ANÁLISE DE UMA PROPOSTA DE ENSINO DE DERIVADA

Rafael Corradini de Santis

Trabalho de Conclusão do Curso Superior de Licenciatura em Matemática, orientado pelo Prof. Dr. Armando Traldi Junior.

IFSP
São Paulo
2014

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Santis, Rafael Corradini de.
ANÁLISE DE UMA PROPOSTA DE DERIVADA / Rafael Corradini de Santis. - São Paulo: IFSP, 2014.
73f

Trabalho de Conclusão do Curso Superior de Licenciatura em Matemática - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo
Orientador: Armando Traldi Junior.

1. Cálculo Diferencial e Integral. 2. Ensino de Derivada. 3. Metodologia de Ensino. I. ANÁLISE DE UMA PROPOSTA DE ENSINO DE DERIVADA.

FOLHA DE APROVAÇÃO

CONFECCIONADA PELA COORDENAÇÃO.

“Eu posso aceitar a falha, todos falham em alguma coisa. Mas eu não posso aceitar não tentar”.

Michael Jordan

Aos Meus Pais, Meus Irmãos e Minha Namorada

AGRADECIMENTOS

Agradeço os meus pais, Miguel e Silvia, e os meus irmãos, Leonardo e Gabriel, por me ensinarem, me guiarem nas minhas escolhas, sempre me apoiando e me ajudando quando precisei.

Minha namorada, Tathiana, por sempre ficar ao meu lado em todos os momentos de dificuldades, por me incentivar a nunca desistir de meus objetivos, por toda a compreensão, paciência e ajuda em diversos momentos deste meu caminho, por ser essa pessoa muito importante, especial e maravilhosa na minha vida.

Todos os colegas que me acompanharam ao longo de todo o percurso desse ciclo da minha vida. Alguns iniciaram esse processo junto comigo e muitos outros surgiram ao longo do caminho.

Os professores Henrique e Cristina por toda a ajuda nessa reta final.

O professor Armando Traldi Junior por ter aceitado me ajudar e me acompanhar neste último trabalho da graduação.

Todos os demais professores que fizeram parte da minha formação e contribuíram muito tanto profissional quanto pessoalmente.

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo efetuar a análise das atividades propostas em um dos capítulos da obra *Cálculo Diferencial e Integral*, que é um material didático produzido por um grupo de pesquisa, intitulado Grupo Zero, que tem como foco o ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral (CDI), verificando as possibilidades de utilização no ensino de derivada. Traremos alguns referenciais teóricos sobre métodos de abordagem da matemática, tais como Romanatto (2012) e Borba (1995), e o trabalho de Fiorentini (1995) sobre as tendências de se conceber o ensino de matemática no Brasil, para efetuar a análise das atividades e para responder a nossa questão de pesquisa: Quais são as possibilidades, em relação à metodologia de ensino, aos conceitos e aos procedimentos relacionados a derivadas, do uso desse material didático em sala de aula? Após a pesquisa, considerou-se que esse material didático possibilita uma série de relacionamentos entre os diferentes métodos de abordagem e tendências do ensino de matemática para o desenvolvimento dos conhecimentos relacionados a noção de derivada. Temos como hipótese que o ensino de CDI se tornará mais significativo, como é o objetivo do material, se utilizarmos a resolução de problemas associada com a tendência Empírico-Construtivista.

Palavras-chaves: Cálculo Diferencial e Integral; Ensino de Derivada; Metodologia de Ensino.

ANALYSIS OF A PROPOSAL FOR TEACHING OF DERIVATIVE

ABSTRACT

This study aims to perform the analysis of the activities proposed in one of the chapters of the book Differential and Integral Calculus, which is a instructional material produced by a research group, entitled Zero Group, which focuses on the teaching and learning of the Differential and Integral Calculus (CDI), checking the possibilities of use in teaching derivative. We will bring some theoretical references on methods of approach to mathematics, such as Romanatto (2012) and Borba (1995) and the work of Fiorentini (1995) on the trends of conceiving mathematics education in Brazil, to perform the analysis of the activities and to answer our research question: What are the possibilities in relation to the teaching methodology, concepts and procedures related to derivatives, the use of this teaching material in the classroom? After research, it was considered that this courseware provides a series of relationships between the different methods of approach and trends in the teaching of mathematics to the development of knowledge related to the notion of derivative. We hypothesized that the teaching of CDI will become more significant, as is the purpose of the material, if we use the problem resolutions associated with Empirical-Constructivist approach.

Keywords: Differential and Integral Calculus; Teaching Derivative; Methodology Teaching.

LISTA DE FIGURAS

Pág.

SUMÁRIO

Pág.

1 INTRODUÇÃO

Como graduando no curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo (IFSP), desenvolvi o meu estudo em várias disciplinas, dentre elas a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral (CDI).

Desde o início da disciplina de CDI, considerei relevante os temas abordados e concordo com Traldi (2006) que revela a importância dessa disciplina na formação do futuro professor da Educação Básica, destacando que é:

> a) rica em noções, ora em conformidade e ora em contradição com as ideias intuitivas dos alunos, o que deve ser levado em conta no seu ensino sob a pena de causar obstáculos; b) que apresenta uma diversidade de registros de representações em que seus conceitos são apresentados; c) que tem um caráter unificador que se manifesta, desde que sua abordagem no ensino leve em conta as diversas dimensões Matemáticas de um dado conceito (no quadro da álgebra, da geometria, de geometria analítica); d) que aborda noções que são estudadas na educação básica, número real, infinito, continuidade, limite, função; e) que tem aplicações em outras áreas do conhecimento, segundo Cornu (1991), Sierpinska (1985), Tall (1991), Azcárate e outros (1996) e Vinner (1991). (TRALDI, 2006, p.27)

O CDI é uma disciplina que tem grande destaque tanto na formação do futuro professor da Educação Básica, como afirma o autor, mas também na formação acadêmica, por exemplo, para pesquisadores, por estar presente em diversas áreas do conhecimento.

Porém, ao mesmo tempo, podemos perceber que os estudantes apresentam uma grande dificuldade ao cursar esta disciplina, visto que, segundo o estudo de Jesus, Lucas e Mapa (2011), nela há um alto índice de reprovação:

> Apesar da sua importância e da sua presença em currículos de vários cursos superiores, o Cálculo I, que é a primeira disciplina do Cálculo Diferencial e Integral, apresenta um índice de reprovação muito alto. Esse não é um problema que ocorre apenas na Universidade Federal de Ouro Preto, mas em várias instituições. (JESUS; LUCAS; MAPA, 2011, p.1)

Essa realidade é observada mesmo dentro do próprio IFSP, não somente nos cursos de licenciatura que possuem a disciplina de CDI, mas também nos cursos de engenharia.

Outro aspecto relevante para compreender o ensino desta disciplina são as diferentes possibilidades de abordagem dos seus conceitos em sala de aula. Há muitas pesquisas em Educação Matemática que discutem diferentes formas de desenvolver atividades de matemática em sala de aula, por exemplo, a modelagem matemática aqui definida por Chaves e Santo (2004):

> Modelagem Matemática é um processo que transforma, uma situação/questão escrita na linguagem corrente e/ou proposta pela realidade, em linguagem simbólica da matemática, fazendo parecer um modelo matemático que, por ser uma representação significativa do real, se analisado e interpretado segundo as teorias matemáticas, devolve informações interessantes para a realidade que se está questionando. (CHAVES e SANTO, 2004, p.1-2)

A modelagem matemática é muito utilizada em outras áreas como, por exemplo, em biologia quando se deseja construir um modelo baseado nas informações obtidas por um determinado experimento.

Outra possibilidade é por meio de resolução de problemas. Sobre isso, Lupinacci e Botin (2004) apontam que:

> A Resolução de Problemas é um método eficaz para desenvolver o raciocínio e para motivar os alunos para o estudo da Matemática. O processo ensino e aprendizagem pode ser desenvolvido através de desafios, problemas interessantes que possam ser explorados e não apenas resolvidos. (LUPINACCI e BOTIN, 2004, p.1)

A resolução de problemas deveria ser mais trabalhada no processo de aprendizagem, por possibilitar ao aluno, por meio de discussões consigo mesmo ou com colegas e o próprio professor, a obtenção de um conhecimento mais significativo, quando trazemos situações que sejam do seu cotidiano.

Foi nessa perspectiva que iniciei uma investigação exploratória para verificar diferentes possibilidades de abordar os conteúdos da disciplina de CDI, e me deparei com o estudo desenvolvido por um grupo de pesquisadores.

Esse grupo de pesquisadores de Barcelona, formado por professores de Matemática do bacharelado, intitulado Grupo Zero, teve como principal objetivo elaborar um material didático para melhorar a qualidade do trabalho diário deles, tornando a aprendizagem de CDI mais significativa para os alunos.

Dessa maneira, o objetivo desta pesquisa é analisar as atividades propostas, em um dos capítulos da obra *Cálculo Diferencial e Integral*, o capítulo 2 “EL CONCEPTO DE DERIVADA”, verificando quais são as possibilidades no ensino do conceito de derivada.

Sendo assim, tenho como questão básica de pesquisa neste trabalho: **Quais são as possibilidades, em relação à metodologia de ensino, aos conceitos e aos procedimentos relacionados a derivadas, do uso desse material didático em sala de aula?**

No capítulo 2 – Fundamentação Teórica e Metodológica – traremos alguns autores que trabalham com abordagens diferenciadas no ensino da matemática, junto com a obra de Fiorentini (1995) sobre as maneiras de conceber o ensino de matemática no Brasil. Abordaremos, ainda nesse capítulo, nossa opção metodológica.

No capítulo 3 – Sequência das Atividades – traremos a tradução das 12 atividades presentes no capítulo 2 do material acima indicado, juntamente com o objetivo geral de todas as atividades e a análise de cada uma. Na análise apresentaremos os objetivos específicos, uma hipótese de resolução, os conhecimentos matemáticos envolvidos em cada atividade e possíveis hipóteses de dificuldades com que os estudantes podem se deparar na resolução dos exercícios. Em seguida, relacionaremos as atividades com as duas tendências que constituímos na fundamentação teórica.

No capítulo 4 – Considerações Finais – traremos a resposta que obtivemos, através do desenvolvimento do trabalho, para a nossa questão de pesquisa. Também apresentaremos as contribuições desta pesquisa para minha formação como futuro professor da educação básica e faremos um breve comentário sobre as atividades presentes no material didático escolhido, com exercícios e atividades encontrados em outros materiais didáticos.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA E METODOLÓGICA

Dividiremos este capítulo em duas partes: fundamentação teórica e metodológica. Na fundamentação teórica, traremos Romanatto (2012), Michalovicz (s.d.) e Borba (1995) que discutem sobre alguns dos métodos de abordagem da matemática e a obra de Fiorentini (1995) que traz seis tendências de conceber o ensino de matemática no Brasil, as quais utilizaremos para o desenvolvimento deste trabalho. Na fundamentação metodológica, apresentaremos os procedimentos utilizados no desenvolvimento desta pesquisa, fundamentado em Fiorentini e Lorenzato (2012) e Lüdke e André (1986).

2.1. Fundamentação Teórica

O ensino de conceitos, procedimentos e atitudes relacionado à matemática pode ser abordado de diferentes maneiras. A resolução de problemas, por exemplo, é uma destas possibilidades e que já é discutida desde a década de 1950, com Polya, na obra *A arte de resolver problemas*, e a partir de então sempre foi tratada como uma abordagem relevante nas pesquisas em Educação Matemática. Segundo Romanatto (2012):

> [...] a resolução de problemas significa envolver-se em uma tarefa ou atividade cujo método de solução não é conhecido imediatamente. Para encontrar uma solução, os estudantes devem aplicar seus conhecimentos matemáticos. Solucionar problemas não é apenas buscar aprender Matemática e, sim, fazê-la. Os estudantes deveriam ter oportunidade frequentes para formular, tentar e solucionar problemas desafiadores que requerem uma quantidade significativa de esforço e deveriam, então, ser encorajados a refletir sobre seus conhecimentos. Assim, solucionar problemas não significa apenas resolvê-los, mas aplicar sobre eles uma reflexão que estimule seu modo de pensar, sua curiosidade e seus conhecimentos. (ROMANATO, 2012, p. 302-303)

A abordagem por meio de resolução de problemas não é apenas resolver situações como o próprio nome diz, mas sim incentivar o aluno para que, dado um caso com que ele ainda não tenha se deparado, consiga através de uma “reunião” de todo o seu conhecimento, desenvolver estratégias e esquemas para o desenvolvimento de uma resolução ou uma conjectura de tentativas.

Outra abordagem relevante é utilizando-se da História da Matemática que, para Michalovicz (s.d.):

> A História da Matemática configura-se como campo de investigação metodológica na busca da compreensão da aprendizagem, pois com abordagens etnográficas e históricas engloba diversas dimensões da matemática, e possibilita aos alunos a motivação para construir o saber matemático dentro da sua realidade, valorizando os conhecimentos produzidos pelo homem no decorrer da história. (MICHALOVICZ, s.d., p. 4)

Esse tipo de abordagem deveria estar cada vez mais presente na aprendizagem, porque devemos valorizar os conhecimentos que foram desenvolvidos por outras pessoas ao longo da história. O conhecimento não surgiu sozinho, diversas pessoas ao longo do tempo gastaram grande parte de suas vidas, quando não toda, para conseguirem formalizá-lo, e muitas outras, mesmo estudando e pesquisando por muitos anos, não conseguiram comprovar hipóteses que surgiram. Quando reconhecemos todos esses esforços que houve, somos capazes até mesmo de valorizar ainda mais os nossos próprios conhecimentos.

Dentro das diferentes formas de abordagem metodológicas de ensino, a tecnologia, como meio ou ferramenta, também vem ganhando destaque. Para Borba (1995):

> Os novos recursos tecnológicos, e em particular os computadores, podem vir a provocar mudanças na sala de aula de matemática, caso o seu potencial seja explorado e eles não sejam vistos como “lápis e papel mais rápidos”. O computador permite que a visualização de gráficos das mais diversas formas seja mais intensamente utilizada. Permite também que cálculos cansativos sejam deslocados do centro da prática matemática em sala de aula. [...] A matemática trabalhada nesta forma assume um caráter exploratório, onde a experimentação feita por aqueles que aprendem é vista como positiva. (BORBA, 1995, p. 242)

A tecnologia está cada vez mais acessível à população. Diversas pessoas possuem um computador ou notebook em casa, e/ou um minicomputador, que são os smartphones, no bolso. Em diversas situações da nossa prática docente, temos de chamar a atenção dos alunos por usarem essas tecnologias, de forma “errada” e em momentos inadequados. Se o profissional da educação, ou mesmo de outras áreas, souber fazer a utilização adequada das novas tecnologias que surgem, trará grandes inovações para a aprendizagem não apenas dos seus alunos, mas também de suas famílias, pois muitas vezes as crianças ensinam seus pais na utilização desses equipamentos.

Além de discutir essas diferentes abordagens, também é relevante analisar as diferentes tendências de ensino. Neste sentido, Fiorentini (1995) caracteriza seis tendências de conceber o ensino de matemática no Brasil: Formalista Clássica, Empírico-Ativista, Formalista Moderna, Tecnicista e suas Variações, Construtivista e Sócioetnocultural.

Tendência Formalista Clássica:

Caracteriza-se por um ensino sistemático e pragmático. O conteúdo é passado de maneira lógica, partindo de noções primitivas e definições para o desenvolvimento dos teoremas. O professor apenas passa a matéria no quadro e os alunos têm que copiar, fixar e reproduzir da mesma maneira nas avaliações. A matemática é ensinada de uma maneira a-histórica, considerando que o homem não cria nada, apenas “descobre” o que há na natureza.

Tendência Empírico-Ativista:

Diferente da tendência formalista clássica, a empírico-ativista coloca o aluno no centro do ensino, preocupando-se com o desenvolvimento biológico e psicológico do mesmo. O professor deixa de ser o transmissor e passa a ser o mediador do conhecimento. Nessa tendência valoriza-se a aprendizagem por meio de descobertas e experimentações.

Tendência Formalista Moderna:

Essa tendência se iguala quase que totalmente com a formalista clássica, por colocar o professor novamente como transmissor do conteúdo (sem se preocupar com o desenvolvimento dos alunos) e trabalhando os conceitos de maneira a-histórica. A diferença é que a clássica se preocupa com a sistematização lógica do conhecimento matemático, enquanto a moderna, por influência da álgebra, tenta desenvolver outras estruturas do conhecimento matemático.

Tendência Tecnicista e suas Variações:

Nessa tendência surge o método de aprendizagem da matemática que vemos nos cursinhos pré-vestibulares e vestibulares. A estratégia do ensino é a “mecanização” do conteúdo, por meio da memorização de regras e fórmulas. Dessa maneira não existe uma preocupação com a formação do caráter crítico do aluno, a partir do momento que isso não é exigido dele nos exercícios.

Tendência Construtivista:

No construtivismo retoma a valorização do desenvolvimento (biológico, psicológico, etc) do aluno na aprendizagem. Um dos objetivos do ensino é desenvolver o pensamento lógico-argumentativo que é muito importante para o crescimento do indivíduo. Dessa forma, o aluno consegue construir o seu conhecimento por meio de descoberta, experiência e mesmo debates entre colegas e o professor, sendo que este tem o papel de mediador do conteúdo.

Tendência Sócioetnocultural:

Diferente de quase todas as tendências, a sócioetnocultural valoriza o desenvolvimento histórico do conhecimento matemático. Valoriza também o aluno e o conhecimento que ele já possui sobre o mundo. Trabalham-se os conteúdos com situações que sejam do cotidiano do individuo, para que dessa maneira se obtenha uma aprendizagem mais significativa para o estudante.

Partindo da análise dessas tendências, constituiremos duas tendências, a tendência Formalista e a Empírico-Construtivista, que utilizaremos para o desenvolvimento do trabalho.

A tendência Formalista se caracterizará por um ensino sistemático, em que há uma preocupação com a estrutura do conhecimento, porém não com o aprendizado do aluno, uma vez que não se tem como o objetivo a construção do caráter crítico-argumentativo, já que se valoriza a repetição e não a criação dos argumentos.

A tendência Empírico-Construtivista, ao contrário da Formalista, terá como objetivo o desenvolvimento do caráter crítico-argumentativo, uma vez que valoriza a aprendizagem através da exploração e descoberta. Em vez de se passar o conteúdo para que o aluno apenas repita e reproduza da mesma maneira, será incentivada a investigação. O estudante, por meio de observações, análises, debates, argumentações, conseguirá concluir/formalizar novos conhecimentos.

Como o interesse neste estudo está relacionado à disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, iremos apresentar uma abordagem do conceito de derivada e fazer o seu desenvolvimento por meio da Resolução de Problemas com as duas tendências que constituímos.

Resolução de Problemas com a abordagem Formalista:

Uma abordagem do conceito de derivada considerando essa perspectiva seria:

<u>Início da aula:</u> Proposição da atividade

<u>Resolução da situação:</u> "Suponha que uma bola é solta a partir do ponto de observação no alto da Torre CN em Toronto, 450 m acima do solo. Encontre a velocidade da bola após 5 segundos". (STEWART, 2010, p. 75)

<u>Desenvolvimento da aula:</u> Por termos apenas um instante e estarmos acostumados a trabalhar com a velocidade em um intervalo, o professor utiliza um segundo instante para o tempo, 5,1 segundos, e calcula a velocidade média da bola. Dessa forma obtemos a velocidade média igual a 49,49 m/s.

Depois o professor apresenta a tabela abaixo com o mesmo cálculo da velocidade média, mas com períodos de tempo cada vez menores.

Intervalo de tempo	Velocidade média (m/s)
$5 \leq t \leq 6$	53,9
$5 \leq t \leq 5{,}1$	49,49
$5 \leq t \leq 5{,}05$	49,245
$5 \leq t \leq 5{,}01$	49,049
$5 \leq t \leq 5{,}001$	49,0049

Fonte: Retirado do livro Cálculo, volume 1 (STEWART, 2010, p. 76).

Após apresentar a tabela, o professor afirma aos alunos que é possível verificar a velocidade da bola, após 5 segundos, como 49 m/s, pois os valores da velocidade média estão tendendo a ele à medida que diminuímos o período entre os valores do tempo.

Finalização da aula: Com a finalização do desenvolvimento da situação proposta, o professor formaliza a noção de velocidade instantânea (taxa de variação instantânea), que ocorre quando calculamos a velocidade num instante determinado, pelo fato de tendermos a diferença do intervalo a um valor próximo de zero. A taxa de variação instantânea é uma das abordagens possíveis para o conceito de derivada. Podemos expressar a velocidade instantânea (V_I) como $V_I = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Resolução de Problemas com a abordagem Empírico-Construtivista:

Uma abordagem do conceito de derivada considerando essa perspectiva seria:

Inicio da aula: Proposição da atividade

Resolução da situação: “Suponha que uma bola é solta a partir do ponto de observação no alto da Torre CN em Toronto, 450 m acima do solo. Encontre a velocidade da bola após 5 segundos”. (STEWART, 2010, p. 75)

Desenvolvimento da aula: Como estamos acostumados a trabalhar com a velocidade em um intervalo, o professor faz a sugestão para os alunos para que eles utilizem mais um instante para o tempo, por exemplo, 5,1 segundos, para efetuar o cálculo da velocidade média. Após sugerir isso, o professor observa que todos os alunos devem obter o valor de 49,49 m/s.

Em seguida, o professor incentiva aos alunos a fazerem uma conjectura de valores de velocidade média, sempre diminuindo os valores dos intervalos do tempo.

Após um tempo de cálculos e discussões entre os alunos, o professor monta a tabela a seguir na lousa com as informações que os alunos utilizaram e obtiveram.

Intervalo de tempo	Velocidade média (m/s)
$5 \leq t \leq 6$	53,9

5 ≤ t ≤ 5,1	49,49
5 ≤ t ≤ 5,05	49,245
5 ≤ t ≤ 5,01	49,049
5 ≤ t ≤ 5,001	49,0049

Fonte: Retirado do livro Cálculo, volume 1 (STEWART, 2010, p. 76).

Após finalizar essa tabela, o professor inicia uma discussão com os alunos, para entender suas escolhas e verificar as conclusões a que chegaram. Partindo delas, conclui que podemos adotar o valor de 49 m/s para a velocidade da bola após 5 segundos, devido ao fato de os valores da velocidade média se aproximarem dele, conforme utilizamos intervalos cada vez menores.

Finalização da aula: Com a finalização do desenvolvimento da situação proposta, o professor formaliza a noção de velocidade instantânea (taxa de variação instantânea), que ocorre quando calculamos a velocidade num instante determinado, pelo fato de tendermos a diferença do intervalo a um valor próximo de zero. A taxa de variação instantânea é uma das abordagens possíveis para o conceito de derivada. Podemos expressar a velocidade instantânea (V_I) como $V_I = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

2.2. Fundamentação Metodológica

Nesse trabalho, será realizada uma pesquisa que segundo Fiorentini e Lorenzato (2012) é:

> [...] um processo de estudo que consiste na busca disciplinada/metódica de saberes ou compreensões acerca de um fenômeno, problema, ou questão da realidade ou presente na literatura o qual inquieta/instiga o pesquisador perante o que se sabe ou diz respeito. (FIORENTINI E LORENZATO, 2012, p. 60)

Optamos por realizar uma pesquisa qualitativa que, para Lüdke e André (1986, *apud* BOGDAN E BIKLEN, 1982, p.13) “envolve a obtenção de dados descritivos, obtidos no contato direto do pesquisador com a situação estudada, enfatiza mais o processo do que o produto e se preocupa em retratar a perspectiva dos participantes". Nosso interesse não está voltado a quantidades, mas sim averiguar as possibilidades da utilização de um material didático.

Conforme anunciado na introdução, o objetivo do estudo proposto é analisar as atividades existentes no capítulo 2 do material didático do Grupo Zero, que tem como foco o ensino e aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral, verificando quais são as possibilidades no ensino do conceito de derivada. Dessa maneira escolhemos efetuar uma análise bibliográfica, para realizar a coleta dos dados para a nossa investigação.

Dentre os vários materiais didáticos existentes, esse foi escolhido por ser um material produzido por um grupo professores de Matemática (no caso do bacharelado), que são pesquisadores sobre o processo de ensino e aprendizagem de CDI, e por ter como objetivo um ensino mais significativo do Cálculo Diferencial e Integral.

De todos os capítulos presentes no livro, escolhemos utilizar o capítulo 2 que trata do conceito de derivada. Além do interesse pelo conteúdo, a escolha também deveu-se ao fato de poder ser abordado e trabalhado de diferentes maneiras, por exemplo, taxa de variação, coeficiente angular da reta tangente, definição formal utilizando limite e por estar presente em outras áreas do conhecimento.

Foram propostas doze atividades ao longo do capítulo dois, sendo que cada uma desenvolve uma parte do conceito de derivada. Foram feitas a tradução e a análise dos doze problemas, apresentando o objetivo geral de todas as atividades, os objetivos específicos de cada problema, uma possível estratégia de resolução, os conhecimentos matemáticos necessários para o seu desenvolvimento e possíveis hipóteses de dificuldades com que os alunos podem se deparar no processo de resolução dos exercícios.

Após a análise das atividades, tentaremos associar as considerações que obtivemos com as tendências que constituímos, a tendência Formalista e a Empírico-Construtivista, para responder à questão de pesquisa.

No próximo capítulo, apresentamos a sequência das atividades com as análises e associações que realizamos.

3 SEQUÊNCIA DAS ATIVIDADES

Neste capítulo foi feita a tradução das doze atividades do capítulo dois do material didático do Grupo Zero juntamente com a análise de todas e a apresentação de um objetivo geral. Faremos também a análise individual de cada problema e apontaremos os objetivos específicos, uma possível estratégia de resolução, o levantamento dos conhecimentos matemáticos envolvidos e possíveis hipóteses de dificuldade com que os alunos podem se deparar na resolução das atividades. De acordo com as conclusões dessa análise inicial, faremos a associação das atividades com as duas tendências que constituímos.

Objetivo Geral: As atividades propostas neste capítulo do livro têm como objetivo geral abordar esboço de curvas, leitura e interpretação de curvas, análise de comportamento da variação de uma função, taxa de variação e taxa de variação instantânea.

3.1. Atividade 1

Objetivo Específico:

a) Leitura e interpretação do gráfico;
b) Cálculo da taxa de variação do consumo de água quente entre dois instantes;
c) Análise e interpretação da taxa de variação do consumo de água quente entre dois instantes;
d) Análise e interpretação da taxa de variação do consumo de água quente entre dois instantes;
e) Leitura, interpretação, análise e comparação do gráfico, em dois instantes;
f) Cálculo da taxa de variação instantânea do consumo de água quente em um determinado instante;
g) Leitura, interpretação e análise do gráfico.

Enunciado: O hotel Alps tem 156 apartamentos. Seu consumo de água quente é bastante elevado. A função $Q: t \to Q(t)$, cujo gráfico aparece junto a este enunciado, nos fornece o total de água quente consumida desde meia noite (0 hora) ao longo de t horas. Este gráfico corresponde a um dia inteiro, porém se tem observado que cada dia, durante a temporada de verão, se repete salvo pequenas variações.

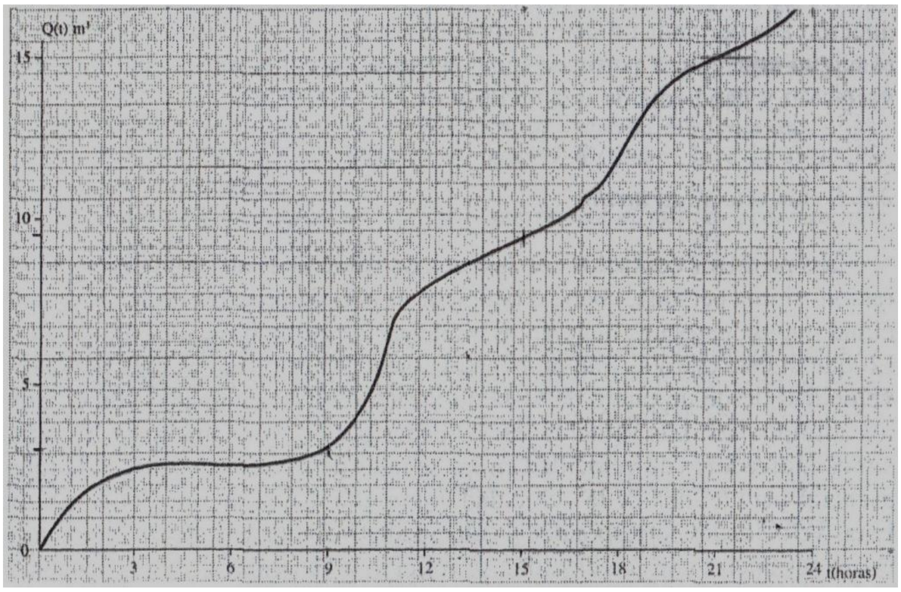


Figura 1 – Gráfico da Atividade 1.
Fonte: Retirado da obra Cálculo Diferencial e Integral (AZCÁRATE et al, 1996, p. 25).

a) Qual é o consumo total de água ao longo do dia?

b) Quanta água foi consumida entre 9 e 15 horas?

c) O que se pode dizer do consumo de água quente entre 2 e 15 horas?

d) O que se pode dizer do consumo de água quente entre 20 e 23 horas?

e) Em qual momento está sendo consumida mais água: às 13 horas ou às 22 horas? Justifique a sua resposta.

f) Encontre o m³/h que está sendo consumido às 7 horas em ponto. Explique como você descobriu.

g) Em qual momento do dia você acha que está sendo consumida mais água quente? Justifique a sua resposta.

Uma possível estratégia de resolução:

Para a resolução de todos os itens, serão utilizados valores aproximados[1].

a) Como o gráfico não apresenta, no eixo das coordenadas (Q(t) m³), valores maiores do que 15 m³, e através da análise da curva podemos identificar que

[1] As aproximações serão feitas até a segunda casa decimal. O critério utilizado para o arredondamento está baseado no terceiro algarismo decimal. Se ele for inferior a 5,manteremos o segundo algarismo decimal como está, caso seja maior ou igual a 5, será acrescentado uma unidade no segundo algarismo decimal. Em todos os casos de valores aproximados, será utilizado este critério de arredondamento.

após as 21 horas esse valor é ultrapassado, então podemos estimar que o consumo de água ao longo do dia está entre 15 e 20 m³.

b) Fazendo a análise da curva e utilizando regra de três, para estimar os valores no instante 9 e 15 horas, obtemos que às 9 horas tinha sido consumido 3,05 m³ de água e as 15 horas, 9,63 m³. Fazendo 9,63 – 3,05, obtemos que foram consumidos 6,58 m³ de água entre 9 e 15 horas.

c) Houve um aumento significativo no consumo de água quente entre às 2 e às 15 horas. Esse aumento foi de 7,68 m³, porque até às 2 horas tinha-se consumido 1,95 m³ e até às 15 horas foi consumido 9,63 m³. Podemos ainda dividir este intervalo em dois. O primeiro que vai das 2 às 9 horas, em que quase não houve consumo de água quente. O segundo que vai das 9 às 15 horas, em que houve um grande consumo de água quente.

d) Não houve um aumento significativo no consumo de água quente entre 20 e 23 horas. Esse aumento foi de 1,46 m³, porque até às 20 horas tinham-se consumido 14,39 m³ e até às 23 horas foram consumidos 15,85 m³.

e) Para determinar um valor para o consumo às 13 horas e às 22 horas, para podermos comparar, calcularemos a média entre uma hora a menos e uma hora a mais. Assim o consumo (C) às 13 horas é $C_{13h} = \frac{9{,}02 - 8{,}17}{14 - 12} = \frac{0{,}85}{2} = 0{,}425$, e às 22 horas é $C_{22h} = \frac{15{,}98 - 15{,}37}{23 - 21} = \frac{0{,}61}{2} = 0{,}305$. Dessa forma, está sendo consumida mais água às 13 horas.

f) Para calcular o consumo de água às 7 horas em ponto, faremos o cálculo do consumo em um intervalo e diminuiremos esse intervalo, aproximando das 7 horas.

Intervalo de tempo	Consumo médio (m³/h)
$6 \leq t \leq 8$	$\frac{2{,}81 - 2{,}44}{8 - 6} = \frac{0{,}37}{2} = 0{,}185$
$6{,}5 \leq t \leq 7{,}5$	$\frac{2{,}68 - 2{,}56}{7{,}5 - 6{,}5} = \frac{0{,}12}{1} = 0{,}12$

7 ≤ t ≤ 7,5	$\frac{2,68 - 2,61}{7,5 - 77} = \frac{0,07}{0,5} = 0,14$
7 ≤ t ≤ 7,25	$\frac{2,63 - 2,61}{7,25 - 7} = \frac{0,02}{0,25} = 0,08$

Fonte: Própria

Dessa forma, observamos que o consumo de água às 7 horas em ponto é de 0,08 m³/h, o que é muito pequeno. Sendo assim podemos tirar como conclusão que quando a inclinação do gráfico é pequena, ocorre um pequeno aumento no consumo (ou praticamente nenhum consumo) de água, e quando a inclinação é grande, ocorre um grande aumento no consumo de água.

g) Partindo das conclusões do item (f), localizamos três intervalos no gráfico em que ocorre uma grande inclinação. Os intervalos são de 0 a 3 horas, 9 a 12 horas e 18 a 21 horas. Efetuaremos o cálculo da média de consumo nos três intervalos para determinar em qual dos três está ocorrendo o maior aumento no consumo de água quente (Caq). O $Caq_{0 \text{ a } 3 \text{ horas}} = \frac{2,44 - 0}{3 - 0} = \frac{2,44}{3} = 0,81$, o $Caq_{9 \text{ a } 12 \text{ horas}} = \frac{8,17 - 3,17}{12 - 9} = \frac{5}{3} = 1,67$ e o $Caq_{18 \text{ a } 21 \text{ horas}} = \frac{15 - 12,07}{21 - 18} = \frac{2,93}{3} = 0,98$. Dessa maneira observamos que o momento do dia em que ocorre o maior consumo de água quente está no intervalo das 9 às 12 horas.

Conhecimentos matemáticos necessários:

- Análise e interpretação do gráfico;
- Taxa de variação;
- Taxa de variação instantânea.

Hipóteses de Dificuldades:

O aluno poderá encontrar dificuldade no cálculo da taxa de variação instantânea, uma vez que o intervalo, no qual ele esta acostumado a calcular, tende a zero, ocasionando em uma “divisão” por zero, que é uma indeterminação.

3.2. Atividade 2

<u>Objetivo Específico:</u>

a) Análise do gráfico;
b) Análise do gráfico;
c) Cálculo da taxa de variação;
d) Cálculo da taxa de variação;
e) Cálculo da taxa de variação;
f) Cálculo da taxa de variação;
g) Cálculo da taxa de variação;
h) Cálculo da taxa de variação instantânea;
i) Esboço de gráfico.

<u>Enunciado:</u> No gráfico abaixo temos a representação do espaço percorrido por um carro em função do tempo, desde o centro de Barcelona até Granollers:

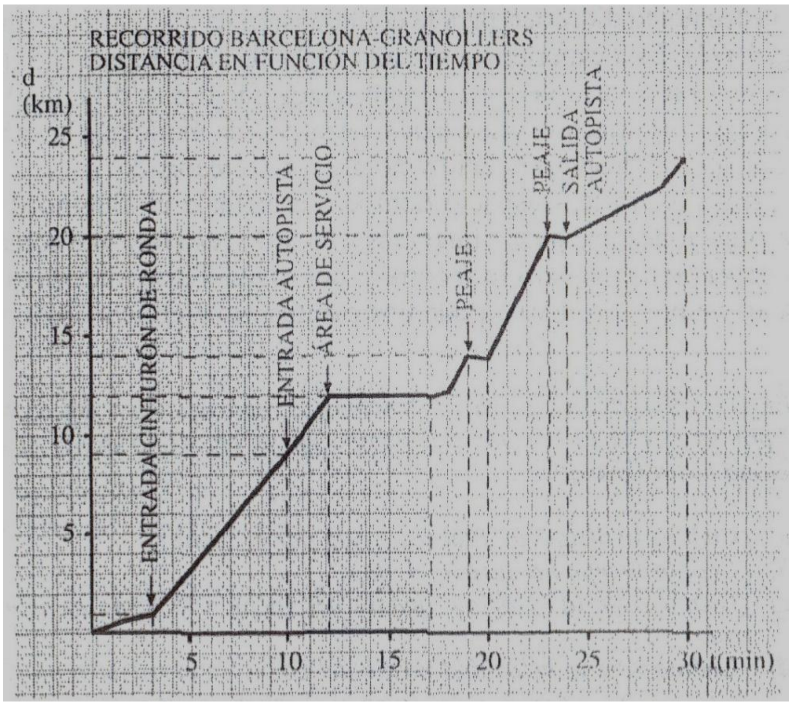


Figura 2 – Gráfico da Atividade 2.
Fonte: Retirado da obra *Cálculo Diferencial e Integral* (AZCÁRATE *et al*., 1996, p. 30).

a) Qual é a distância total percorrida pelo carro?
b) Quanto tempo durou a viagem?
c) Quanto vale a velocidade média do carro ao longo de todo o percurso?

d) Quanto vale a velocidade média do carro no trajeto pelo interior de Barcelona até a entrada no Cinturão de Ronda?

e) Quanto vale a velocidade média do carro em seu percurso pelo Cinturão?

f) Quanto vale a velocidade média do carro no trajeto pela autopista? E se descontarmos as paradas?

g) Quanto vale a velocidade média entre os instantes 4 e 8 minutos?

h) Quanto marca o velocímetro do automóvel quando passam 27 segundos da sua partida?

i) Represente o gráfico de um carro que realiza o mesmo percurso, porém mais devagar.

Uma possível estratégia de resolução:

a) A distância total percorrida pelo carro é de 24 km.
b) A viagem durou 30 minutos.

Nos itens (c) ao (g), calcularemos as velocidades médias (Vm) solicitadas.

c) Vm = $\frac{24-0}{0{,}5-0} = \frac{24}{\frac{1}{2}} = 24x2 = 48\ \frac{km}{h}$

d) Vm = $\frac{1-0}{\frac{1}{20}-0} = \frac{1}{\frac{1}{20}} = 1x20 = 20\ \frac{km}{h}$

e) Vm = $\frac{9-1}{\frac{1}{6}-\frac{1}{20}} = \frac{8}{\frac{7}{60}} = \frac{8x60}{7} \cong 68{,}57\ \frac{km}{h}$

f) Vm = $\frac{20-9}{\frac{24}{60}-\frac{10}{60}} = \frac{11}{\frac{14}{60}} = \frac{11x60}{14} \cong 47{,}14\ \frac{km}{h}$ Vm = $\frac{20-9}{\frac{14}{60}-\frac{8}{60}} = \frac{11}{\frac{6}{60}} = \frac{11x60}{6} = 110\ \frac{km}{h}$

g) Vm = $\frac{7-2}{\frac{8}{60}-\frac{4}{60}} = \frac{5}{\frac{4}{60}} = \frac{5x60}{4} = 75\ \frac{km}{h}$

h) Faremos uma estimativa para a marcação do velocímetro do carro em 27 segundos, calculando a média em dois intervalos. O primeiro será entre 0 e 1 minuto, e o segundo entre 0 e 30 segundos (0 e 0,5 minutos). A $Vm_{0\text{ a }1\text{ minuto}}$ = $\frac{0{,}68-0}{1-0} = \frac{0{,}68}{1} = 0{,}68$ km/min, a $Vm_{0\text{ a }0{,}5\text{ minutos}}$ = $\frac{0{,}23-0}{0{,}5-0} = \frac{0{,}23}{0{,}5} = 0{,}46$ km/min. Dessa maneira podemos supor que o velocímetro em 27 segundos não ultrapassará a velocidade de 0,46 km/min.

i) Como foi deixada livre a escolha de como montar o gráfico, optei por fazer o gráfico em que mantemos o mesmo percurso e dobramos o seu tempo.

Dessa forma o carro realizará o mesmo percurso, porém mais devagar.

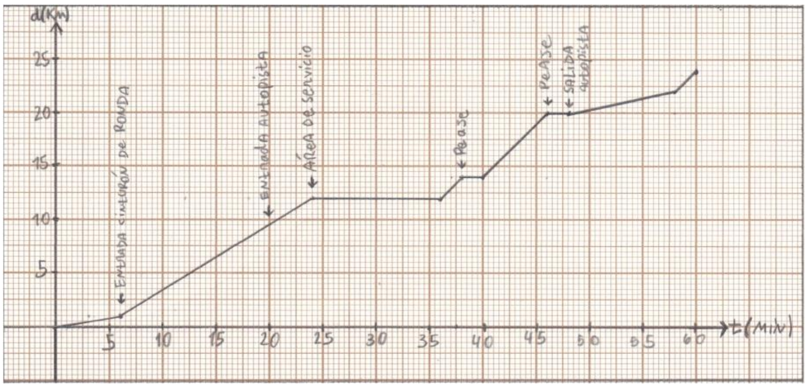


Figura 3 – Gráfico do item i) da Atividade 2.

Fonte: Própria.

<u>Conhecimentos matemáticos necessários:</u>

- Análise e interpretação do gráfico;
- Esboço de curva;
- Taxa de variação;
- Taxa de variação instantânea.

<u>Hipóteses de Dificuldades:</u>

O aluno poderá encontrar dificuldade no cálculo da taxa de variação instantânea, por estar habituado a calcular taxa de variação em um intervalo.

3.3. Atividade 3

<u>Objetivo Específico:</u>

a) Cálculo da taxa de variação;
b) Estimativa da taxa de variação instantânea;
c) Análise e interpretação de tabela.

<u>Enunciado:</u> A intervalos de 5 segundos se observa a posição de um carro (em relação a um ponto de referência 0) com a finalidade de observar se em algum momento ele supera a velocidade máxima permitida. Os dados obtidos, considerando que o instante em que passa pelo ponto 0 é o instante zero, são:

Tiempo (segundos)	0	5	10	15	20	25	30	35	40
Distancia al punto 0 (metros)	0	100	200	290	370	430	510	610	720

Figura 4 – Tabela da Atividade 3.

Fonte: Retirado da obra Cálculo Diferencial e Integral (AZCÁRATE *et al.*, 1996, p. 31).

a) Calcule a velocidade média do carro durante o intervalo total de tempo (40 s) e a velocidade média do carro em cada um dos intervalos de 5 segundos.

b) Faça uma estimação da velocidade do carro no momento em que o cronômetro indica 20 segundos.

c) Estime durante quanto tempo a velocidade foi inferior a 18 m/s. Se a velocidade máxima autorizada é de 72 km/h, houve algum momento em que foi ultrapassada?

Uma possível estratégia de resolução:

a) $Vm_{\text{total}} = \frac{720-0}{40-0} = \frac{720}{40} = 18\ m/s$

$Vm_{\text{0 a 5s}} = \frac{100-0}{5-0} = \frac{100}{5} = 20\ m/s$

$Vm_{\text{5 a 10s}} = \frac{200-100}{10-5} = \frac{100}{5} = 20\ m/s$

$Vm_{\text{10 a 15s}} = \frac{290-200}{15-10} = \frac{90}{5} = 18\ m/s$

$Vm_{\text{15 a 20s}} = \frac{370-290}{20-15} = \frac{80}{5} = 16\ m/s$

$Vm_{\text{20 a 25s}} = \frac{430-370}{25-20} = \frac{60}{5} = 12\ m/s$

$Vm_{\text{25 a 30s}} = \frac{510-430}{30-25} = \frac{80}{5} = 16\ m/s$

$Vm_{\text{30 a 35s}} = \frac{610-510}{35-30} = \frac{100}{5} = 20\ m/s$

$Vm_{\text{35 a 40s}} = \frac{720-610}{40-35} = \frac{110}{5} = 22\ m/s$

b) Fazendo a velocidade média entre 15s e 25s, obteremos um valor que podemos considerá-lo como a estimação da velocidade em 20s. Assim, $Vm_{\text{20s}} = \frac{430-290}{25-15} = \frac{140}{10} = 14\ m/s$.

c) Pelos valores obtidos no item a), podemos estimar que durante 15 segundos (do 15s ao 30s) a velocidade foi inferior a 18 m/s. Como a velocidade máxima autorizada é de 72 km/h, no intervalo de 35 a 40s, essa velocidade foi ultrapassada, porque a velocidade média nesse intervalo foi de 79,2 km/h.

Conhecimentos matemáticos necessários:

- Análise e interpretação de tabela.
- Taxa de variação;
- Taxa de variação instantânea;

Hipóteses de Dificuldades:

O aluno poderá encontrar dificuldade em estimar a velocidade instantânea (taxa de variação instantânea) do carro, por estar habituado a calcular a velocidade média (taxa de variação) em um intervalo.

3.4. Atividade 4

Objetivo Específico:

a) Interpretação do gráfico e cálculo da taxa de variação;
b) Análise e interpretação do gráfico e dos cálculos da taxa de variação;
c) Montagem de uma expressão para o cálculo da taxa de variação.

Enunciado: No gráfico abaixo, obtido em um observatório metereológico, podemos observar que a variação da pressão atmosférica entre 0 e 6 horas foi de -20 mb. Durante este intervalo de tempo (de 6 horas) a variação por hora tem sido de aproximadamente -20/6 = -3,3 mb/h. Isso significa que às 6 h da manhã, o observatório poderia prever a piora do tempo.

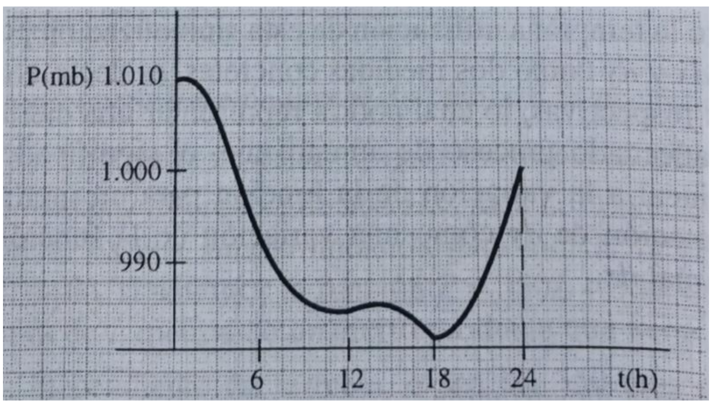


Figura 5 – Gráfico da Atividade 4.

Fonte: Retirado da obra *Cálculo Diferencial e Integral* (AZCÁRATE *et al.*, 1996, p. 40).

a) Calcule a variação por hora da pressão atmosférica entre 6 e 12 horas, entre 12 e 18 horas, e entre 18 e 24 horas.

b) A partir da variação por hora da pressão atmosférica entre 18 e 24 horas, qual a previsão que o observatório poderia fazer?

c) Podemos chamar de taxa média de variação da pressão atmosférica, a variação ocorrida por hora na pressão atmosférica. Se supusermos que cada hora t corresponde uma pressão P(t), escreva a expressão da taxa média de variação da função P entre duas horas t1 e t2.

Uma possível estratégia de resolução:

a) Calculando a variação por hora da pressão atmosférica (Vpa), em cada intervalo solicitado, obtemos:

   $Vpa_{6\text{ às }12h} = \frac{984 - 990}{12 - 6} = \frac{-6}{6} = -1\ mb/h$

   $Vpa_{12\text{ às }18h} = \frac{981 - 984}{18 - 12} = \frac{-3}{6} = -0,5\ mb/h$

   $Vpa_{18\text{ às }24h} = \frac{1000 - 981}{24 - 18} = \frac{19}{6} \cong 3,17\ mb/h$

b) Está ocorrendo um aumento acentuado na pressão atmosférica à medida que aproximamos das 24 horas.

c) Expressando a fórmula para o cálculo da taxa média de variação (Tmv), obtemos: Tmv = $\frac{P(t_2) - P(t_1)}{t_2 - t_1}$.

Conhecimentos matemáticos necessários:

- Taxa de variação;
- Análise e interpretação do gráfico de linha;

Hipóteses de Dificuldades:

O aluno não se deparará com nenhuma dificuldade na realização dessa atividade, pois o gráfico possibilita uma fácil interpretação e obtenção dos dados para a resolução dos itens pedidos.

3.5. Atividade 5

Objetivo Específico:

a) Realização de esboço de curva;
b) Cálculo da taxa de variação.

Enunciado: Um depósito de água tem forma cilíndrica com dimensões de 1 m de raio e 4 m de altura.

a) Faça o gráfico da função que nos fornece o volume de água em função da altura do líquido.
b) Calcule a taxa média de aumento do volume, em litros, por centímetro de altura do líquido quando o nível sobe de 2 m para 2,5 m. Quanto vale a taxa média entre dois níveis quaisquer?

Uma possível estratégia de resolução:

a)

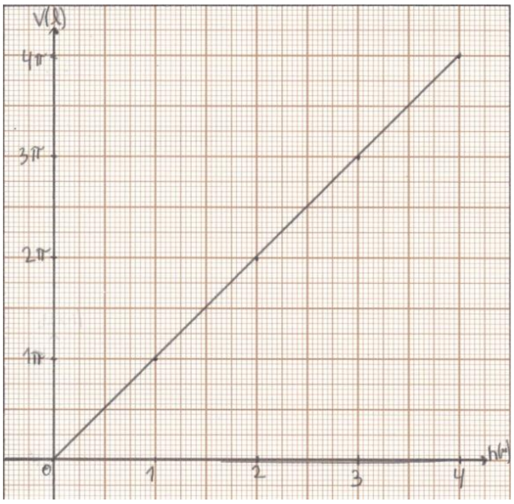


Figura 6 – Gráfico do item a) da Atividade 5.
Fonte: Própria.

b) Fazendo o cálculo da taxa média de aumento ($Tm_{aumento}$), obtemos:

$Tm_{aumento} = \frac{2,5\pi - 2\pi}{250 - 200} = \frac{0,5\pi}{50} = 0,01.\pi\ l/cm$

Para dois níveis quaisquer, a taxa média sempre será $0,01.\pi\ l/cm$.

Conhecimentos matemáticos necessários:

- Esboço de curva;
- Cálculo da taxa de variação.

Hipóteses de Dificuldades:

O aluno não se deparará com nenhuma dificuldade na realização dessa atividade, pois está relacionado com conhecimentos de cálculo de volume e o gráfico formado possibilita fácil obtenção das informações para o cálculo da taxa de variação.

3.6. Atividade 6

Objetivo Específico:

a) Realização de esboço de curva;
b) Cálculo de taxa de variação;
c) Cálculo de taxa de variação.

Enunciado: Um depósito para líquidos tem forma de um cone invertido com dimensões de 1 m de raio e 1 m de altura.

a) Faça o gráfico da função que nos dá o volume de água segundo a altura do líquido.
b) Calcule a taxa média de aumento do volume em litros por centímetro de altura quando o nível sobe de 20 cm para 30 cm. E quando sobe de 80 cm para 90 cm?
c) Se o tanque está cheio e se esvazia completamente, calcule a taxa média de variação do volume de líquido ao descer o primeiro centímetro e ao descer o último centímetro.

Uma possível estratégia de resolução:

Para a resolução da atividade, adotaremos $\pi = 3$.

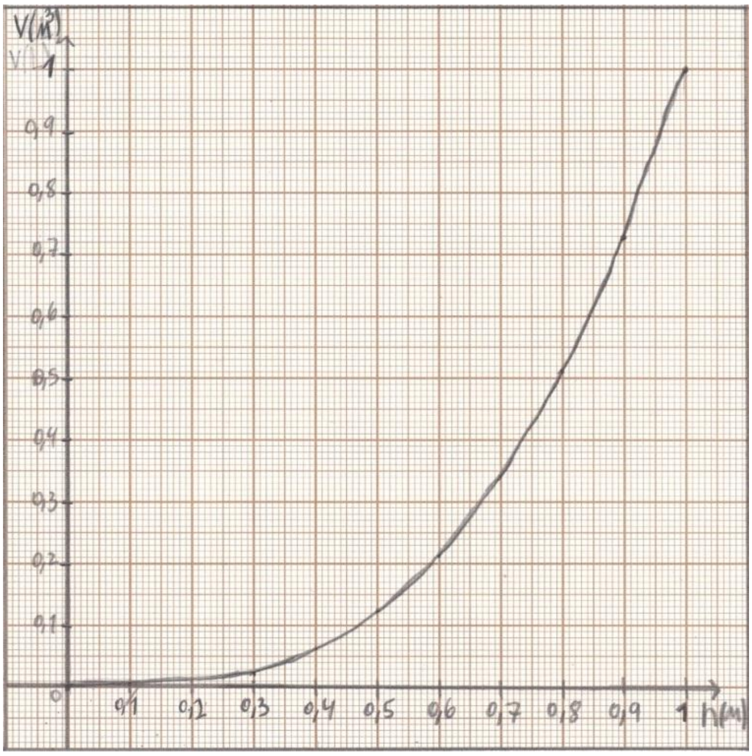


Figura 7 – Gráfico do item a) da Atividade 6.

Fonte: Própria.

a) Como precisamos calcular a taxa média de aumento (Tma) do volume em litros por centímetro, temos que converter as unidades do gráfico.

$\text{Tma}_{20cm\ para\ 30cm} = \frac{27-8}{30-20} = \frac{19}{10} = 1{,}9\ l/cm$

$\text{Tma}_{80cm\ para\ 90cm} = \frac{729-512}{90-80} = \frac{217}{10} = 21{,}7\ l/cm$

b) Vamos calcular a taxa média de variação (Tmv) do volume entre as alturas: 100 cm e 99 cm, 100 cm e 1 cm.

$\text{Tma}_{100cm\ para\ 99cm} = \frac{1000-970{,}3}{100-99} = \frac{29{,}7}{1} = 29{,}7\ l/cm$

$\text{Tma}_{100cm\ para\ 1cm} = \frac{1000-0{,}001}{100-1} = \frac{999{,}999}{99} = 10{,}10\ l/cm$

Conhecimentos matemáticos necessários:

- Esboço de curva;
- Cálculo da taxa de variação;

Hipóteses de Dificuldades:

O aluno não se deparará com nenhuma dificuldade na realização dessa atividade, pois está relacionado com conhecimentos de cálculo de volume e o gráfico formado possibilita fácil obtenção das informações para o cálculo da taxa de variação.

3.7. Atividade 7

Objetivo Específico:

a) Cálculo do custo de produção de uma determinada quantidade de pinos;
b) Cálculo do custo médio de produção por unidade, de uma determinada quantidade;
c) Cálculo da diferença entre o custo de fabricação de duas quantidades de pinos, com apenas um pino de diferença entre as quantidades;
d) Cálculo da diferença entre o custo de fabricação de duas quantidades de pinos, com apenas um pino de diferença entre as quantidades;
e) Cálculo do custo médio de produção por unidade de uma encomenda, quando já produzimos uma determinada quantidade e acrescentamos outra determinada quantidade.

Enunciado: Uma pequena empresa é especializada na fabricação de pinos. O custo de produção de cada nova encomenda de pinos é dado por:

$$C = 8.000 + 10n + 400\sqrt{n}$$

em que n é o número de pinos fabricados e C e o custo total em dólares.

a) Qual seria o custo total da fabricação de uma encomenda de 25 pinos? E de 100, 1.000 e 10.000 pinos?
b) Calcule o custo médio por unidade em cada um dos casos do item anterior.
c) Calcule a diferença do custo entre uma encomenda de 25 pinos e uma de 26 pinos. O valor obtido é o mesmo que o custo de se fabricar um pino a mais quando já havíamos fabricamos 25 pinos. Este valor recebe o nome de custo marginal para uma produção de 25 pinos.
d) Qual é o custo marginal para uma encomenda de 100 pinos, de 1.000 e de 10.000? E de 1 pino?
e) Se tivermos fabricado 1.500 pinos de uma certa encomenda, qual será o custo médio por unidade de uma margem de 100 pinos a mais?

<u>Uma possível estratégia de resolução:</u>

Para a resolução de todos os itens, serão utilizados valores aproximados.

a) O custo (C) da fabricação de cada encomenda é:

$C_{25} = 8.000 + 10x25 + 400\sqrt{25} = 10.250$

$C_{100} = 8.000 + 10x100 + 400\sqrt{100} = 13.000$

$C_{1.000} = 8.000 + 10x1.000 + 400\sqrt{1.000} = 18.000 + 4.000\sqrt{10} = 30.640$

$C_{10.000} = 8.000 + 10x10.000 + 400\sqrt{10.000} = 148.000$

b) O custo médio por unidade (Cmu) é:

$Cmu_{25} = \frac{10.250}{25} = 410$

$Cmu_{100} = \frac{13.000}{100} = 130$

$Cmu_{1.000} = \frac{18.000 + 4.000\sqrt{10}}{1.000} = 18 + 4\sqrt{10} = 30,64$

$Cmu_{10.000} = \frac{148.000}{10.000} = 14,8$

c) A diferença (D) do custo da fabricação das encomendas de 25 e 26 pinos é:

$D_{25 \text{ e } 26} = 8.000 + 10x26 + 400\sqrt{26} - (8.000 + 10x25 + 400\sqrt{25}) = 50$

d) O custo marginal (Cma) de uma encomenda de 1, 100, 1.000 e 10.000 pinos é:

$Cma_{1 \text{ e } 2} = 8.000 + 10x2 + 400\sqrt{2} - (8.000 + 10x1 + 400\sqrt{1}) = 174$

$Cma_{100 \text{ e } 101} = 8.000 + 10x101 + 400\sqrt{101} - (8.000 + 10x100 + 400\sqrt{100}) = 30$

$Cma_{1.000 \text{ e } 1.001} = 8.000 + 10x1.001 + 400\sqrt{1.001} - (8.000 + 10x1.000 + 400\sqrt{1.000}) = 26$

$Cma_{10.000 \text{ e } 10.001} = 8.000 + 10x10.001 + 400\sqrt{10.001} - (8.000 + 10x10.000 + 400\sqrt{10.000}) = 14$

e) O custo da produção dos 1600 pinos de acordo com o exercício é:

$C_{1600} = 8.000 + 10x1500 + 400\sqrt{1500} + 8.000 + 10x100 + 400\sqrt{100} = 51.492$

$Cmu_{1600} = \frac{51.492}{1600} = 32,18$

<u>Conhecimentos matemáticos necessários:</u>

- Taxa de variação.

<u>Hipóteses de Dificuldades:</u>

O aluno não se deparará com nenhuma dificuldade na realização dessa atividade, pois os cálculos solicitados são de fácil compreensão e resolução.

3.8. Atividade 8

Objetivo Específico:

a) Montar tabela com velocidades instantâneas;
b) Fazer esboço de curva da velocidade instantânea;
c) Fazer análise e interpretação dos gráficos.

Enunciado: O gráfico abaixo representa o movimento de dois carros durante 15 segundos. Faça uma descrição comparativa de seu movimento. Para fazer isso:

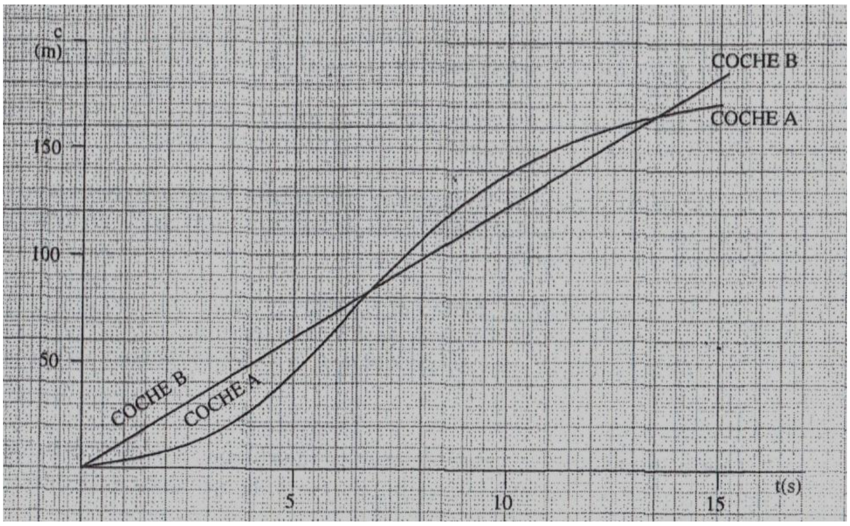


Figura 8 – Gráfico da Atividade 8.
Fonte: Retirado da obra *Cálculo Diferencial e Integral* (AZCÁRATE *et al.*, 1996, p. 61).

a) Construa uma tabela com a velocidade instantânea dos dois carros em vários instantes: o início e o fim percorrido, nos instantes de velocidade máxima, no ponto onde os gráficos se cruzam...
b) Represente no mesmo sistema de coordenadas os gráficos das velocidades instantâneas dos dois carros.
c) Descreva e compare detalhadamente o movimento dos dois carros relacionando com os gráficos espaço-tempo e velocidade-tempo.

Uma possível estratégia de resolução:

a)

Instantes (s)	0	6,8	10	13,5	15
Carro A (Coche A)	$0\ \frac{m}{s}$	$12\ \frac{m}{s}$	$14\ \frac{m}{s}$	$12\ \frac{m}{s}$	$11{,}33\ \frac{m}{s}$
Carro B (Coche B)	$0\ \frac{m}{s}$	$12\ \frac{m}{s}$	$12\ \frac{m}{s}$	$12\ \frac{m}{s}$	$12\ \frac{m}{s}$

Fonte: Própria.

b)

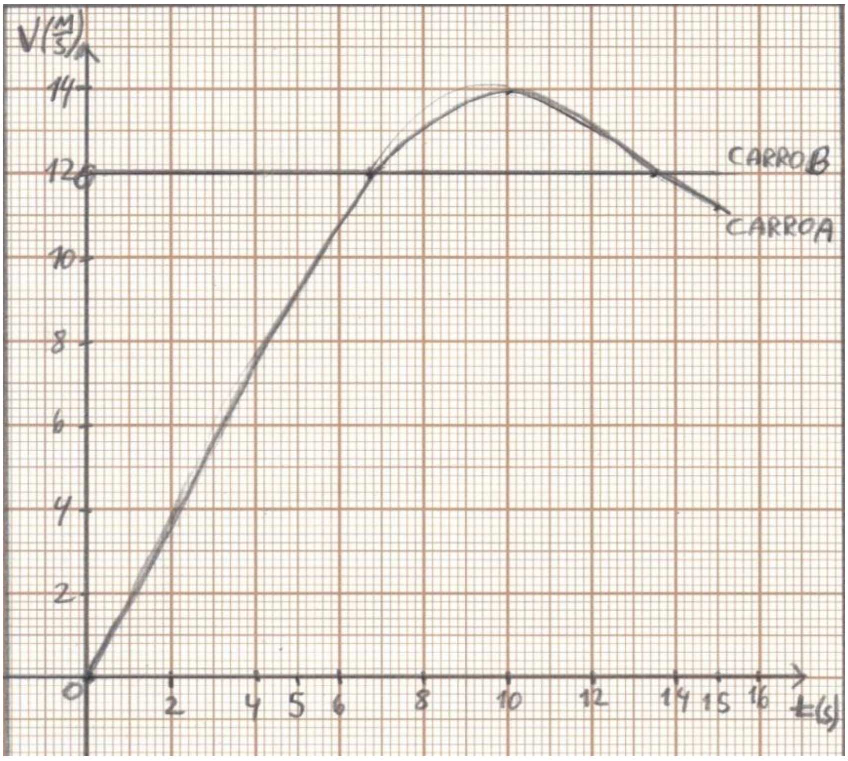


Figura 9 – Gráfico do item b) da Atividade 8.

Fonte: Própria.

Ambos os carros partem do repouso (parados), porém fazem movimentações diferentes. O carro A inicia o trajeto com uma velocidade baixa e vai aumentando gradativamente ao longo do percurso até aproximadamente o instante de 10 segundos, quando começa a diminuir a velocidade. Enquanto que o carro B faz o trajeto inteiro mantendo a velocidade constante. Em dois instantes da trajetória, os dois veículos deslocam-se com a mesma velocidade, por isso que eles se cruzam no gráfico de velocidade por tempo.

Conhecimentos matemáticos necessários:

- Construção, análise e interpretação de gráfico;
- Taxa de variação instantânea.

Hipóteses de Dificuldades:

O aluno não se deparará com nenhuma dificuldade na realização dessa atividade, pois o gráfico fornecido pelo exercício é de fácil interpretação e obtenção dos dados para a resolução dos itens solicitados.

3.9. Atividade 9

Objetivo Específico: Construir gráficos de produção e produção instantânea do cabo de eletricidade.

Enunciado: Os dados seguintes referem-se à produção de uma fábrica ao longo de um dia. O produto final é um certo tipo de cabo de eletricidade:

a) Cada vez que se inicia ou se interrompe a produção não se faz de uma forma brusca. Trata-se de um processo gradual.
b) A produção começa às 8 h, permanece parada das 9 h 30 min às 10 h e das 13h às 14h. Interrompe-se ao final da jornada às 17 h.
c) Ao longo do dia a produção total é de 1.200 m de cabo.
d) Até às 12 h foram produzidos um total de 500 m de cabo e até às 16 h, 1.050 m.
e) Os momentos de máxima produção são às 12 h e às 16 h. Nestes momentos a produção se realiza a um ritmo de 400 m/h.

Desenhe os gráficos das seguintes funções de modo que se ajustem os dados, explicando como utilizou cada um dos dados e utilizando a linguagem matemática correta:

I. Da função $f: t \to L$, onde t é tempo e L o comprimento do cabo fabricado até o instante t, desde as 8 h até as 17 h.
II. Da função que nos da em cada instante a produção instantânea do cabo.

<u>Uma possível estratégia de resolução:</u>

I.

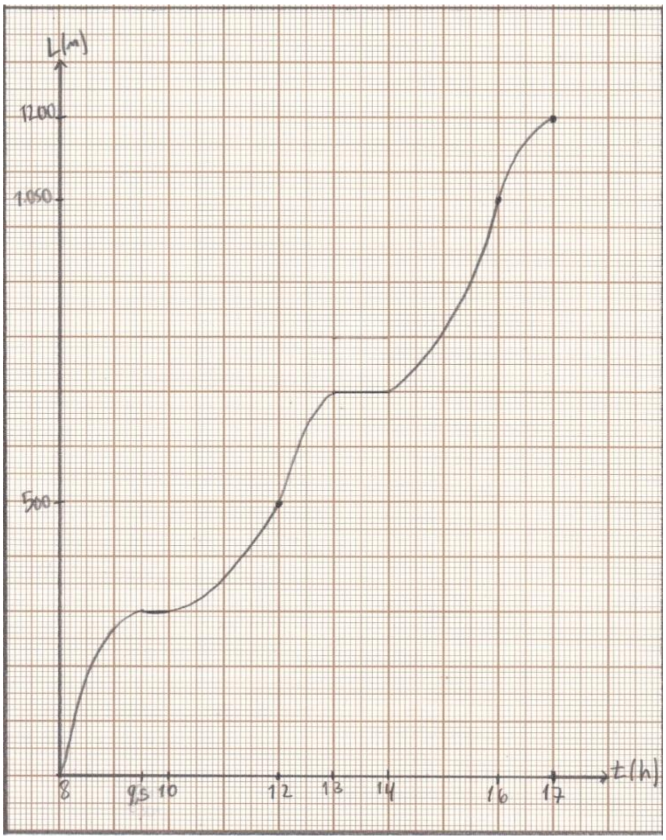


Figura 10 – Gráfico do item I. da Atividade 9.
Fonte: Própria.

As informações do item (a) indicam que próximo dos instantes de inicio e quando se interrompe a produção, não podemos ter retas, mas sim curvas, por se tratar de um processo gradual. No item (b) obtemos o início, a finalização e os momentos de parada da produção, que junto com a informação do item (c), foi possível localizar o ponto de finalização da produção às 17 horas, o inicio às 8 horas, e supor momentos de parada da produção. Com os dados dos itens (d) e (e), conseguimos obter o total da produção em dois instantes, às 12 horas e às 16 horas, e saber que nesses momentos ocorrem o maior momento de produção.

II.

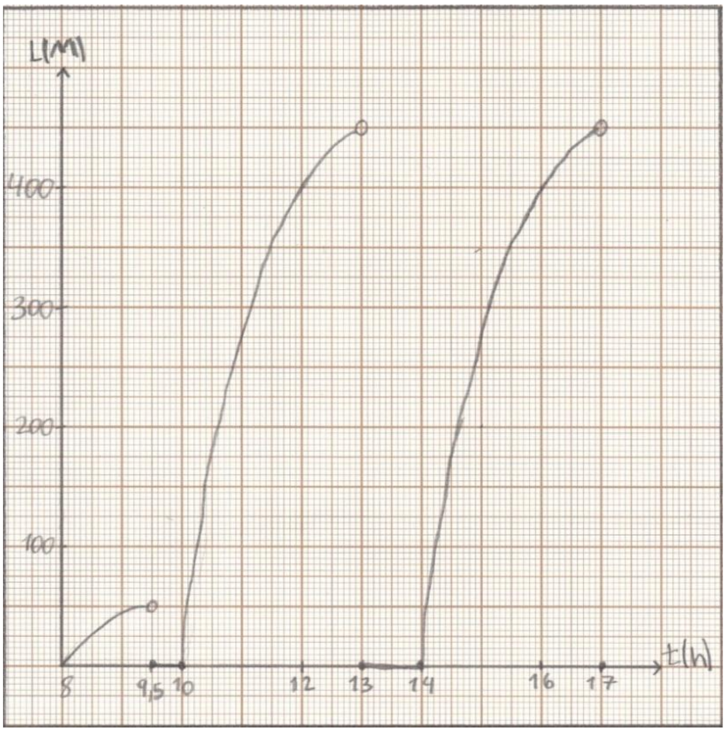


Figura 11 – Gráfico do item II. da Atividade 9.

Fonte: Própria.

Com o item a) obtemos que não ocorrem retas no gráfico, por ser um procedimento gradual. No item b) reconhecemos os instantes de início e finalização da produção e os instantes de parada da produção. O item e) nos informa os pontos onde a produção é máxima. Não utilizamos as informações dos itens c) e d), porque nesse gráfico não representamos o total da produção, mas a produção em cada instante.

Conhecimentos matemáticos necessários:

- Esboço de curva;
- Taxa de variação instantânea.

Hipóteses de Dificuldades:

O aluno poderá encontrar dificuldade em esboçar a curva da produção, mesmo se baseando nos dados fornecidos pela atividade e em esboçar a curva da produção instantânea.

3.10. Atividade 10

Objetivo Específico: Ser capaz de relacionar gráficos de funções derivadas com as suas funções primitivas.

Enunciado: I. Compare os gráficos das funções, a(x) e b(x), abaixo e comente detalhadamente se uma delas é a função derivada da outra.

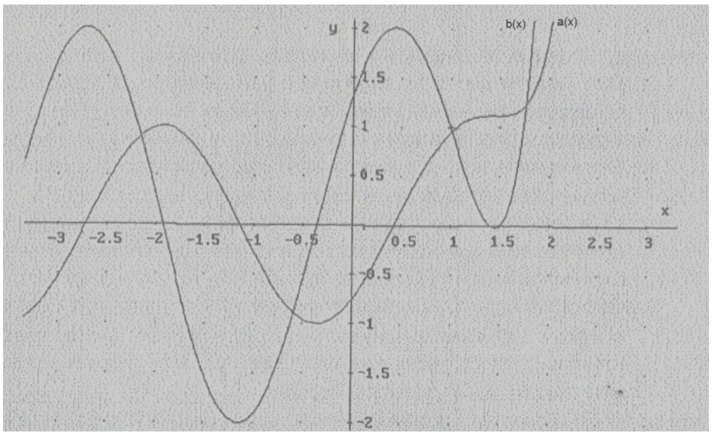
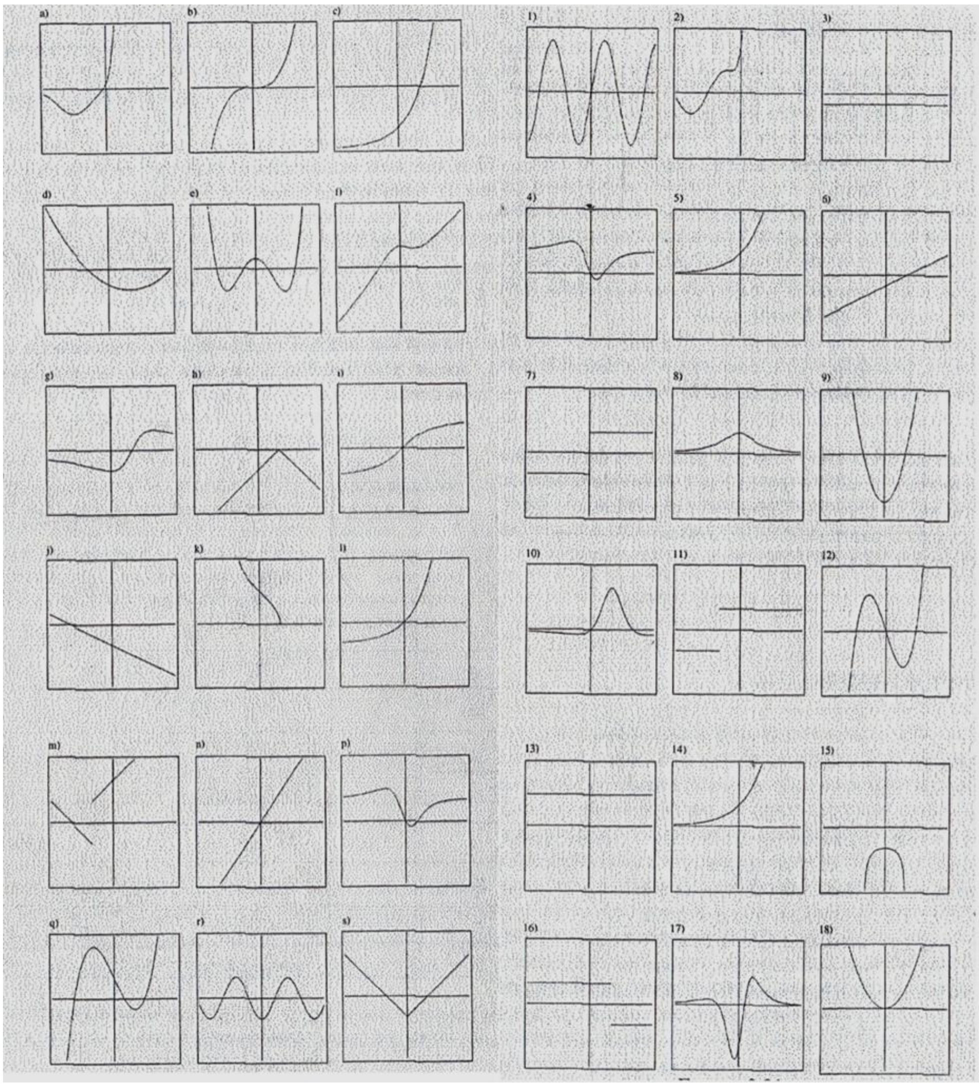


Figura 12 – Gráfico do item I. da Atividade 10.
Fonte: Retirado da obra *Cálculo Diferencial e Integral* (AZCÁRATE *et al.*, 1996, p. 63).

II. Encontre a função derivada das funções da figura A entre as funções representadas na figura B.



A **B**

Figura 13 – Gráfico do item II. Da Atividade 10.

Fonte: Retirado da obra *Cálculo Diferencial e Integral* (AZCÁRATE *et al.*, 1996, p. 64-65).

<u>Uma possível estratégia de resolução:</u>

I. Fazendo a comparação entre as funções a(x) e b(x), percebemos que a b(x) é a função derivada de a(x), porque todos os pontos de máximo, mínimo ou inflexão de a(x), são raízes de b(x) e quando temos a mudança do sinal da b(x) de positivo para negativo, temos um ponto de máximo em a(x), quando essa mudança é de negativo para positivo, temos um ponto de mínimo, e o ponto de inflexão ocorre quando temos uma mudança na concavidade de a(x).

II. a) → 2) d) → 6) g) → 10)
b) → 18) e) → 12) h) → 16)
c) → 14) f) → 4) i) → 8)

j) → 3)	m) → 11)	q) → 9)
k) → 15)	n) → 13)	r) → 1)
l) → 5)	p) → 17)	s) → 7)

<u>Conhecimentos matemáticos necessários:</u>

- Gráfico de funções;
- Gráfico de funções derivadas.

<u>Hipóteses de Dificuldades:</u>

O aluno poderá encontrar dificuldade para relacionar o gráfico da função com o gráfico da função derivada correspondente, caso não esteja acostumado ou não tenha trabalhado o suficiente os gráficos das funções derivadas.

3.11. Atividade 11

<u>Objetivo Específico:</u>

a) Fazer esboço de curva;
b) Fazer o esboço de curva e calcular o coeficiente da reta tangente;
c) Calcular a taxa de variação;
d) Calcular a taxa de variação;
e) Analisar e interpretar as informações contidas na tabela.

<u>Enunciado:</u> Queremos calcular o coeficiente da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = x^2$ no ponto de abscissa 1. Para fazer isso:

a) Desenhe o gráfico da função no intervalo [0, 1.5]. Faça em papel milimetrado e escolha a mesma unidade para os dois eixos de maneira que uma unidade seja de 10 cm, procurando fazer o gráfico com a máxima precisão na vizinhança do ponto de abscissa 1.
b) Trace aproximadamente a reta tangente e calcule o seu coeficiente. Compare o resultado com o obtido pelos seus colegas. É possível calcular o valor exato do coeficiente da tangente? Quantos pontos de uma reta são necessários para determinar sua direção e para calcular seu coeficiente? E, no entanto, quantos pontos da reta tangente você conhece com total precisão?

c) Calcule o coeficiente da reta que corta o gráfico (reta secante) nos pontos de abscissa 1 e 1,5. Faça-o com toda precisão, utilizando as coordenadas dos dois pontos obtidos pela fórmula da função.

d) Coloque o resultado obtido no item anterior, no lugar correspondente da tabela a seguir. Complete a tabela fazendo o mesmo para outras retas secantes de modo que todas cortem a curva em dois pontos: um comum a todas elas, o ponto de abscissa 1, e o outro, um ponto de abscissa x próximo a 1.

x	1,5	1,1	1,01	1,001	1,0001
$f(x)$					
$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$					

x	0,5	0,9	0,99	0,999	0,9999
$f(x)$					
$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$					

Figura 14 – Tabela da Atividade 11.

Fonte: Retirado da obra *Cálculo Diferencial e Integral* (AZCÁRATE *et al.*, 1996, p. 67).

e) Observe as sucessões de números da última linha das duas tabelas: para qual número tende estas sucessões? Qual o valor você crê que seja o valor exato do coeficiente da reta tangente?

<u>Uma possível estratégia de resolução:</u>

a)

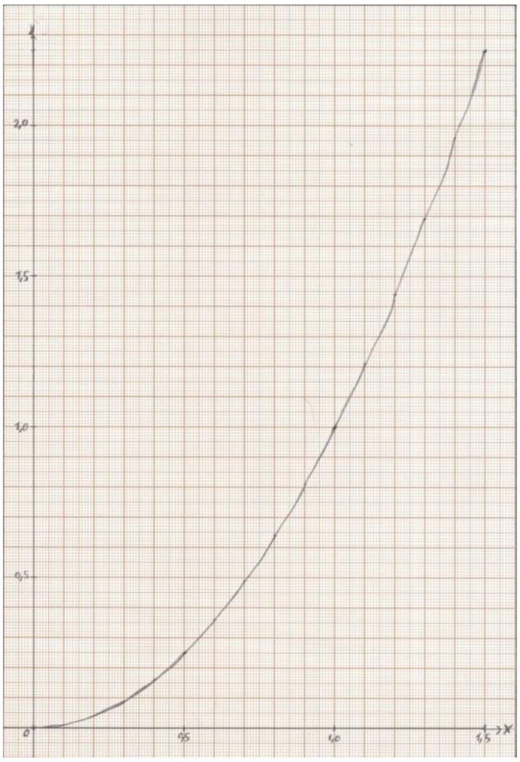


Figura 15 – Gráfico do item a) da Atividade 11.

Fonte: Própria.

b)

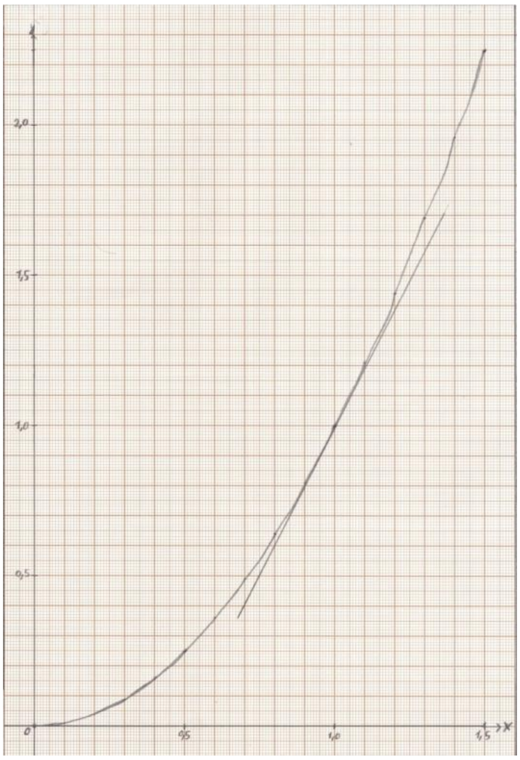


Figura 16 – Gráfico do item b) da Atividade 11.

Fonte: Própria.

O coeficiente da reta tangente (Crt) é Crt = $\frac{1,4 - 0,6}{1,2 - 0,8}$ = $\frac{0,8}{0,4}$ = 2
Não é possível calcular o valor exato do coeficiente da reta tangente, porque precisamos de dois pontos para determinar a direção e o cálculo do coeficiente, e só conhecemos um ponto da reta tangente com precisão (o ponto onde a abscissa é 1).

c) O coeficiente da reta secante (Crs) é $Crs_{1\ e\ 1,5} = \frac{2,25 - 1}{1,5 - 1} = \frac{1,25}{0,5} = 2,5$

d)

x	1,5	1,1	1,01	1,001	1,0001
f(x)	2,25	1,21	1,0201	1,002001	1,00020001
$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$	2,5	2,1	2,01	2,001	2,0001

Fonte: Adaptado da obra *Cálculo Diferencial e Integral* (AZCÁRATE *et al.*, 1996, p. 67).

x	0,5	0,9	0,99	0,999	0,9999
f(x)	0,25	0,81	0,9801	0,998001	0,99980001
$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$	1,5	1,9	1,99	1,999	1,9999

Fonte: Adaptado da obra *Cálculo Diferencial e Integral* (AZCÁRATE *et al.*, 1996, p. 67).

e) As sucessões estão tendendo a 2. Como as sucessões estão tendendo a 2 à medida que nos aproximamos do ponto de abscissa 1, creio que o coeficiente da reta tangente a função $f(x) = x^2$ no ponto de abscissa 1, será 2.

<u>Conhecimentos matemáticos necessários:</u>

- Esboço de curva;
- Taxa de variação;
- Análise e interpretação de tabela.

Hipóteses de Dificuldades:

O aluno poderá encontrar dificuldade no cálculo do coeficiente da reta tangente (taxa de variação instantânea), por estar habituado a calcular o coeficiente da reta secante, em que existem dois pontos que interceptam a curva.

3.12. Atividade 12

Objetivo Específico:

a) Fazer o desenvolvimento algébrico do procedimento para o cálculo da taxa de variação (coeficiente da reta tangente);
b) Utilizar o resultado obtido no item (a) para verificação do resultado encontrado nas tabelas da atividade anterior;
c) Compreender o procedimento utilizado para o cálculo da taxa de variação (coeficiente da reta tangente);
d) Calcular a taxa de variação (coeficiente da reta tangente).

Enunciado: No exercício do cálculo da derivada da função $f(x) = x^2$, você teve que calcular os coeficientes das retas secantes mediante a expressão $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ para diferentes valores de x.

a) Se nesta expressão substituirmos f(x) por x^2 e f(1) pela sua imagem 1, obterá um quociente de dois polinômios. Faça a divisão dos dois polinômios.
b) Utilize a expressão obtida para comprovar se os valores das tabelas do exercício anterior são corretos.
c) A partir da expressão simplificada obtida no item a), você saberia calcular o coeficiente da reta tangente de uma forma imediata sem a necessidade de calcular suas aproximações?
d) Utilize o procedimento proposto neste exercício para encontrar o coeficiente da reta tangente ao gráfico da mesma função f no ponto de abscissa 3.

Uma possível estratégia de resolução:

a) $\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x + 1)(x - 1)}{x - 1} = x + 1$

b)

x	1,5	1,1	1,01	1,001	1,0001
$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$	2,5	2,1	2,01	2,001	2,0001
$x + 1$	2,5	2,1	2,01	2,001	2,0001

Fonte: Própria.

x	0,5	0,9	0,99	0,999	0,9999
$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$	1,5	1,9	1,99	1,999	1,9999
$x + 1$	1,5	1,9	1,99	1,999	1,9999

Fonte: Própria.

c) Seguindo o procedimento do item a) e obtendo a expressão simplificada, conseguiria calcular o coeficiente da reta tangente, sem a necessidade de calcular as aproximações.

d) $\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{(x + 3)(x - 3)}{x - 3} = x + 3 = 6$

Conhecimentos matemáticos necessários:

- Divisão de polinômios;
- Taxa de variação (coeficiente da reta tangente).

<u>Hipóteses de Dificuldades:</u>

O aluno não se deparará com nenhuma dificuldade na realização dessa atividade, pois todos os itens solicitados são de fácil compreensão e resolução.

Finalizamos, então, a exposição das atividades propostas no capítulo 2 – "EL CONCEPTO DE DERIVADA" da obra *Cálculo Diferencial e Integral*.

Conforme já anunciado no capítulo 2 - Fundamentação Teórica e Metodológica - a segunda parte da análise das atividades será relacionada com as tendências Formalista e a Empírico-Construitvista. A tendência Formalista tem uma preocupação com a estrutura do conhecimento, mas não com o aprendizado do aluno, por não ter como objetivo a construção do caráter crítico-argumentativo. A tendência Empírico-Construtivista, diferente da Formalista, se preocupa com o caráter crítico-argumentativo, por valorizar a aprendizagem por meio da exploração e descoberta.

Nas atividades analisadas, podemos perceber que é possível trabalhar com as duas tendências dependendo do foco de interesse do professor ou da instituição. Podemos optar por utilizar a resolução de problemas para fazer o encaminhamento das atividades e aplicar junto a ela uma das tendências.

Se combinarmos com a tendência Formalista, trabalharemos o desenvolvimento do exercício através de uma estrutura lógico-formal, sem se preocupar que o aluno construa o seu próprio raciocínio e faça a ligação da ordem das atividades para a construção do conceito de derivada.

Já se utilizarmos a tendência Empírico-Construtivista, que está relacionada com o objetivo do Grupo Zero para a construção dessas atividades, colocaríamos um pouco de lado a formalidade da estruturação lógica de cada exercício, para focar na construção que o aluno faria do seu próprio conhecimento com o desenvolvimento da sequência das atividades, que lhe conduziriam até o conceito de derivada.

No próximo capítulo, apresentaremos as considerações que obtivemos com esta pesquisa e os conhecimentos derivados dela.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, o nosso objetivo era analisar as atividades propostas em um dos capítulos da obra *Cálculo Diferencial e Integral*, o capítulo 2 – “EL CONCEPTO DE DERIVADA”, para verificar quais são as possibilidades de sua utilização no ensino do conceito de derivada.

As atividades propostas estão localizadas ao longo do capítulo e cada proposta tem como intuito desenvolver uma parte da sequência de conhecimentos que são necessários, segundo os autores, para a construção da noção de derivada.

Percebe-se que essa sequência de conhecimentos, em que as atividades estão inseridas, foi fruto de estudos e pesquisas realizados pelo grupo de pesquisa, Grupo Zero, que é composto pelos autores. O grupo teve como principal objetivo na elaboração desse material, a construção de uma aprendizagem de CDI mais significativa para os alunos.

Os doze problemas possibilitam que o aluno explore e desenvolva várias áreas do conhecimento matemático como, por exemplo, construção, análise e interpretação de curvas e tratamentos algébricos.

Tivemos como questão base para nossa pesquisa: Quais são as possibilidades, em relação à metodologia de ensino, aos conceitos e aos procedimentos relacionados a derivadas, do uso desse material didático em sala de aula?

Para responder a nossa questão de pesquisa, fizemos a análise das atividades relacionando métodos de abordagem da matemática, por exemplo, resolução de problemas, com duas tendências de conceber o ensino de matemática, Formalista e Empírico-Construtivista, que foram constituídas a partir das seis tendências que Fiorentini (1995) caracteriza sobre como é concebido o ensino de matemática no Brasil.

Observamos a possibilidade de executar essa sequência de atividades seguindo a abordagem da resolução de problemas e associando a ela as duas tendências, uma vez que quem decidirá o foco a ser tomado será o professor ou a instituição de ensino.

Mesmo sendo possível a utilização das duas tendências, acreditamos que o ensino de CDI se tornará mais significativo, como é o objetivo do material, se tomarmos a tendência Empírico-Construtivista, em que o aluno construirá o seu próprio conhecimento e se tornará mais capaz de compreender a noção da derivada à medida que desenvolve cada atividade.

Respondendo a nossa questão, esse material nos possibilita fazer uma série de relacionamentos entre os diferentes métodos de abordagem e tendências do ensino de matemática para o desenvolvimento dos conhecimentos para a construção da noção de derivada.

Esta pesquisa trouxe diversas contribuições para a minha formação como futuro professor da educação básica. Possibilitou analisar diferentes possibilidades de abordagem do ensino de matemática como, por exemplo, resolução de problemas, modelagem, por meio da construção histórica do conhecimento e a utilização da tecnologia, que está cada dia mais presente no nosso cotidiano, como método ou ferramenta.

Também foi possível observar a relação da proposta e das possibilidades de exploração e aplicação de uma atividade, ao mesmo tempo da importância de se fazer uma análise didática da proposta. A proposta das atividades do material didático escolhido difere de outros materiais disponíveis no mercado, tendo uma pequena aproximação com a obra *Cálculo* do James Stewart, que tem uma preocupação maior com a aplicação.

Deixamos como sugestão, para sequência dessa pesquisa, a aplicação e verificação da utilização desse material didático para um ensino mais significativo de Cálculo Diferencial e Integral.

REFERÊNCIAS

AZCÁRATE, Carmen *et al.* **Cálculo Diferencial e Integral**. Madrid, Espanha: Sintesis, 1996. 190 p.

BORBA, M. C. **Recursos Tecnológicos e a Educação Matemática** (resumo). Anais do V Encontro Nacional de Educação Matemática – V ENEM, p. 242-243, realizado em jul. de 1995 em Aracajú, Sergipe, Brasil, Publicação: 1998.

CHAVES, Maria Isaura de Albuquerque; SANTO, Adilson Oliveira do Espírito. Um modelo de modelagem matemática para o ensino médio. **VII CNNECIM**, Belém – PA, dez. 2004. Disponível em: <http://www.ufpa.br/npadc/gemm/documentos/docs/artigo_CNNECIM.pdf>. Acesso em: 18 out. 2013

FIORENTINI, Dario. Alguns modos de ver e conceber o ensino da matemática no Brasil. **Zetetiké**, Campinas: UNICAMP, v. 3, n. 4, p. 1-38, nov. 1995.

FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sergio. **INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA:** PERCURSOS TEÓRICOS E METODOLÓGICOS. 3 ed. Campinas, SP: Autores Associados, 2012. (COLEÇÃO FORMAÇÃO DE PROFESSORES).

JESUS, Cristiano Sílvio de; LUCAS, Jucileide das Dores; MAPA, Thierrse Fany Modesto. Reflexões sobre o ensino de cálculo diferencial e integral I: UFOP e IFMG-OP numa parceria pela busca da diminuição do índice de reprovação na disciplina. **Revista da Educação Matemática na UFOP,** Ouro Preto, v. 1, p.1-5, nov. 2011.

LÜDKE, Menga; ANDRÉ, Marli E. D. A. **Pesquisa em Educação: Abordagens Qualitativas.** São Paulo: Editora Pedagógica e Universitária, 1986.

LUPINACCI, M. L. V.; BOTIN, M. L. M. ***Resolução de problemas no ensino de matemática.*** Anais do VIII Encontro Nacional de Educação Matemática, Recife, p. 1-5.

MICHALOVICZ, Solange; PACHECO, Edilson Roberto. Matemáticos na história: uma proposta pedagógica para o ensino de matemática. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/699-4.pdf>. Acesso em: 30 out. 2013.

PERSKE, R. C. F. **Sistemas agroflorestais em pequenas propriedades no município de Hulha Negra.** 2004. 70f. Monografia (apresentada ao curso de Pós Graduação em Desenvolvimento Sustentável e Meio Ambiente (Gestão Ambiental)) – Universidade da Região da Campanha, Bagé/RS.

ROMANATTO, Mauro Carlos. Resolução de problemas nas aulas de Matemática. **Revista Eletrônica de Educação**. São Carlos, SP: UFSCar, v. 6, n. 1, p. 299-311, mai. 2012.

SANTANA, Kátia Cristina Lima. **Currículo de Matemática da Educação de Jovens e Adultos:** uma análise baseada em livros didáticos. 2012. 138 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2012.

STEWART, James. **Cálculo.** Volume 1. Tradução da 6º edição norte-americana. São Paulo: Cengage Learning, 2010.

TRALDI JR, Armando. **Formação de formadores de professores de Matemática: identificação de possibilidades e limites da estratégia de organização de grupos colaborativos.** 2006. 189f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.

ANEXO

Atividade 1

El hotel Alps tiene 156 habitaciones. Su consumo de agua caliente es bastante elevado. La función $Q:t \rightarrow Q(t)$, cuya gráfica aparece junto a este enunciado (Figura 2.2) nos da el total de agua caliente consumida desde medianoche (0 horas) hasta las t horas. Este gráfico corresponde a un día en concreto, pero se ha observado que cada día, durante la temporada de verano, se repite salvo pequeñas variaciones.

a) *¿Cuál es el consumo total de agua a lo largo del día?*
b) *¿Qué cantidad de agua se ha consumido entre las 9 y las 15 horas?*
c) *¿Qué se puede decir del consumo de agua caliente entre las 2 y las 15 horas?*
d) *¿Qué se puede decir del consumo de agua caliente entre las 20 y las 23 horas?*
e) *¿En qué momento se está consumiendo más agua: a las 13 horas o a las 22 h? Justifica la respuesta.*
f) *Halla los m^3h que se están consumiendo a las 7 en punto. Explica como lo haces.*
g) *¿En qué momento del día crees que se está consumiendo más agua caliente? Justifica la respuesta.*

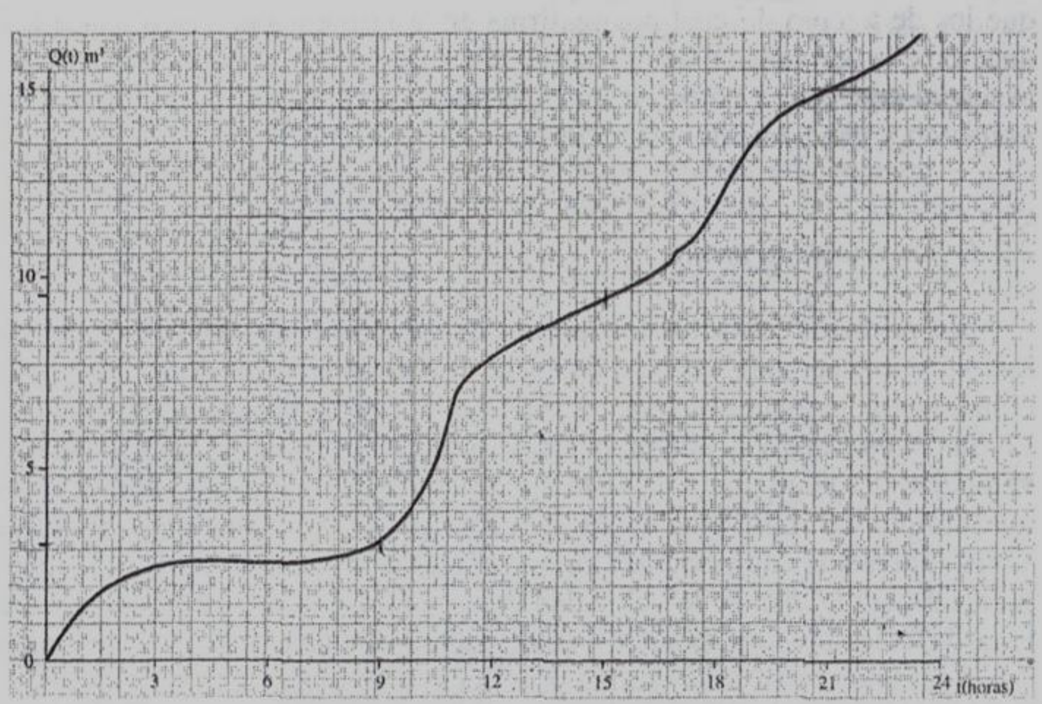


FIGURA 2.2.

Atividade 2

En el gráfico de la Figura 2.6 tenemos la representación del espacio recorrido por un coche en función del tiempo en su recorrido desde el centro de Barcelona hasta Granollers:

a) ¿Cuál es la distancia total recorrida por el coche?
b) ¿Cuánto tiempo ha durado el viaje?
c) ¿Cuánto vale la velocidad media del coche a lo largo de todo el recorrido?
d) ¿Cuánto vale la velocidad media del coche en el trayecto por el interior de Barcelona hasta la entrada en el Cinturón de Ronda?
e) ¿Cuánto vale la velocidad media del coche en su recorrido por el Cinturón?
f) ¿Cuanto vale la velocidad media del coche en el trayecto por la autopista? ¿Y si descontamos las paradas?
g) ¿Cuánto vale la velocidad media entre los instantes 4 y 8 minutos?
h) ¿Cuánto marca el velocímetro del automóvil cuando hace 27 segundos que ha partido?
i) Representa la gráfica de un coche que realice el mismo recorrido más despacio.

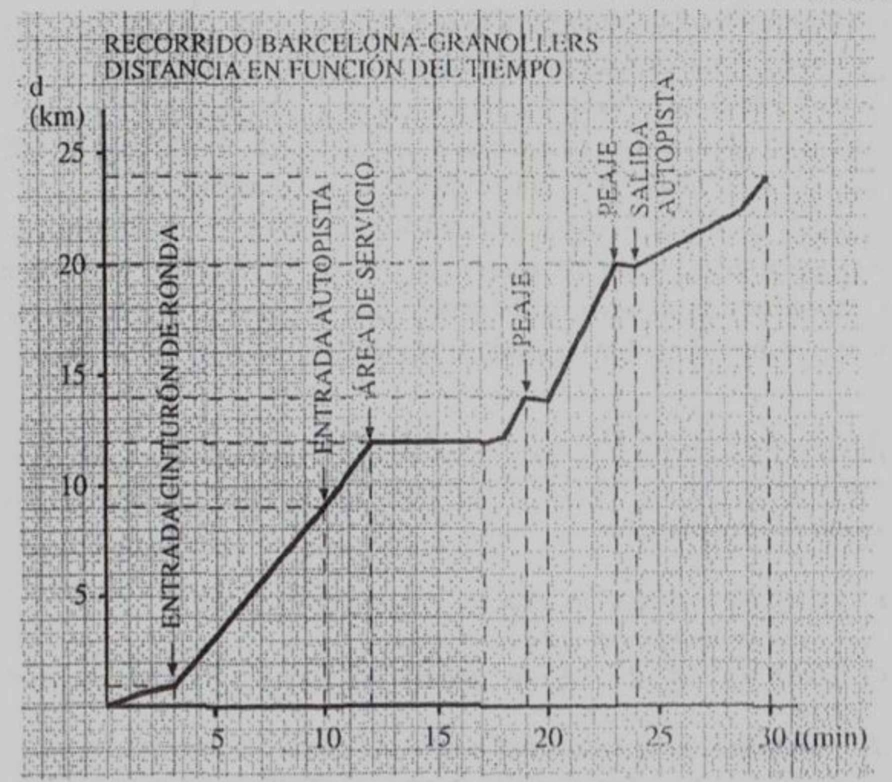


FIGURA 2.6.

Atividade 3

A intervalos de 5 segundos se observa la posición de un coche (respecto a un punto de referencia 0) con el fin de observar si en algún momento supera la velocidad máxima permitida. Los datos obtenidos, considerando que el instante en que pasa por el punto 0 es el instante cero, son:

Tiempo (segundos)	*0*	*5*	*10*	*15*	*20*	*25*	*30*	*35*	*40*
Distancia al punto 0 (metros)	*0*	*100*	*200*	*290*	*370*	*430*	*510*	*610*	*720*

a) Calcula la velocidad media del coche durante el intervalo total de tiempo (40 s) y la velocidad media del coche en cada uno de los intervalos de 5 segundos.

b) Haz una estimación de la velocidad del coche en el momento en que el cronómetro indica 20 segundos.

c) Estima durante cuanto tiempo la velocidad fue inferior a 18 m/s. ¿Si la velocidad máxima autorizada es de 72 km/h, ha habido algún momento en que fuese superada?

Atividade 4

En el gráfico de la Figura 2.14, obtenido en un observatorio metereológico, podemos observar que la variación de la presión atmosférica entre las 0 h y las 6 h ha sido de –20 mb. Durante este intervalo de tiempo (de 6 horas) la variación por hora ha sido de –20/6 = –3,3 mb/h. Eso significa que a las 6h de la mañana, el observatorio podia predecir el empeoramiento del tiempo.

a) Calcula la variación por hora de la presión atmosférica entre las 6 h y las 12 h, entre las 12 h y las 18 h, y entre las 18 h y las 24 h.

b) A partir de la variación por hora de la presión atmosférica entre las 18 h y las 24 h ¿qué pronóstico podrá hacer el observatorio?

c) A la variación por hora de la presión atmosférica la podemos llamar tasa media de variación de la presión atmosférica. Si suponemos que a cada hora t le corresponde una presión $P(t)$, escribe la expresión de la tasa media de variación de la función P entre dos horas t_1 y t_2.

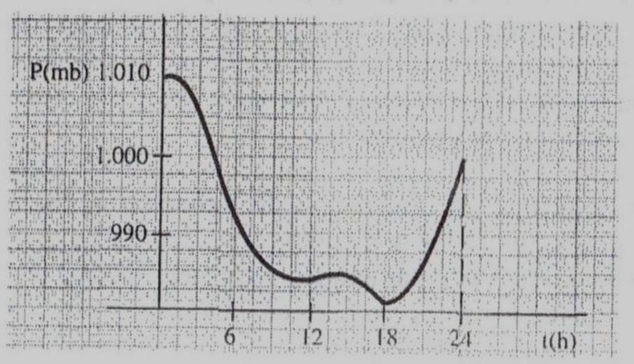


FIGURA 2.14.

Atividade 5

Un depósito de agua tiene forma cilíndrica con unas dimensiones de 1m de radio y 4 m de altura.

a) Haz la gráfica de la función que nos da el volumen de agua en función de la altura del líquido.
b) Calcula la tasa media de aumento de volumen en litros por centímetro de altura del líquido cuando el nivel sube de 2 a 2,5 m ¿Cuánto vale la tasa media entre dos niveles cualesquiera?

Atividade 6

Un depósito para líquidos tiene forma de cono invertido con unas dimensiones de 1m de radio y 1m de altura.

a) Haz la gráfica de la función que nos da el volumen de agua según la altura del líquido.
b) Calcula la tasa media de aumento de volumen en litros por centímetro de altura cuando el nivel sube de los 20 a los 30 cm ¿Y cuándo sube de los 80 a los 90 cm?
c) Si el depósito está lleno y se vacia completamente, calcula la tasa media de variación de volumen de líquido al descender el primer centímetro y al descender el último centímetro.

Atividade 7

Una pequeña empresa se dedica a la fabricación de pins. El coste de producción de cada nuevo encargo de pins viene dado por:

$$C = 8.000 + 10n + 400\sqrt{n}$$

donde n es el número de pins fabricados y C el coste total en ptas.

a) ¿Cuál seria el coste total de fabricar un encargo de 25 pins? ¿Y de 100, 1.000 y 10.000 pins?
b) Calcula el coste medio por unidad en cada uno de los casos del apartado anterior.
c) Calcula la diferencia de coste entre un encargo de 25 pins y uno de 26 pins, o lo que es lo mismo, el coste de fabricar un pin más cuando llevamos fabricados 25. Este valor recibe el nombre de coste marginal para una producción de 25 pins.
d) ¿Cuál es el coste marginal para un encargo de 100 pins, de 1.000 y de 10.000? ¿Y de 1 pin?
e) Si llevamos fabricados 1.500 pins de un cierto encargo, ¿cuál será el coste medio por unidad de un margen de 100 pins de más?

Atividade 8

El gráfico siguiente (Figura 2.28) representa el movimiento de dos coches durante 15 segundos. Haz una descripción comparada de su movimiento. Para ello:

a) Construye una tabla con la velocidad instantánea de los dos coches en varios instantes: al inicio y fin del recorrido, en los instantes de máxima velocidad, en el punto donde se cortan las gráficas...
b) Representa en un mismo sistema de coordenadas las gráficas de las velocidades instantáneas de los dos coches.
c) Describe y compara detalladamente el movimiento de los dos coches relacionándolo con los gráficos espacio-tiempo y velocidad-tiempo.

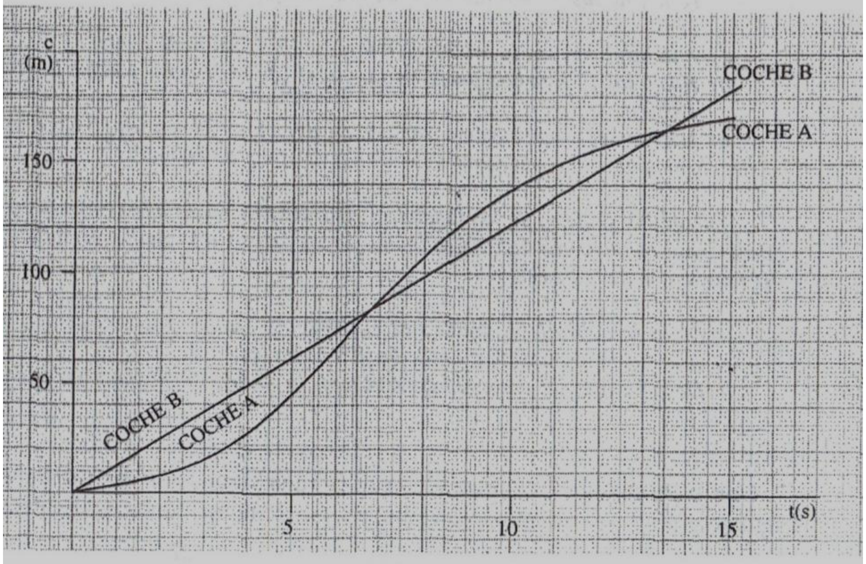


FIGURA 2.28.

Atividade 9

Los datos siguientes se refieren a la producción de una fábrica durante un día. El producto elaborado se trata de un cierto tipo de cable eléctrico:

a) Cada vez que se inicia o se interrumpe la producción no se hace de una forma brusca. Se trata de un proceso gradual.
b) La producción empieza a las 8 h, permanece parada de las 9 h 30 m a las 10 h y de las 13 h a las 14 h. Se interrumpe al final de la jornada a las 17 h.
c) A lo largo del día la producción total es de 1.200 m de cable.
d) Hasta las 12 h se han producido un total 500 m de cable y hasta las 16 h, 1.050 m.
e) Los momentos de máxima producción son a las 12 h y a las 16 h. En estos momentos la producción se realiza a un ritmo de 400 m/h.

Dibuja las gráficas de las funciones siguientes de modo que se ajusten a los datos, explicando cómo utilizas cada uno de los datos y utilizando correctamente el lenguaje matemático:

– De la función $f{:}t \to L$ donde t es el tiempo y L la longitud del cable fabricado hasta el instante t, desde las 8 h hasta las 17 h.
– De la función que nos da en cada instante la producción instantánea de cable.

Atividade 10

- *Compara las gráficas de las dos funciones de la Figura 2.29 y razona detalladamente si una de ellas es la función derivada de la otra.*

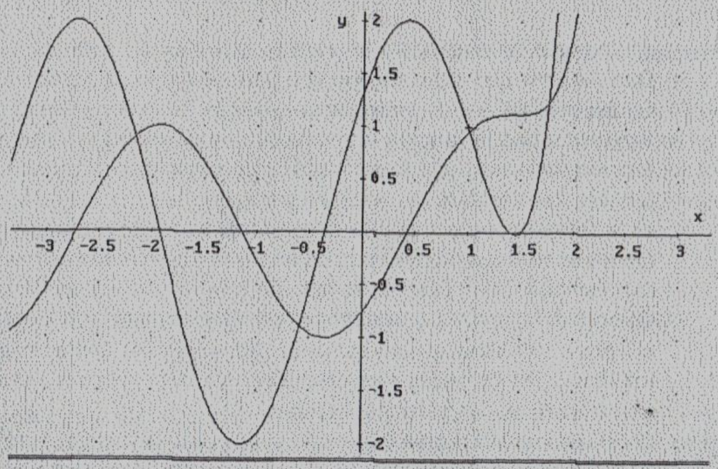


FIGURA 2.29.

- *Encuentra la función derivada de las funciones de la Figura 2.30 entre las funciones representadas en la Figura 2.31.*

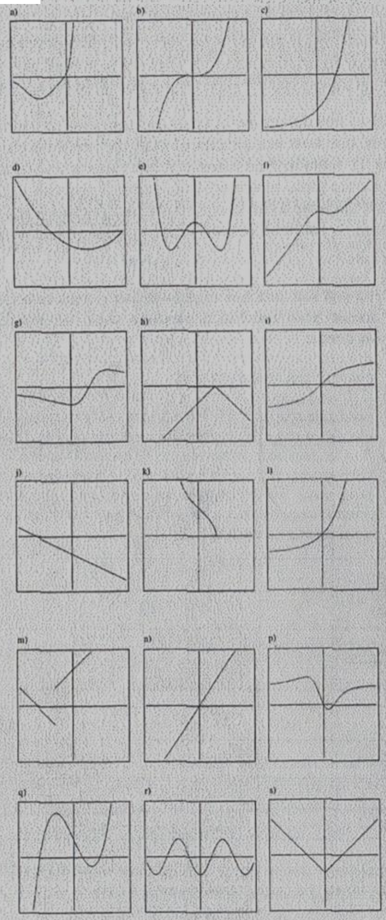


FIGURA 2.30.

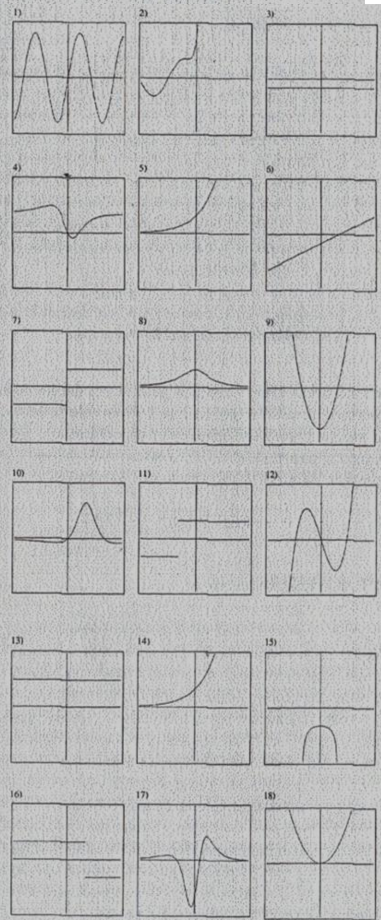


FIGURA 2.31.

Atividade 11

Queremos calcular la pendiente de la recta tangente al gráfico de la función $f(x) = x^2$ en el punto de abscisa 1. Para ello:

a) Dibuja la gráfica de la función en el intervalo [0, 1,5]. Hazlo en papel milimetrado y escoge la misma unidad para los dos ejes de manera que una unidad sea de 10 cm, procurando hacer la gráfica con la máxima precisión en el entorno del punto de abscisa 1.

b) Traza aproximadamente la recta tangente y calcula su pendiente. Compara el resultado con el obtenido por tus compañeros. ¿Es posible calcular el valor exacto de la pendiente de la tangente? ¿Cuántos puntos de una recta se necesitan para determinar su dirección y por lo tanto para calcular su pendiente? Y en cambio, ¿cuántos puntos de la recta tangente conoces con total precisión?

c) Calcula la pendiente de la recta que corta a la gráfica (recta secante) en los puntos de abscisa 1 y 1,5. Hazlo con toda precisión utilizando las coordenadas de los dos puntos obtenidas mediante la fórmula de la función.

d) Pon el resultado obtenido en el apartado anterior en el lugar que le corresponda en la tabla siguiente. Completa las tablas haciendo lo mismo para otras rectas secantes de modo que todas corten la curva en dos puntos: uno común a todas ellas, el punto de abscisa 1, y el otro, un punto de abscisa x cercano a 1.

x	1,5	1,1	1,01	1,001	1,0001
$f(x)$					
$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$					

x	0,5	0,9	0,99	0,999	0,9999
$f(x)$					
$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$					

e) Observa las sucesiones de números de la última fila de las dos tablas: ¿hacia que número tienden estas sucesiones? ¿Cuál crees que es el valor exacto de la pendiente de la recta tangente?

Atividade 12

En el ejercicio del cálculo de la derivada de la función $f(x) = x^2$ has tenido que calcular las pendientes de las rectas secantes mediante la expresión $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ para diferentes valores de x.

a) Si en esta expresión sustituyes $f(x)$ por x^2 y $f(1)$ por su imagen 1 obtendrás un cociente de dos polinomios. Haz la división de los dos polinomios.

b) Utiliza la expresión obtenida para comprobar si los valores de las tablas del ejercicio del apartado anterior son correctas.

c) A partir de la expresión simplificada obtenida en el apartado a), ¿sabrías calcular la pendiente de la tangente de una forma inmediata, sin necesidad de calcular sus aproximaciones?

d) Utiliza el procedimiento propuesto en este ejercicio para hallar la pendiente de la recta tangente al gráfico de la misma función f en el punto de abscisa 3.