document/view/17352798/o-ensino-e-a-aprendizagem-de-trigonometria-cimm>> Acessado em: 09 março 2014.

LIMA, R. J. T; FREITAS, M. T. M; **Baralho Trigonométrico e a Escrita na Aprendizagem da Matemática: uma experiência em grupo**. XI Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM; Curitiba, 2013. Disponível em:

[http://sbem.esquiro.kinghost.net/anais/XIENEM/pdf/2118\\_809\\_ID.pdf](http://sbem.esquiro.kinghost.net/anais/XIENEM/pdf/2118_809_ID.pdf)> Acessado em: 09 abril 2014.

MACEDO, L.; MACHADO, N. J. **Jogo E Projeto: Pontos e Contrapontos**. São Paulo: Summus Editorial; 2006.

MIRANDA, S. M. C; PADILHA, S. L; CIANI, A. B. **Trigonometria, cálculo, ensino e aprendizagem**. XI Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM; Curitiba; 2013. Disponível em: [http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/dezembro2013/matematica\\_artigos/artigo\\_miranda\\_padilha\\_ciani.pdf](http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/dezembro2013/matematica_artigos/artigo_miranda_padilha_ciani.pdf)> Acessado em: 07 abril 2014.

NEVES, Edna Alves; **Jogos Matemáticos como Recursos Didáticos**. Disponível em <<http://meuartigo.brasilecola.com/matematica/jogos-matematicos-como-rcursos-didaticos.htm>> Acesso em 27 setembro 2011.

OLIVEIRA, F. C. **Dificuldade No Processo De Ensino Aprendizagem De Trigonometria Por Meio De Atividades**. Natal: UFRN; 2006. Disponível em: [http://repositorio.ufrn.br:8080/jspui/bitstream/123456789/16022/1/Francisco Caninde O.pdf](http://repositorio.ufrn.br:8080/jspui/bitstream/123456789/16022/1/Francisco%20Caninde%20O.pdf)> Acessado em: 07 abril 2014.

PASDIORA, Neusa Maria Wanderlinden Leineker. **Jogos e matemática: Uma proposta de trabalho para o ensino médio**. Paraná, Lapa 2008. Disponível em: <<http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/978-4.pdf>> Acesso em: 17 abril 2013.

RITA, Mariane Rodrigues. **Oficina: Dominó Trigonométrico**. Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro – UFRRJ; Rio de Janeiro 2012. Disponível em: <https://sites.google.com/site/portfoliomatematica/oficina-domino-trigonometrico>> Acesso em: 09 abril 2014.

SILVA, M. F; FROTA, M. C. R; **Uma experiência com modelos da trigonometria associados a situações práticas**. X Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM; Salvador; 2010. Disponível em: [http://www.gente.eti.br/lematec/CDS/ENEM10/artigos/RE/T11\\_RE762.pdf](http://www.gente.eti.br/lematec/CDS/ENEM10/artigos/RE/T11_RE762.pdf)> Acessado em: 09 abril 2014.



SILVA, J. A. F. **Refletindo sobre as dificuldades de aprendizagem na Matemática: Algumas considerações.** Universidade Católica de Brasília - Brasília; (sd). Disponível em: <https://www.ucb.br/sites/100/103/TCC/22005/JoseAugustoFlorentinodaSilva.pdf>> Acessado em: 07 abril 2014.



APÊNDICE

$$\alpha = 30^\circ$$

$$\text{sen } \alpha$$

$$\alpha = 30^\circ$$

$$\alpha = 30^\circ$$

$$\text{cos } \alpha$$

$$\alpha = 30^\circ$$

$$\alpha = 45^\circ$$

$$\text{tg } \alpha$$

$$\alpha = 45^\circ$$

$$\alpha = 45^\circ$$

$$\text{cotg } \alpha$$

$$\alpha = 45^\circ$$

$$\alpha = 45^\circ$$

$$\frac{1}{\text{tg } \alpha}$$

$$\alpha = 45^\circ$$

$$\alpha = 45^\circ$$

$$\frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha}$$

$$\alpha = 45^\circ$$

$$\alpha = 45^\circ$$

$$\frac{\text{cos } \alpha}{\text{sen } \alpha}$$

$$\alpha = 45^\circ$$

$$\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\alpha = 45^\circ$$

$$\text{sen } \alpha$$

$$\alpha = 45^\circ$$

$$\alpha = 45^\circ$$

$$\text{cos } \alpha$$

$$\alpha = 45^\circ$$

$$\alpha = 30^\circ$$

$$\text{cotg } \alpha$$

$$\alpha = 30^\circ$$

$$\alpha = 30^\circ$$

$$\text{tg } \alpha$$

$$\alpha = 30^\circ$$

$$\alpha = 30^\circ$$

$$\frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha}$$

$$\alpha = 30^\circ$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\alpha = 30^\circ$$

$$\frac{\text{cos } \alpha}{\text{sen } \alpha}$$

$$\alpha = 30^\circ$$

$$\alpha = 30^\circ$$

$$\frac{1}{\text{tg } \alpha}$$

$$\alpha = 30^\circ$$

$$1$$

$$1$$

$$1$$

$\sqrt{3}$  $\sqrt{3}$  $\sqrt{3}$  $\alpha = 30^\circ$  $ca. \alpha$  $hip.$  $\alpha = 30^\circ$  $\alpha = 30^\circ$  $ca. \alpha$  $co. \alpha$  $\alpha = 30^\circ$  $\alpha = 30^\circ$  $co. \alpha$  $hip.$  $\alpha = 30^\circ$  $\alpha = 30^\circ$  $co. \alpha$  $ca. \alpha$  $\alpha = 30^\circ$  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  $\sqrt{3}$  $2$  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  $\sqrt{3}$  $2$  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  $\alpha = 60^\circ$  $tg \alpha$  $\alpha = 60^\circ$  $\frac{1}{2}$  $1$  $2$  $\frac{1}{2}$

$$\alpha = 60^\circ$$

$$\cotg \alpha$$

$$\alpha = 60^\circ$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\alpha = 60^\circ$$

$$\frac{ca. \alpha}{co. \alpha}$$

$$\alpha = 60^\circ$$

$$\alpha = 60^\circ$$

$$\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\alpha = 60^\circ$$

$$\alpha = 60^\circ$$

$$\frac{1}{\tg \alpha}$$

$$\alpha = 60^\circ$$

$$\alpha = 60^\circ$$

$$\frac{co. \alpha}{ca. \alpha}$$

$$\alpha = 60^\circ$$

$$\alpha = 60^\circ$$

$$\frac{ca. \alpha}{hip.}$$

$$\alpha = 60^\circ$$

$$\sqrt{3}$$

$$\sqrt{3}$$

$$\sqrt{3}$$

$$\alpha = 60^\circ$$

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\alpha = 60^\circ$$

$$\alpha = 60^\circ$$

$$\cos \alpha$$

$$\alpha = 60^\circ$$

$$\alpha = 60^\circ$$

$$\sin \alpha$$

$$\alpha = 60^\circ$$

$$\alpha = 60^\circ$$

$$\frac{\text{co. } \alpha}{\text{hip.}}$$

$$\alpha = 60^\circ$$

$$1$$

$$1$$

$$1$$

$$\alpha = 45^\circ$$

$$\frac{\text{ca. } \alpha}{\text{hip.}}$$

$$\alpha = 45^\circ$$

$$\alpha = 45^\circ$$

$$\frac{\text{ca. } \alpha}{\text{co. } \alpha}$$

$$\alpha = 45^\circ$$

$$\alpha = 45^\circ$$

$$\frac{\text{co. } \alpha}{\text{hip.}}$$

$$\alpha = 45^\circ$$

$$\alpha = 45^\circ$$

$$\frac{\text{co. } \alpha}{\text{ca. } \alpha}$$

$$\alpha = 45^\circ$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}$$

