INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA

GOVERNO FEDERAL BRASIL PÁTRIA EDUCADORA

Resolução de Problemas: Tradução de Situações Problema para Matemática

Leonardo Cascio de Souza

Trabalho de Conclusão do Curso Superior de Licenciatura em Matemática, orientado pela Profª. Elisabete Teresinha Guerato

IFSP
São Paulo
2015

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Souza, Leonardo Cascio.
Resolução e Problemas: Tradução de Situações Problema para Matemática / Leonardo Cascio de Souza - São Paulo: IFSP, 2015.
92f

Trabalho de Conclusão do Curso Superior de Licenciatura em Matemática - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo
Orientadora: Elisabete Teresinha Guerato

1. Matemática. 2. Resolução de Problemas. 3. Polya. 4. Situação Problema. 5. Interpretação de Textos Matemáticos I. Título do trabalho.

LEONARDO CASCIO DE SOUZA

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: TRADUÇÃO DE SITUAÇÕES PROBLEMA PARA MATEMÁTICA

Monografia apresentada ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, em cumprimento ao requisito exigido para a obtenção do grau acadêmico de Licenciado em Matemática.

APROVADA EM 25/11/2015 **CONCEITO:** 9,5

Prof. Me. Mario Luís Villarruel da Silva
Membro da Banca

Prof. Me. Silvio De Liberal
Membro da Banca

Profa. Me. Elisabete Teresinha Guerato
Orientadora

Leonardo Cascio de Souza

Aluno: Leonardo Cascio de Souza

“A educação exige os maiores cuidados, porque influi sobre toda a vida”.

Sêneca

Aos Meus Familiares e Amigos

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus amigos e familiares por compartilharem todos os momentos da minha vida. Agradeço à professora mestre Elisabete Teresinha Guerato pela orientação, dedicação e paciência para que pudéssemos concluir o trabalho. Aos professores que ensinaram-me o necessário para chegar a esse ponto. À direção e aos alunos pesquisados pelo apoio ao projeto. Agradeço as colegas de curso, Alberto, Anderson, Camila, Daniella, Diego, Gisele, Leandro, Thais e tantos outros que não foram citados, mas também participaram desse ciclo de minha vida. Agradeço, em especial, a minha namorada Michelle por apoiar e compreender todo o tempo aplicado nesse trabalho. Também aos amigos Aline Braga, Ana Carolina, André Rosale, Luana Mari e Rafael Prado por compartilharem todos esses anos de curso, proporcionando momentos inesquecíveis.

RESUMO

Este trabalho teve como objetivo verificar se a falta de conhecimento em interpretação de texto é fator causador da dificuldade na resolução de problemas matemáticos. Em um levantamento bibliográfico, foram consideradas as obras de Polya (1995), Schoefeld (1985) e Onuchic (2012), que trazem diversas metodologias utilizadas na resolução de problemas. Baseado nessas obras, foram aplicados quatro problemas, dois deles contextualizados e dois de fixação, para um grupo de vinte alunos de um curso preparatório. Cada problema inclui uma série de questionamentos, para assim identificar possíveis falhas de resolução. Ao analisar os dados obtidos, foi verificado que, nesse grupo, existe a dificuldade na resolução de problemas contextualizados, mas que a compreensão dos enunciados dos problemas não depende apenas da interpretação de texto, mas de um conjunto de conhecimentos matemáticos e linguísticos. Concluímos que para a melhoria do cenário atual, precisamos trabalhar com textos matemáticos, focando na interpretação de dados e, quando possível, juntamente com profissionais da língua Portuguesa.

Palavras-chaves: Matemática, Resolução de Problemas, Polya, Situação Problema, Interpretação de Textos Matemáticos

ABSTRACT

This study has the objective to verify if the lack of knowledge in text interpretation is the causal factor of difficulty in solving mathematical problems. In a bibliographic review, we considered the work of Polya (1995), Schoenfeld (1985) and Onuchic (2012), which present various methodologies used in solving problems. Based on these works, four issues were applied, where two of them were contextualized and the other two were of fixation, to a group of twenty students in a preparatory course. Each issue included a number of questions in order to identify possible resolution failures. After analyzing the data, it was found that, in this group, there was a difficulty in solving contextual problems, but the understanding of the statements of the problems depends not only on text interpretation, but also on a set of mathematical and language skills. We concluded that in order to improve the current situation, we must work with mathematical texts, focusing on the interpretation of data, and when possible, work together with Portuguese language professionals.

Keywords: Mathematics, Problem Solving, Polya, Problematic Situations, Mathematical Text Interpretations

LISTA DE FIGURAS

Pág.

SUMÁRIO

Pág.

INTRODUÇÃO

O interesse em pesquisar a temática relacionada à resolução de problemas surgiu a partir da atuação como professor de Matemática no Ensino Médio. Ao aplicar provas e atividades aos alunos, identificamos certa dificuldade na compreensão de problemas contextualizados, e quando questionados sobre o motivo para tal bloqueio na resolução foi citada a falta de entendimento do texto em si, e não nos conceitos e pensamentos matemáticos.

Na história da humanidade a Matemática desenvolveu-se a partir da tradução dos problemas rotineiros e da curiosidade em criar métodos resolutivos para tais, ou seja, a resolução e entendimento dos problemas é algo imprescindível para o estudo e aplicação no meio.

Notamos, nos dias atuais, que essa dificuldade de compreensão do que realmente é resolver um problema matemático, afeta diretamente professores e alunos, pois não há distinção dos termos *exercício* e *problema*. Necessita-se salientar a diferença, pois *exercício* envolve uma aplicação de conhecimentos prévios, encontrando assim uma resposta teórica e *problema* necessita de compreensão, estudo dos dados e um plano para resolução. Tais definições foram criadas utilizando com base o conhecimento acadêmico do próprio autor e servirão como sustentação em todo o trabalho.

A ideia principal deste trabalho é evidenciar quais motivos estão vinculados às dificuldades, e mostrar a importância da resolução de problemas no currículo da matemática, como cita D'Ambrósio[1]:

> A colocação de uma maior ênfase na resolução de problemas no currículo de matemática tem sido amplamente discutida na comunidade de Educação Matemática, internacionalmente. Atualmente esta preocupação encontra-se expressa nas novas propostas curriculares que surgem mundialmente, inclusive no Brasil. (D'AMBROSIO, 1989, p.17)

A par deste cenário, este trabalho possui como objetivos gerais:

---

[1] Doutor em Educação Matemática pela Indiana University-USA, atualmente lotada no Educational Development College of Education, University of Delawere, Newark, Delaware - USA.

- Pesquisar os aspectos históricos da criação dos problemas na matemática, e suas resoluções, analisando as contribuições de diversos autores;
- Verificar a importância da resolução de problemas no currículo nacional através dos PCNs.

A pesquisa histórica trará a importância da problematização, visando, desde os tempos antigos, a ideia de que a Matemática está no nosso cotidiano e que existe uma ligação com todos os outros conhecimentos da humanidade, não sendo uma ciência separada, como cita Ramos (2011, p.14): “A matemática está inserida em várias situações que envolvem diversas áreas e deve ser compreendida como um conhecimento humano indispensável para a formação do indivíduo”.

Após diversos estudos na área de resolução de problemas, liderados por grandes nomes da Matemática, como Sócrates, Platão, Descartes entre outros, chegamos ao seu ápice com o trabalho de George Polya intitulado *How to Solve It* (A arte de resolver problemas), originalmente publicada em 1945. Na obra de Polya presenciamos um grande avanço na heurística da resolução de problemas, mostrando que com quatro passos pré-estabelecidos podemos solucionar problemas matemáticos.

Tendo os estudos de Polya como “pedra fundamental” outros autores iniciaram suas pesquisas no âmbito da resolução de problemas, trazendo assim, diversas metodologias de ensino que são utilizadas até os dias atuais. Entre eles, Alan Schoenfeld enumera conhecimentos e habilidades necessárias para alcançar êxito na Matemática e Lourdes de la Rosa Onuchic cria um roteiro de atividades, visando auxiliar a condução das aulas.

O trabalho também traz uma atividade aplicada para descobrir se os alunos encontram dificuldades no momento de resolver um exercício contextualizado, e caso exista, identifica o principal empecilho para sua resolução. A atividade aplicada possui como base indagações moldadas nas metodologias de Polya, Schoenfeld e Onuchic. Não há dentro da pesquisa o objetivo criar uma metodologia de ensino, e sim, o interesse em criar situações que possibilitem desenvolver estudos futuros.

A monografia está dividida, além desta introdução, em seis Capítulos, sendo o primeiro – *A problematização da matemática* – trazendo os seus principais aspectos históricos e de sua resolução; no segundo – *George Polya* – é detalhada a vida e obra do autor de mesmo nome, com foco em sua obra *How to Solve It* (A arte de resolver problemas); no terceiro – *Pesquisas atuais e importância no currículo* – será apresentado pesquisas feitas após os trabalhos de Polya e a importância da resolução de problemas expressa nos PCNs; durante o quarto – *Metodologia* – serão mencionados os métodos de pesquisa utilizados; no quinto – *Análise de dados* – as informações encontradas na pesquisa serão expostas e disponibilizadas em formato de tabelas, gráficos e discussão; o sexto – *Considerações finais* – traz diagnósticos dos questionamentos iniciais, com base nos dados encontrados.

2 A PROBLEMATIZAÇÃO MATEMÁTICA

Ao buscarmos uma definição intuitiva para a expressão “problema”, encontramos diversos autores com seus próprios conceitos. Para entendermos essas distinções, nos basearemos em quatro definições que nos possibilita construir um conceito ao termo aplicado.

Segundo Newell & Simon (1972), “um problema é uma situação na qual um indivíduo deseja fazer algo, porém desconhece o caminho das ações necessárias para concretizar a sua ação”. Segundo Saviani (1980), “problema é uma necessidade a ser resolvida ou superada”, e ainda, segundo Chi & Glaser (1985), “o problema é uma situação na qual um indivíduo atua com o propósito de alcançar uma meta utilizando para tal alguma estratégia em particular”.

Utilizando o dicionário Houaiss, temos que problema é “obstáculo, dificuldade que desafia a capacidade de solucionar de alguém”, e no quesito matemático “toda questão em que se procura calcular uma ou várias quantidades desconhecidas, denominadas *incógnitas,* ligadas mediante relações a outras conhecidas e chamadas *dados.”*

Com as definições acima, podemos concluir que problema ocorre quando não possuímos conhecimento pleno das ferramentas necessárias para alcançar um objetivo predeterminado. Tendo em vista esse conceito, entendemos que a aplicação do problema na Matemática deve ser trabalhada junto ao entendimento prévio da teoria, podendo assim, aprimorar o raciocínio lógico e o trabalho mental com o estímulo da criatividade ao tentar solucioná-lo.

2.1 O problema na matemática

Através de pesquisas históricas podemos verificar que a problematização na Matemática é mais antiga do que imaginamos. Segundo Stanic & Kilpatrick (1989, p.1) “Os problemas ocupam um lugar central nos currículos desde a antiguidade”.

Algumas evidências provam que os problemas são estudados desde o tempo dos antigos egípcios, chineses e gregos, como por exemplo, na região da Mesopotâmia foram encontrados algumas tabletes do período babilônico com mais de 4 mil anos (figura 1), que ensinavam como resolver uma equação. No Egito antigo foi encontrado o papiro de Ahmes (figura 2), documento com mais de 3 mil anos, que possui a resolução de 85 problemas matemáticos, envolvendo aritmética, geometria e trigonometria. Em um desses papiros observamos um problema de progressão geométrica, que pede para efetuar a soma dos cincos primeiros termos, tendo o número sete como termo inicial e também como razão. No próprio papiro verificamos dois métodos de resolução para o problema proposto e a resposta, e de acordo com Stanic & Kilpatrick (1989), “pelo fato do problema referir casas, gatos, ratos etc., para serem adicionados, sugere que era um problema recreativo ou um *puzzle*.”

Figura 01 - Tablete Babilônico.

Fonte: *http://www1.folha.uol.com.br/ciencia/839229-instituto-de-nova-york-exibe-licoes-de-matematica-sumeriana.shtml*.

Figura 02 - Papiro de Ahmes - progressão geométrica.

Fonte: Chase (1979, p.17), citado por Stanic e Kilpatrick (1989)

2.2 A resolução de problemas

Como podemos verificar, o problema está vinculado à matemática desde tempos antigos, mas a preocupação com métodos para resolução de problemas ainda é recente, como cita Stanic & Kilpatrick:

> Os problemas têm uma longa história nos currículos de Matemática. Contudo, principalmente no decurso do último século, a discussão sobre o ensino da resolução de problemas passou da defesa de que se devem simplesmente apresentar aos alunos problemas ou regras para a resolução de problemas particulares para o desenvolvimento de abordagens mais gerais da resolução de problemas. (STANIC & KILPATRICK, 1989, p.7).

Isso acontece, pois existe a utilização equivocada de professores, e até livros didáticos, das palavras *problema* e *exercício.* Temos de deixar claro que há uma lacuna entre esses dois termos, pois *exercício* envolve a aplicação de um conhecimento prévio, muitas vezes em fórmulas, só resultando em uma resposta teórica, e *problema* necessita de uma compreensão, de estudo dos dados e um plano para resolução, como cita Gomez-Granell:

> A resolução de problemas foi habitualmente usada no ensino da matemática como uma forma de aplicar os conhecimentos previamente adquiridos. Neste sentido, percebemos que a princípio, a resolução de problemas muito se confundia com a utilização de exercícios, pois apenas tinha a finalidade de fixar um conteúdo. Hoje, através de várias pesquisas nessa área, pode-se considerar a resolução de problemas como uma nova metodologia que pode levar o aluno a pesquisar formas diferentes de resolver determinada situação que é um problema, porque ele não resolve de forma mecanizada. (GOMEZ-GRANELL, 2008, p.276)

Esse pensamento de resolver problemas teve início com os filósofos gregos, principalmente Sócrates e Platão, utilizando a filosofia. Para Sócrates, “o indivíduo já detém o conhecimento a ser usado para resolver o problema e, portanto, a atividade de resolver problemas não passa de mera recordação.” (RAMOS *et al.*, 2002). O conhecimento mencionado por Sócrates é baseado em experiências do cotidiano, por consequência todos o continham. O método de recordação baseava-se em perguntas elaboradas pelo professor, “guiando” o aluno na resolução, tirando grande parte do mérito.

Com o passar dos anos os métodos de resolução de problemas ganharam mais notoriedade quando grandes matemáticos contribuíram com novas propostas.

Segundo Kahlmeyer-Mertens (2007), René Descartes (1596 – 1650), grande matemático e filósofo é um exemplo a ser citado com a sua obra “*Rules for the direction of mind*”, (*Regras para a direção do espírito*), onde explicava em detalhes o seu método para a resolução de problemas. Composto de 21 regras, o método tinha como objetivo transformar qualquer situação em um problema composto apenas por equações, porém nem sempre é possível transformar essas situações em problemas matemáticos. Entretanto, algumas ideias de Descartes possuem relevância para a resolução de problemas até os dias atuais, como cita Ramos:

> Regra III: “As únicas coisas que devemos aceitar são aquelas que ou podemos ver com clareza ou podemos deduzir com certeza”, relevando a importância da argumentação ao invés do uso da autoridade.

> Regra IV: “É necessário método para descobrir as leis da natureza”, ressaltando a importância da sistematização.
>
> Regra VII: “Se chegarmos a um porto onde não conseguimos entender o que está acontecendo, devemos fazer uma pausa e não prosseguir em um trabalho inútil”, mostrando que é importante mantermos controle sobre o que estamos fazendo sob pena de se perder em um trabalho infrutífero. (RAMOS *et al*, 2001, p.9):

Após Descartes, observamos ideias importantes sobre resolução de problemas iniciadas pelo psicólogo e cientista político Graham Wallas (1858 – 1932). Segundo Popova (2013), a resolução de problemas utilizado por Wallas é dividida em quatro etapas, sendo elas: saturação, incubação, inspiração e verificação. Na primeira etapa, saturação, o problema é trabalhado até esgotar-se as possibilidades de resolução. Durante a incubação, segunda etapa, o objetivo é retirar o problema do consciente e deixar o inconsciente realizar o trabalho, deixando-o em segundo plano. Já na etapa da inspiração, como o próprio nome diz, a resolução surge subitamente, sem o trabalho efetivo no problema, e por fim é necessário verificar o trabalho final. A técnica criada por Wallas não possui como objetivo a educação matemática, e sim a generalização do problema, podendo assim também ser aplicada no ramo da educação.

Esse método, mesmo tendo ideias interessantes, não é considerado de grande valia para resolver problemas, pois trata-se de um trabalho do “inconsciente”, ligando-se a noções vagas da “mente”, o que torna seu funcionamento questionável.

Skinner (1904 – 1990), psicólogo, exclui todo o conceito sobre trabalhos da “mente”, encontrado na teoria de Wallas, por considerá-las construções inúteis. Segundo Ferrari (2008), a resolução de problemas de Skinner consistia em duas etapas: Determinar as ações produtivas, feita através de uma ação, previamente condicionada por meio de estímulos, gerando assim uma resposta correspondente. Na segunda etapa é necessário reforçá-las, com ações positivas ao trabalho desenvolvido. Esse método foi comprovado insuficiente para o ensino, uma vez que não possuía esse como objetivo. Ainda assim foi aproveitado em outros aspectos, como o treinamento de animais.

Ao longo da história tivemos vários métodos diferenciados para a resolução de problemas, porém com o avanço das pesquisas na área, grande parte desses trabalhos tornaram-se obsoletos, o que não anula a importância na história das resoluções de problemas.

3 GEORGE POLYA

Figura 03 - George Polya

Fonte: *http://srvcnpbs.xtec.cat/creamat/joomla/index.php/noticies-/efemerides/1098-13-de-desembre-george-polya*.

George Polya nasceu em Budapeste, Hungria, no dia 13 de dezembro de 1887 e faleceu em Palo Alto, Estados Unidos da América, no dia 7 de setembro de 1985. No ensino secundário, destacava-se mesmo não concordando com os métodos adotados pela escola que estudava.

Em 1905, ao receber uma bolsa de estudos na Universidade de Budapeste iniciou seu estudo de Direito, assim como seu pai, porém não satisfeito resolveu mudar de área e começou a estudar literatura, passando por latim, seguido por física e filosofia e finalmente matemática. Em 1912 concluiu seu doutorado.

No ano seguinte foi para Göttingen, onde publicou seus primeiros trabalhos e conheceu David Hilbert, grande matemático alemão que viria a trabalhar com Polya. Em Paris iniciou seu trabalho no pós-doutorado e após a conclusão aceitou trabalhar no Instituto Federal de Tecnologia Suíço, em Zurique, onde conheceu outro grande matemático alemão, Adolf Hurwitz.

Polya participou duas vezes de projetos da fundação Rockefeller[2], sendo que o primeiro foi em 1924, na Inglaterra e em 1933 na cidade de Princeton, nos Estados Unidos. Na década de 40 esteve na Universidade Brown por dois anos e em 1952 se tornou professor da Universidade de Stanford. Mesmo aposentando-se em 1954 continuou a lecionar até 1978. Foi eleito membro da *National Academy of Sciences* em 1976.

Por ser considerado um exemplo na área, existem três premiações que levam seu nome e todos são entregues para pesquisadores de diversas áreas de atuação. São eles "*George Polya Prize*" (1969), "*George Polya Awards*" (1976) e "*Polya Prize*" (1987).

Abrangendo diversas áreas da Matemática, mas tornou-se referência na área de resolução de problemas, com seu livro *How to Solve It* (A Arte de Resolver Problemas), publicado em 1945.

Nessa obra, Polya procura trabalhar com pequenas indagações e sugestões para que os estudantes criem o pensamento matemático, resolvendo assim os problemas propostos. Para alcançar esse objetivo, o professor deve auxiliar seus alunos, o que segundo Polya não é fácil, já que exige tempo, prática, dedicação e princípios firmes.

Ainda no âmbito do auxílio aplicado pelo professor, Polya diz:

> Se o professor ajudar demais, nada restará para o aluno fazer. O professor deve auxiliar, nem demais nem de menos, mas de tal modo que ao estudante caiba uma parcela razoável do trabalho. (...) O melhor é, porém, ajudar o estudante com naturalidade. (POLYA, 1995, p.1)

Para essa tarefa de mediador da situação-problema, Polya criou um planejamento em quatro etapas, onde indagações serão feitas sobre o problema proposto, assim obter dados suficientes para que o aluno consiga chegar à solução. Com o uso constante desse método, o aluno poderá solucionar futuros problemas sem o auxílio de um mediador, apenas seguindo o planejamento proposto.

---

[2] Fundação Rockefeller: É uma fundação criada em 1913 nos Estados Unidos, define sua missão como sendo a de promover, no exterior, o estímulo à saúde pública, o ensino, a pesquisa e a filantropia. http://www.rockefellerfoundation.org/about-us/our-history/. Acessado em 27/05/2015.

As quatro fases da resolução de problemas de Polya são divididas em: Compreensão do problema, estabelecimento de um plano, execução do plano e retrospecto, todas baseadas em indagações, aspecto importante no trabalho do autor.

PRIMEIRA FASE (Compreensão do problema): Através de perguntas e indagações o estudante precisa compreender completamente o problema proposto, identificando todos os pontos necessários para a resolução, para assim questionar-se sobre o objetivo do exercício e a possibilidade de uma possível resolução do problema.

Essas indagações podem ser feitas pelo próprio estudante, mas caso esteja com dificuldades o professor pode orientá-lo. Algumas possíveis indagações são: "Qual é a incógnita do problema? Quais são os dados encontrados? Qual é a condicionante? É possível satisfazer a condição? A condição é suficiente para resolver o problema? Ou não? Ou excessiva? Ou contraditória? Preciso desenhar uma figura? É possível defini-las de outro modo?"

Nesse momento, o estudante necessita compreender todo o problema, pois como diz o autor:

> É uma tolice responder a uma pergunta que não tenha sido compreendida. É triste trabalhar para um fim que não se deseja. (...) o aluno precisa compreender o problema, mas não só isso: deve também desejar resolvê-lo. (...) O problema deve ser bem escolhido, nem muito difícil nem muito fácil, natural e interessante. (POLYA, 1995, p.4)

SEGUNDA FASE (Estabelecimento de um plano): Com as informações adquiridas na primeira fase, o estudante necessita criar um plano para resolver o problema. Com a atuação discreta do professor, esse plano baseia-se em criar uma conexão dos dados encontrados com a incógnita a ser resolvida.

> Realmente, o principal feito na resolução de um problema é a concepção da ideia de um plano. Esta ideia pode surgir gradualmente ou, então, após tentativas infrutíferas e um período de hesitação, aparecer repentinamente, num lampejo, como uma "ideia brilhante". A melhor coisa que pode um professor fazer por seu aluno é propiciar-lhe, discretamente, uma ideia luminosa. (POLYA, 1995, p.5)

As indagações ainda possuem um papel importante nessa segunda etapa, como por exemplo: "É possível encontrar problemas auxiliares se não puder resolver de modo imediato? É preciso criar um plano para resolver o problema? Já viu esse problema antes? Ou já viu o mesmo problema apresentado de modo diferente? Conhece um problema parecido? Ou um que seja importante aqui? Ou uma propriedade? Olhando para a incógnita, consegue pensar em um problema já solucionado que a possua? É possível utilizá-lo? É possível utilizar o seu resultado? É possível utilizar a sua resolução?"

Para estabelecermos um bom plano de resolução temos que conhecer, mesmo que superficialmente, o assunto discutido, pois não é possível trabalhar com algo que não nos familiarizamos. Esse conhecimento deve ser adquirido previamente, com experiências anteriores, dando importância assim ao trabalho de resolver muitos problemas matemáticos.

TERCEIRA FASE (Execução do plano): Após conceber o plano, o que não é uma tarefa fácil, o estudante deve colocá-lo em prática, sendo que o fator mais importante para isso é, segundo Polya, paciência.

Ainda seguindo a lista de indagações, para a terceira fase temos: "Ao executar o plano, conseguimos verificar cada passo? É possível verificar claramente que cada passo está correto? Mas podemos também demonstrar que o passo está correto?"

O trabalho do professor nesta etapa será menor, pois com o plano em mãos o estudante possui um roteiro a ser seguido, e assim, a maior dificuldade que possivelmente apareça é que o estudante esqueça seu plano. Nesse cenário, o professor deve insistir que o estudante verifique cada etapa efetuada.

QUARTA FASE (Retrospecto): A última etapa citada por Polya trata-se de examinar a solução obtida e fazer um retrospecto do trabalho efetuado.

Muitos estudantes têm o hábito de finalizar o cálculo de um problema e partir para outro, sem ao menos verificar o resultado encontrado. Para Polya, isso é um erro que não podemos cometer:

> Se fizerem um retrospecto da resolução completa, reconsiderando e reexaminando o resultado final e o caminho que levou até este, eles poderão consolidar o seu conhecimento e aperfeiçoar a sua capacidade de resolver problemas. (POLYA, 1995, p.10)

Para o autor, um problema matemático não se esgota, sempre existe algo a se fazer, até mesmo aperfeiçoar sua resolução e compreensão. Além disso, ainda existe a possibilidade de haver erro, principalmente em problemas longos e trabalhosos, o que torna o retrospecto algo indispensável.

As possíveis indagações nesta fase são: "É possível verificar o resultado encontrado? É possível verificar o raciocínio feito? É possível chegar ao resultado por outro caminho? É possível utilizar o resultado, ou método, para outros problemas?"

Segundo Polya, a etapa de revisar a solução é a mais importante, pois propicia uma *depuração* e uma *abstração* da solução do problema.

Depuração: tem como objetivo verificar a argumentação usada e simplificá-la, podendo até modificar para outra mais simples e objetiva, que antes estava inacessível ao estudante.

Abstração: tem como objetivo refletir sobre a solução encontrada, descobrindo a essência do problema e do método empregado, assim é possível resolver outros problemas, aumentando sua capacidade de pensamento matemático.

A partir deste amplo estudo realizado por Polya, a resolução de problemas matemáticos foi encarada como um procedimento de ensino e de aprendizagem, e por isso muitos outros autores continuaram a trabalhar no assunto, buscando outros métodos, ainda que alguns fortemente baseados no autor.

4 PESQUISAS ATUAIS E IMPORTÂNCIA NO CURRÍCULO

Como dito anteriormente, muitos estudiosos continuaram as pesquisas da área em questão, alguns com ideias inovadoras e outros baseados em autores anteriores. Durante este capítulo consideraremos alguns autores em particular, que segundo pesquisas, foram essenciais na heurística da resolução de problemas da atualidade.

Com grandes contribuições na educação matemática temos Alan Schoenfeld, matemático nascido nos Estados Unidos em 1947, iniciou sua carreira com o Bacharelado em Matemática pela *Queen's College* em 1968, posteriormente vieram o mestrado e doutorado pela *Stanford University* nos anos de 1969 e 1973. No mesmo ano do término de seu doutorado, Schoenfeld foi convidado a ser palestrante na *University of California*, e em 1975 tornou-se pesquisador do *Graduate Group in Science and Mathematics Education* (SESAME). Após alguns trabalhos na *Hamilton College* e *University of Rochester*, foi convidado pela *University of California* em 1985 para desenvolver um grupo com foco na educação matemática. Em 1987 se tornou professor sênior e atualmente possui um cargo no departamento de Educação e Matemática. No ano de 1994 tornou-se professor especial na *University of Nottingham*.

Entre seus feitos, tornou-se membro da *U.S. National Academy of Education* em 1994, e vice-presidente em 2001. Também foi presidente da *American Education Reseach Association* (AERA) em 1998. Em 2000 fez parte da criação dos *Principles and Standards for School Mathematics* para o *National Council of Teachers of Mathematics*.

No ano de 2011 ganhou a medalha Felix Klein pela Comissão Internacional de Instrução Matemática (ICMI) pelos mais de trinta anos de contribuição nas pesquisas sobre educação matemática.

Um dos seus principais trabalhos, *Mathematical Problem Solving* (1985), Schoenfeld tem como objetivo ensinar o pensamento matemático, facilitando assim a resolução de problemas. Para isso ele categoriza em quatro itens os conhecimentos e habilidades necessárias para possuir êxito na matemática. São eles:

1. *Recursos*: O conhecimento dos procedimentos e questões da Matemática.
2. *Heurísticas:* As estratégias e técnicas para resolver os problemas, trabalhando no que foi ensinado.
3. *Controle:* Decisões e recursos que deverão ser utilizados.
4. *Convicções:* Visão matemática do mundo, que determinará o modo que alguém abordará o problema.

Para Schoenfeld (1992), as tentativas de usar as heurísticas baseadas em Polya não provaram ser bem sucedidas, e que um dos motivos para tal seria o fato da heurística de Polya ser descritiva[3], e não prescritiva[4]. Segundo Onuchic (2012), Schoenfeld sugere que as pesquisas e o ensino de problemas deveriam apresentar algumas características:

> Ajudar os estudantes a desenvolver um grande número de estratégias mais específicas em resolução de problemas; ensinar estratégias metacognitivas; desenvolver formas de melhorar as crenças dos estudantes sobre a natureza matemática, a resolução de problemas e suas próprias competências pessoais. (ONUCHIC, 2012, p. 8)

No Brasil também encontramos trabalhos importantes sobre o assunto, orientados por grandes doutores na área da Educação Matemática. Entre eles citamos Lourdes de la Rosa Onuchic, coordenadora do GTERP – Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas – da UNESP de Rio Claro.

Onuchic concluiu a graduação em Bacharelado e Licenciatura em Matemática pela Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da USP em 1954. Em 1971 recebeu o título de Mestre em Matemática pela Escola de Engenharia de São Carlos-USP e no ano de 1978 o doutorado em Matemática pelo Instituto de Ciências de São Carlos-USP. Atualmente leciona como professora voluntária da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho.

---

[3] Modelo utilizado para prever o comportamento de um problema, auxiliando no processo de tomada de decisões.
[4] Modelo utilizado para encontrar a melhor solução de um problema, otimizando etapas.

O GTERP foi criado em 1992 por alunos e ex-alunos da Pós-Graduação em Educação Matemática – PGEM – com intuito de aprofundamento dos conhecimentos em resolução de problemas, utilizando a “Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas”, onde segundo Onuchic (2012) tem como finalidade:

> [...] ensino e a aprendizagem devem ocorrer simultaneamente durante a construção do conhecimento, tendo o professor como guia e os alunos como co-construtores desse conhecimento. Além disso, essa metodologia integra uma concepção mais atual de avaliação. Ela, a avaliação, é construída durante a resolução do problema, integrando-se ao ensino com vistas a acompanhar o crescimento dos alunos, aumentando sua aprendizagem e reorientando as práticas em salas de aula quando for necessário. (ONUCHIC, 2012, p.12)

O GTERP criou um roteiro de atividades, segmentado em nove etapas, que auxilia o professor na condução da aula. São elas:

1. *Preparação do problema:* Nessa etapa o professor selecionará um problema matemático, porém o conteúdo necessário para a resolução não poderá ter sido apresentado aos alunos, visando assim estruturar um novo conceito, ou método.
2. *Leitura individual:* Cada aluno receberá uma cópia do problema e realizará sua leitura.
3. *Leitura em grupo:* Após o primeiro contato, os alunos formarão grupos e realizarão uma nova leitura. Nessa etapa o professor poderá ajudar os grupos de diversas formas durante a leitura, seja auxiliando na interpretação (com cautela, para não realizar todo o trabalho) ou esclarecendo dúvidas sobre palavras desconhecidas.
4. *Resolução do problema:* Após retiradas todas as dúvidas sobre o enunciado do problema, os alunos, ainda separados em grupos, buscam resolvê-lo. Durante a resolução, os alunos debaterão entre si para construir conceitos e métodos para solução.
5. *Observar e incentivar:* Nessa etapa, o professor não será mais um transmissor do conhecimento, mas sim um observador, que analisa todo o processo efetuado pelos alunos, estimulando-os a pensar coletivamente sobre o problema. Os alunos devem ser incentivados a utilizarem os conhecimentos já adquiridos previamente para a resolução

do problema, porém caso haja alguma dificuldade “secundária” no desenvolvimento da solução (como notações, técnicas operatórias ou passagem para a linguagem matemática), o professor terá a tarefa de intervir e questionar os alunos, possibilitando a continuidade do trabalho.

6. *Registro das resoluções na lousa:* Um representante de cada grupo irá à lousa para registrar o trabalho efetuado, enquanto os demais alunos analisam sua resolução. Nessa etapa todas as resoluções deverão ser registradas, sendo elas corretas ou não, pois assim os próprios alunos aos analisarem, questionarão os procedimentos feitos pelo grupo.
7. *Plenária:* Após os registros, os alunos debatem sobre as resoluções, questionando seus métodos e pontos de vista, esclarecendo qualquer dúvida. O papel do professor é guiar e mediar as discussões, incentivando assim a participação de todos os alunos, pois segundo Onuchic (2012), “Este é um momento bastante rico para a aprendizagem.”
8. *Busca de consenso:* Após todas as análises e debates, caso todas as dúvidas tenham sido sanadas, os alunos deverão chegar a um consenso sobre aquele problema, encontrando assim o resultado correto.
9. *Formalização do conteúdo:* Nesta última etapa, o professor irá à lousa, e de modo “formal”, apresentará o conteúdo proposto, de modo organizado, apresentando conceitos e procedimentos através da resolução de problemas, mostrando assim as diferentes técnicas operatórias e propriedades matemáticas sobre o assunto.

Os trabalhos feitos pelo GTERP, entre eles Dissertações de Mestrado e Teses de Doutorado, utilizam essa metodologia, visando melhorar a aprendizagem em sala de aula, fazendo que professores e alunos trabalhem juntos na construção do conhecimento.

Importante se considerar que esses mecanismos são teóricos, o que dificulta a aplicabilidade em sala de aula pressupondo uma rotina com agraves comuns, como superlotação de salas ou falta de comprometimento por parte dos alunos.

4.1 A resolução de problemas nos PCNs

Segundo os PCNs, a matemática é de vital importância em diversas situações, como ler e interpretar nossa realidade, pois é considerada um instrumento para manejar as situações da vida cotidiana. Para isso a matemática não pode ser vista apenas em caráter instrumental, mas sim como uma ciência, com características próprias de investigação e linguagem.

Nesse ponto, vale ressaltar a diferença[5] entre língua e linguagem e a interação entre elas. A linguagem Matemática é o conjunto de símbolos que se relacionam com determinadas regras preestabelecidas, sendo que todos os integrantes da "comunidade" que a utilizam precisam compreender. Esse conhecimento é necessário para a construção do pensamento Matemático, mas não para comunicação em si. A língua materna também apresenta regras e símbolos determinados, mas possui como principal objetivo a comunicação entre os indivíduos.

Nos textos matemáticos, língua materna e linguagem Matemática são indispensáveis, pois cada etapa da resolução depende de um desses conhecimentos. Inicialmente nos deparamos com um texto em língua materna, logo as regras e símbolos desta deverão ser utilizados, para assim compreender o objetivo do problema. Na sequência é necessário "traduzir" da língua materna para linguagem Matemática, o que torna indispensável o conhecimento de umas regras e símbolos.

Para isso, o ensino da Matemática necessita ser contextualizado, ensinando assim a compreensão e interpretação de situações problema, utilizando suas linguagens próprias e argumentações. Para tal, a leitura é indispensável, porém como citado nas Orientações Educacionais Complementares (PCN+, 2002, 112), "Contudo, saber ler é mais que ter domínio da língua portuguesa. Nesse caso, é necessário também dominar códigos e nomenclaturas da linguagem matemática, compreender e interpretar desenhos e gráficos e relacioná-los."

Seguindo esses conceitos, a resolução de problemas é peça fundamental para o ensino da Matemática, pois o aluno unirá o *pensar* com o *fazer*, algo que não

---

[5] Definições baseadas nos textos de Santomauro (2012) e Portal Educação (2014).

ocorre com exercícios de aplicação de conceitos, já que o aluno fará uma simples transposição analógica. Isso não significa que exercícios não contextualizados necessitam ser retirados do ensino da Matemática, eles possuem sua importância, mas não são suficientes na preparação do aluno.

Aplicar com efetividade esses conceitos não é simples, já que os próprios alunos não se entusiasmam, seja por falta de informações e conceitos ou por não se permitirem errar.

De acordo com o Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM, 1997), juntamente com as Orientações Educacionais Complementares (PCN+, 2002), a área de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias foi dividida em três grandes competências, e são elas:

> - Representação e comunicação, que envolvem a leitura, a interpretação e a produção de textos nas diversas linguagens e formas textuais características dessa área do conhecimento;
> - Investigação e compreensão, competência marcada pela capacidade de enfrentamento e resolução de situações-problema, utilização dos conceitos e procedimentos peculiares do fazer e pensar das ciências;
> - Contextualização das ciências no âmbito sociocultural, na forma de análise crítica das ideias e dos recursos da área e das questões do mundo que podem ser respondidas ou transformadas por meio do pensar e do conhecimento científico. (BRASIL, 2002)

Ao observarmos tais competências, a resolução de problemas é fundamental na aprendizagem, pois como descrito nos dois primeiros itens, a representação, comunicação, investigação e compreensão são de vital importância no ensino da Matemática, e características muito trabalhadas na resolução de problemas.

Ao longo do texto, quando citado PCNs trata-se dos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM, 1997). Para entendermos melhor sobre qual momento é possível aplicar a resolução de problemas nos PCNs, detalharemos pontos específicos de sua utilização, destacando as características utilizadas.

De início, quando é proposto um problema para um aluno, o trabalho inicial é de ler e compreender o enunciado, destacando dados relevantes, para então traduzir o texto referido em linguagem Matemática, como equações, tabelas ou gráficos. Esse conceito está salientado nos PCNs, em “articulação dos símbolos e códigos de ciência e tecnologia”, pertencente à primeira competência.

Além disso, também é necessário identificar os dados do problema e separar quais são, de fato relevantes, para não haver equívoco no momento de reconhecer em qual campo da Matemática o objeto se encontra, assim encontrando meios de resolver o problema, como fórmulas algébricas, geometria, estatística, entre outras. Nos PCNs, precisamente na segunda competência, temos como característica “estratégias para enfrentamento de situações-problema”, na qual esses quesitos se aplicam.

Ainda sobre a segunda competência, temos o item “interações, relações e funções; invariantes e transformações”, na qual a resolução de problemas se apresenta importante, pois a identificação de semelhanças, ou padrões nos cálculos são relevantes ao se resolver um problema, pois é possível estabelecer regras e propriedades Matemáticas. Além disso, o conhecimento das identidades matemáticas são primordiais para se analisar e resolver situações-problema.

Outro item encontrado na segunda competência, “modelos explicativos e representativos” traz a importância de interpretar e utilizar as diversas representações Matemáticas para assim analisar uma situação proposta, como o uso de gráficos e tabelas.

No item “relações entre conhecimentos disciplinares, interdisciplinares e Inter áreas”, salientado na segunda competência, constatamos a importância da contextualização, modelo utilizado para criação de situações-problema. (PCN+, 2002, p.117), “Adquirir uma compreensão do mundo da qual a matemática é parte integrante, através dos problemas que ela consegue resolver e dos fenômenos que podem ser descritos por meio de seus modelos e representações.”
Destacado em diversos itens ao longo dos PCNs, como os ressaltados acima, percebemos que a resolução de problema é assunto relevante, e de certo

modo, preocupante. Como vimos, diversas metodologias foram criadas e aplicadas ao longo da heurística de resolução de problemas, porém sem sanar esse obstáculo, mas não deixando de cooperar em estudos futuros.

Vale salientar que a causa da dificuldade na resolução de problemas não é exclusiva dos alunos, pois existe a possibilidade de uma formação inadequada ou falta de conhecimento didático por parte do professor. Para a utilização de metodologias apoiadas na resolução de problemas, o professor necessita de conhecimento matemático e didático, caso contrário, segundo Nunes (2011) “Os professores não podem exercer seu papel com competência e qualidade sem uma formação adequada para lecionar as disciplinas ou saberes de que estão incumbidos”.

Do mesmo modo que os alunos dependem de conhecimentos prévios para solucionar um problema com precisão, os professores necessitam de experiência ao formular ou selecionar exercícios, com o intuito de engajar seus alunos a pensar e argumentar, mas sem uma dificuldade excessiva, causando assim desencorajamento de solucioná-lo.

Sabe-se que, apesar das demais causas da dificuldade na resolução de problemas, o objetivo com esse trabalho é evidenciar o obstáculo encontrado por parte dos alunos, o que não impede de, em pesquisas futuras, retornar às demais causas.

Com isso, elaboramos uma atividade com intuito de encontrar as dificuldades no momento de resolver um problema, e se a mesma dificuldade encontra-se na resolução de exercícios de aplicação de conteúdo, não possuindo contextualização. Para tal, aplicamos um questionário referente a cada exercício proposto, baseando-se nos ideais de Polya (1995), Schoenfeld (1985) e Onuchic (2012), fundadora do Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas. Não tivemos como propósito a criação de uma nova metodologia, porém deixaremos em aberto para projetos futuros.

5 METODOLOGIA

Após os conceitos e heurísticas sobre a resolução de problemas, permanece o questionamento se os alunos, na atualidade, conseguem resolver um exercício contextualizado. Para isso faremos uma pesquisa qualitativa do tipo estudo de caso, com intuito de encontrar, em quais pontos específicos da resolução, os alunos possuem maior dificuldade. Em cada problema colocaremos perguntas que serão baseadas na combinação dos estudos de Polya (1995), Schoenfeld (1985) e Onuchic (2012).

Sobre a concepção de pesquisa qualitativa, Bicudo (2004) diz:

> O qualitativo engloba a ideia de subjetivo, passível de expor sensações e opiniões. O significado atribuído a essa concepção de pesquisa também engloba noções a respeito de percepções de diferenças e semelhanças de aspectos comparáveis de experiências, como, por exemplo, a vermelhidão do vermelho, etc., Entende-se que a noção de rigor não seria aplicável a dados qualitativos, uma vez que a eles faltaria precisão e objetividade, dificultando ou impossibilitando a aplicação de quantificadores. (BICUDO, 2004, p.104 *apud* SILVA, 2006, p.107)

Para realização da pesquisa foi escolhido um curso preparatório focado em preparar os alunos para concorrer aos concursos para ingressar nas escolas técnicas, localizado na zona leste da cidade de São Paulo, pois nele encontramos alunos de diversas escolas da região, particulares e públicas. Assim temos como amostra um grupo variado, pois cada escola, cada professor, possui metodologias diferentes de ensino. O curso funciona em dois horários, 7h30 às 11h30 e 14h às 18h, com um total de 60 alunos (entre 13 e 16 anos) e 6 professores. Possui três salas de aula e material próprio. O termo de autorização e compromisso da instituição copaticipante do projeto de pesquisa encontra-se disponível no apêndice A.

É importante ressaltar que não é objetivo do trabalho analisar a metodologia aplicada no curso preparatório, tampouco material didático, e qualquer característica aplicada em sala de aula.

O fato de o pesquisador ser professor do curso preparatório também foi importante na escolha do local, pois é de conhecimento que o assunto da atividade foi aplicado ao longo do ano, retirando assim o questionamento sobre o conhecimento ou não do conteúdo matemático por parte dos alunos.

Para realização da pesquisa com os alunos, submetemos o projeto para análise do comitê de ética, sendo o CAAE: 44243015.0.0000.5473. Após a aprovação do projeto, a atividade teve inicio com a assinatura de cada indivíduo, concordando com o trabalho. O termo de consentimento livre e esclarecido está disponibilizado no apêndice B.

A aplicação da atividade foi no dia 03 de Agosto de 2015 nas dependências do próprio cursinho, com a participação de 20 alunos, durante as aulas de reforço. O horário de início foi às 8h, com duração de 30 minutos.

A atividade possui quatro exercícios de matemática, disponíveis no apêndice C, sendo dois contextualizados (ou seja, envolvendo questões do cotidiano) e dois algébricos (apenas cálculos). O conteúdo matemático dos exercícios foi sistema linear de 1º grau com três variáveis e inequação do 1º grau.

Entre as quatro questões da atividade, temos duas de criação do próprio pesquisador e duas retiradas de materiais existentes, após pesquisa sobre quais modelos de exercícios resumiam o conteúdo proposto.

No início da atividade foram inseridas algumas instruções aos alunos, auxiliando, assim, qualquer dúvida que surgisse. As informações encontradas são: Não coloque nome. Não há necessidade de resposta de todas as perguntas, apenas as que conseguir responder (porém reforçado que deve-se tentar resolver); Não será permitido uso de nenhum material de apoio (apostilas, livros, cadernos e calculadoras); Atividade individual (não será permitido conversa entre os alunos); Não contém valor avaliativo; Tempo máximo de 30 minutos; Não rasure.

Além das instruções impressas houve explicação oral de como se portar durante a atividade, citando assim qualquer comportamento não adequado, como conversa, empréstimo de material, utilização de celulares, entre outras. Durante todo o processo não foi permitido perguntas referentes ao conteúdo, limitando assim somente ao conhecimento prévio do aluno.

As perguntas encontradas em cada exercício são:

I. Qual a incógnita do exercício?

   Essa indagação é muito utilizada por Polya (1995), pois auxilia na compreensão do problema.

II. Quais dados são encontrados no exercício? São todos importantes para a resolução?

   Esse questionamento encontra-se no trabalho de Polya (1995), pois para estabelecer um plano de resolução, o aluno precisa encontrar os dados do problema e verificar a importância de cada um. Também está presente no trabalho de Onuchic (2012), especificamente na etapa de leitura do problema, onde são tiradas todas as dúvidas sobre os dados encontrados.

III. Já resolveu algum exercício parecido? Se sim, isso auxilia na resolução?

   Etapa encontrada no trabalho de Polya (1985), ainda na fase de criação do plano de resolução, pois experiências anteriores podem ser utilizadas para melhor compreensão. No trabalho de Onuchic (2012) esse item também é importante, pois na etapa "Observar e incentivar" o professor tem como papel incentivar os alunos a utilizarem seus conhecimentos prévios.

IV. Resolução.

   Etapa encontrada nos três trabalhos. Em Polya (1995) é encontrado na terceira fase, execução do plano. Em Onuchic (2012) está na mesma fase do item anterior, onde o professor somente observa e incentiva o trabalho realizado pelos alunos. Já em Schoenfeld (1985), são citados quais conhecimentos e habilidades são necessárias para resolver um problema.

V. Você consegue resolver o exercício? Se não, qual foi o motivo?

   Etapa essencial para registrar possíveis dificuldades na resolução. A partir desse item podemos discorrer prováveis soluções para determinadas etapas da metodologia aplicada.

VI. Qual conteúdo matemático foi utilizado para a resolução do problema?

Item utilizado por Polya (1995) para estabelecimento do plano. Também vemos em Schoenfeld (1995), pois os recursos fazem parte dos quatro conhecimentos necessários para resolução de um problema.

VII. Classifique a dificuldade do exercício entre fácil, médio e difícil.
Etapa útil para entendermos se os alunos consideram os exercícios contextualizados mais complexos e difíceis que exercícios de aplicação de conceitos.

5.1 A Pesquisa

Primeiramente foi aplicado o termo de consentimento livre e esclarecido para todos os alunos presentes, vinte no total. Com o documento em mãos, o pesquisador iniciou a leitura, detalhando cada item para assim não haver dúvidas. Todos os alunos presentes aceitaram participar da pesquisa.

Após entrega dos termos devidamente assinados houve a entrega da atividade para assim outra leitura se iniciar, desta vez das instruções encontradas na primeira página. Ao sanar todos os questionamentos a esse respeito, o pesquisador iniciou a leitura dos quatro exercícios matemáticos, juntamente com as perguntas referentes, para assim evitar qualquer embaraço em relação a gramática utilizada.

Vale salientar que nenhuma dúvida sobre o conteúdo matemático foi discutida, pois era de importância medir o conhecimento já adquirido do aluno. Após todas as leituras foi iniciado o tempo de 30 minutos.

Ao longo da atividade, o pesquisador observou todos os alunos, caminhando pela sala de aula. Qualquer dúvida, exceto matemática, foi atendida (gramática, por exemplo). Outro ponto avaliado foi a utilização ou não de formulas algébricas na resolução, já que existem caminhos distintos para se alcançar o mesmo resultado.

Passados 30 minutos houve a entrega das atividades. Poucos alunos não haviam respondidos todos os questionários for falta de tempo. Durante conversa após o término, foi verificado que o tempo proposto foi adequado para a quantidade de exercícios.

Com todas as atividades respondidas, foram feitas tabulações para melhor verificação do conteúdo. Para a análise, a divisão foi referente às perguntas, sendo assim, em cada item da atividade houve uma discussão sobre possíveis respostas, citando assim alguns alunos.

6 ANÁLISE DE DADOS

A análise é dividida em duas partes. A primeira contém gráficos comparativos, para assim notar as diferenças encontradas. Cada gráfico traz respostas possíveis encontradas nos questionamentos. A segunda parte consiste em refletir sobre cada item, utilizando respostas dos próprios alunos.

No início de cada atividade, incluímos duas perguntas pessoais: qual a idade e qual tipo de escola estuda (pública ou particular). O total de alunos pesquisados foi de 20, sendo que sete possuem 13 anos, dez possuem 14 anos e três possuem 15 anos. Além disso, treze estudam em escolas públicas e sete em escolas particulares. Com essas informações temos os gráficos a seguir.

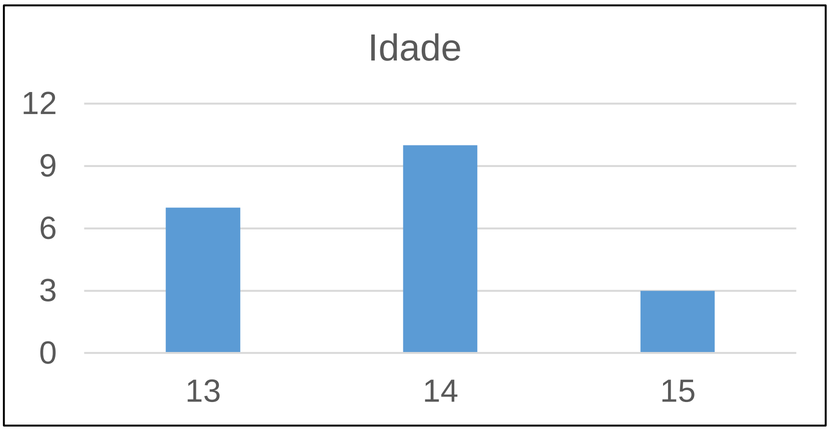


Figura 04 - Idade dos alunos

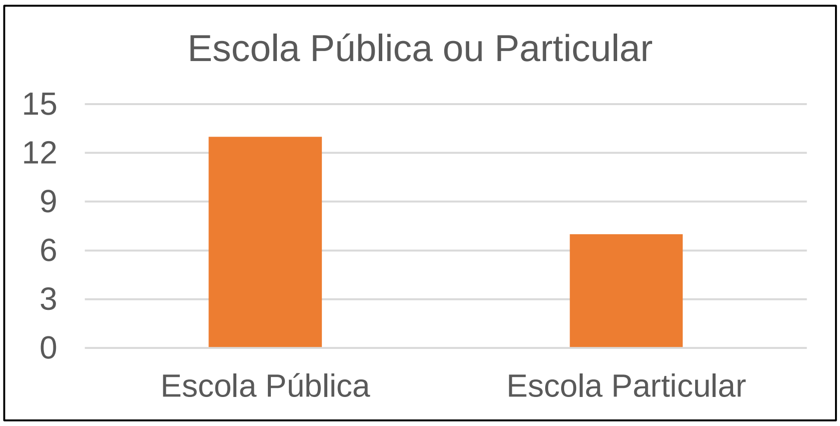


Figura 05 - Tipo de escola

Observamos que, a amostra da pesquisa é variada, contendo alunos de diversas escolas, públicas e privadas e com idades distintas. Para manter a privacidade dos alunos, não foi questionado o nome da escola em que o participante estuda, pois essa informação não é relevante para a atual pesquisa além de teor antiético.

O primeiro item a ser respondido em cada exercício é referente à incógnita encontrada. Nesse aspecto não houve muita dificuldade por parte dos alunos, como observado no gráfico a seguir.

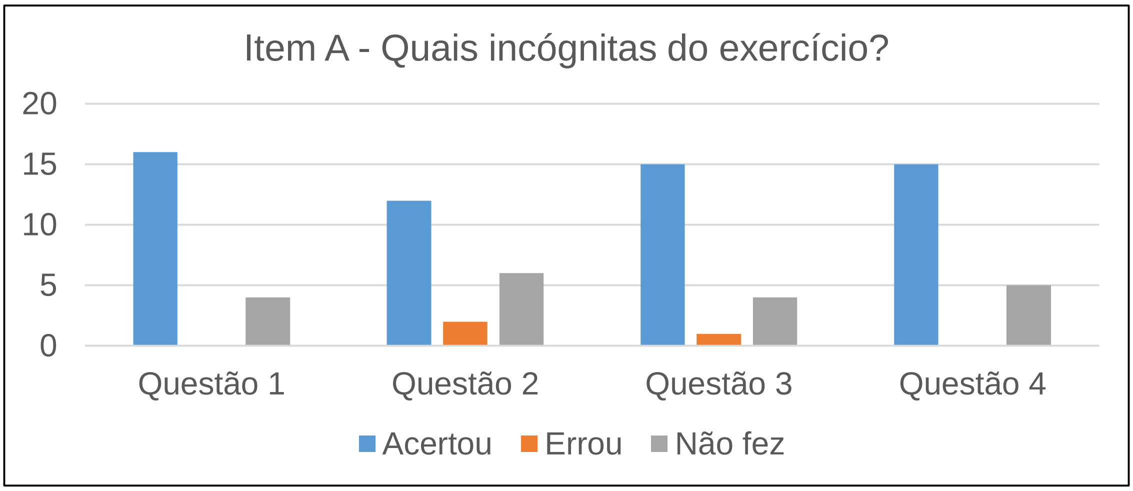


Figura 06 - Item A

O segundo item refere-se aos dados das questões, perguntando assim quais são encontrados. Com exceção da questão 4, não houve dificuldades. Durante a reflexão individual na segunda parte da análise, dissertamos a respeito desta questão em particular.

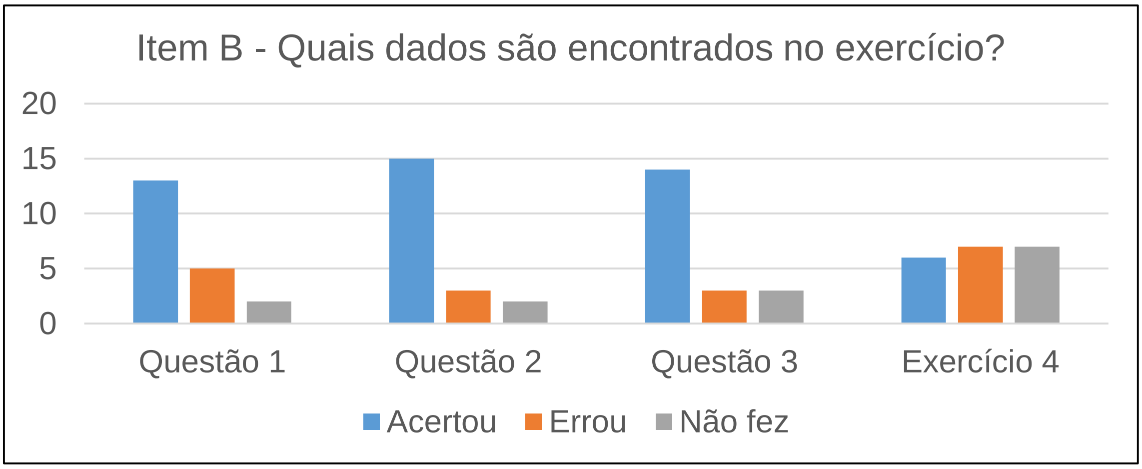


Figura 07 - Item B

Possuir um histórico de soluções de diversos exercícios matemáticos é importante, já que o conhecimento prévio é ponto comum nos estudos sobre resolução de problemas. Por isso, o terceiro questionamento é referente à resolução de exercícios anteriores que contenham a mesma premissa, e se esse conhecimento é importante para encontrar a solução. No gráfico abaixo é perceptível consentimento por parte dos alunos, principalmente nos exercícios 3 e 4 (não contextualizados).

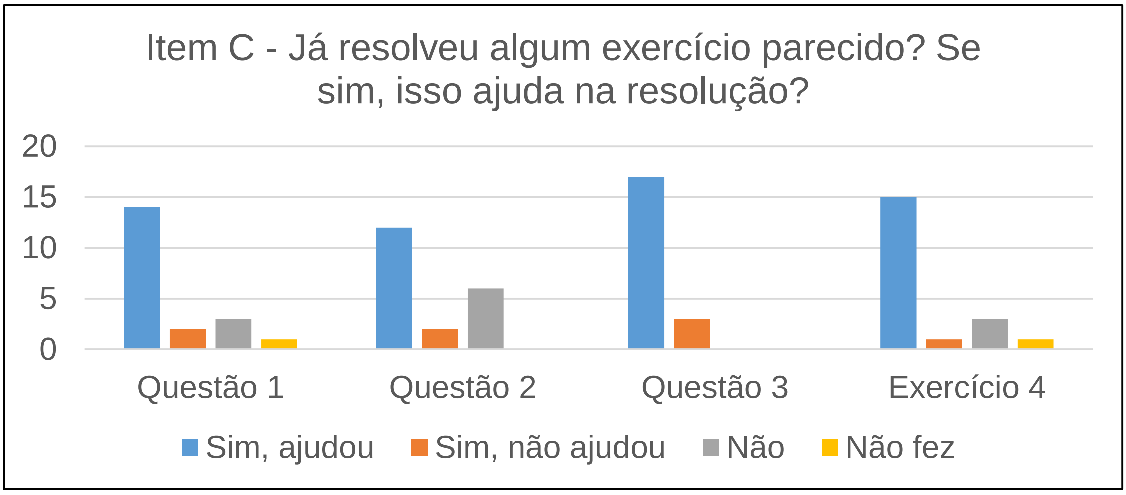


Figura 08 - Item C

A resolução está presente no quarto item de cada questão. Vale salientar que resolução não é considerada como certa apenas quando o aluno resolveu o exercício a forma tradicional, mas qualquer metodologia que leve à solução correta é considerada como certa. É observado um número maior de acertos nos exercícios 3 e 4, não contextualizados, como consta no gráfico abaixo.

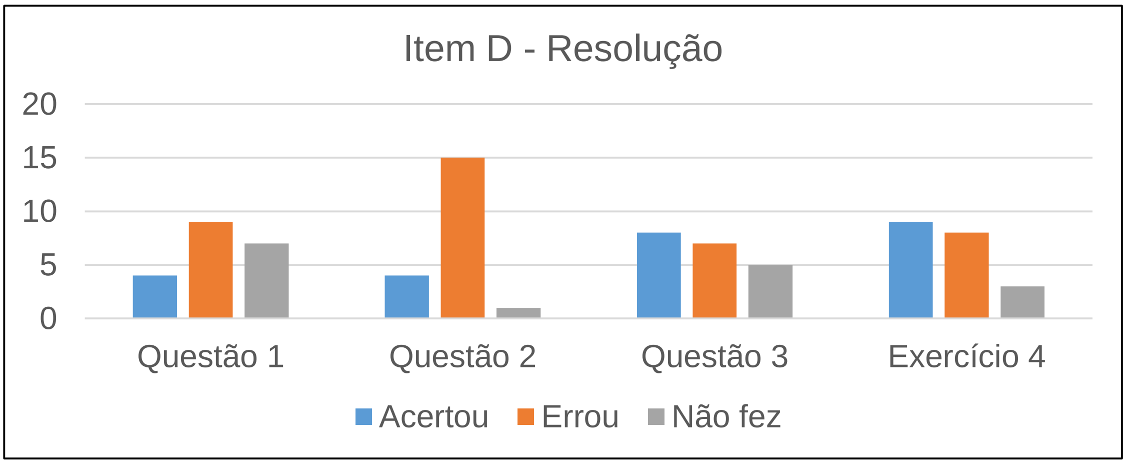


Figura 09 - Item D

O próximo item traz o questionamento sobre a realização ou não do item anterior, logo, por tratar-se de uma pergunta aberta, não foi possível a construção de um gráfico, porém este item é discutido na segunda parte da análise.

Saber qual conteúdo matemático é necessário para resolver um exercício é parte fundamental de sua resolução, auxiliando assim a estabelecer um plano de trabalho. No gráfico abaixo é possível observar um nível satisfatório de acertos.

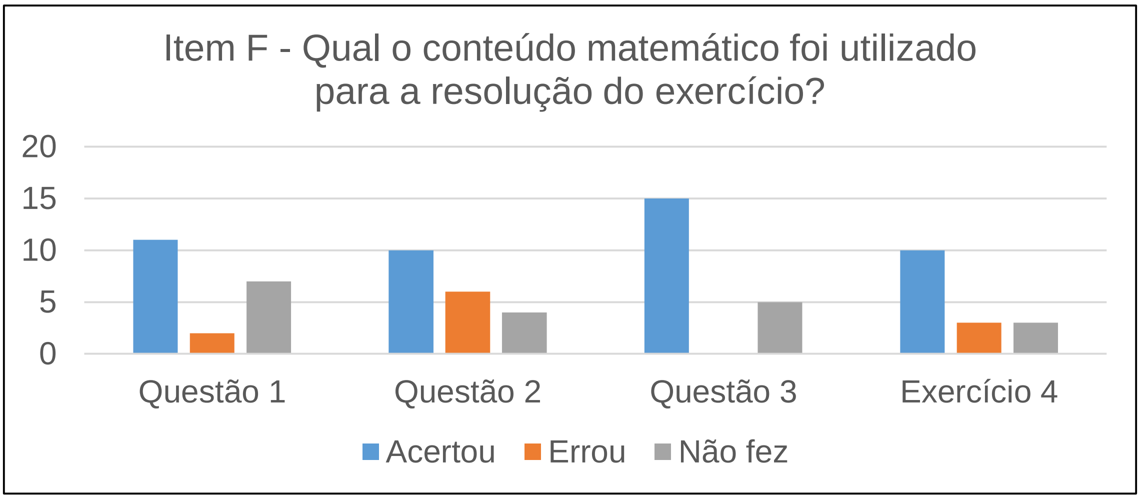


Figura 10 - Item F

O último item trata-se do nível de dificuldade dos exercícios segundo os alunos. Entre as opções temos fácil, médio e difícil. Essa informação é importante na criação de futuros exercícios. Abaixo o gráfico com as respostas.

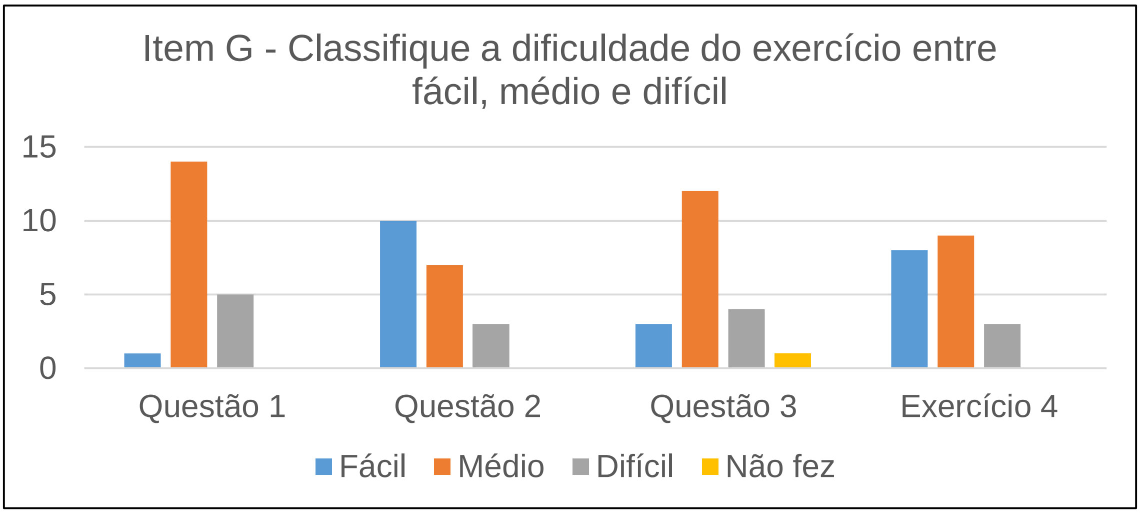


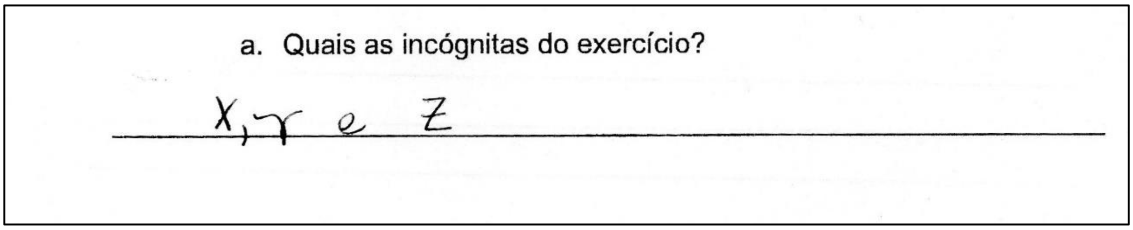
Figura 11 - Item G

Nesta segunda etapa, cada exercício é apresentado e discutido, empregando as respostas dos participantes para sustentar a análise. Uma vez que a atividade não era nominal, cada aluno foi identificado por uma letra do alfabeto de A a S.

6.1 Exercício 1

O enunciado do primeiro exercício diz: Sejam X, Y e Z três artigos distintos que são vendidos em certa loja. Sabe-se que: X custa tanto quanto Y e Z juntos; o preço de Y é a diferença entre o dobro de X e R$ 50,00; o preço de Z é a diferença entre o triplo de Y e R$ 80,00. Nessas condições, pelo compra dos três artigos, sendo um único exemplar de cada tipo, deverão ser desembolsados quantos reais?

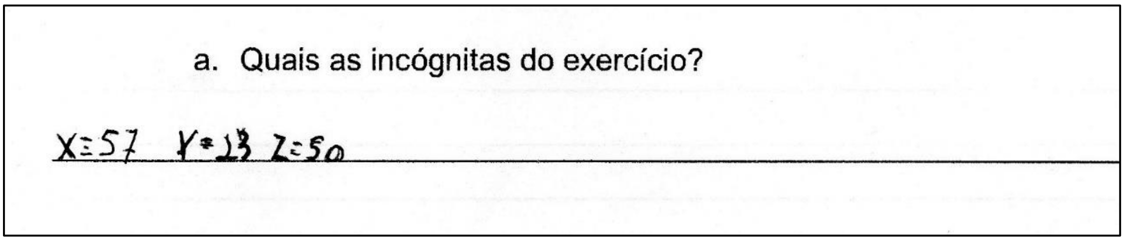
Como trata-se de um exercício contextualizado, a interpretação precisa ser aguçada, para assim compreender o objetivo do problema. Este exercício, em particular, favorece a interpretação, pois está na "língua Matemática". Como exemplo temos a resposta do aluno K.


a. Quais as incógnitas do exercício?

X, Y e Z

Figura 12 - Ex.1 Item a Aluno K

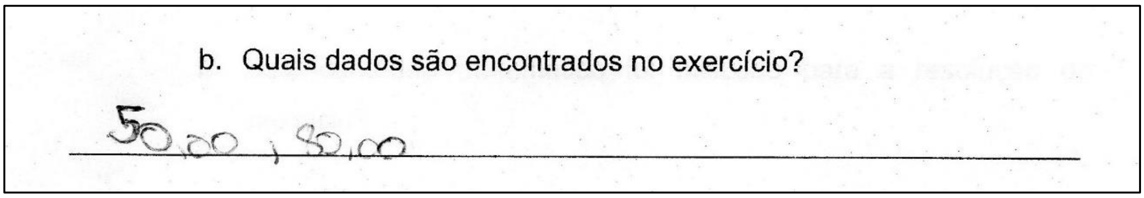
Infelizmente alguns alunos encontraram dificuldades, não sabendo assim diferenciar incógnitas de resultados, como o aluno S.


a. Quais as incógnitas do exercício?

X=57 Y=13 Z=50

Figura 13 - Ex. 1 Item a Aluno S

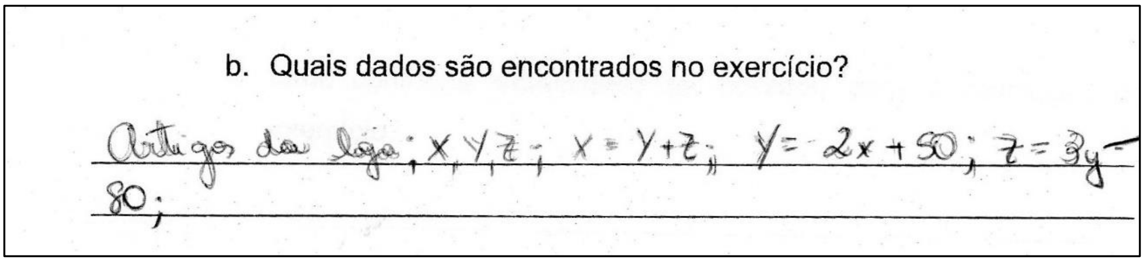
Encontrar os dados importantes no enunciado do exercício é crucial, logo o segundo item traz esse questionamento. Porém alguns alunos possuem dificuldade de compreender o que é considerado um dado. Como exemplo temos a resposta a seguir, trazendo somente os valores numéricos encontrados no enunciado.


b. Quais dados são encontrados no exercício?

50,00 , 80,00

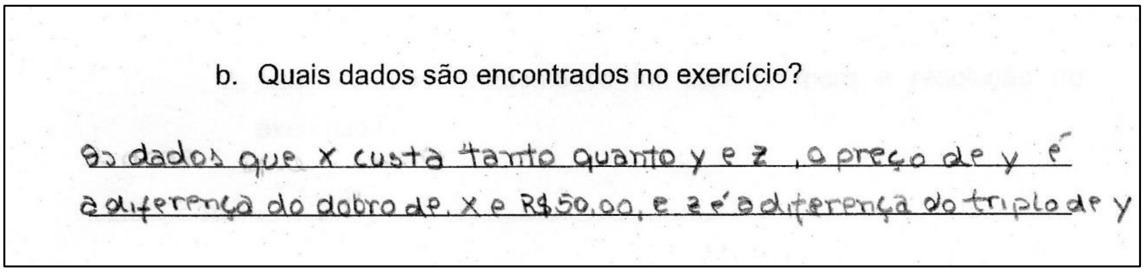
Figura 14 - Ex.1 Item b Aluno Q

Outros transcrevem o enunciado, tanto na linguagem matemática como na língua materna, pois consideram que todo o texto é fundamental, como nas figuras 15 e 16.


b. Quais dados são encontrados no exercício?

Artigos da loja; x, y, z; x = y+z; y = 2x + 50; z = 3y - 80;

Figura 15 - Ex. 1 Item b Aluno J

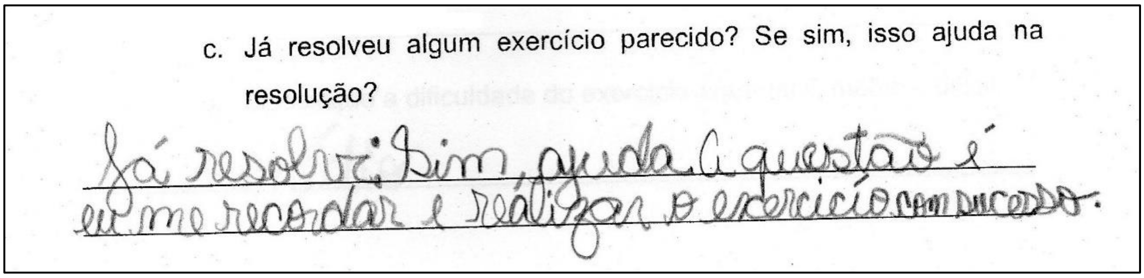

b. Quais dados são encontrados no exercício?

Os dados que x custa tanto quanto y e z , o preço de y é a diferença do dobro de x e R$50.00, e z é a diferença do triplo de y

Figura 16 - Ex. 1 Item b Aluno R

Vale observar a resposta do aluno J, que por descuido errou o sinal em uma das equações.

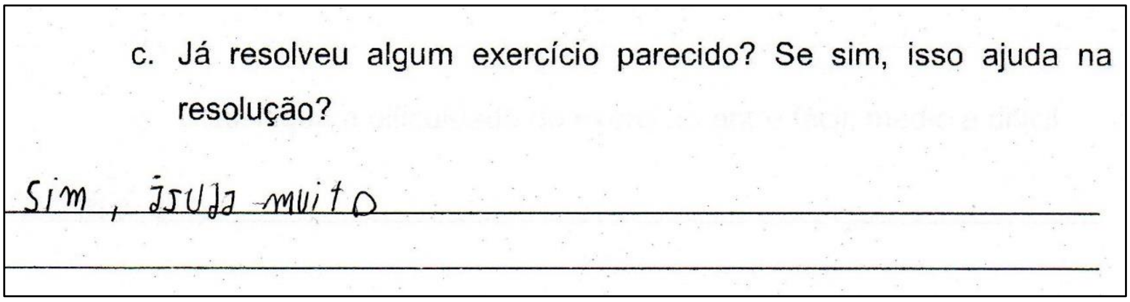
Resolver exercícios parecidos contribui na criação de um plano para solução, já que a situação não é “nova”. Usando exemplos anteriores é possível resolver um novo problema. O terceiro item do primeiro exercício traz essa indagação. E se o fato de ter resolvido algo parecido contribuiu ou não para a atual resolução. Como exemplo, nas figuras a seguir, temos a resposta de três alunos, todas distintas.


c. Já resolveu algum exercício parecido? Se sim, isso ajuda na resolução?

Já resolvi: Sim, ajuda a questão é eu me recordar e realizar o exercício com sucesso.

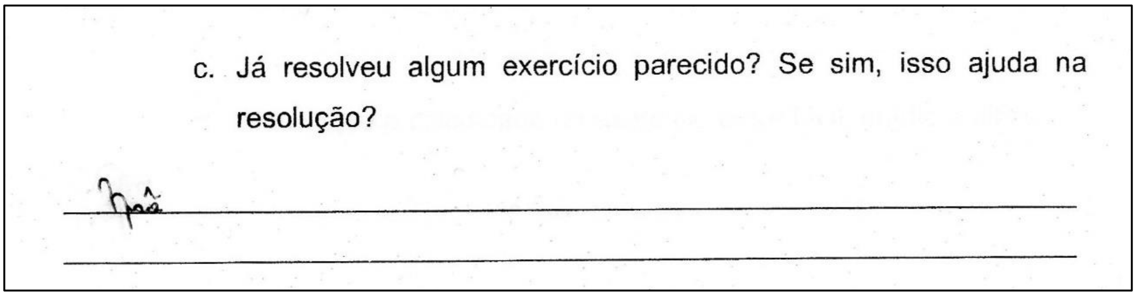
Figura 17 - Ex. 1 Item c Aluno H

O aluno H reconhece ter resolvido exercícios similares, mas não se recorda as etapas da resolução.


c. Já resolveu algum exercício parecido? Se sim, isso ajuda na resolução?

Sim, ajuda muito

Figura 18 - Ex.1 Item c Aluno S

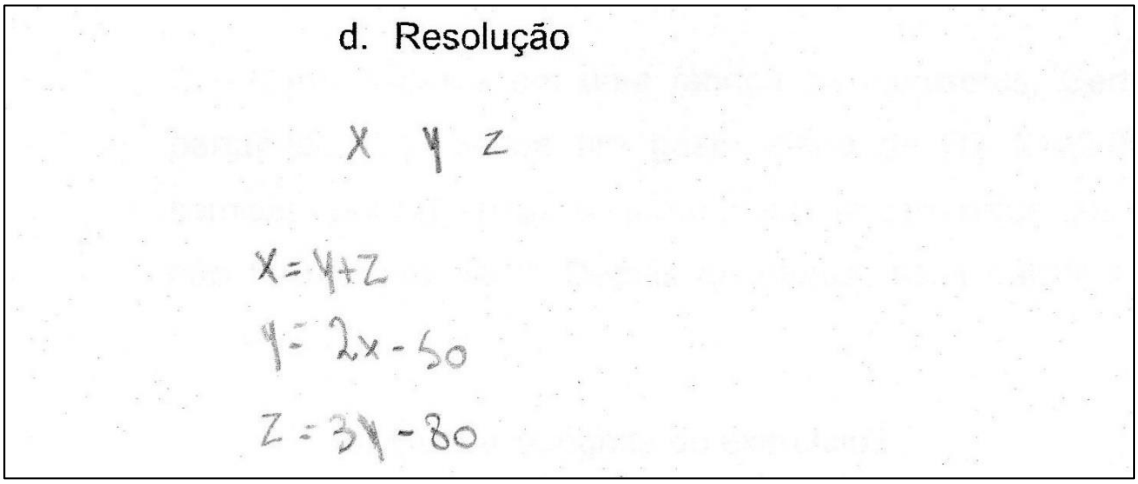

c. Já resolveu algum exercício parecido? Se sim, isso ajuda na resolução?

Não

Figura 19 - Ex. 1 Item c Aluno O

Os alunos S e O são da mesma sala de aula no curso preparatório, logo compartilham o conteúdo aplicado. Porém, o segundo, não observou semelhanças com exercícios anteriores.

Quando observada as resoluções obtidas, percebemos diferentes pontos de dificuldade. Utilizando o aluno O como primeiro exemplo, vemos que a montagem do sistema foi correta, mas não há avanço nos cálculos.



d. Resolução

X Y Z

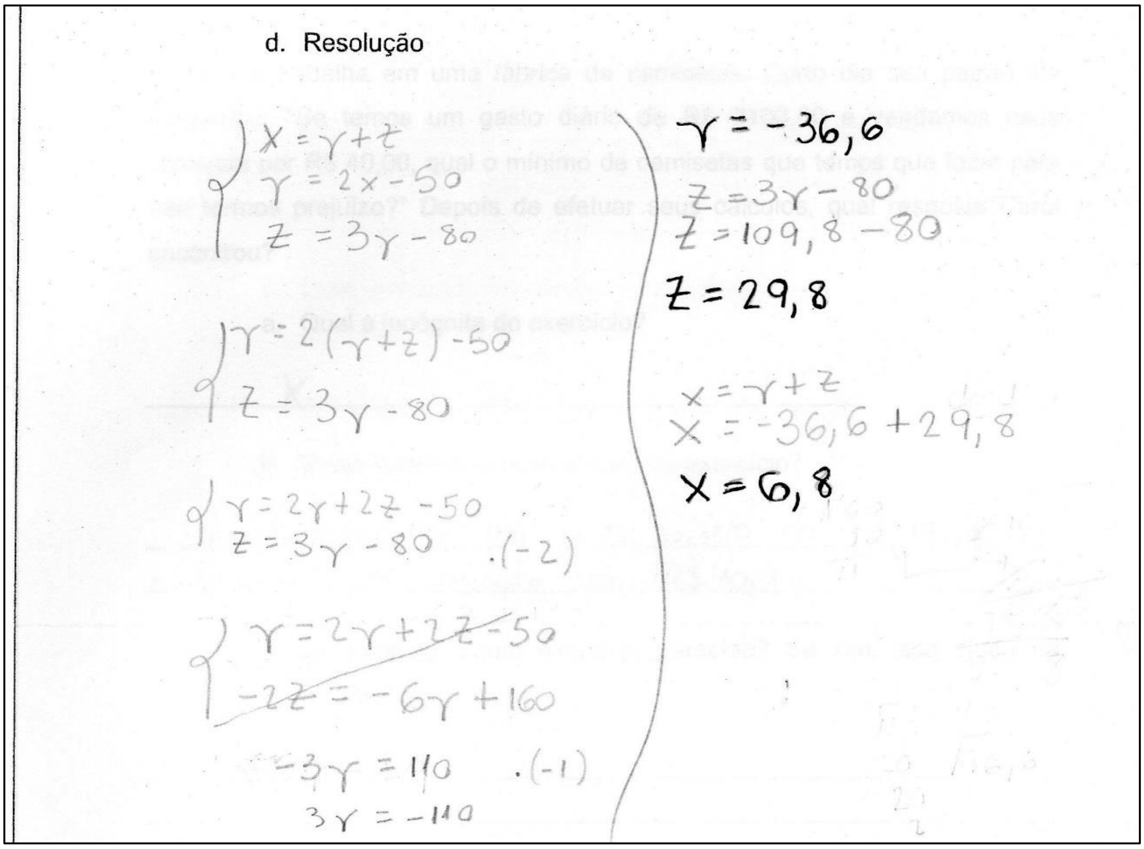
$X = Y + Z$

$Y = 2X - 50$

$Z = 3Y - 80$

Figura 20 - Ex. 1 Item d Aluno O

O Aluno K também obteve sucesso na montagem do sistema, porém efetuou cálculos incorretos, o que causou erro na resposta final.



d. Resolução

$\begin{cases} X = Y + Z \\ Y = 2X - 50 \\ Z = 3Y - 80 \end{cases}$

$\begin{cases} Y = 2(Y+Z) - 50 \\ Z = 3Y - 80 \end{cases}$

$\begin{cases} Y = 2Y + 2Z - 50 \\ Z = 3Y - 80 \quad .(-2) \end{cases}$

$\begin{cases} Y = 2Y + \cancel{2Z} - 50 \\ \cancel{-2Z} = -6Y + 160 \end{cases}$

$-3Y = 110 \quad .(-1)$

$3Y = -110$

$Y = -36,6$

$Z = 3Y - 80$

$Z = 109,8 - 80$

$Z = 29,8$

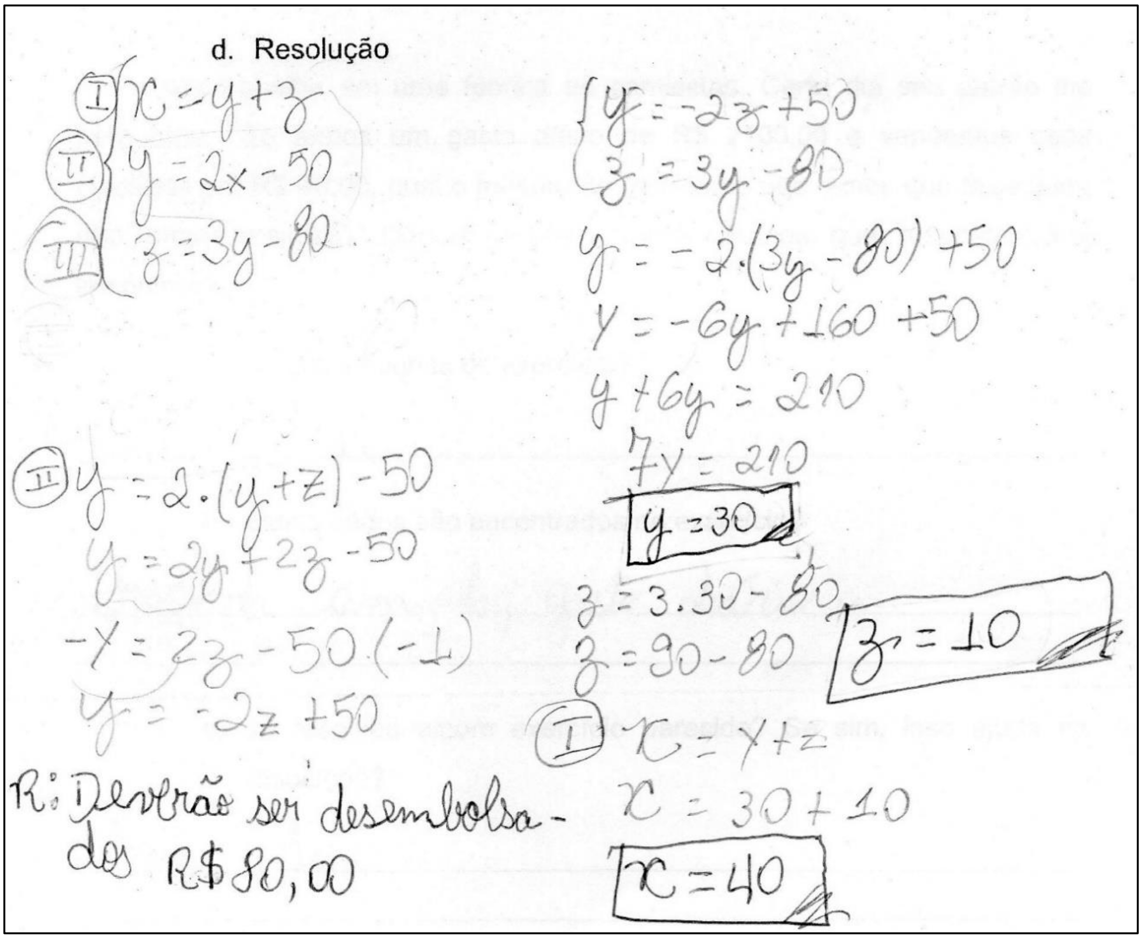
$X = Y + Z$

$X = -36,6 + 29,8$

$X = 6,8$

Figura 21 - Ex. 1 Item d Aluno K

O aluno D efetuou a montagem e cálculos corretamente, utilizando metodologias ensinadas pelo professor do curso.



d. Resolução

$$\begin{cases} \text{I} & x = y + z \\ \text{II} & y = 2x - 50 \\ \text{III} & z = 3y - 80 \end{cases}$$

II $y = 2.(y + z) - 50$

$y = 2y + 2z - 50$

$-y = 2z - 50 \; (-1)$

$y = -2z + 50$

$$\begin{cases} y = -2z + 50 \\ z = 3y - 80 \end{cases}$$

$y = -2.(3y - 80) + 50$

$y = -6y + 160 + 50$

$y + 6y = 210$

$7y = 210$

$\boxed{y = 30}$

$z = 3.30 - 80$

$z = 90 - 80$

$\boxed{z = 10}$

I $x = y + z$

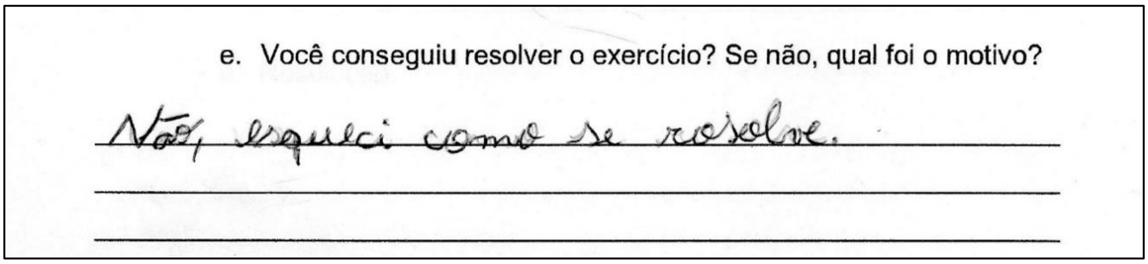
$x = 30 + 10$

$\boxed{x = 40}$

R: Deverão ser desembolsados R\$ 80,00

Figura 22 - Ex. 1 Item d Aluno D

O próximo item refere-se à resolução do exercício, perguntando se o aluno conseguiu encontrar uma resposta, e caso não, o motivo para tal. Foram selecionados três alunos cujas respostas foram não, mas com argumentos diferentes entre si. O primeiro assume que esqueceu como resolver um sistema de equações.

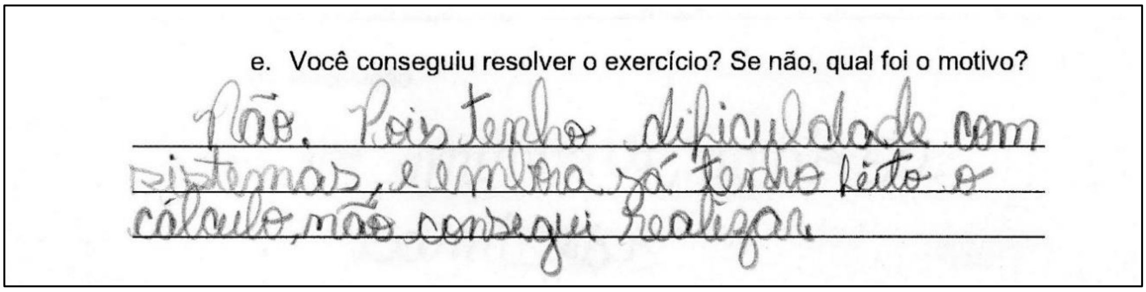


e. Você conseguiu resolver o exercício? Se não, qual foi o motivo?

Não, esqueci como se resolve.

Figura 23 - Ex. 1 Item e Aluno C

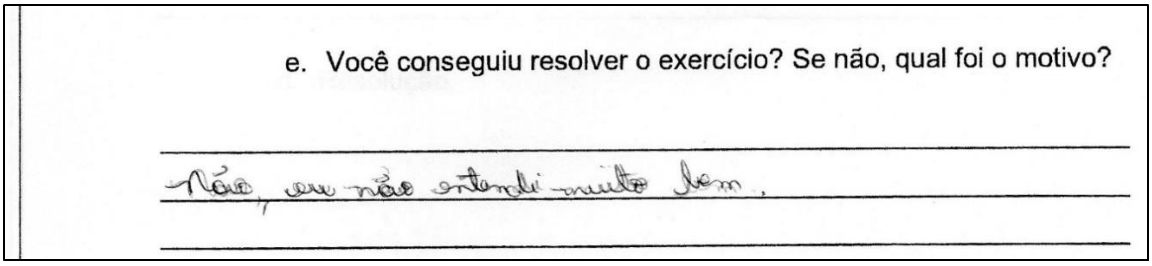
O segundo, mostra que possui dificuldade na resolução, mesmo sabendo que já efetuou exercícios parecidos.


e. Você conseguiu resolver o exercício? Se não, qual foi o motivo?

Não. Pois tenho dificuldade com sistemas, e embora já tenho feito o cálculo, não consegui realizar

Figura 24 - Ex. 1 Item e Aluno H

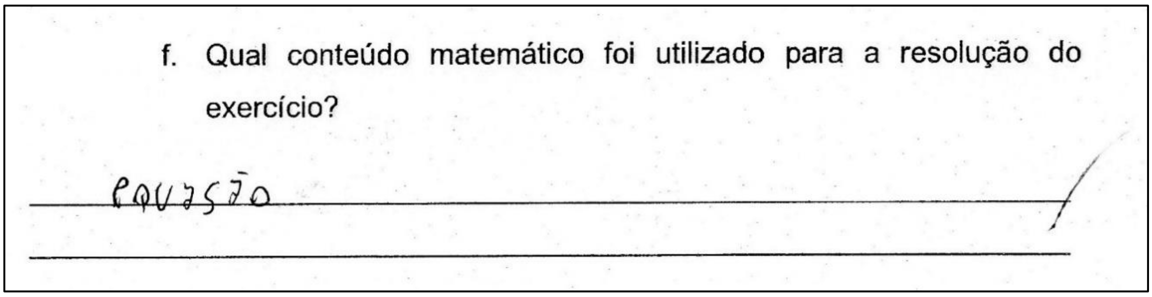
Por último, temos o aluno J, que não compreendeu o problema. Esse fato mostra que o enunciado não estava claro para ele, não houve interpretação dos dados.


e. Você conseguiu resolver o exercício? Se não, qual foi o motivo?

Não, eu não entendi muito bem.

Figura 25 - Ex. 1 Item e Aluno J

Sobre o conteúdo Matemático contido no problema, o aluno S diz apenas equação, o que não torna a resposta incorreta, mas incompleta. Porém esse fato dificulta no momento de resolução, pois o uso dos conceitos de sistemas de equações é valoroso na busca de respostas.


f. Qual conteúdo matemático foi utilizado para a resolução do exercício?

equação

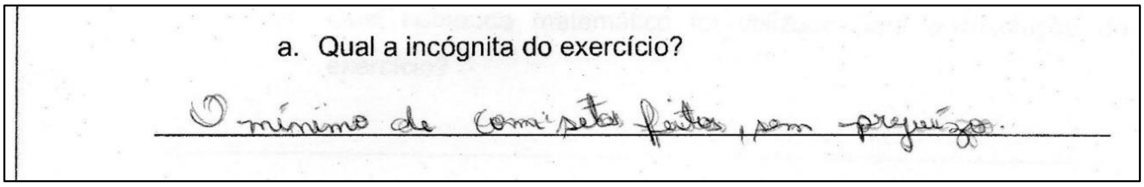
Figura 26 - Ex. 1 Item f Aluno S

6.2 Exercício 2

O enunciado do segundo exercício diz: Carol trabalha em uma fábrica de camisetas. Certo dia seu patrão lhe perguntou: “Se temos um gasto diário de R$ 2100,00 e vendemos cada camiseta por R$ 40,00, qual o mínimo de camisetas que temos que fazer para não termos prejuízo?” Depois de efetuar seus cálculos, qual resposta Carol encontrou?

Seguindo os moldes do primeiro, este também é contextualizado, com pequenas mudanças, como a não apresentação explícita da incógnita e indicação do conteúdo utilizado.

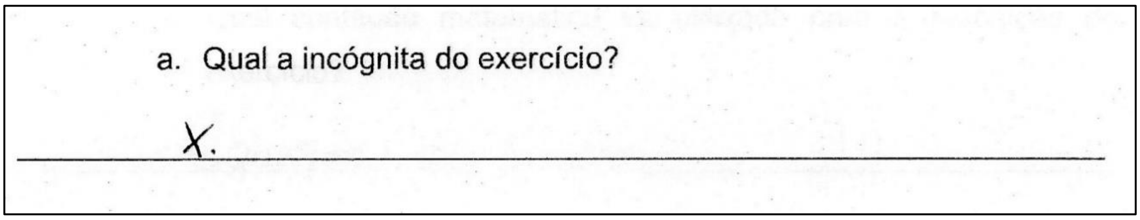
A ordem dos itens segue a mesma em todos os exercícios, logo inicialmente perguntamos qual a incógnita do problema. Como exemplo, temos as respostas de quatro alunos, sendo duas corretas e duas incorretas. O aluno J compreendeu qual era a incógnita, soube interpretar e respondeu de modo correto.


a. Qual a incógnita do exercício?

O mínimo de camisetas feitas, sem prejuízo.

Figura 27 - Ex. 2 Item a Aluno J

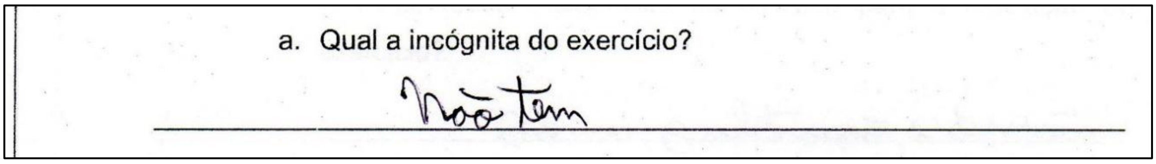
A resposta do aluno K, mesmo não contendo erros, está incompleta, pois considera como incógnita apenas a letra utilizada na resolução do exercício e não o significado real dela, como visto na figura 27.


a. Qual a incógnita do exercício?

X.

Figura 28 - Ex. 2 Item a Aluno K

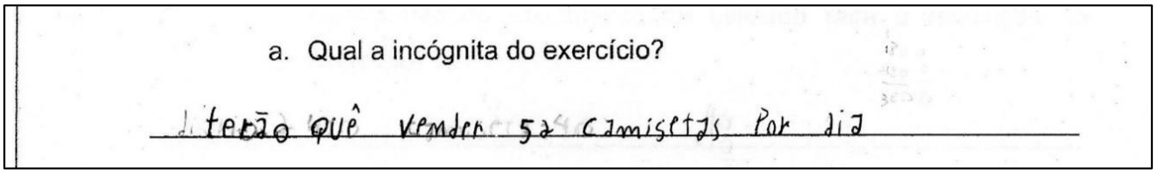
Outra resposta interessante é a do aluno N, que diz não haver incógnita. Esse fato tem como motivo o enunciado não evidenciar qual era a incógnita, ou apenas a desconexão entre a letra utilizada nos cálculos e o objetivo do problema, já que muitos resolvem mecanicamente, sem saber o que está procurando.


a. Qual a incógnita do exercício?

Não tem

Figura 29 - Ex. 2 Item a Aluno N

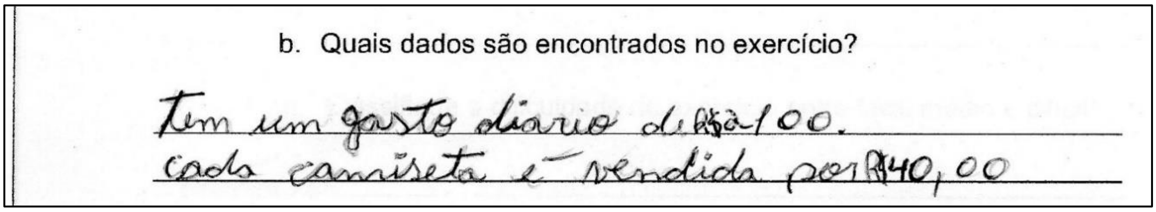
Por último temos o aluno S, cometendo o mesmo deslize do exercício 1, confundindo incógnita e resposta.


a. Qual a incógnita do exercício?

terão quê vender 52 camisetas por dia

Figura 30 - Ex. 2 Item a Aluno S

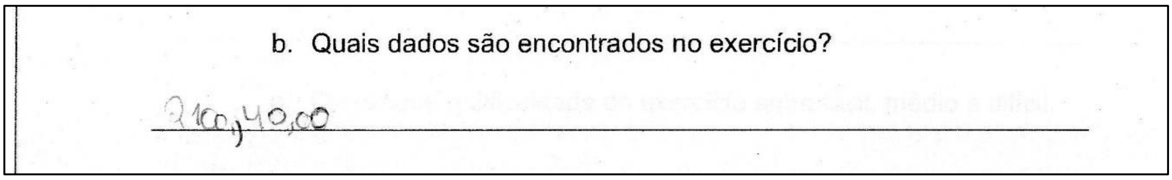
O segundo item é sobre os dados encontrados no enunciado, e como exemplo utilizaremos respostas de dois alunos, sendo uma correta e uma incorreta. A primeira traz todas as informações importantes do enunciado, como observado na figura abaixo.


b. Quais dados são encontrados no exercício?

Tem um gasto diario de R$2100.
cada camiseta é vendida por R$40,00

Figura 31 - Ex. 2 Item b Aluno C

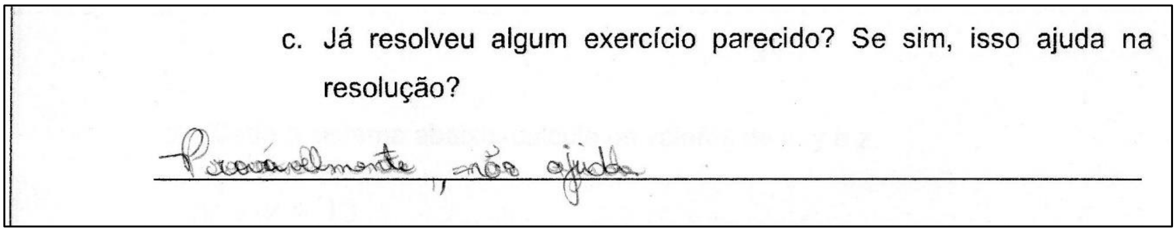
Como resposta incorreta temos a do aluno Q. Nela observamos apenas os dados numéricos, mas sem saber seus reais significados. Para esse aluno, dados em exercícios matemáticos são apenas números.


b. Quais dados são encontrados no exercício?

2100, 40,00

Figura 32 - Ex. 2 Item b Aluno Q

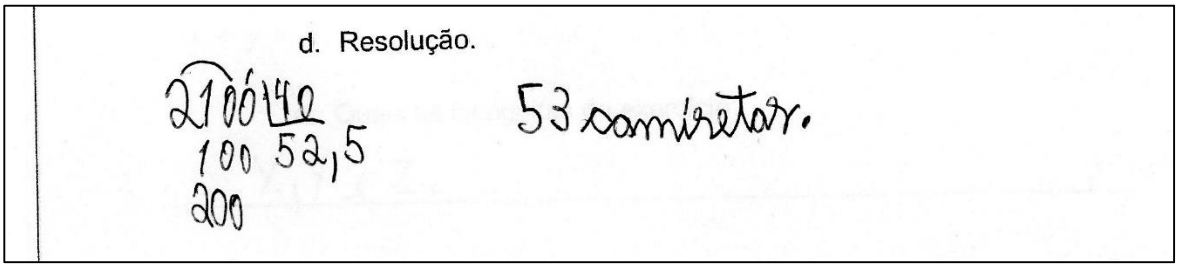
No quesito referente a exercícios similares já efetuados temos um exemplo relevante. O aluno J não tinha convicção se já resolveu algum exercício parecido, por isso não considera de valia para o atual problema.


c. Já resolveu algum exercício parecido? Se sim, isso ajuda na resolução?

Provavelmente, não ajuda

Figura 33 - Ex. 2 Item c Aluno J

Para refletir sobre as resoluções do exercício utilizaremos o conteúdo de quatro alunos. O primeiro escolhido, aluno I, resolveu o exercício utilizando divisão, o que é interessante, pois não aplicou o conteúdo que esperávamos que ele usasse para resolver este exercício: inequação. Ele chegou à resposta correta pelo caminho escolhido.

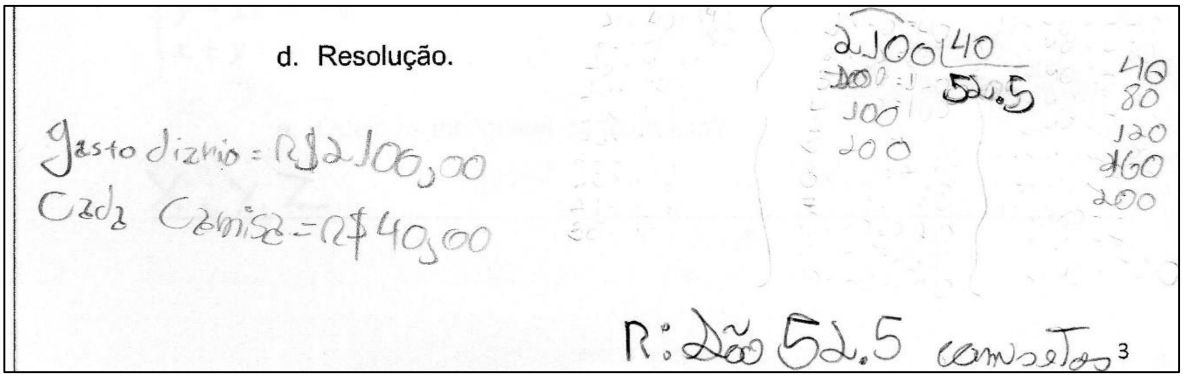

d. Resolução.

2100 | 40
100 52,5
200

53 camisetas.

Figura 34 - Ex. 2 Item d Aluno I

Seguindo o mesmo modelo, temos o aluno T. Porém, nesse caso percebemos a falta de interpretação do enunciado, já que tratava-se de objetos inteiros, portanto não aceitando respostas decimais. O cálculo executado foi o mesmo do aluno I (figura 34), porém não houve uma releitura do enunciado para assim adequar a resposta.


d. Resolução.

gasto diário = R$ 2.100,00
Cada Camisa = R$ 40,00

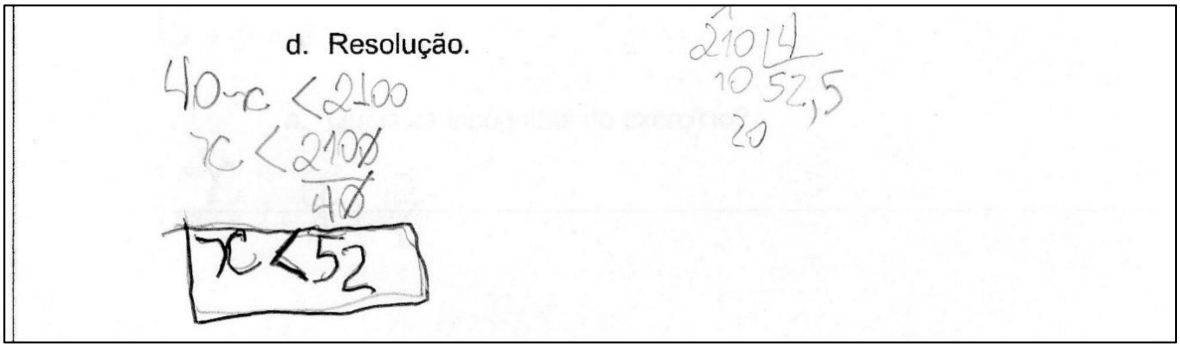
2100 | 40
200 52.5
100
200

40
80
120
160
200

R: São 52.5 camisetas

Figura 35 - Ex. 2 Item d Aluno T

No terceiro exemplo temos o aluno D, que utilizou inequação para resolver o problema, mas errou o sinal utilizado. Onde vemos o sinal de “menor” deveria ser de “maior”, já que o enunciado fala sobre lucro. Com isso a resposta final também encontra-se errada. Neste caso houve um erro na interpretação do enunciado do problema.


d. Resolução.

$40 \cdot x < 2100$

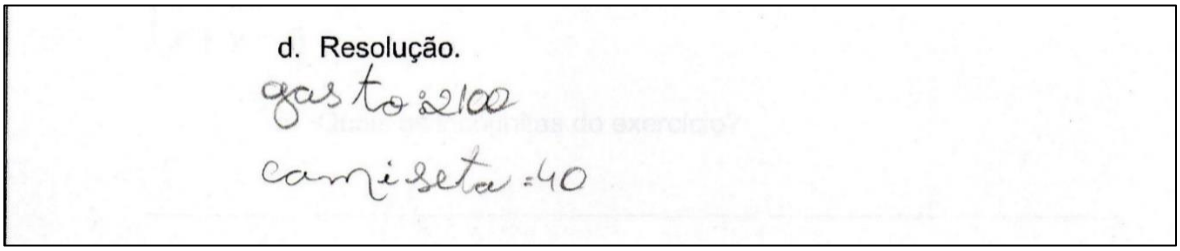
$x < \frac{2100}{40}$

$\boxed{x < 52}$

2100 | 4
10 52,5
20

Figura 36 - Ex. 2 Item d Aluno D

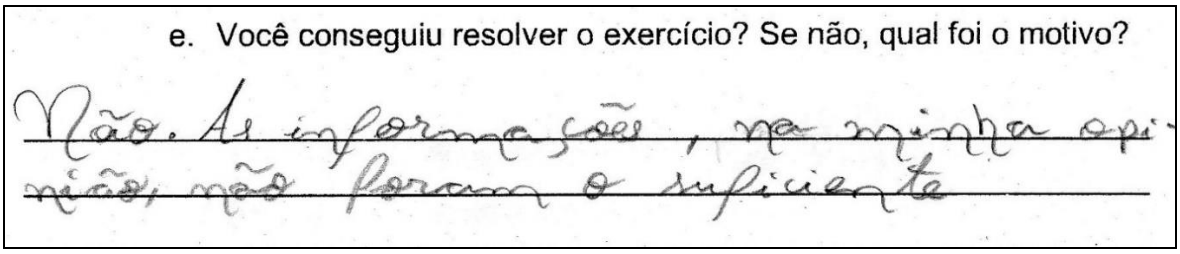
Como último exemplo, temos o aluno G, que mesmo sabendo quais dados utilizar não iniciou o cálculo por considerá-los insuficientes.


d. Resolução.

gasto: 2100

camiseta: 40

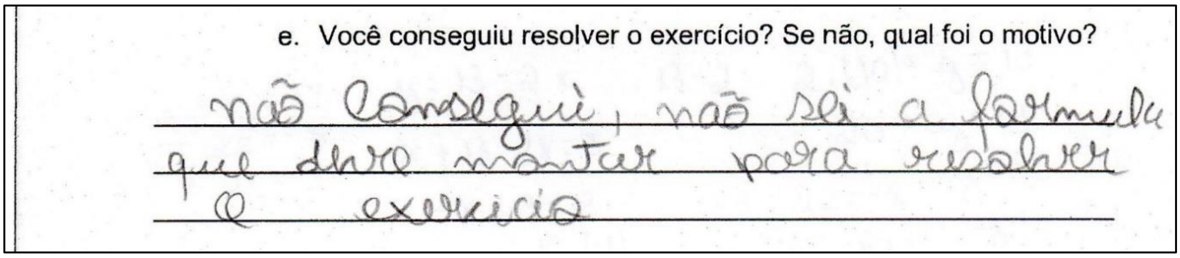
Figura 37 - Ex. 2 Item d Aluno G


e. Você conseguiu resolver o exercício? Se não, qual foi o motivo?

Não. As informações, na minha opi-
nião, não foram o suficiente

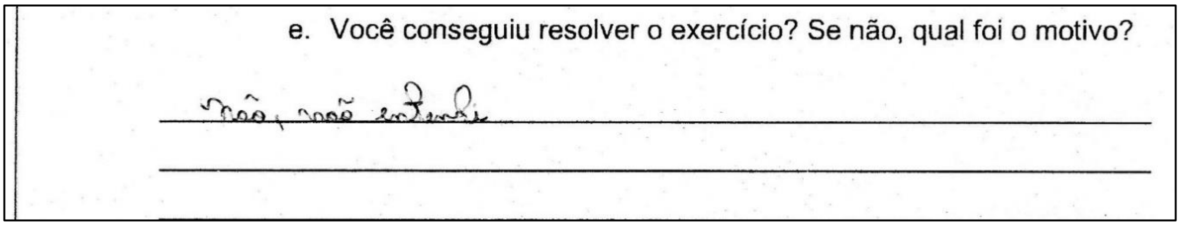
Figura 38 - Ex. 2 Item e Aluno G

O aluno L também não conseguiu resolver o exercício alegando não saber qual “fórmula” deveria utilizar, qual conhecimento matemático empregar na resolução. Também encontramos alunos que não compreenderam o enunciado, como no caso do aluno O.


e. Você conseguiu resolver o exercício? Se não, qual foi o motivo?

não consegui, não sei a formula que devo montar para resolver o exercicio

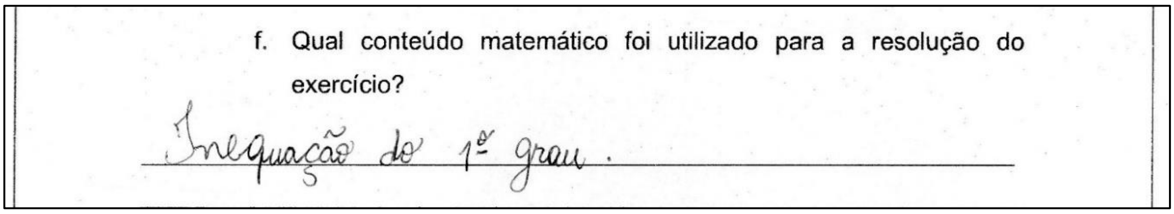
Figura 39 - Ex. 2 Item e Aluno L


e. Você conseguiu resolver o exercício? Se não, qual foi o motivo?

não, não entendi

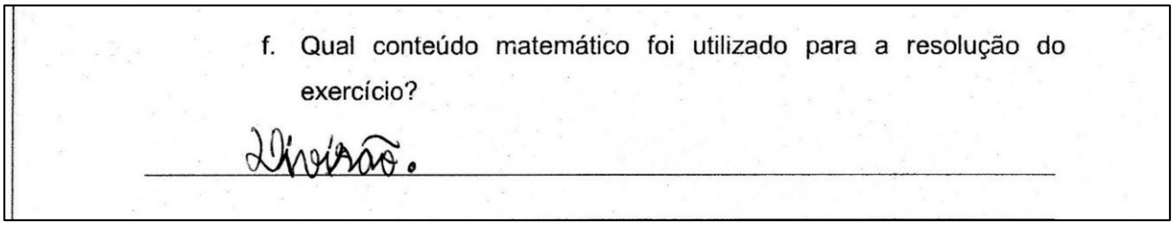
Figura 40 - Ex. 2 Item e Aluno O

Sobre o conteúdo matemático utilizado separamos três exemplos. Inicialmente, com resposta correta temos o aluno D, entendendo o objetivo do exercício. Em seguida o aluno I, que mesmo não respondendo do modo esperado, utilizou a divisão e alcançou o resultado correto, como consta na figura 34.


f. Qual conteúdo matemático foi utilizado para a resolução do exercício?

Inequação do 1º grau.

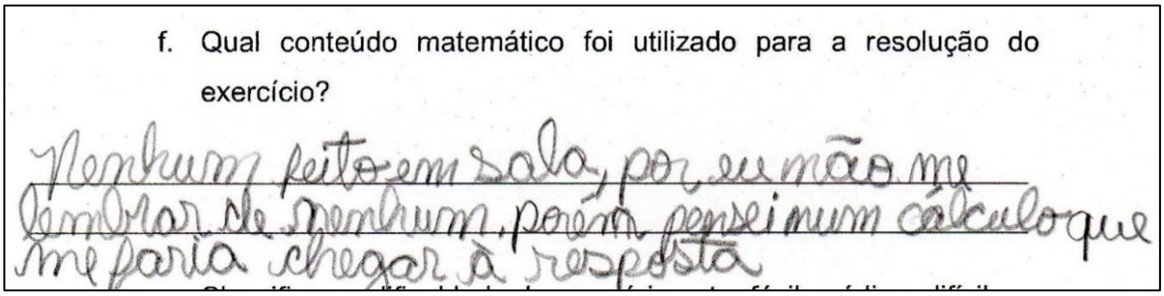
Figura 41 - Ex. 2 Item e aluno D


f. Qual conteúdo matemático foi utilizado para a resolução do exercício?

Divisão.

Figura 42 - Ex. 2 Item e Aluno I

Por último trazemos a resposta do aluno H, que diz não utilizar nenhum conceito ensinado em sala, mas um cálculo que o faria chegar ao resultado.


f. Qual conteúdo matemático foi utilizado para a resolução do exercício?

Nenhum feito em sala, por eu não me lembrar de nenhum, porém pensei num cálculo que me faria chegar à resposta

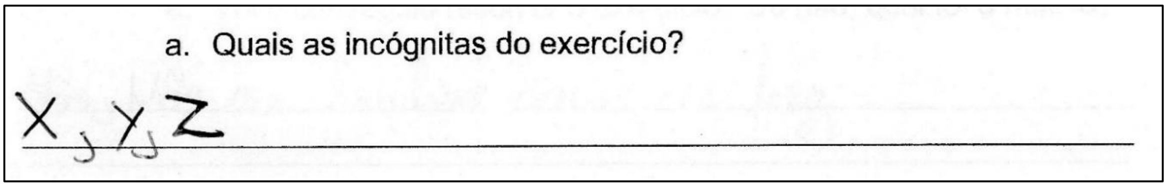
Figura 43 - Ex. 2 Item e Aluno H

6.3 Exercício 3

O terceiro exercício, diferentemente dos anteriores, não trata-se se um problema contextualizado, mas sim algébrico. O conteúdo utilizado foi sistemas de equações do 1º grau.

$$\begin{cases} 2x + y = 13 \\ y - 2z = -8 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

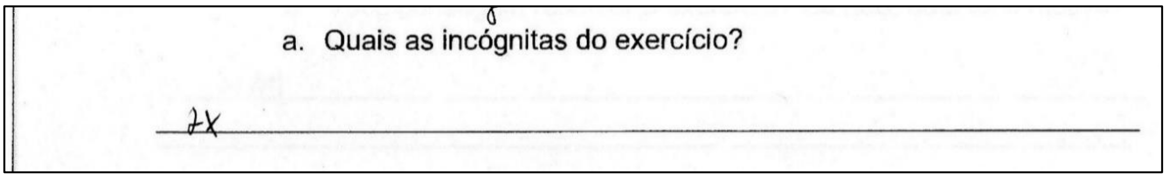
Como trata-se de um exercício algébrico, a localização das incógnitas foi facilitado, já que estavam em linguagem matemática. Como exemplo de resposta correta temos o aluno T.


a. Quais as incógnitas do exercício?

X, Y, Z

Figura 44 - Ex. 3 Item a Aluno T

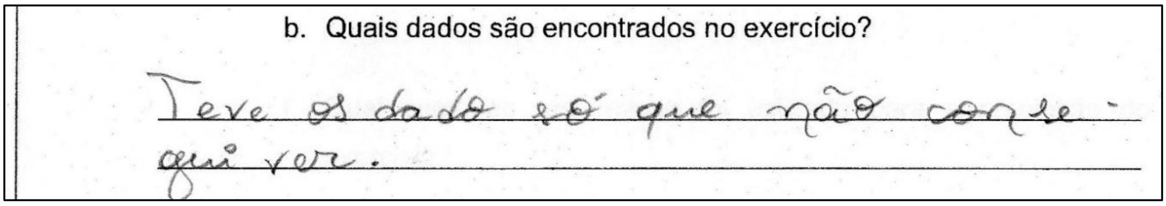
Alguns alunos ainda encontraram dificuldades em encontrar as incógnitas, como vemos com o aluno S.


a. Quais as incógnitas do exercício?

2x

Figura 45 - Ex. 3 Item a Aluno S

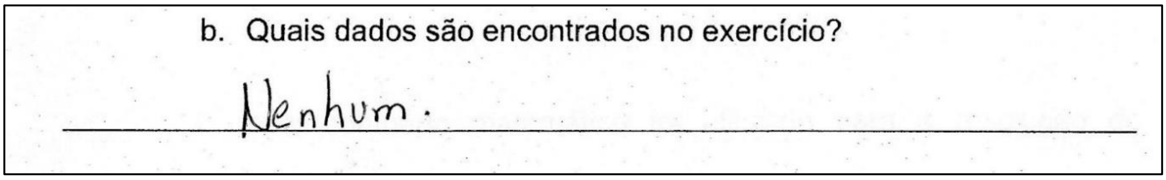
Quando questionados sobre os dados do exercício, alguns não compreenderam exatamente o que são dados de um exercício, já que o enunciado não encontra-se na forma de problema. O aluno G diz não “ver” os dados do exercício.


b. Quais dados são encontrados no exercício?

Teve os dado só que não conse-
gui ver.

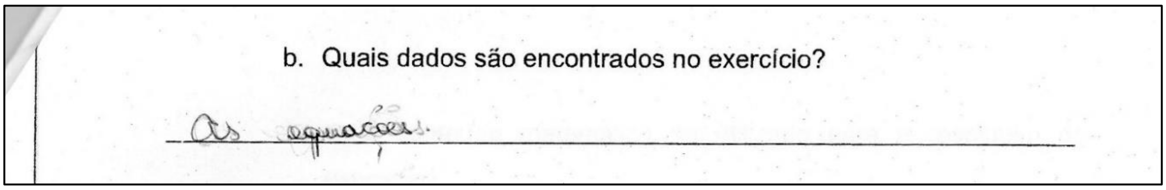
Figura 46 - Ex. 3 Item b Aluno G

O aluno K diz não haver dados. Essa resposta remete ao conhecimento que o aluno possui sobre o que são dados, e principalmente em como encontrá-los. Como exemplo de resposta correta temos o aluno J, citando as equações como dados do exercício.


b. Quais dados são encontrados no exercício?

Nenhum.

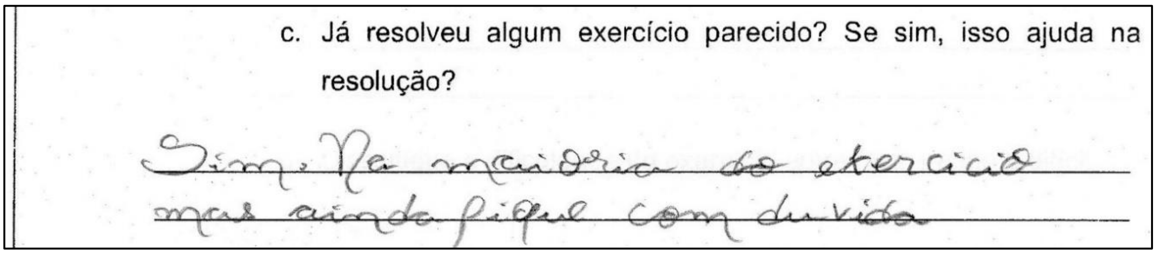
Figura 47 - Ex. 3 Item b Aluno K


b. Quais dados são encontrados no exercício?

As equações.

Figura 48 - Ex. 3 Item b Aluno J

O aluno G, como a maioria dos demais, afirma que resolveu exercícios similares e confirma o auxílio que isso traz. Nesse caso em específico, o aluno continuou com dúvidas.


c. Já resolveu algum exercício parecido? Se sim, isso ajuda na resolução?

Sim. Na maioria do exercicio
mas ainda fiquel com duvida

Figura 49 - Ex. 3 Item c Aluno G

O quarto item do terceiro exercício, assim como nos demais, trata-se da resolução do problema. Para análise separamos cinco alunos, cada um com a sua particularidade. Iniciamos com o aluno B, que mesmo sabendo como resolver um sistema de equações errou em operações básicas como soma e subtração.

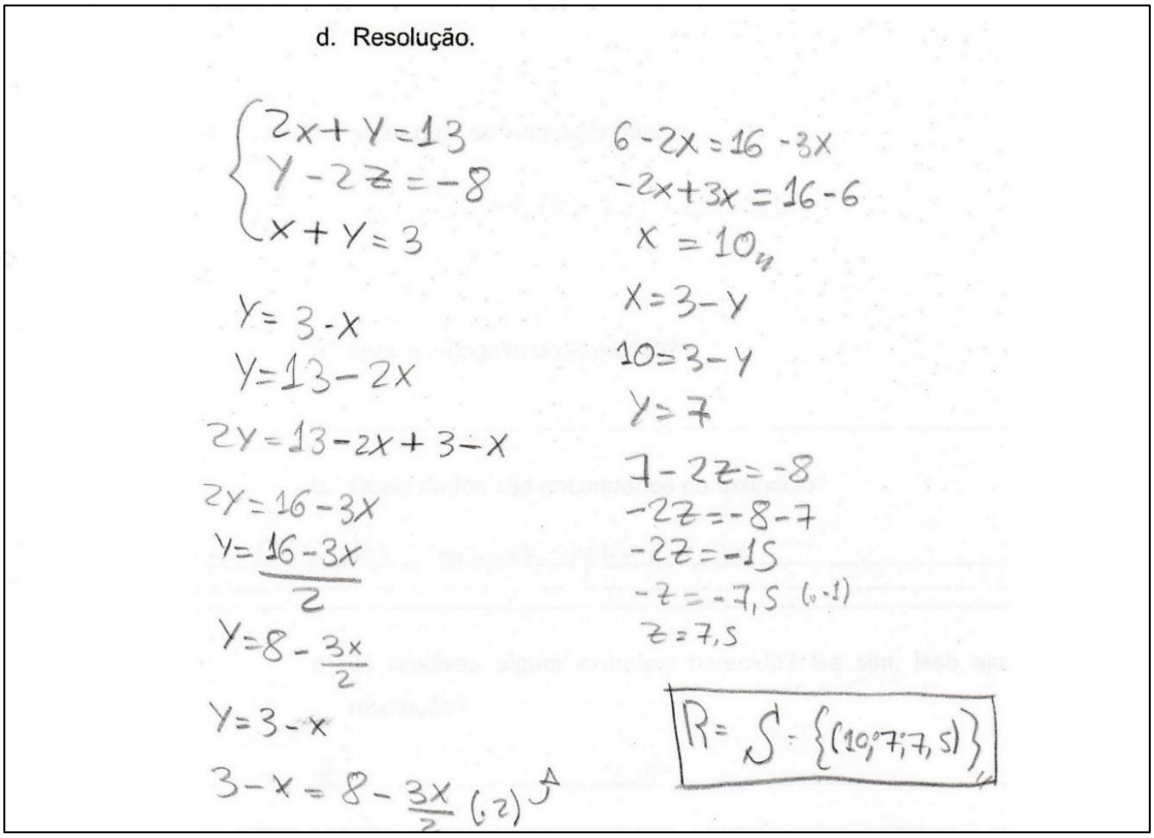


Figura 50 - Ex. 3 Item d Aluno B

O aluno G também soube como resolver um sistema de equações, porém também errou em uma operação básica. Nesse caso, o erro ocorreu enquanto calculava o valor da terceira incógnita.

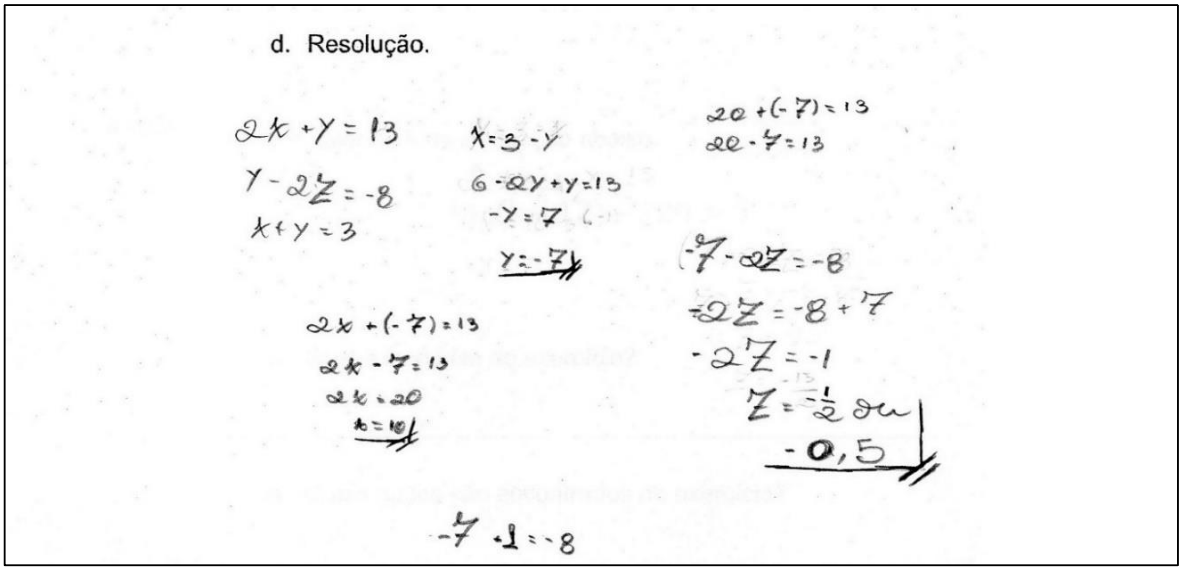


Figura 51 - Ex. 3 Item d Aluno G

Como terceiro exemplo, temos o aluno K. Nesse caso o erro foi nas etapas de resolver um sistema, já que calculou a primeira incógnita sem dificuldades, mas não utilizou essa informação para descobrir a segunda incógnita. Deste modo, o aluno não conseguiu solucionar o exercício.

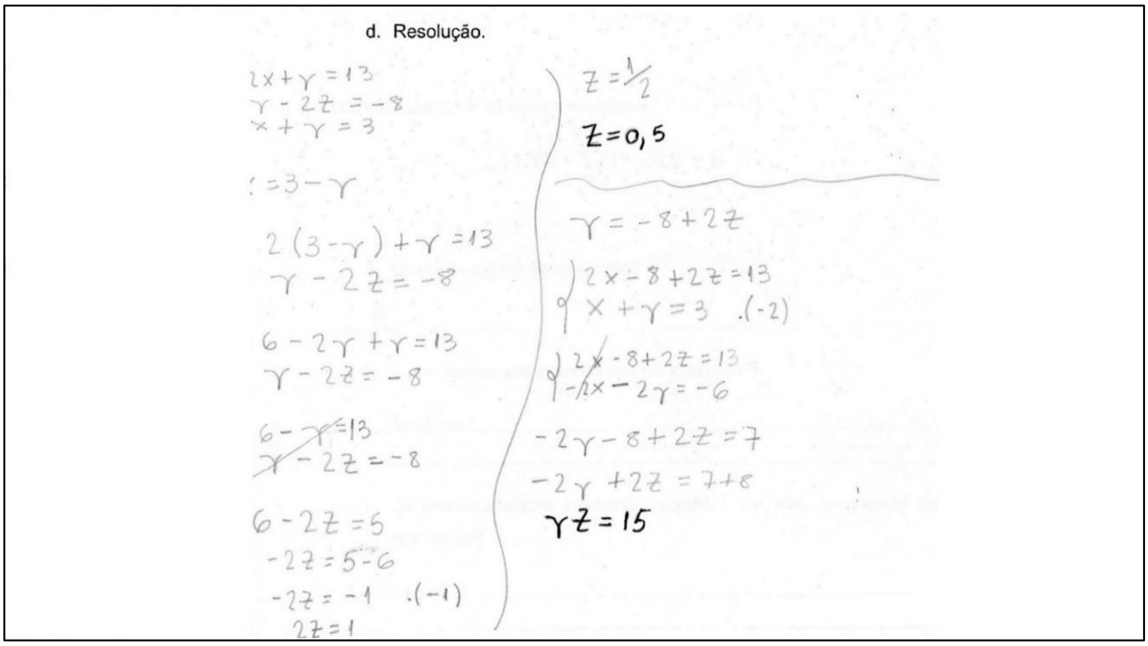
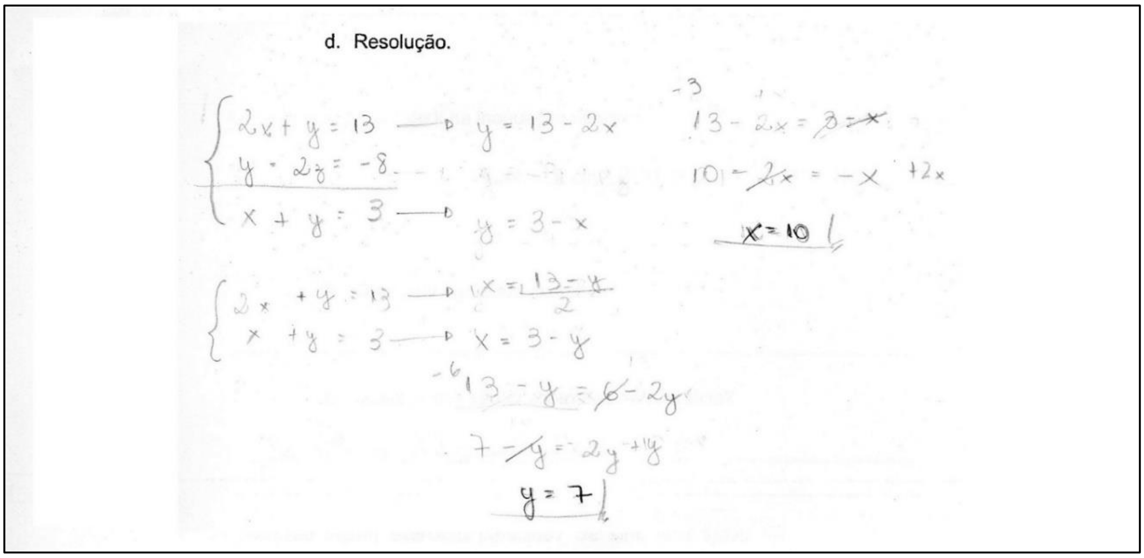


Figura 52 - Ex. 3 Item d Aluno K

O aluno J conseguiu encontrar as duas primeiras incógnitas, mas não soube ou esqueceu de calcular a terceira.


d. Resolução.

$$\begin{cases} 2x + y = 13 \rightarrow y = 13 - 2x \\ y - 2z = -8 \\ x + y = 3 \rightarrow y = 3 - x \end{cases}$$

$$13 - 2x = \cancel{3 - x}$$

$$10 - \cancel{2x} = -x \quad +2x$$

$$x = 10$$

$$\begin{cases} 2x + y = 13 \rightarrow x = \frac{13 - y}{2} \\ x + y = 3 \rightarrow x = 3 - y \end{cases}$$

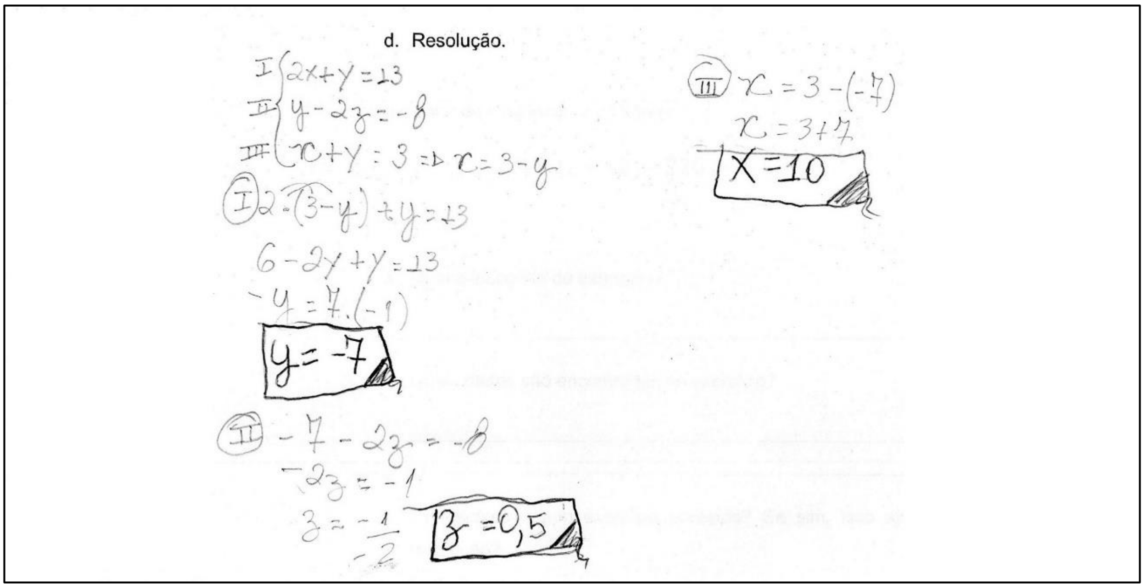
$$13 - y = 6 - 2y$$

$$7 - \cancel{y} = -2y + y$$

$$y = 7$$

Figura 53 -Ex. 3 Item d aluno J

Usando o aluno D como exemplo, temos a resolução correta do exercício. Podemos notar que foi utilizado o método de substituição para resolução do mesmo. Ao total, oito alunos (40%) acertaram esse exercício, sendo que utilizaram diversas técnicas diferentes.


d. Resolução.

$$\begin{cases} \text{I} & 2x + y = 13 \\ \text{II} & y - 2z = -8 \\ \text{III} & x + y = 3 \Rightarrow x = 3 - y \end{cases}$$

$$\text{(I)}\ 2\cdot(3 - y) + y = 13$$

$$6 - 2y + y = 13$$

$$-y = 7 \cdot (-1)$$

$$\boxed{y = -7}$$

$$\text{(II)}\ -7 - 2z = -8$$

$$-2z = -1$$

$$z = \frac{-1}{-2} \quad \boxed{z = 0{,}5}$$

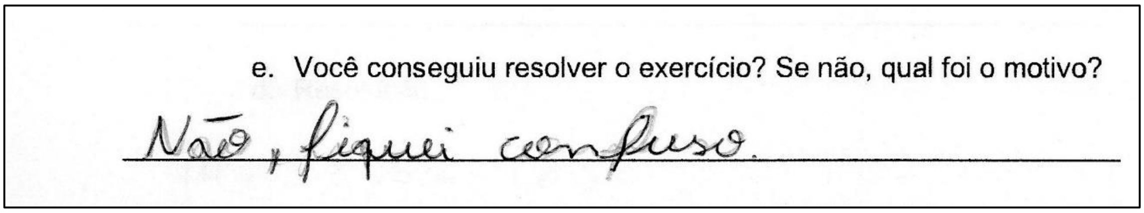
$$\text{(III)}\ x = 3 - (-7)$$

$$x = 3 + 7$$

$$\boxed{x = 10}$$

Figura 54 - Ex. 3 Item d Aluno D

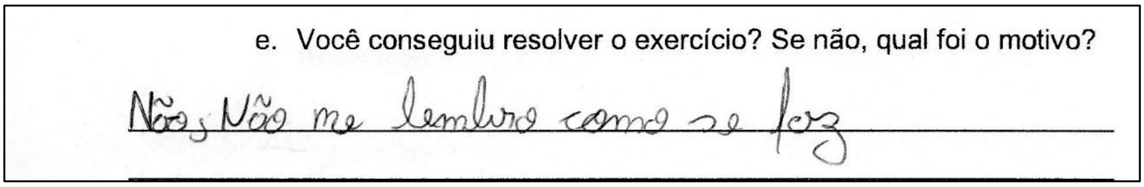
Quando questionados sobre o motivo de não solução do exercício, diversas respostas foram significativas, como a encontrada na atividade do aluno C, mostrando confusão no momento de resolver o problema, mas sem especificar em quais pontos isso ocorreu.


e. Você conseguiu resolver o exercício? Se não, qual foi o motivo?

Não, fiquei confuso.

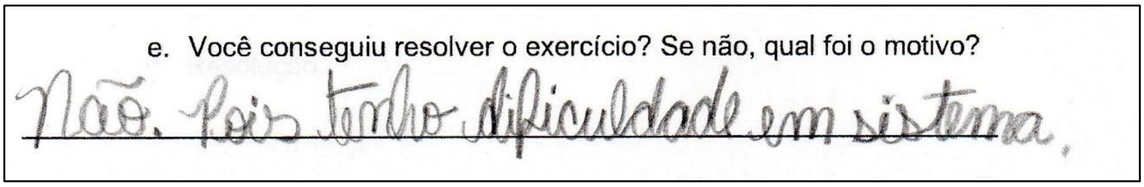
Figura 55 - Ex. 3 Item e Aluno C

O aluno T assumiu não lembrar a resolução, enquanto o aluno H mostra dificuldades na resolução de sistemas.


e. Você conseguiu resolver o exercício? Se não, qual foi o motivo?

Não, Não me lembro como se faz

Figura 56 - Ex. 3 Item e Aluno T


e. Você conseguiu resolver o exercício? Se não, qual foi o motivo?

Não. Pois tenho dificuldade em sistema.

Figura 57 - Ex. 3 Item e Aluno H

No item f do exercício, reconhecer qual conteúdo matemático utilizado no exercício, não houve surpresas, já que no próprio enunciado dizia-se tratar de um sistema de equações.

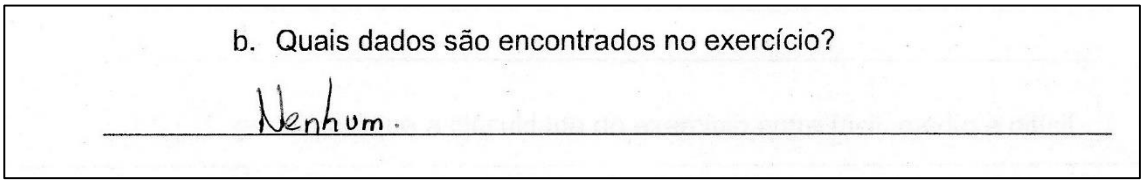
6.4 Exercício 4

O quarto exercício segue o modelo do anterior, sendo assim somente algébrico. O conteúdo utilizado foi inequação do 1º grau.

$$44.(k - 12) - 220 > 0$$

Como observado, fica evidente qual a incógnita do exercício, desse modo não houve dificuldade no primeiro item do problema.

No segundo item, dados do exercício, o aluno K, seguindo a mesma resposta do exercício 3, disse não haver dados no enunciado. Fica evidente a falta de compreensão do que são dados em um exercício de matemática.

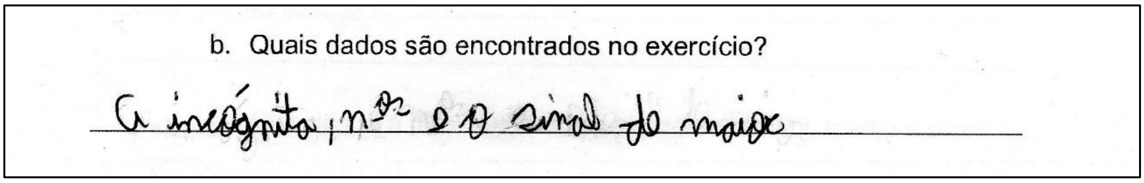


b. Quais dados são encontrados no exercício?

Nenhum.

Figura 58 - Ex. 4 Item b Aluno K

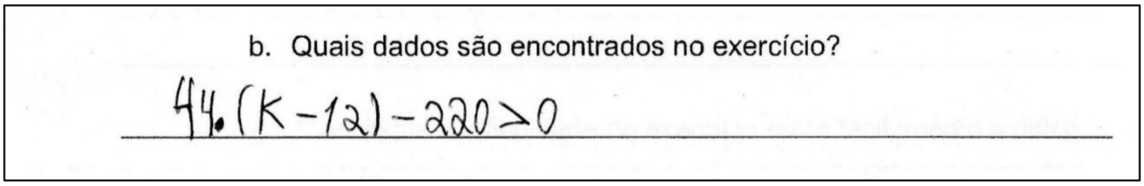
Em seguida temos três respostas diferentes, mas corretas, já que são modos diferentes de representar a mesma informação.



b. Quais dados são encontrados no exercício?

a incógnita, nº e o sinal do maior

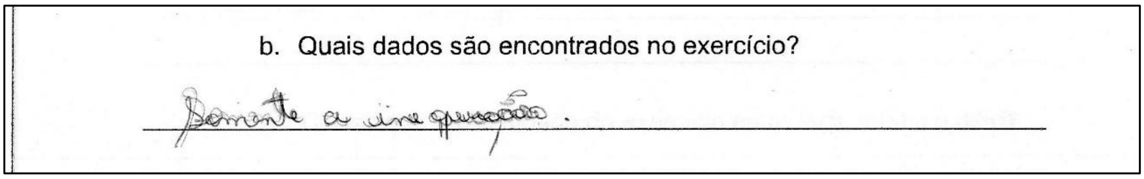
Figura 59 - Ex. 4 Item b Aluno A



b. Quais dados são encontrados no exercício?

$44.(K-12)-220>0$

Figura 60 - Ex. 4 Item b Aluno I

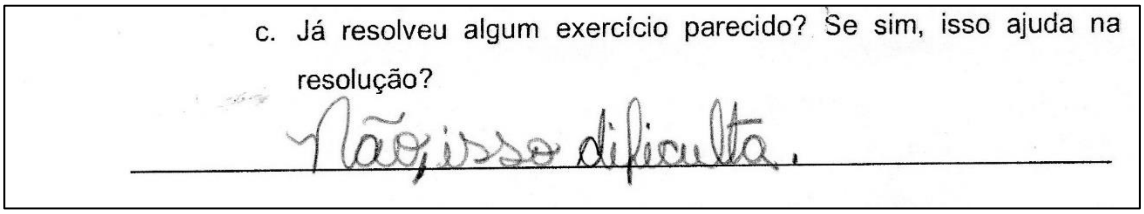


b. Quais dados são encontrados no exercício?

Somente a inequação.

Figura 61 -Ex. 4 Item b Aluno J

O aluno H diz, no terceiro item do problema, que não resolveu nenhum exercício parecido, e por conta desse fato, houve dificuldade na sua resolução. O mesmo ocorre com o aluno T. Visto que o pesquisador é professor dos alunos participantes, sabe-se que o conteúdo referente a esse problema foi ministrado, juntamente com diversos exercícios propostos.



c. Já resolveu algum exercício parecido? Se sim, isso ajuda na resolução?

Não, isso dificulta.

Figura 62 - Ex. 4 Item c Aluno H

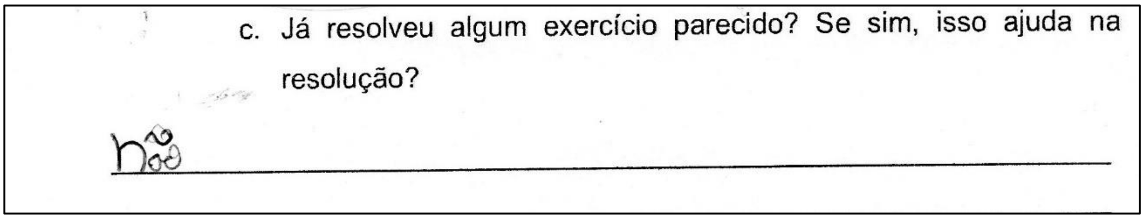


Figura 63 - Ex. 4 Item c Aluno T

Nesse exercício obtivemos a maior porcentagem de acerto (45%), porém ainda encontramos diversas resoluções incorretas, sendo por falta de conhecimento de inequações, desatenção ou erro em operações básicas. Para ilustrar temos quatro resoluções, cada qual com sua peculiaridade.

A primeira solução analisada será do aluno R. Nela observamos diversos erros algébricos, como eliminação de parênteses, soma indevida de termos e uso errôneo de sinais matemáticos.

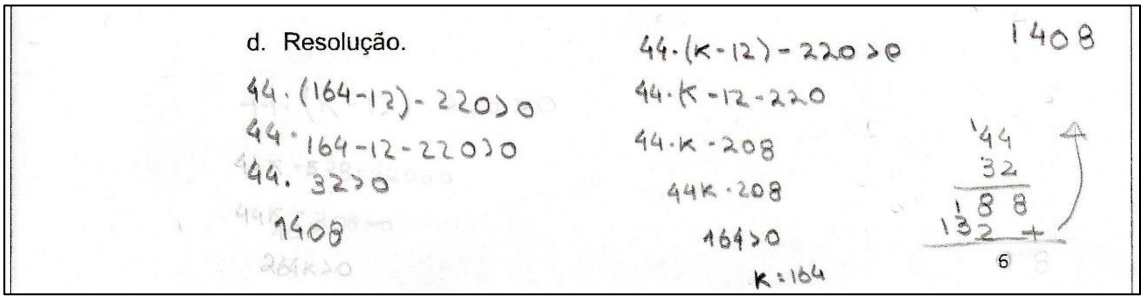


Figura 64 - Ex. 4 Item d Aluno R

Outro erro algébrico é encontrado na resolução do aluno M, que mesmo sabendo solucionar tal problema, não encontrou a resposta certa por errar em um cálculo de divisão.

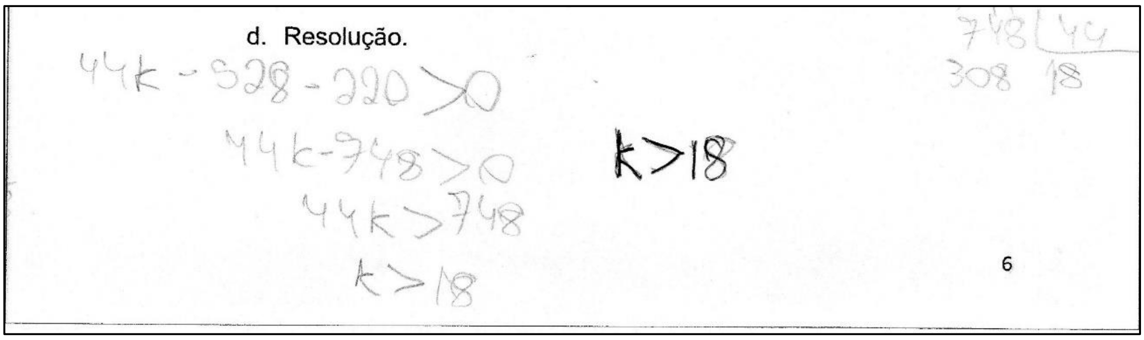
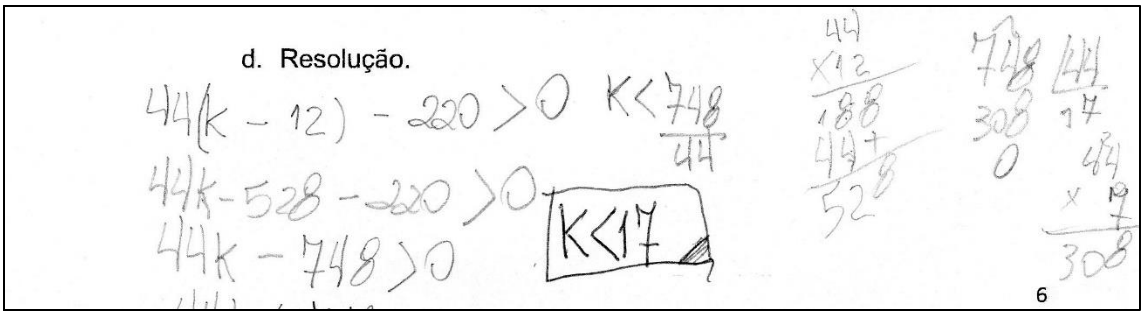


Figura 65 - Ex. 4 Item d Aluno M

O aluno D, por falta de atenção ou equívoco das propriedades da inequação, mudou o sinal no final do cálculo, tornando assim sua resposta errada.



d. Resolução.

$44(k-12)-220>0 \quad k<\frac{748}{44}$

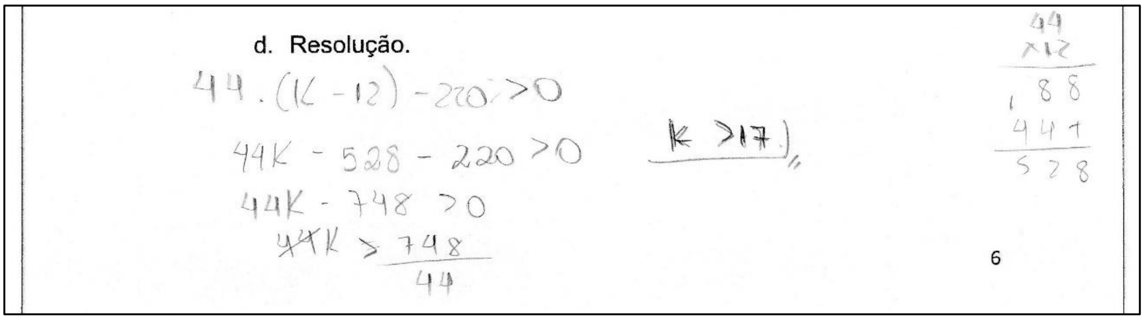
$44k-528-220>0$

$44k-748>0 \quad \boxed{k<17}$

6

Figura 66 -Ex. 4 Item d Aluno D

A última solução analisada é do aluno J. Observamos conhecimento de inequações e atenção ao resolver os cálculos.



d. Resolução.

$44.(k-12)-220>0$

$44k-528-220>0 \quad k>17$

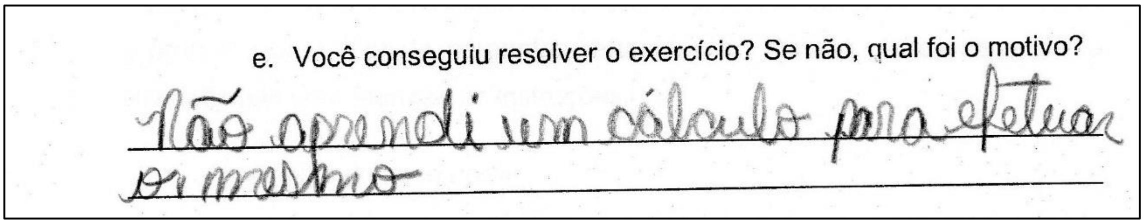
$44k-748>0$

$44k>\frac{748}{44}$

6

Figura 67 - Ex. 4 Item d Aluno J

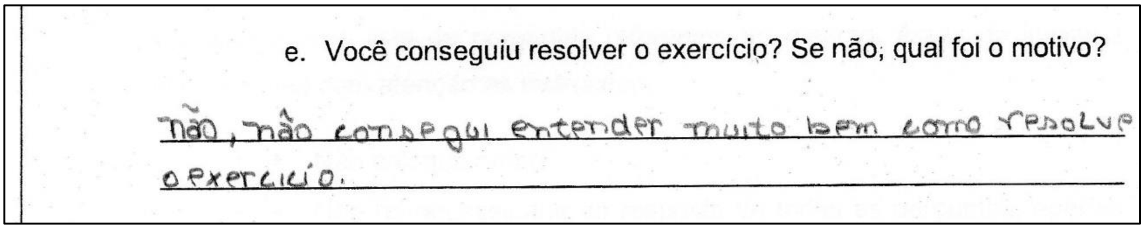
Os motivos para não resolução variam. O aluno H diz não conhecer um cálculo para solução, o aluno R não entendeu o que deveria ser feito e o aluno T não lembrava como fazer.



e. Você conseguiu resolver o exercício? Se não, qual foi o motivo?

Não aprendi um cálculo para efetuar o mesmo

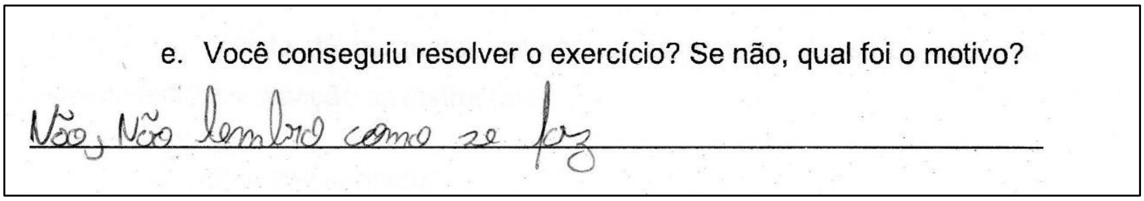
Figura 68 - Ex. 4 Item e aluno H



e. Você conseguiu resolver o exercício? Se não, qual foi o motivo?

não, não consegui entender muito bem como resolve o exercício.

Figura 69 - Ex. 4 Item e Aluno R

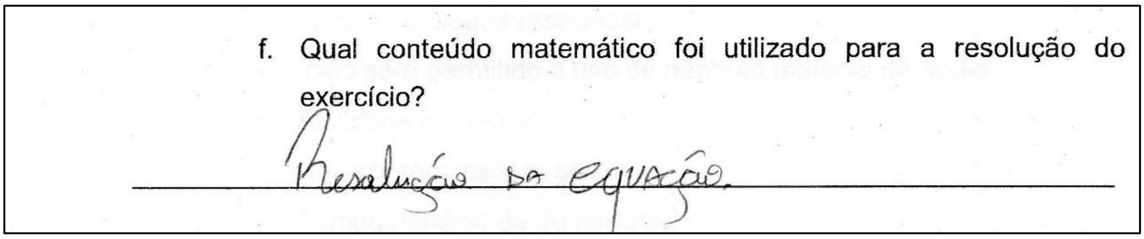


e. Você conseguiu resolver o exercício? Se não, qual foi o motivo?

Não, Não lembro como se faz

Figura 70 - Ex. 4 Item e Aluno T

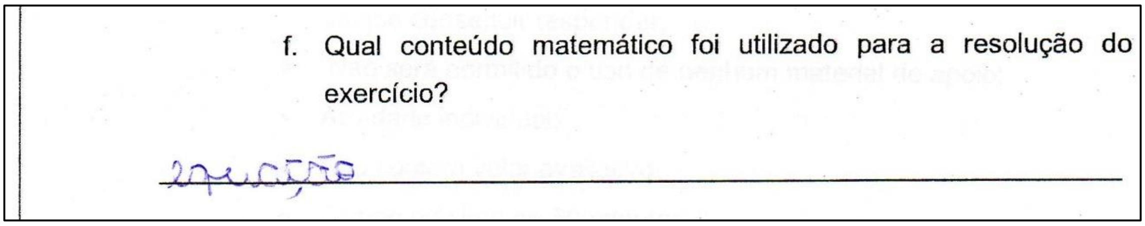
Outro fato que, talvez por falta de atenção dos alunos ao ler os enunciados dos exercícios é não acertar o item f deste exercício, que perguntava qual conhecimento matemático foi utilizado na resolução. No próprio enunciado do problema é afirmado que trata-se de uma inequação, mas tanto o aluno P como o aluno Q responderam equação.



f. Qual conteúdo matemático foi utilizado para a resolução do exercício?

Resolução da equação.

Figura 71 - Ex. 4 Item f Aluno P



f. Qual conteúdo matemático foi utilizado para a resolução do exercício?

equação

Figura 72 - Ex. 4 Item f Aluno Q

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao analisar a história dos problemas matemáticos e suas metodologias de resolução encontramos diversas visões distintas, partindo desde a Grécia antiga até os dias atuais, com trabalhos nacionais signifcativos. Todos os trabalhos tiveram importância em sua época, servindo assim de base para pesquisas recentes. Sabemos que existem diversos pontos causadores da dificuldade de resolução dos problemas, mas neste trabalho, especificamente, tratamos da interpretação de texto.

Ao elaborar um problema matemático para os alunos, devemos ter em mente que a interpretação do enunciado pelo aluno não será feita da mesma forma que a do professor, já que suas experiências são diferentes, sendo elas socioeconômicas, culturais ou acadêmicas. Pensando nisso, ao idealizar um enunciado, devemos adequar as possíveis experiências vividas pelos alunos, dispensando as experiências pessoais do professor.

Quando encontramos o insucesso de alunos ao resolver um problema matemático, de imediato justificamos como falta de conhecimento em interpretação de texto, pois utilizando essa competência com maestria não haveria dificuldade. Esse fato não é de total verdade, pois a falta de compreensão de um enunciado matemático pode apresentar-se de diversas formas, falta de conhecimento dos códigos matemáticos, palavras com sentidos ambíguos, má coesão do enunciado, entre outras.

A pesquisa de campo conta como objetivo encontrar dificuldades na interpretação de um enunciado, fazendo, assim, questionamentos sobre os dados encontrados no problema, além de comparar a quantidade de acertos entre problemas contextualizados e exercícios de fixação.

A hipótese inicial era que haveria maior dificuldade na resolução de problemas contextualizados, e analisando as atividades dos vinte alunos participantes, não houve surpresa na comparação dos acertos e erros. Nos primeiros dois exercícios (contextualizados), a porcentagem de acerto foi de 20%, enquanto nos exercícios três e quatro (fixação), foi de 40% e 45%, respectivamente. Esse fato não comprova que a falta de compreensão seja o principal fator de insucesso, mas garante que, nesse grupo, exercícios de fixação possuem taxa de acerto superior.

Ao comparar os dados dos dois primeiros questionamentos de cada problema (questionamentos ligados diretamente à interpretação de dados dos enunciados), não encontramos grande diferença. Obtivemos 80% e 65% nos itens A e B do primeiro problema, 60% e 75% no segundo, 75% e 70% no terceiro e 75% e 30% (único valor discrepante) no quarto. Acreditamos que para analisar esta discrepância encontrada no quarto exercício seria necessário que se fizesse uma nova pesquisa para colhermos novos dados que pudessem responder a esta pergunta o que seria inviável em se tratando de um Trabalho de Conclusão de Curso.

Seguindo o modelo de Polya, percebemos a importância de resoluções anteriores. Em todos os problemas (contextualizados ou não), o número de alunos que já realizaram exercícios parecidos e concordam com a sua importância é superior aos demais. As porcentagens são 70%, 60%, 85% e 75%, respectivamente.

Ao analisar as respostas individuais de cada aluno, observa-se que a dificuldade em solucionar um problema matemático não está apenas na falta do conhecimento em língua portuguesa, em diversos casos encontramos falta de conhecimento dos códigos matemáticos (utilização de sinais em uma inequação, por exemplo), não compreensão de significados que certas palavras possuem em contextos matemáticos, erros de operações matemáticas (como divisão e multiplicação) e falta de conhecimento teórico (não sabendo o que é um sistema, por exemplo).

Com isso, concluímos que nesse grupo específico existem sim dificuldades na realização de problemas contextualizados, mas não é possível confirmar que essa dificuldade está vinculada, exclusivamente, pela falta de compreensão e interpretação dos alunos, já que diversos outros motivos foram encontrados. Desse modo, deixamos como últimas indagações: é possível criar uma única metodologia de resolução de problemas abrangendo todas as possíveis dificuldades dos alunos? O trabalho conjunto com o professor de português pode auxiliar nas aulas de Matemática? As dificuldades encontradas por alunos de língua portuguesa também são encontradas em alunos de outras línguas? Logo, esse trabalho não encerra com o tema resolução de problemas, deixando perspectivas para próximas pesquisas, para assim melhorar a aprendizagem dos alunos.

REFERÊNCIAS

ABBOTT, F. B. **Estudo de caso sobre estratégias de resolução de problemas de matemática no ensino médio.** Porto Alegre, Universidade Federal do Rio Grane do Sul, 2011.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio**. Brasília, Ministério da Educação, 1997.

_______. **PCN+ Ensino Médio: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciência da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília, Ministério da Educação, 2002.

BOAS, R. P. **George Polya**. Disponível em http://www.nasonline.org/publications/biographical-memoirs/memoir-pdfs/polya-george.pdf. Acessado em 06/02/2015.

CHI, M. T. H.; GLASER, R. **Problem-Solving Ability**. Pittsburgh, Pittsburgh University, 1985.

CONSELHO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO CIENTÍFICO TECNOLÓGICO. **Lourdes de la Rosa Onuchic.** Disponível em http://lattes.cnpq.br/8641323605322627. Acessado em 03/04/2015.

D'AMBROSIO, B. S. **Como ensinar matemática hoje?** Temas e Debates. SBEM. Ano II. N2. Brasília. 1989.

FELISBERTO, K. G. L.; LOPES, C.E. **O Processo de Leitura e Escrita na Resolução de Problemas Matemáticos**. São Paulo, 2007

FERRARI, M. **B. F. Skinner, o cientista do comportamento e do aprendizado.** Disponível em http://revistaescola.abril.com.br/formacao/skinner-428143.shtml. Acessado em 17/04/2015.

GOMEZ-GRANELL, C. **A aquisição da linguagem matemática: símbolos e significados**. Além da alfabetização. São Paulo, Ática, 2008.

KAHLMEYER-MERTENS, R. **Método e verdade nas Regras para a direção do espírito de Descartes.** Disponível em http://www.consciencia.org/descartes-regras_direcao_espirito. Acessado em 10/04/2015.

LORENSATTI, E. J. C. **Linguagem matemática e Língua Portuguesa: diálogo necessário na resolução de problemas matemáticos.** Conjecturas v.14 n.2. Caxias do Sul, 2009.

NEWELL, A.; SIMON, H. A. **Human Problem Solving**. Pittsburgh, Carnegie-Mellon University, 1972.

NUNES, C. B. **A Resolução de Problemas na Formação Inicial e Continuada de Professores.** 2011. Disponível em http://www2.rc.unesp.br/gterp/sites/default/files/artigos/trab_completo_celia.pdf. Acessado em 26/06/2015.

ONUCHIC, L. R. **A Resolução de Problemas na Educação Matemática: Onde Estamos e Para Onde Iremos?** IV Jornada Nacional de Educação Matemática, Passo Fundo, Universidade de Passo Fundo, 2012.

POLYA, G. **A Arte de Resolver Problemas**. Trad.: Heitor Lisboa de Araújo. Interciência, 1995.

POPOVA, M. **The Art of Thought: Graham Wallas on the Four Stages of Creativity, 1926.** Disponível em http://www.brainpickings.org/2013/08/28/the-art-of-thought-graham-wallas-stages. Acessado em 10/04/2015

PORTAL EDUCAÇÃO. **Linguagem X Lingua.** Disponível em https://www.portaleducacao.com.br/fonoaudiologia/artigos/54802/linguagem-x-lingua. Acessado em 20/06/2015.

RAMOS, A. P. *et al.* **Problemas Matemáticos: caracterização, importância e estratégias de resolução**. São Paulo, Universidade de São Paulo, 2002.

RAMOS, P. P. S. **Uma investigação da resolução de problemas como proposta metodológica para a sala de aula no Ensino Médio**. Paraíba, Universidade Estadual da Paraíba, 2011.

SANTOMAURO, B. **Qual a diferença entre língua e linguagem?** Disponível em http://revistaescola.abril.com.br/fundamental-2/qual-diferenca-lingua-linguagem-687749.shtml. Acessado em 20/06/2015.

SAVIANI, D. **Educação - Do Senso Comum a Consciência Filosófica.** São Paulo, Autores Associados, 1980.

SCHOENFELD, A. **Mathematical Problem Solving**. New York, Academic Press, 1985.

______________. **Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics**. New York, Macmillan, 1992.

SILVA, M. M. **Dificuldades de alunos do ensino médio em questões de matemática do ensino fundamental.** Porto Alegre, Universidade Católica do Rio Grande do Sul. 2006.

STANIC, G. M. A.; KILPATRICK, J. **Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum**. In R. I. Charles & E. A. Silver (Eds.), The teaching and assessing of mathematical problem Solving. Reston, VA: NCTM e Lawrence Erlbaum, 1989

UNIVERSITY OF CALIFORNIA. **Alan H. Schoenfeld.** Disponivel em http://gse.berkeley.edu/people/alan-h-schoenfeld. Acessado em 03/04/2015.

APÊNDICE A - Termo de autorização e compromisso da instituição coparticipante do projeto de pesquisa

Ministério da Educação
Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica
Instituto Federal Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo
Comitê de Ética em Pesquisa

TERMO DE AUTORIZAÇÃO E COMPROMISSO DA INSTITUIÇÃO COPARTICIPANTE DO PROJETO DE PESQUISA

Autorizo a realização do projeto de pesquisa: "Resolução de problemas: tradução de situações problemas para matemática", sob responsabilidade do pesquisador Leonardo Cascio de Souza.

Declaro que, após a emissão do parecer ético do Comitê de Ética em Pesquisa do Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia de São Paulo - Campus São Paulo, tomarei conhecimento das orientações e cumprirei as Resoluções Éticas Brasileiras, em especial da Resolução CNS/MS 466/12. Esta instituição está ciente de suas corresponsabilidades como instituição coparticipante da pesquisa, e de seu compromisso no resguardo da segurança e bem-estar dos sujeitos de pesquisa nela recrutados, dispondo de infraestrutura necessária para a garantia de tal segurança e bem estar.

Exetec VESTIBULARES Simplesmente mais competente

São Paulo, 13 de 05 de 15.

EXETEC PREP. P EXAMES DAS ESC TÉCNICAS
Nome da instituição

00.165.162/0001-80
CNPJ

Eliude Aparecida Simões Duarte
Responsável pela instituição

Diretora
Cargo do responsável

APÊNDICE B - Termo de consentimento livre e esclarecido

Ministério da Educação
Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica
Instituto Federal Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo
Comitê de Ética em Pesquisa

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Você está sendo convidado para participar dessa pesquisa sobre o ensino da matemática. Você foi selecionado por ser aluno do curso Exetec Vestibulares e sua participação não é obrigatória. Participarão da pesquisa, todos os alunos presentes com idade de 13 à 15 anos. A qualquer momento você pode desistir de participar e retirar seu consentimento. Sua recusa não trará nenhum prejuízo em sua relação com o pesquisador ou com a instituição. Sua participação nesta pesquisa não traz riscos ou complicações legais, os procedimentos adotados nesta pesquisa obedecem aos critérios da Ética em Pesquisa com Seres Humanos conforme Resolução nº 466/12 do Conselho Nacional de Saúde. Os objetivos deste estudo são identificar e compreender a dificuldade na resolução de problemas matemáticos e analisar a atividade proposta para no futuro auxiliar no aprendizado. Sua participação nesta pesquisa consistirá em resolver uma atividade com quatro questões de matemática. Os riscos relacionados com sua participação: se sentir desconfortável ao realizar a atividade, e ter receio de possíveis punições decorrentes de sua falta de conhecimento no conteúdo. Eu como pesquisador deixo claro que os alunos não serão identificados no trabalho. O benefício relacionado com a sua participação é identificar os problemas que possam prejudicar os alunos quanto ao seu aprendizado na matemática e assim, facilitar as ações que devem ser tomadas por professores com o objetivo de melhorar o rendimento escolar. Você receberá uma via deste termo onde consta o telefone e o endereço institucional do pesquisador principal e do CEP, podendo tirar suas dúvidas sobre o projeto e sua participação, agora ou a qualquer momento.

EGuerato

Profª.Ms. ELISABETE TERESINHA GUERATO
Orientadora
E-mail: eguerato@globo.com
Rua Pedro Vicente, 625 Canindé – São Paulo/SP
Telefone: (11) 2763-7576

Leonardo Cascio de Souza

LEONARDO CASCIO DE SOUZA
Estudante de licenciatura em matemática
E-mail: leo.cascio@gmail.com
Rua Pedro Vicente, 625 Canindé – São Paulo/SP

COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA
Rua Pedro Vicente, 625 Canindé – São Paulo/SP
Telefone: (11) 3775-4569
E-mail: cep_ifsp@ifsp.edu.br

Declaro que entendi os objetivos, riscos e benefícios de minha participação na pesquisa e concordo em participar.

____

Sujeito da Pesquisa

APÊNDICE C – Atividade aplicada

Idade: _____ Série:_____ Escola Pública ou Particular: ___________________

Abaixo temos quatro exercícios de matemática, sendo que para cada um deles é proposta uma lista de perguntas referentes ao mesmo. Antes de iniciar a atividade leia com atenção as instruções.

- Não coloque nome;
- Não há necessidade de resposta de todas as perguntas, apenas as que conseguir responder;
- Não será permitido o uso de nenhum material de apoio;
- Atividade individual;
- Não contém valor avaliativo;
- Tempo máximo de 30 minutos;
- Não rasure.

1 – (Unifor–CE) Sejam X, Y e Z três artigos distintos que são vendidos em certa loja. Sabe-se que: X custa tanto quanto Y e Z juntos; o preço de Y é a diferença entre o dobro de X e R$ 50,00; o preço de Z é a diferença entre o triplo de Y e R$ 80,00. Nessas condições, pela compra dos três artigos, sendo um único exemplar de cada tipo, deverão ser desembolsados quantos reais?

a. Quais as incógnitas do exercício?

____

b. Quais dados são encontrados no exercício?

c. Já resolveu algum exercício parecido? Se sim, isso ajuda na resolução?

d. Resolução

e. Você conseguiu resolver o exercício? Se não, qual foi o motivo?

f. Qual conteúdo matemático foi utilizado para a resolução do exercício?

____

____

g. Classifique a dificuldade do exercício entre fácil, médio e difícil.

____

2 – Carol trabalha em uma fábrica de camisetas. Certo dia seu patrão lhe perguntou: "Se temos um gasto diário de R$ 2100,00 e vendemos cada camiseta por R$ 40,00, qual o mínimo de camisetas que temos que fazer para não termos prejuízo?" Depois de efetuar seus cálculos, qual resposta Carol encontrou?

a. Qual a incógnita do exercício?

____

b. Quais dados são encontrados no exercício?

____

____

c. Já resolveu algum exercício parecido? Se sim, isso ajuda na resolução?

____

____

d. Resolução.

e. Você conseguiu resolver o exercício? Se não, qual foi o motivo?

____

____

____

f. Qual conteúdo matemático foi utilizado para a resolução do exercício?

____

____

g. Classifique a dificuldade do exercício entre fácil, médio e difícil.

____

3 – Dado o sistema abaixo, calcule os valores de x, y e z.

$$\begin{cases} 2x + y = 13 \\ y - 2z = -8 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

a. Quais as incógnitas do exercício?

____

b. Quais dados são encontrados no exercício?

c. Já resolveu algum exercício parecido? Se sim, isso ajuda na resolução?

d. Resolução.

e. Você conseguiu resolver o exercício? Se não, qual foi o motivo?

f. Qual conteúdo matemático foi utilizado para a resolução do exercício?

---

g. Classifique a dificuldade do exercício entre fácil, médio e difícil.

---

4 – Calcule o valor de k na inequação abaixo:

$$44.(k - 12) - 220 > 0$$

a. Qual a incógnita do exercício?

---

b. Quais dados são encontrados no exercício?

---

c. Já resolveu algum exercício parecido? Se sim, isso ajuda na resolução?

---

d. Resolução.

e. Você conseguiu resolver o exercício? Se não, qual foi o motivo?

f. Qual conteúdo matemático foi utilizado para a resolução do exercício?

g. Classifique a dificuldade do exercício entre fácil, médio e difícil.