

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE SÃO  
PAULO  
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

EDSON VALERO DOS SANTOS

**O ESTUDO DA LINHA ELÁSTICA EM DEFLEXÕES DE VIGAS ISOSTÁTICAS,  
PRISMÁTICAS E RETAS**

São Paulo  
2020



EDSON VALERO DOS SANTOS

**ESTUDO DA LINHA ELÁSTICA EM DEFLEXÕES DE VIGAS ISOSTÁTICAS,  
PRISMÁTICAS E RETAS**

Monografia apresentada ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, orientada pelo Prof. Dr. Marco Aurélio Granero Santos e coorientada pela Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Flávia Milo Dos Santos, em cumprimento ao requisito para obtenção do grau acadêmico de Licenciado em Matemática.

São Paulo

2020



EDSON VALERO DOS SANTOS

**ESTUDO DA LINHA ELÁSTICA EM DEFLEXÕES DE VIGAS ISOSTÁTICAS,  
PRISMÁTICAS E RETAS**

Monografia apresentada ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, orientada pelo Prof. Dr. Marco Aurélio Granero Santos e coorientada pela Prof<sup>a</sup>. Dra<sup>a</sup>. Flávia Milo Dos Santos, em cumprimento ao requisito para obtenção do grau acadêmico de Licenciado em Matemática.

BANCA EXAMINADORA

Aprovada em: \_\_\_\_/\_\_\_\_/\_\_\_\_

Conceito: \_\_\_\_\_

---

Prof. Dr. Marco Aurélio Granero Santos (orientador)

---

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Flávia Milo Dos Santos (coorientadora)

---

Prof. Dr. Emiliano Augusto Chagas

---

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Patrícia Andrea Paladino

---

Aluno: Edson Valero dos Santos



# FICHA CATALOGRÁFICA





Dedico este trabalho aos meus pais e minha irmã e a todos familiares pelo apoio contínuo.



## **AGRADECIMENTOS**

Primeiro, agradeço a Deus. Em seguida, a minha família que sempre me deu condições para estudar e que sempre fez de tudo para eu ser quem sou hoje. Graças aos ensinamentos que me deu estou conquistando um sonho de muitos que virão.

Gostaria de agradecer ao corpo docente do Instituto Federal por terem contribuído de forma significativa na minha formação, mas principalmente a Flávia Milo dos Santos e ao Marco Aurélio Granero Santos, meus orientadores, que sempre me incentivaram e me apoiaram nas minhas decisões.

E por fim, gostaria de agradecer aos meus amigos, Wilson Ribeiro, Jéssica Pessuto, Wemerson Santos, Gustavo Costa, João Moraes, Valter Félix, Elias Lovato, Robson Tsukagoshi, Douglas Januario, Amanda Menezes, Brandon Ramos, Fabio Augusto, Giovanna Pereira, Victória Lindenbach, Marlon Martins, Rafael Sérgio, Aline Vitória, Daniel Martinho e Flávia Cristina, que sempre estiveram comigo ao longo destes quatro anos.



## RESUMO

A viga é um dos principais elementos estruturais utilizados na engenharia civil e é de extrema importância determinar sua deflexão prevendo se ela irá se romper ou se deformar. Sendo assim o objetivo deste trabalho é compreender o fenômeno físico e modelar a linha elástica que representa a curvatura de uma viga. A teoria de Euler-Bernoulli será utilizada para apresentar e fundamentar os conceitos básicos sobre vigas, e os esforços que atuam sobre elas, necessários para a modelagem desenvolvida neste trabalho. A metodologia utilizada foi um estudo bibliográfico. Espera-se que este trabalho auxilie engenheiros, técnicos em edificações, físicos e matemáticos a compreender o comportamento de deflexão de uma viga.

**Palavras-chaves:** viga, engenharia, deflexão, linha elástica, modelagem matemática, teoria de Euler-Bernoulli.



## ABSTRACT

The beam is one of the main structural elements used in civil engineering and it is extremely important to determine its deflection by predicting whether it will break or deform. Therefore, the objective of this work is to understand the physical phenomenon and model the elastic line that represents the curvature of a beam. The Euler-Bernoulli theory will be used to present and substantiate the basic concepts about beams, and the efforts that act on them, necessary for the modeling developed in this work. The methodology used was a bibliographic study. This work is expected to assist engineers, building technicians, physicists and mathematicians to understand the deflection behavior of a beam.

**Keywords:** beam, engineering, deflection, elastic line, mathematical modeling, Euler-Bernoulli theory.





## LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Exemplo de viga de perfil retangular. ....	25
Figura 2: Representação dos suportes de rolete e de articulação. ....	26
Figura 3: Representações do suporte pino.....	26
Figura 4: Representação do suporte engaste. ....	27
Figura 5: Viga deflexionada.....	28
Figura 6: Esforços internos.....	29
Figura 7: Convenção de sinais para a força normal. ....	30
Figura 8: Convenção de sinais para a força cortante. ....	30
Figura 9: Convenção de sinais para o momento fletor. ....	31
Figura 10: Torque.....	32
Figura 11: Representação do eixo neutro. ....	33
Figura 12: Tensão pura. ....	34
Figura 13: Deformação de um segmento de viga.....	36
Figura 14: Viga simplesmente apoiada com uma carga $p(x)$ .....	39
Figura 15: Viga simplesmente apoiada com carga contínua $P$ .....	43
Figura 16: Viga simplesmente apoiada com carga pontual $Q$ . ....	47



## LISTA DE SÍMBOLOS

$\Sigma F$	Somatório das forças [ $kN$ ]
$\Sigma M$	Somatório dos momentos [ $kNm$ ]
$N$	Força normal [ $kN$ ]
$V$	Força cortante [ $kN/m^2$ ]
$M$	Momento fletor [ $kNm$ ]
$T$	Momento torsor [ $kNm$ ]
$\Delta\theta$	Ângulo definido por seções adjacentes [ $rad$ ]
$\Delta x$	Varição do comprimento da linha elástica em cada seção [ $m$ ]
$\rho$	Raio da curvatura [ $m$ ]
$\varepsilon$	Deformação linear [ $m$ ]
$\sigma$	Tensão normal [ $N/m^2$ ]
$E$	Módulo de elasticidade Young [ $N/m^2$ ]
$I$	Momento de inércia [ $Nm^2$ ]



## SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO.....	23
2. CONCEITOS BÁSICOS SOBRE VIGAS .....	25
3. LINHA ELÁSTICA .....	33
4. ESTUDO DE CASO.....	43
4.1 Viga simplesmente apoiada com carga contínua $P$ .....	43
4.2 Viga simplesmente apoiada com carga pontual $Q$ .....	46
5. CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	51
REFERÊNCIAS.....	53



## 1. INTRODUÇÃO

Em 2014 iniciei o curso de Técnico em Edificações no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo (IFSP), campus São Paulo, e cursei uma disciplina intitulada Resistência dos Materiais. Uma disciplina que considerei complicada, pois são necessários conceitos matemáticos e físicos avançados para analisar a deflexão de uma viga, os quais na época não pude compreender em sua totalidade.

Concluí o curso em 2015 e no ano seguinte ingressei no curso de Licenciatura em Matemática no IFSP. Com o passar do curso, decidi me aprofundar mais sobre este assunto que me acompanhava desde o curso técnico e então comecei a estudá-lo. Pesquisando, percebi que a deflexão de uma viga pode ser modelada por uma função, mais especificamente uma função que resultava da solução de uma equação diferencial.

Conforme Zill (2012), as equações diferenciais podem ser utilizadas para construir modelos matemáticos de fenômenos físicos. Nesta referência encontra-se um estudo geral sobre as equações diferenciais aplicadas à modelagem.

Ainda segundo Zill (2012), uma das aplicações de equação diferencial é no estudo do comportamento de sólidos sujeitos a diversos tipos de cargas, entre eles as vigas que podem ser elementos retos ou curvos, prismáticos ou não, sólidos ou vazados. Muitos destes sólidos são estruturas construídas para suportar de pequenas a grandes cargas.

Deste modo, entender como ocorre a deformação em vigas é de extrema importância, pois a partir desse estudo é possível prever o que acontecerá com a viga após ser submetida a cargas externas, a fim de estabelecer limites para esta deformação.

Embora as vigas estejam intimamente relacionadas à engenharia civil, elas não são uma exclusividade desta engenharia uma vez que existem diferentes elementos de máquinas que apresentam comportamentos equivalentes, de modo que este conteúdo é também abordado em disciplinas relacionadas ao estudo das estruturas como Mecânica dos Sólidos, Mecânica dos Materiais e Resistência dos Materiais (MARTHA, 2010).

Segundo Martha (2010), dentro das engenharias, a engenharia estrutural é um ramo voltado para o planejamento, projeto, construção e manutenção de edifícios e outras construções. O projeto estrutural deve satisfazer necessidades como condições econômicas, estéticas, construtivas e de segurança, sendo que, é necessário fazer a análise estrutural durante o projeto, pois é dessa análise que são determinados os esforços internos e externos para então identificar o comportamento, o deslocamento e a deformação da estrutura.

Dentre todos os elementos estruturais este trabalho tem como objetivo modelar a deflexão de uma viga isostática, prismática e reta.

O desenvolvimento desta modelagem se dará por meio do estudo da linha elástica, linha esta que permite analisar o quanto e como uma viga se deformará quando submetida a cargas externas.

Por linha elástica entende-se a curva que representa o eixo longitudinal da viga após a deformação sofrida devido às forças que agem na mesma. Essa curva pode ser representada por meio de uma equação diferencial que descreve a curvatura de deflexão.

Dentre as teorias sobre a deflexão de vigas, as principais são a teoria de Euler-Bernoulli e de Timoshenko. A teoria de Euler-Bernoulli, utilizada neste trabalho, é a mais simples e mais utilizada na prática, pois considera apenas deflexões por flexão, enquanto a teoria de Timoshenko, considera também os efeitos de cisalhamento.

Cruz e Souza (2018), utilizando o método das diferenças finitas, fazem uma análise numérica comparando a deflexão de uma viga simplesmente apoiada e engastada em relação às duas teorias. Neste artigo é possível observar que as teorias são muito parecidas, mas a teoria que melhor representa a deflexão de uma viga é a de Euler-Bernoulli.

A partir da teoria de Euler-Bernoulli, Hibbeler (2004) e Popov (2012) fizeram um estudo minucioso sobre os esforços, deformações, tensões e cargas que atuam sobre uma viga.

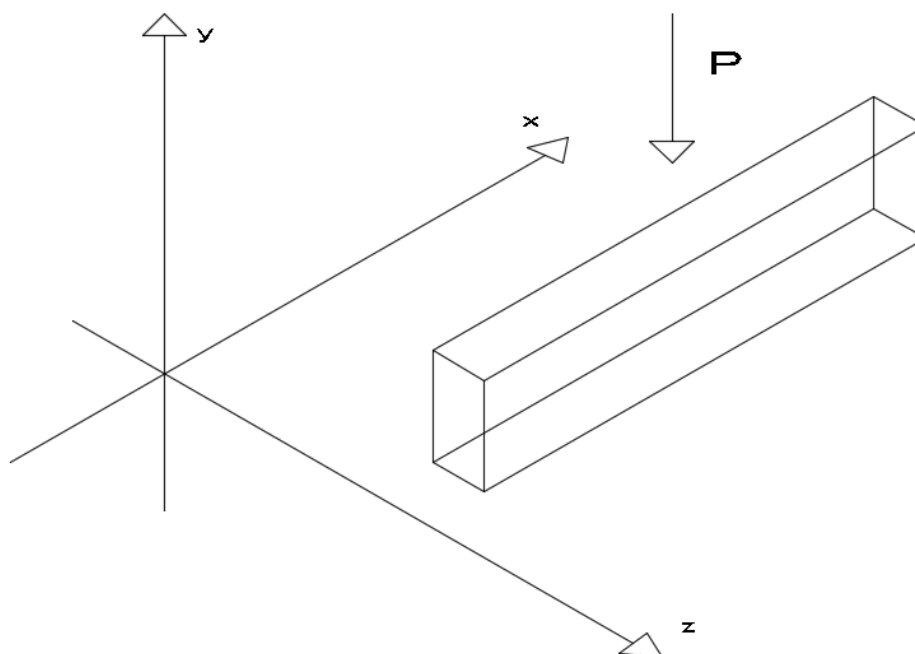
Para atingir o objetivo deste trabalho, no capítulo 2 são apresentados os conceitos básicos e necessários sobre as vigas, com o propósito de modelar, matematicamente, a linha elástica no capítulo 3. No capítulo 4, o modelo matemático será aplicado para determinar a linha elástica e a deflexão de uma viga simplesmente apoiada com carga pontual e contínua. Finalizando, são apresentadas as conclusões e considerações finais no capítulo 5.



## 2. CONCEITOS BÁSICOS SOBRE VIGAS

Viga consiste em um elemento estrutural horizontal sujeito a cargas transversais, como representado na Figura 1. Normalmente é utilizada no sistema laje-viga-pilar-fundação com a função de transferir cargas verticais recebidas da laje para o pilar ou para transmitir uma carga concentrada, transferindo o peso das lajes e dos demais elementos às colunas, podendo ser compostas na maioria dos casos de madeira, aço ou concreto armado (MARTHA, 2010).

**Figura 1:** Exemplo de viga de perfil retangular.



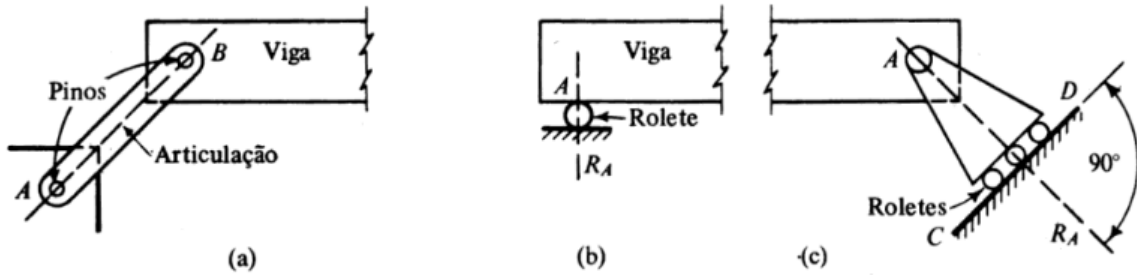
Fonte: Autoria própria.

As vigas são estruturas amplamente utilizadas na engenharia, sendo elementos obrigatórios para a construção de uma edificação. Elas possuem diferentes formas de seção transversal denominadas perfis, sendo os mais utilizados os perfis retangulares, como na Figura 1, em “I” e em “T”, seguidos pelos perfis em “U” e em “L” e outros menos comuns. Além disso, normalmente em construções se utilizam vigas prismáticas, ou seja, aquelas que possuem um eixo de simetria localizado no plano  $yz$  que passa no centro de massa da viga (centroide).

As vigas podem ser classificadas de duas formas, sendo uma delas referente ao tipo de suporte de sustentação e a outra referente a estrutura.

A Figura 2 apresenta dois tipos de suporte, o de articulação e o de rolete, respectivamente Figura 2(a) e 2(b), que resistem às forças verticais aplicadas ao plano que contém o eixo suporte.

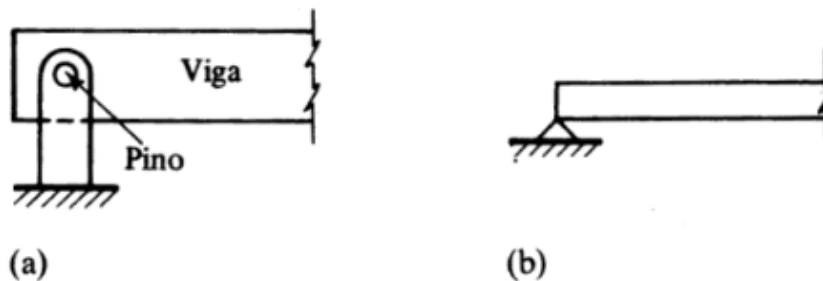
**Figura 2:** Representação dos suportes de rolete e de articulação.



Fonte: Popov (2012, p.10).

A Figura 3 ilustra o suporte de pino, que pode ser representado de duas formas. Este tipo de suporte resiste tanto às forças verticais como horizontais.

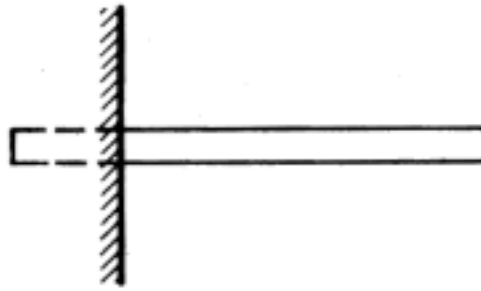
**Figura 3:** Representações do suporte pino.



Fonte: Popov (2012 p.10).

Representado na Figura 4 tem-se o suporte em engaste, que resiste às forças verticais, horizontais e ao momento, o qual não deixa que a viga rotacione.

**Figura 4:** Representação do suporte engaste.



Fonte: Popov (2012 p.10).

Em relação a estrutura, podemos classificá-las de três formas:

- Hipostática: estrutura que não possui estabilidade, ou seja, o número de incógnitas é menor que três.
- Isostática: o número de incógnitas não excede a três.
- Hiperestática: o número de incógnitas excede a três.

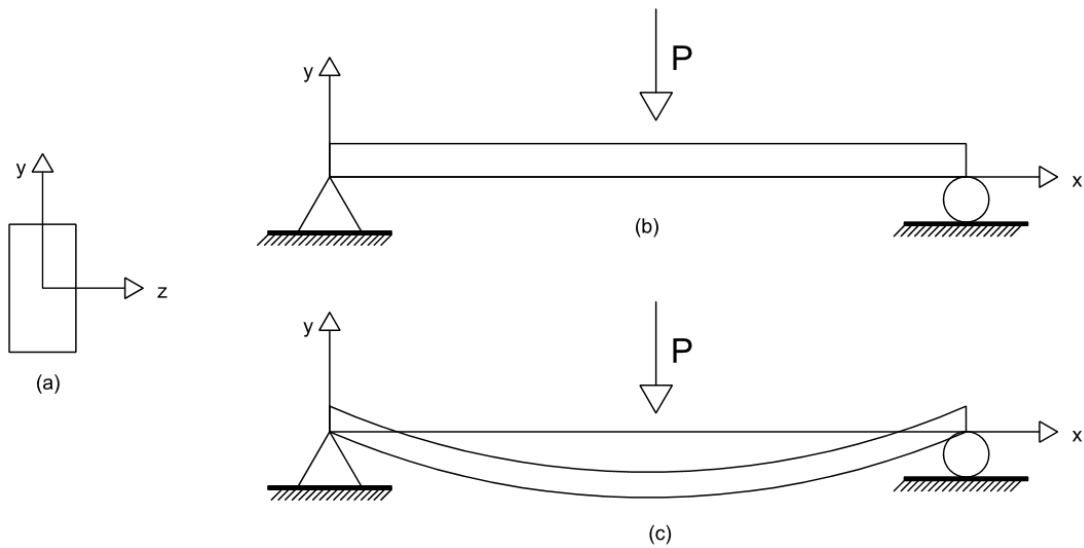
Essas incógnitas podem ser determinadas pelas equações de equilíbrio estático, apresentadas no decorrer deste capítulo.

Em uma estrutura isostática, as incógnitas são determinadas apenas pelas equações de equilíbrio estático. Porém, em uma estrutura hiperestática, além dessas equações devemos considerar também a deformabilidade do material (MARTHA, 2010).

Considerando que toda viga se deforma ao ser submetida a cargas externas, variando assim suas dimensões, e para que tal deformação não ocorra, os esforços solicitantes (esforços internos do objeto) devem resistir às cargas externas.

Para calcular os esforços solicitantes de uma viga, segundo Hibbeler (2004) e Popov (2012), admite-se que ela possa suportar cargas transversais em relação ao seu eixo, que possua um plano de simetria paralelo e que a seção transversal tenha um eixo vertical de simetria, Figura 5(a). Desta forma as cargas aplicadas são sempre consideradas como atuantes no plano de simetria como ilustrado na Figura 5(b), acarretando na deflexão da viga como na Figura 5(c).

**Figura 5:** Viga deflexionada.



Fonte: Autoria própria.

Devido ao princípio fundamental da estática para que uma viga esteja em equilíbrio deve-se ter o equilíbrio das forças, para evitar que sofra translação, e dos momentos, para evitar sua rotação.

Assim, Popov (2012) afirma que no centro de gravidade da viga devem aparecer esforços internos resultantes de forças verticais, horizontais e de momentos que mantém a seção da viga em equilíbrio.

Considerando que a viga está em um espaço tridimensional, estabelecendo um sistema de coordenadas  $xyz$  como na Figura 5, é possível afirmar que ao longo de cada um dos eixos coordenados:

- i) A somatória das forças é nula;
- ii) A somatória dos momentos é nula.

Estes resultados podem ser expressos, matematicamente, pelas equações de (2.1) a (2.6)

$$\sum F_x = 0 \quad (2.1)$$

$$\sum F_y = 0 \quad (2.2)$$

$$\sum F_z = 0 \quad (2.3)$$

$$\sum M_x = 0 \quad (2.4)$$

$$\sum My = 0 \quad (2.5)$$

$$\sum Mz = 0 \quad (2.6)$$

onde  $F_x$ ,  $F_y$  e  $F_z$  são forças e  $M_x$ ,  $M_y$  e  $M_z$  são momentos que atuam ao longo dos eixos coordenados, conforme Figura 5.

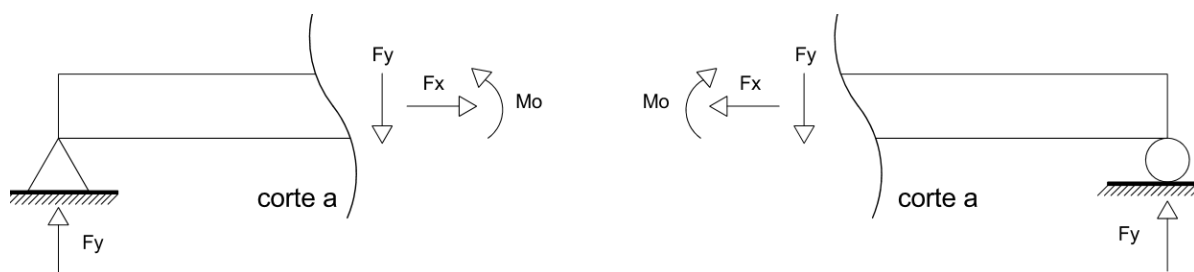
Segundo Hibbeler (2004) e Popov (2012), a engenharia estrutural considera que as cargas aplicadas a uma viga são forças coplanares, isto é, forças que atuam no mesmo plano. Além disso, temos que a viga só se deforma ao longo do seu eixo longitudinal.

Isso faz com que sejam necessárias apenas três equações de equilíbrio: a equação da somatória das forças horizontais e verticais, dadas pelas equações (2.1) e (2.2) e a equação da somatória dos momentos em  $o$ , sendo  $o$  qualquer ponto da viga, dada pela equação (2.7):

$$\sum Mo = 0 \quad (2.7)$$

Segundo Hibbeler (2004) e Popov (2012) toda viga que sofre a ação de forças e momentos apresenta tensões e deformações em seu interior, conforme representado na Figura 6. Contudo, para calculá-las é necessário determinar as forças e momentos que atuam nas seções transversais da viga.

**Figura 6:** Esforços internos.



Fonte: Autoria própria.

As resultantes das forças verticais,  $F_y$ , aplicadas ao plano  $xy$  da viga, estão nos vínculos e são responsáveis pela a estabilidade da viga. Essas resultantes são denotadas como reações de apoio.

A força normal ou axial, indicada pela letra “N”, é a componente que age perpendicularmente à seção transversal. Se esta força for dirigida para fora da viga, a viga sofre uma tração e tem-se o alongamento da mesma, caso contrário, se a força for dirigida para dentro da viga, esta sofre uma compressão e tem-se o seu encurtamento.

Desta forma, considera-se a força normal como sendo positiva se a viga for tracionada, enquanto que, no caso da viga ser comprimida, considera-se a força normal como sendo negativa, como representada na Figura 7.

**Figura 7:** Convenção de sinais para a força normal.



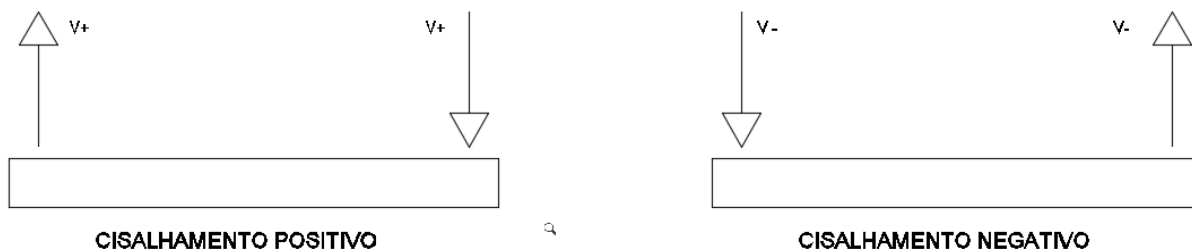
Fonte: Autoria própria.

Define-se a força cortante ou de cisalhamento, representada pela letra “V”, como sendo a força perpendicular à viga, que causa um deslizamento linear (no sentido do esforço) de uma seção sobre a outra infinitamente próxima, ocasionando o corte ou o cisalhamento da seção estudada.

Segundo Popov (2012) a força cortante é numericamente igual à soma algébrica de todas as componentes verticais das forças externas que agem na seção, mas tem sentido oposto.

Uma força de cisalhamento positiva tende a girar viga no sentido horário e uma força negativa tende a girar no sentido anti-horário, como ilustrado na Figura 8.

**Figura 8:** Convenção de sinais para a força cortante.

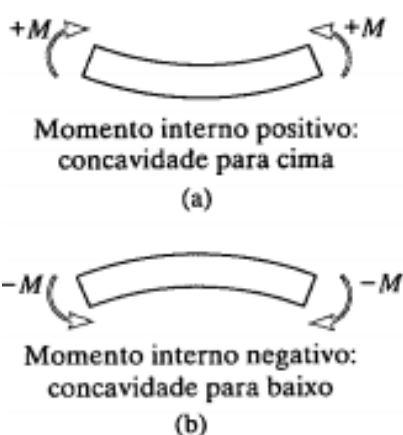


Fonte: Autoria própria.

O momento fletor, indicado pela letra “M”, representa a soma algébrica dos momentos provocados pelas forças externas de um dos lados da seção da viga gerados por cargas aplicadas transversalmente ao eixo longitudinal. É um esforço que tende a flexionar uma viga, ou seja, faz com que a seção gire sobre o próprio eixo, localizado no plano horizontal, comprimindo uma parte e distendendo outra.

Um momento fletor positivo comprime a parte superior da viga e um negativo comprime a parte inferior, como ilustrado na Figura 9(a) e 9(b) respectivamente.

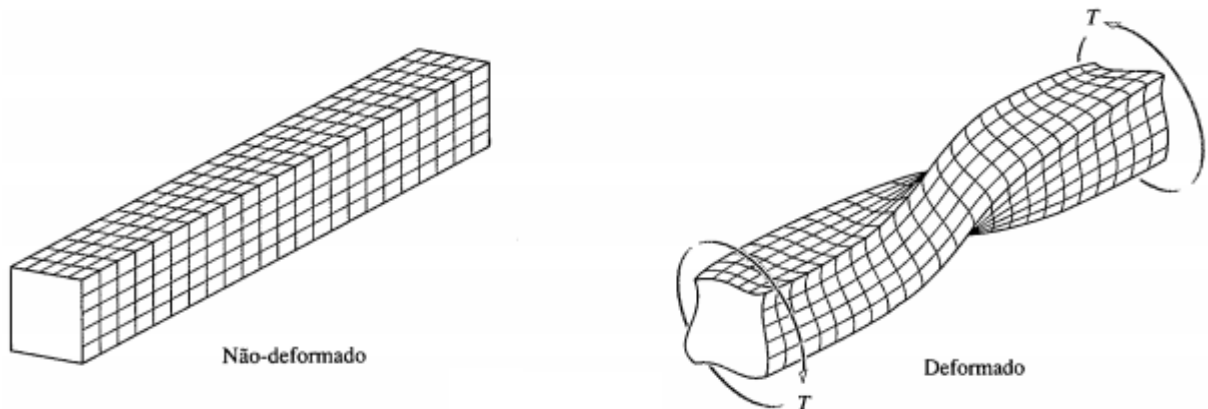
**Figura 9:** Convenção de sinais para o momento fletor.



Fonte: Hibbeler (2004, p. 450).

Por fim, o momento torsor, indicado pela letra “T”, o qual tende a torcer a seção em torno do seu eixo longitudinal. A Figura 10 ilustra o momento torsor de uma viga torcida ao longo do seu eixo longitudinal e, para que o objeto esteja em equilíbrio, os torques externos e internos na seção devem ser numericamente iguais, mas em direções opostas (POPOV, 2012).

**Figura 10:** Torque.



Fonte: Hibbeler (2004, p.172).

Os conceitos apresentados anteriormente serão utilizados para modelar matematicamente a linha elástica através de uma equação diferencial ordinária. Em seguida, serão determinadas as reações de apoio e a equação que determina a deflexão de uma viga prismática reta simplesmente apoiada com carga pontual e contínua.



### 3. LINHA ELÁSTICA

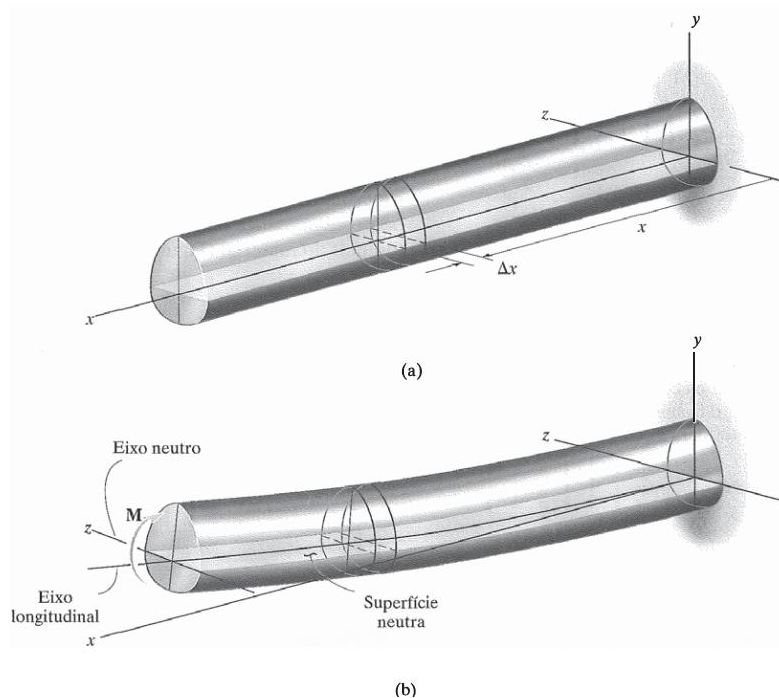
Ao se construir uma edificação, é necessário saber quais serão os tipos de cargas que atuarão sobre a viga, a fim de estabelecer limites para os valores da sua deflexão. A deformação por ela sofrida pode ser representada por meio de uma equação diferencial que descreve a curvatura da deflexão, conhecida como linha elástica.

Este capítulo tem como objetivo apresentar a modelagem matemática, via equação diferencial, da linha elástica segundo a teoria de Euler-Bernoulli. Para tanto, são consideradas apenas as deflexões elásticas (deformações elásticas) e inelásticas por flexão (deformações plásticas).

Por estruturas elásticas entende-se a estrutura que sofre deformação quando submetida a cargas externas e retorna a sua forma original quando as mesmas são removidas. Caso contrário, se a viga não retornar à forma original ela é denominada uma estrutura inelástica.

Na Figura 11 tem-se a representação de uma viga sem e com deformação, respectivamente, Figura 11(a) e 11(b).

**Figura 11:** Representação do eixo neutro.



Fonte: Hibbeler (2004, p. 222).

Da hipótese de que a viga sofre apenas deflexão por flexão, tem-se que a parte inferior da viga sofre tração enquanto a parte superior sofre compressão, como representado na Figura 11(b). Contudo, segundo Hibbeler (2004), a única parte que não sofre deformação longitudinal é no eixo neutro, o qual passa pelo centroide da viga.

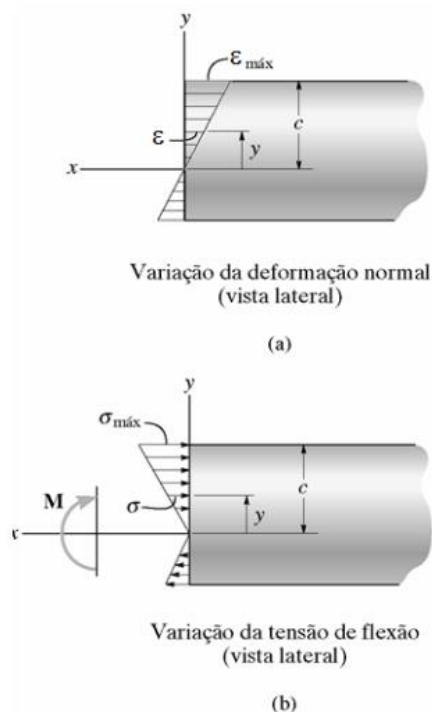
Além disso, no caso de material homogêneo, se aplica a Lei de Hooke

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad (3.1)$$

onde  $\varepsilon$  representa a deformação linear,  $E$  representa o módulo de elasticidade do material e  $\sigma$  representa a tensão normal.

Popov (2012) e Hibbeler (2004) fazem um estudo minucioso sobre as tensões de uma flexão na viga. Segundo Popov (2012), um segmento de viga pode estar em equilíbrio sob a ação de apenas um momento fletor, Figura 12(b).

**Figura 12:** Tensão pura.



Fonte: Hibbeler (2004, p. 224)

Uma variação linear em seu eixo longitudinal, tem como consequência uma deformação linear na tensão normal, portanto, utilizando a lei de Hooke e a partir da Figura 12, é possível obter as equações de flexão:

$$\sigma_x = -\frac{My}{I} \quad (3.2)$$

$$|\sigma_{max}| = \frac{Mc}{I} \quad (3.3)$$

que relacionam o momento fletor  $M$  com o momento de inércia  $I$ , sendo  $y$  a distância perpendicular ao eixo neutro da seção transversal e  $c$  a distância do eixo neutro da viga até seu topo como indicado Figura 12(b) (HIBBELER, 2004).

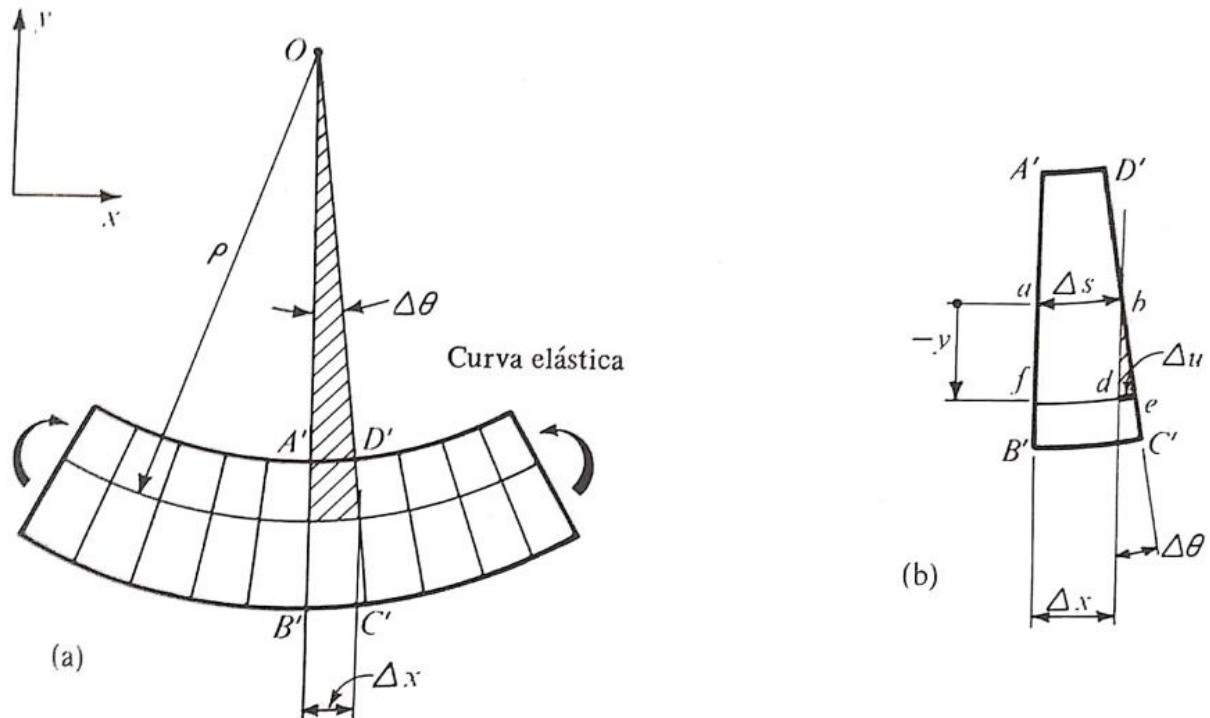
Para modelar a linha elástica, que representa o deslocamento vertical dos pontos situados ao longo do eixo longitudinal de uma viga, considera-se que as cargas que a viga suportará são forças coplanares, isto significa considerar que estas forças estão em um plano  $xy$  e que essa viga seja reta e prismática.

Além disso, segundo Popov (2012), para modelar a linha elástica é necessário considerar apenas deflexões por flexão como dito anteriormente. Com isso, tem-se que cada seção da viga permanece plana durante a deformação, desprezando assim a deformação de cisalhamento.

A Figura 13(a) representa um segmento de uma viga reta deformada, sendo que a linha elástica que passa pelo centroide da viga é representada encurvada a um raio  $\rho$ .

O centro de curvatura pode ser encontrado pelo prolongamento de duas seções quaisquer, como  $A'B'$  e  $C'D'$ , tal que, o ângulo definido por essas duas seções adjacentes seja  $\Delta\theta$ .

**Figura 13:** Deformação de um segmento de viga.



Fonte: Popov (2012, p. 36).

Analisando apenas a seção  $A'B'C'D'$  na Figura 13(b), observa-se o arco  $\Delta x$  representa a parte da linha elástica que intercepta o eixo neutro em cada seção transversal da viga. Este arco é conhecido como a superfície neutra, que é a camada entre as bordas comprimida e tracionada que não sofre variação de comprimento, Figura 11(b).

Analisando ainda a seção representada na Figura 13(b), observa-se que a seção da viga e a superfície neutra não se deformam. Isto faz com que a distância  $y$  e a deformação  $\Delta u$  de qualquer fibra, representada por  $ab$  na Figura 13(b), possam ser expressadas por:

$$\Delta u = -y\Delta\theta. \quad (3.4)$$

As fibras contidas na superfície neutra curva da viga deformada, caracterizada na Figura 13(b) pela fibra  $ab$ , não são deformadas. Dessa forma, o comprimento do arco  $\Delta s$  corresponde ao comprimento inicial de todas as fibras entre as seções  $A'B'$  e  $C'D'$ . Diante disto, dividindo a equação (3.4) por  $\Delta s$  e, tomando o limite desse quociente quando  $\Delta s \rightarrow 0$  obtém-se as seguintes relações:

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta s} = -y \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta s} \quad (3.5)$$

ou, na forma diferencial,

$$\frac{du}{ds} = -y \frac{d\theta}{ds} \quad (3.6)$$

Na equação (3.6),  $du/ds$  representa a deformação linear de uma fibra da viga a uma distância  $y$  do eixo da viga. A deformação linear é denotada por  $\varepsilon$ , ou seja,

$$\frac{du}{ds} = \varepsilon. \quad (3.7)$$

Analisando-se as Figura 13(a) e Figura 13(b), observa-se que o termo  $d\theta/ds$  da equação (3.6) tem um significado geométrico, uma vez que  $\Delta s = \rho \Delta \theta$ , permitindo escrever:

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta s} = \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\rho}. \quad (3.8)$$

Substituindo as equações (3.7) e (3.8) na equação (3.6), pode-se exprimir a relação fundamental entre a curvatura da linha elástica e a deformação linear, por

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{\varepsilon}{y} \quad (3.9)$$

onde  $\rho$  é o raio da curvatura em um ponto específico da curva elástica ( $1/\rho$  seria a própria curvatura).

É importante observar que, não tendo sido usadas as propriedades do material na dedução da equação (3.9), essa relação pode ser usada para problemas elásticos e inelásticos de modo que, “Se o material é homogêneo e comporta-se de maneira linear-elástica, aplica-se a lei de Hooke ( $\varepsilon = \sigma/E$ ). Além disso, aplica-se a fórmula da flexão ( $\sigma_x = -My/I$ ).” (HIBBELER, 2004, p. 451).

Portanto, combinando as equações (3.1), (3.2) com a equação (3.9), tem-se:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}. \quad (3.10)$$

A equação (3.10) relaciona a curvatura  $1/\rho$  da linha elástica com o momento fletor  $M$  e o momento de inércia  $I$  de uma dada seção da viga, sendo que o produto  $EI$  nessa equação, denominada rigidez à flexão, é sempre uma quantidade positiva.

Além disso, a curvatura de uma viga pode ser representada de outras duas formas, sendo uma delas representada em termos de tensão na viga, segundo a equação (3.11):

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{\sigma}{Ey} \Leftrightarrow \sigma = -\frac{Ey}{\rho}. \quad (3.11)$$

A outra forma de representá-la utiliza conceitos de Geometria Analítica, onde a viga é representada como uma linha em coordenadas cartesianas sendo que a curvatura é uma linha definida por:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \quad (3.12)$$

onde  $x$  e  $y$  são coordenadas de um ponto sobre a curvatura,  $x$  é um ponto sobre a linha elástica e  $y$  é a deflexão calculada no ponto  $x$  (POPOV, 2012).

Como em qualquer construção para que a estrutura não se deforme ou se deforme o mínimo possível, as deflexões devem ser muito pequenas, e assim, tem-se que a inclinação  $dy/dx$  será muito pequena de modo que seu quadrado é desprezível em comparação com a unidade. Portanto a curvatura pode ser aproximada por:

$$\frac{1}{\rho} \approx \frac{d^2y}{dx^2}. \quad (3.13)$$

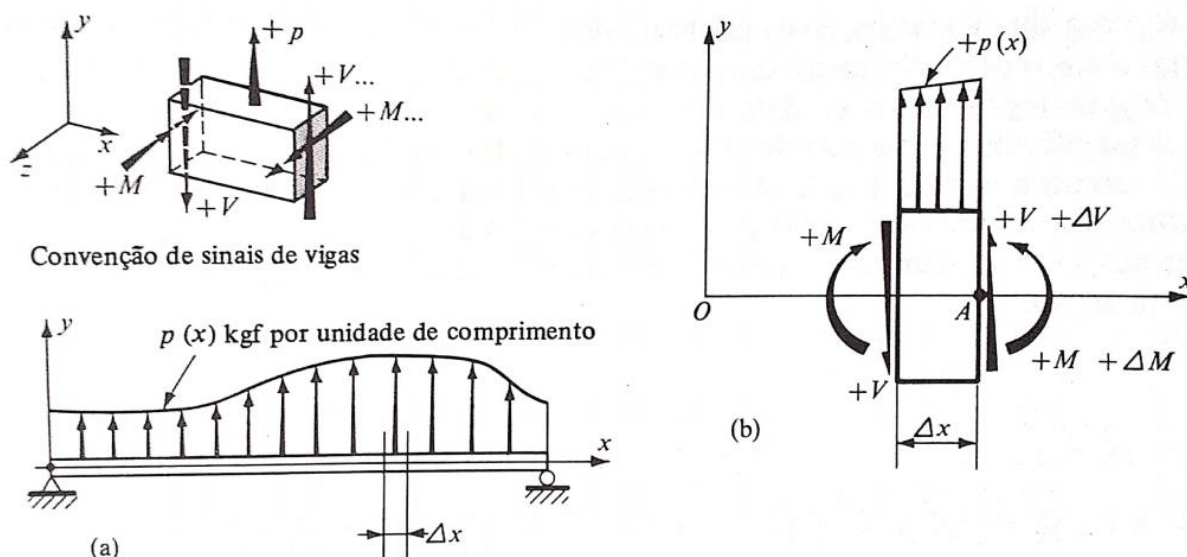
Logo, a equação (3.10) pode ser escrita como:

$$\frac{d^2y}{dx^2} \approx \frac{M(x)}{EI}. \quad (3.14)$$

Como o produto  $EI$  é uma constante, falta determinar o momento fletor, o qual será relacionado com a força de cisalhamento e com a carga que é aplicada sobre a viga.

Para isso considere uma viga submetida à carga  $p(x)$ , como na Figura 14(a), e uma seção da viga de comprimento  $\Delta x$  isolada por duas seções adjacentes perpendiculares ao seu eixo, Figura 14(b).

**Figura 14:** Viga simplesmente apoiada com uma carga  $p(x)$ .



Fonte: Popov (2012 p. 30).

Considerando que todas as forças e momentos atuantes sobre a seção da viga têm sentido positivo e que a carga distribuída sobre a mesma seja  $p(x)\Delta x$ , tem-se que a força cortante resultante e o momento interno que atuam sobre o lado direito da seção sofrem uma pequena deformação a fim de se manter a seção em equilíbrio (HIBBELER, 2004), conforme ilustrado na Figura 14(b).

Sendo assim, ao analisar as forças verticais na Figura 14(b) e, assumindo a condição de equilíbrio da seção de uma viga, obtém-se:

$$\sum F_y = 0 \quad (3.15)$$

$$-V + p\Delta x + (V + \Delta V) = 0 \Leftrightarrow \frac{\Delta V}{\Delta x} = -p. \quad (3.16)$$

No equilíbrio, a soma dos momentos em relação ao ponto A da Figura 14(b) deve ser zero. Assim, observando-se que o braço da força distribuída em relação ao ponto A é igual a  $\Delta x/2$ , tem-se:

$$\sum M_o = 0 \quad (3.17)$$

$$(M + \Delta M) + V\Delta x - M - \frac{(p\Delta x)\Delta x}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{\Delta M}{\Delta x} = -V + \frac{p\Delta x}{2}. \quad (3.18)$$

As equações (3.16) e (3.18), quando  $\Delta x \rightarrow 0$ , resultam, respectivamente, nas equações diferenciais:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta x} \equiv \frac{dV}{dx} = -p \quad (3.19)$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta x} \equiv \frac{dM}{dx} = -V \quad (3.20)$$

Substituindo a equação (3.19) em (3.20), obtém-se:

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{dM}{dx} \right) = \frac{d^2 M}{dx^2} = p. \quad (3.21)$$

Partindo da equação (3.14) e com o auxílio das equações (3.19) e (3.20) obtém-se:

$$\frac{V(x)}{EI} = -\frac{d^3 y}{dx^3}; \quad (3.22)$$

$$\frac{p(x)}{EI} = \frac{d^4 y}{dx^4}. \quad (3.23)$$

A função  $y(x)$  representa a deflexão da viga. A primeira derivada de  $y(x)$  em relação à  $x$  representa a inclinação da curva elástica, a segunda derivada, equação (3.14), representa a linha elástica, a terceira derivada, equação (3.21), representa a



força de cisalhamento e por fim a quarta derivada, equação (3.22), representa a carga aplicada à viga.

As equações (3.22) e (3.23), conforme Popov (2012), além de serem utilizadas para determinar as reações de apoio de vigas isostáticas, servem também para a construção dos diagramas de força cortante e de momento fletor para analisar o desempenho em cada seção da viga.

Para analisar a deflexão de vigas, além das equações diferenciais (3.21) a (3.23), deve-se levar em consideração as condições de contorno, que podem ser resumidas por (ZILL, 2012):

- i) Para extremidade engastada:  $y(x_0) = 0$  e  $y'(x_0) = 0$ ;
- ii) Para suporte pino e rolete:  $y(x_0) = 0$  e  $M(x_0) = 0$ ;
- iii) Para extremidade livre:  $M(x_0) = 0$  e  $V(x_0) = 0$ ;

sendo  $x_0$  o ponto inicial ou o comprimento  $L$  da viga.

No capítulo 4, são apresentados dois estudos de casos com uma viga prismática reta simplesmente apoiada sendo que uma das suas cargas é concentrada e a outra é contínua. Para um estudo mais amplo, envolvendo outros tipos de vigas, recomenda-se a referência Popov (2012).



## 4. ESTUDO DE CASO

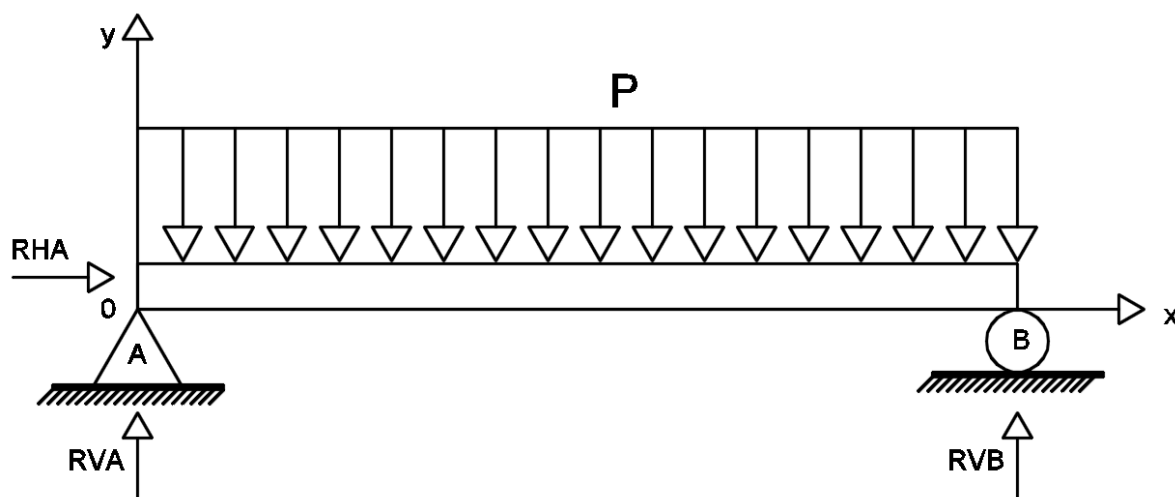
O objetivo deste capítulo é aplicar a teoria estudada e encontrar as equações que representam a linha elástica e a deflexão de uma viga simplesmente apoiada, isostática, prismática e reta, em dois casos: o primeiro com carga contínua e outro com carga pontual.

Diferente de Cruz e Souza (2018) que utilizaram métodos numéricos para determinar a linha elástica de cada viga, nesse trabalho será feita uma manipulação algébrica a fim de facilitar a compreensão do cálculo e do processo. Além disso, será utilizado o método do somatório, como feito por Popov (2012) e Hibbeler (2004), para calcular as reações de apoio e o método de integração direta para determinar as equações da linha elástica e da deflexão da viga.

### 4.1 Viga simplesmente apoiada com carga contínua $P$

A Figura 15 apresenta uma viga simplesmente apoiada de comprimento  $L$ , com uma carga contínua e constante  $P$  aplicada sobre a viga e uma carga nula aplicada horizontalmente.

**Figura 15:** Viga simplesmente apoiada com carga contínua  $P$ .



Fonte: Autoria própria.

Na Figura 15,  $RVA$  e  $RVB$  são as reações de apoio no pino e no rolete, respectivamente, e  $RHA$  é a força horizontal aplicada no ponto  $A$ . Calculando essas forças, tem-se:

$$\sum F_x = 0 \Leftrightarrow RHA = 0 \quad (4.1)$$

$$\sum F_y = 0 \Leftrightarrow RVA + RVB - PL = 0 \Leftrightarrow RVA + RVB = PL \quad (4.2)$$

As reações de apoio  $RVA$  e  $RVB$  são obtidas através da análise do momento fletor no ponto  $A$ .

$$\sum M_A = 0 \Leftrightarrow PL\left(\frac{L}{2}\right) - RVB(L) = 0 \Leftrightarrow RVB = \frac{PL}{2} \quad (4.3)$$

Substituindo o valor de  $RVB$  na equação (4.2), tem-se que:

$$RVA = PL - RVB \Leftrightarrow RVA = \frac{PL}{2}. \quad (4.4)$$

Obtidas as reações de apoio e, antes de modelar a equação da linha elástica e da deflexão da viga, serão analisadas as equações diferenciais (3.14), (3.22) e (3.23) de  $A$  para  $B$  e de  $B$  para  $A$ .

Como a linha elástica é contínua, obtém-se que os deslocamentos linear e angular apresentam o mesmo resultado independente do trecho. Lembre-se que uma força de cisalhamento positiva tende a girar viga no sentido horário e um momento fletor positivo comprime a parte superior da viga.

A partir da equação (3.23) e considerando que a carga aplicada está no sentido oposto de  $y$ , para o trecho  $AB$ , tem-se que:

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{1}{EI}(-P) \quad (4.5)$$

$$-\frac{V(x)}{EI} = \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1}{EI}(Px + C_1) \quad (4.6)$$

$$\frac{M(x)}{EI} = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{EI} \left( -\frac{Px^2}{2} + C_1x + C_2 \right). \quad (4.7)$$

E para o trecho  $BA$ ,

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{1}{EI} (-P) \quad (4.8)$$

$$-\frac{V(x)}{EI} = \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1}{EI} (-Px + C_1) \quad (4.9)$$

$$\frac{M(x)}{EI} = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{EI} \left( -\frac{Px^2}{2} + C_1x + C_2 \right). \quad (4.10)$$

Comparando as equações (4.6) e (4.9) observa-se que as forças de cisalhamento são diferentes, mas as equações (4.7) e (4.10) são iguais em ambos os trechos.

Utilizando a equação (4.10) e as condições de contorno impostas no capítulo anterior,  $M(0) = M(L) = 0$ , obtém-se  $C_2 = 0$  e

$$\frac{M(L)}{EI} = \frac{1}{EI} \left( -\frac{PL^2}{2} + C_1L \right) = 0 \Leftrightarrow C_1 = \frac{PL}{2}. \quad (4.11)$$

Com isso, a equação da linha elástica é dada por:

$$\frac{M(x)}{EI} = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{EI} \left( \frac{PLx}{2} - \frac{Px^2}{2} \right). \quad (4.12)$$

Integrando a equação (4.12) duas vezes obtém-se a equação (4.13) que representa a inclinação da viga, e a equação (4.14), que representa a deflexão da viga.

$$\frac{y'(x)}{EI} = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{EI} \left( \frac{PLx^2}{4} - \frac{Px^3}{6} + C_3 \right) \quad (4.13)$$

$$\frac{y(x)}{EI} = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{EI} \left( \frac{PLx^3}{12} - \frac{Px^4}{24} + C_3x + C_4 \right). \quad (4.14)$$

A deflexão máxima é obtida pela raiz da equação (4.13) e da análise da equação (4.12) para este ponto. Porém, devido às condições de simetria, a maior flexão ocorre em  $x = L/2$ . Com isso, é possível afirmar que a inclinação da curva na metade da viga é igual a zero, ou seja,

$$\frac{y' \left( \frac{L}{2} \right)}{EI} = \frac{1}{EI} \left( \frac{PL \left( \frac{L}{2} \right)^2}{4} - \frac{P \left( \frac{L}{2} \right)^3}{6} + C_3 \right) = 0. \quad (4.15)$$

Logo,  $C_3 = -(PL^3/24)$ .

Pelas condições de contorno nos apoios, tem-se que a deflexão é nula, logo:

$$\frac{y(0)}{EI} = \frac{1}{EI} \left( \frac{PL(0)^3}{12} - \frac{P(0)^4}{24} - \frac{PL^3}{24}(0) + C_4 \right) = 0 \quad (4.16)$$

ou seja,  $C_4 = 0$ .

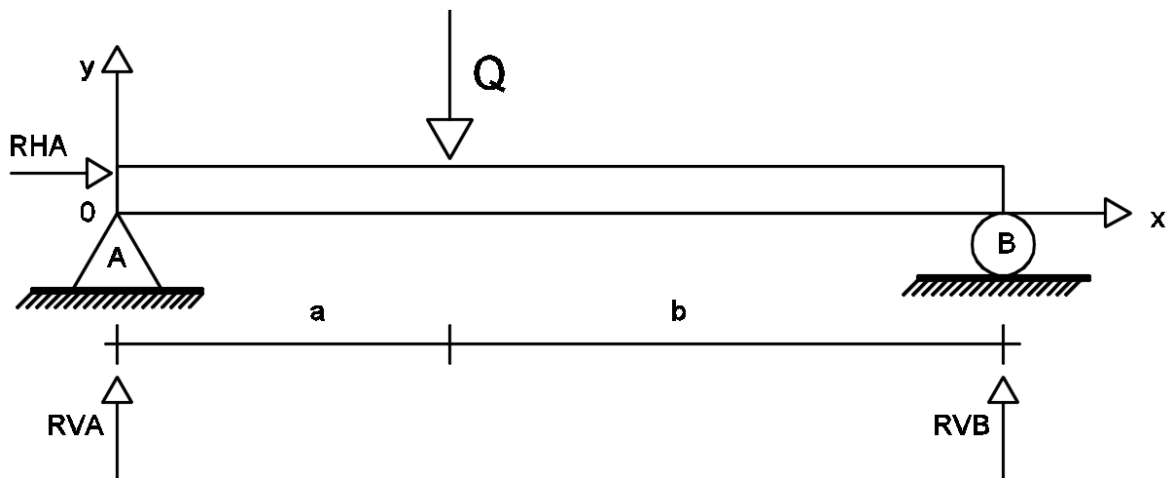
Deste modo, pode-se afirmar que a deflexão máxima, ou flecha máxima como é conhecida dentro da área de engenharia, é igual a:

$$|y_{max}| = \left| y \left( \frac{L}{2} \right) \right| = \frac{5PL^4}{384EI}. \quad (4.17)$$

## 4.2 Viga simplesmente apoiada com carga pontual $Q$

Na Figura 16 é apresentada uma viga simplesmente apoiada de comprimento  $L$  e uma carga pontual  $Q$  aplicada a uma distância  $a$  do início e a uma distância  $b$  do final da viga. Além disso, considera-se também que a carga horizontal é nula como no estudo de caso anterior.

**Figura 16:** Viga simplesmente apoiada com carga pontual  $Q$ .



Fonte: Autoria própria.

Como no estudo de caso anterior, inicialmente serão obtidas as reações de apoio para então se determinar a equação da linha elástica e da deflexão da viga, e por fim, encontrar a deflexão máxima.

Calculando-se então as forças horizontais e verticais, obtém-se:

$$\sum F_x = 0 \Leftrightarrow RHA = 0 \quad (4.18)$$

$$\sum F_y = 0 \Leftrightarrow RVA + RVB - Q = 0 \Leftrightarrow RVA + RVB = Q \quad (4.19)$$

A análise do momento fletor no ponto  $A$ , levando-se em conta as mesmas considerações do estudo de caso anterior, permite obter as relações de pino e no rolete, respectivamente,  $RVA$  e  $RVB$ .

$$\sum M_A = 0 \Leftrightarrow Q(a) - RVB(L) = 0 \Leftrightarrow RVB = \frac{Qa}{L} \quad (4.20)$$

Substituindo o valor de  $RVB$  na equação (4.19), resulta em:

$$RVA + RVB = Q \Leftrightarrow RVA = \frac{Q(L - a)}{L} \Leftrightarrow RVA = \frac{Qb}{L}. \quad (4.21)$$

Repetindo o mesmo processo do estudo de caso anterior, serão analisadas as equações diferenciais de  $A$  para  $B$  e de  $B$  para  $A$ .

Para o trecho  $AB$ , tem-se que:

$$\frac{M(x)}{EI} = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{Qb}{EIL}x \quad (4.22)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Qb}{EIL} \frac{x^2}{2} + C_1 \quad (4.23)$$

$$y_1(x) = \frac{Qb}{EIL} \frac{x^3}{6} + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2. \quad (4.24)$$

E para o trecho  $BA$ ,

$$\frac{M(x)}{EI} = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{Qa}{EI} - \frac{Qa}{EIL}x \quad (4.25)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Qa}{EI}x - \frac{Qa}{EIL} \frac{x^2}{2} + C_3 \quad (4.26)$$

$$y_2(x) = \frac{Qa}{EI} \frac{x^2}{2} - \frac{Qa}{EIL} \frac{x^3}{6} + C_3x + C_4. \quad (4.27)$$

Dos resultados acima, observa-se que  $y_1(x)$  e  $y_2(x)$  são diferentes, ou seja, a equação da linha elástica é diferente em ambos os trechos, pois há uma descontinuidade em  $x = a$ .

Levando em conta as condições de contorno, tem-se que:

$$y_1(0) = 0 = C_2 \quad (4.28)$$

$$y_2(L) = 0 = \frac{QaL^2}{3EI} + C_3L + C_4. \quad (4.29)$$

Para determinar as constantes deve-se igualar a equação (4.23) com a (4.26) e a equação (4.24) a (4.27) uma vez que a deflexão e a inclinação são iguais em  $x = a$ .

$$y_1'(a) = y_2'(a) \Leftrightarrow \frac{Qb}{EIL} \frac{a^2}{2} + C_1 = \frac{Qa}{EI}a - \frac{Qa}{EIL} \frac{a^2}{2} + C_3 \quad (4.30)$$



$$y_1(a) = y_2(a) \Leftrightarrow \frac{Qa^3b}{6EIL} + C_2a = \frac{Qa^3}{2EI} - \frac{Qa^4}{6EIL} + C_3a + C_4 \quad (4.31)$$

Esse sistema tem como solução:

$$C_1 = -\frac{Qb}{6EIL}(L^2 + b^2) \quad (4.32)$$

$$C_3 = -\frac{Qb}{6EIL}(2L^2 + a^2) \quad (4.33)$$

$$C_4 = -\frac{Qa^3}{6EI}. \quad (4.34)$$

Com isso, as equações de deflexão da viga são dadas por:

$$y_1(x) = \frac{Qb}{EIL} \frac{x^3}{6} - \frac{Qb}{6EIL} x(L^2 + b^2) = \frac{Qb}{6EIL} [x^3 - x(L^2 + b^2)] \quad (4.35)$$

$$y_2(x) = \frac{Qa}{EI} \frac{x^2}{2} - \frac{Qa}{EIL} \frac{x^3}{6} - \frac{Qb}{6EIL} x(2L^2 + a^2) - \frac{Qa^3}{6EI} \quad (4.36)$$

Porém, a deflexão máxima ocorre no segmento mais longo da viga e não quando  $x = a$  (POPOV, 2012) e, para determiná-la deve-se tomar a equação de inclinação igual a zero, ou seja,

$$y'_1(x) = \frac{Qb}{6EIL} [x^3 - x(L^2 + b^2)] = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{a(a + 2b)}{3}}. \quad (4.32)$$

Deste modo, a deflexão máxima é igual a:

$$|y_{max}| = \left| y \left( \sqrt{\frac{a(a + 2b)}{3}} \right) \right| = \frac{Qb(L^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}{EI9\sqrt{3}}. \quad (4.33)$$

No primeiro estudo de caso, ao analisar as equações da linha elástica, (4.7) e (4.10), pelo trecho  $AB$  e  $BA$  respectivamente, observa-se que independente do trecho analisado obtém-se uma única equação.

Porém, no segundo estudo de caso, ao analisar as equações (4.22) e (4.25), são obtidas equações diferentes. Logo, para determinar a curvatura e a deflexão da viga precisamos utilizar cada equação no seu devido trecho.

Portanto, independente da carga que esteja sendo aplicada sobre a viga, é importante sempre calcular a equação da linha elástica em ambos os trechos.

## 5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

É possível concluir com este trabalho que a modelagem da linha elástica e a determinação da deflexão de uma viga são de extrema importância no ramo da construção civil. Com a modelagem foi possível compreender como a estrutura deve ser projetada e como ela irá se comportar quando submetida a cargas externas a fim de estabelecer limites para que a estrutura/viga não se rompa ou se deforme. Mas antes mesmo de compreender a modelagem da linha elástica, deve-se ter conhecimentos sobre os esforços solicitantes, tensões e deformações que atuam na viga.

Viu-se também a importância das equações diferenciais enquanto ferramenta matemática para determinação da deformação e tensão de uma viga, usando propriedades físicas dos materiais para a modelagem da linha elástica, propriedades úteis e indispensáveis para o entendimento do fenômeno.

Este trabalho teve como preocupação central determinar a linha elástica e a deflexão de uma viga submetida a uma carga. Determinar esse deslocamento vertical está no fato de que ao se fazer um projeto estrutural cada viga tem um valor máximo admissível para esse deslocamento.

Após este estudo, foi possível perceber que quando cursava o técnico em edificações não compreendia os conceitos físicos e nem a geometria do problema por falta de conceitos matemáticos intrínsecos à modelagem do problema. Porém, com o estudo aprofundado sobre os conceitos físicos e com o auxílio do Cálculo Diferencial e Integral e das Equações Diferenciais foi possível compreender o fenômeno e o processo do cálculo envolvido.

Em trabalhos futuros é possível utilizar-se desses conceitos para determinar a flambagem ou encurvadura de colunas, as quais sustentam as vigas e as cargas aplicadas sobre elas.

Espero que este trabalho auxilie a profissionais da área a importância da matemática para o estudo da linha elástica e da deflexão de uma viga.



## REFERÊNCIAS

CRUZ, Gustavo Guimarães; SOUZA, Calebe Paiva Gomes. Análise Comparativa das Teorias de Euler-Bernoulli e Timoshenko via Método Das Diferenças Finitas com Implementação Computacional em Scilab. **Revista Tecnologia**, Fortaleza, v. 39, n. 1, p. 1-12, jun. 2018.

HIBBELER, Russell Charles. **Resistência dos Materiais**. Tradução: Joaquim Pinheiro Nunes. 5. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2004.

MARTHA, Luiz Fernando. **Análise de estruturas: conceitos e métodos básicos**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2010.

POPOV, Egor Paul. **Introdução à mecânica dos sólidos**. Tradução Mauro Ormeu Cardoso Amorelli. São Paulo: Blucher, 2012.

ZILL, Dennis G. **Equações Diferenciais com Aplicações em Modelagem**. 2. ed. São Paulo: Cengage, 2012.