INSTITUTO FEDERAL
SÃO PAULO
Campus São Paulo

Teoremas de Pappus - Guldin e sua introdução ao Ensino Médio

Guilherme Corrêa Silva

Trabalho de Conclusão do Curso Superior de Licenciatura em Matemática, orientado pelo Prof. Dr. Silvio De Liberal.

IFSP
São Paulo
2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

SILVA, Guilherme Corrêa.
Teorema de Pappus - Guldin e sua introdução ao Ensino Médio / Guilherme Corrêa Silva. - São Paulo: IFSP, 2021.
50f

Trabalho de Conclusão do Curso Superior de Licenciatura em Matemática - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo
Orientador: Silvio De Liberal.

1. Sólidos de revolução. 2. Teorema de Pappus-Guldin. 3. Pappus. 4. Guldin. 5. Geometria Espacial I. Teorema de Pappus - Guldin e sua introdução ao Ensino Médio.

FOLHA DE APROVAÇÃO

CONFECCIONADA PELA COORDENAÇÃO.

“A educação é o nosso passaporte para o futuro, pois, o amanhã pertence às pessoas que se preparam hoje.”.

Malcolm X

Dedico este trabalho a todas as pessoas que me ajudaram a realiza-lo, não importando a intensidade

AGRADECIMENTOS

Agradeço em primeiro lugar a minha mãe, Telma, por sempre ter feito de tudo para que eu tivesse a melhor educação e ensino possível, o que me inspira a ser um melhor professor.

A toda a minha família, por sempre me apoiar e me resgatar de momentos difíceis, neles estão incluídos meu pai Douglas, minha irmã Mariana, minha avó Suely e por fim, mas não menos importante o Ale que é meu pai também, um cara que sempre me apoiou, que mostrou que não existem caminhos fáceis e me educou.

A toda equipe do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo – Câmpus São Paulo, incluindo não só os professores, mas como todos os funcionários do câmpus, em especial ao professor Silvio que não apenas me orientou como sempre o tive como fonte de inspiração.

Aos meus amigos do câmpus, que sem eles tudo isso seria apenas cinza, não só aqueles que continuaram até o fim, mas os que fiz durante todo esse percurso.

Enfim a todos que me ajudaram de alguma forma, serei eternamente grato.

RESUMO

Este trabalho tem como tema principal os Teoremas de Pappus-Guldin e uma análise para o seu uso em conjunto com ferramentas tecnológicas, que no caso foi o *software* GeoGebra. No decorrer deste trabalho foi tratado, além de uma breve história, toda uma relação dos sólidos de revolução, como base para os teoremas, mostrando algumas ideias das quais pode-se trabalhar em sala de aula para reforçar os teoremas, e para a conclusão trabalhou-se com exercícios sobre o tema para que se pudesse fazer uma análise sobre a usabilidade dos teoremas.

Palavras-chaves: Sólidos de revolução; Teoremas de Pappus-Guldin; Pappus; Guldin; Geometria Espacial.

ABSTRACT

This research has as main theme the Pappus-Guldin Theorem and an analysis for its use in conjunction with technological tools, which in this case was the software GeoGebra software. In the course of this work it was treated, besides a brief history, a whole list of the solids of revolution, as the basis for the theorem, showing some ideas that can be worked with in the classroom to reinforce the theorem. And for the conclusion it was worked with exercises on the subject theme so that an analysis could be made about the usability of the theorem.

Keywords: Solids of revolution; Pappus-Guldin theorem; Pappus; Guldin; Spatial geometry.

LISTA DE FIGURAS

Pág.

LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

IFSP	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado de São Paulo
RST	Resolução sem teorema
RCT	Resolução com teorema
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
IDEB	Índices de Desenvolvimento da Educação Básica
d.C.	Depois de Cristo

LISTA DE SÍMBOLOS

A	Área
L	Comprimento
e	eixo de rotação
V	Volume
d	distância do centróide ao eixo de rotação
α	ângulo genérico

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Não há um lugar ou coisa que nos permeia que não possua alguma figura/forma geométrica, algo que seja palpável ou visto e que possa ser interpretado por nossa percepção visual.

De acordo com Kalter,

> [...] o ensino do desenho é essencial para que não haja o bloqueio das capacidades de planejar, projetar ou abstrair, estabelecendo assim uma relação contínua entre a percepção visual e o raciocínio espacial. (1986, apud OLIVEIRA, p. 4. 2005)

Na Educação Básica há algumas dificuldades no ensino-aprendizagem da disciplina Geometria Espacial. O objetivo deste trabalho é apresentar historicamente os teoremas de Pappus-Guldin, e compará-lo na resolução de alguns exercícios com e sem a utilização dele.

Trabalhamos com dois teoremas relacionados a dois autores: Pappus de Alexandria e Paul Guldin (em breve falaremos sobre eles), denominados de Teoremas de Pappus - Guldin, onde calculamos a área e o volume de um sólido de revolução.

A escolha destes teoremas como ferramenta de estudo se dá pelo fato de sua praticidade em alguns momentos, de não ser tão explorado na Educação Básica e de não só trabalhar com sólidos, mas com centróide de polígonos.

Trabalhamos técnicas de resolução de exercícios, nos quais vimos uma forma sem o uso dos teoremas e com seu uso, evidenciando as suas diferenças e também as possíveis dificuldades dos alunos. No caso, detalhamos algumas dessas dificuldades na resolução de alguns[1] exercícios de sólidos de revolução retirados de livros didáticos, plataformas online educacionais, formulados pelo autor, e com auxílio do software GeoGebra.

Neste trabalho, construímos sólidos geométricos a partir de exercícios de livros didáticos demonstrando as resoluções com o auxílio do software, e analisamos com o intuito de apresentar os possíveis obstáculos (no caso epistemológico) encontrados neste tipo de problema, como a visualização dos

[1] O número de exercícios feitos nesta pesquisa será estipulado de acordo com as necessidades.

> objetos a serem tomados ou até mesmo nas propriedades matemáticas envolvidas.

1.1. A importância do Ensino de Geometria

Com todas as influências digitais onde o aluno tem acesso fácil aos cálculos e desenhos, torna-se um desafio para o professor, pois tem que trabalhar com formas de ensino que os motivem.

É importante que os professores explorem as diversas formas de trabalhar com a geometria, tanto no olhar acadêmico, como no dia a dia dos alunos, como calcular as medidas de objetos (comprimento, área e volume), interpretação e a produção de gráficos (como de setores ou colunas - tanto na habilidade de desenhar, como de relacionar a proporção de ângulo e sua representação em porcentagem), planta baixa e mapas; montagem de móveis e brinquedos; noção geográfica e espacial.

Podemos observar a geometria em algumas áreas profissionais, tais como: engenharia, arquitetura, astronomia, moda, construção civil, artes em geral, no esporte (tanto o técnico traçando estratégias, como o esportista se utilizando da noção espacial).

Toda essa noção do espaço que também pode ser relacionada até mesmo em jogos, físicos ou digitais, é proporcionada ao longo de toda a carreira escolar do aluno.

Vemos que nos anos iniciais do Ensino Fundamental é inserido ao aluno, no que se refere a geometria, maneiras de reconhecer as formas e figuras geométricas (num âmbito escolar e do dia a dia), ou seja, seria a parte mais concreta. Já nos anos finais do Ensino Fundamental o aluno irá trabalhar com a parte um pouco mais abstrata, como: plano cartesiano, figuras sólidas e planas, entre outras noções geométricas. Tudo isso para o preparar para o Ensino Médio.

A BNCC (2019) nos diz em relação ao Ensino Médio na habilidade EM13MAT309

> Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam

> composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais. (BRASIL, 2019, p. 276)

Todos esses objetos de conhecimento dão base para as competências e habilidades para o aprendizado dos sólidos de revolução, além de aprendizados posteriores.

1.2. A importância do uso de tecnologias no ensino da matemática

Antes de abordar a importância, temos que enfatizar que o uso da tecnologia não possa e nem seja pauta para a substituição do professor em sala de aula e sim que seja uma complementação didática com intuito de facilitar a compreensão do que está sendo ensinado.

De acordo com Moran (2000),

> A aquisição da informação dos dados dependerá cada vez menos do professor. As tecnologias podem trazer hoje dados, imagens, resumos de forma rápida e atraente. O papel do professor - o papel principal - é ajudar o aluno a interpretar esses dados, a relacioná-los, a contextualizá-los. (MORAN, 2000, p. 29-30)

Fica claro que o uso da tecnologia, hoje em dia, está cada vez mais presente em nossa rotina, e é de se esperar que este uso se apresente durante as aulas, desde maneiras mais simples, como uso de calculadoras, smartphones, tablets, computadores etc.

Devemos nos perguntar o motivo do uso de tecnologias na área educacional, e de acordo com o portal Positivo Tecnologia Educacional temos alguns motivos: desenvolver uma melhor qualidade da educação, tanto para o professor, quanto para o aluno que, por consequência irá ajudar a elevar o Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB); quebrar a rotina de maneira criativa usando recursos tecnológicos e fazendo com que os alunos tenham mais interesse pelo conteúdo, o que contribui com o engajamento do aluno, assim diminuindo a evasão escolar e reprovação; melhorar a relação professor-aluno; estimular o auto aprendizado do aluno e a divulgação deste; respeitar a individualidade; aumentar a atenção; estimular a interação; aumentar a motivação.

Notamos que o uso da tecnologia digital, no ensino da matemática, ajuda a percepção e até mesmo melhorar o rendimento dos alunos, segundo conclusões tiradas dos artigos **GeoGebra e quadro interativo: uma possibilidade para o ensino de geometria espacial no ensino médio** (ZOTTO et al, 2013) e **O uso de softwares na aprendizagem da matemática.** (ABREU, 2011). O uso das Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) na Matemática aparece em: calculadoras, no estudo de planilhas eletrônicas (exemplo: Excel), no estudo de plataformas e *softwares* para construção de funções e seus gráficos (exemplo: Winplot, Wolfram Alpha e GeoGebra) bem como no estudo da geometria plana/espacial (exemplo: GeoGebra). Portanto notamos a suma importância do uso de programas de computadores como suporte para o ensino e a aprendizagem.

Percebemos que a BNCC, sugere o uso de diversas tecnologias, incluindo as mais antigas, como o ábaco, assim como as mais novas, no caso de softwares.

A Base Nacional Comum Curricular (2019) informa que:

> Desse modo, recursos didáticos como malhas quadriculadas, ábacos, jogos, livros, vídeos, calculadoras, planilhas eletrônicas e softwares de geometria dinâmica têm um papel essencial para a compreensão e utilização das noções matemáticas. Entretanto, esses materiais precisam estar integrados a situações que levem à reflexão e à sistematização, para que se inicie um processo de formalização. (BRASIL, 2019, p. 276)

De fato, percebemos que o estímulo para o conhecimento de um ponto de vista diferente do usual pode acarretar em uma melhora na Educação Básica.

1.3. Objetivo Geral

Apresentar a relevância dos teoremas de Pappus - Guldin como ferramentas matemáticas no auxílio do ensino-aprendizagem da Geometria Espacial.

1.4. Objetivos Específicos

1. Propor de atividades evidenciando o uso dos teoremas de Pappus - Guldin

2. Analisar as possíveis resoluções de exercícios de Sólidos de Revolução, com o auxílio do GeoGebra.
3. Evidenciar as possíveis dificuldades que os alunos possam ter.
4. Mostrar as possíveis diferenças nas resoluções dos exercícios.

1.5. Metodologia

Para as resoluções dos exercícios utilizamos de conhecimentos básicos de geometria plana e espacial. Em paralelo fizemos reflexões das possíveis dificuldades que os alunos possam enfrentar ao resolver os problemas, assim como responder a essas dúvidas.

Para a criação e exposição das figuras planas e os sólidos usamos o software de Geometria Dinâmica GeoGebra.

Em contexto geral resolvemos os exercícios, enquanto apresentamos como usar o *software* para que fossem criadas as figuras.

2 Sólidos de revolução

Neste capítulo detalhamos os principais sólidos de revolução e os que serão utilizados neste trabalho, com ajuda da defesa de mestrado **Sólidos de Revolução: Uma proposta de estudo**.

Em um plano colocamos uma reta **e**, que iremos chamá-la de eixo de rotação, e uma linha[2], coplanar ao eixo, de comprimento L (é necessário que a linha e o eixo não se cruzem, mas podem se tocar). Agora cada ponto de L fará uma circunferência em torno de **e** formando cada destas um plano perpendicular com o eixo. Na reunião de todos esses círculos teremos um sólido de revolução. Em outras palavras, sólidos de revolução são todos aqueles que são formados a partir da rotação de uma figura plana em torno de um eixo.

Figura 1 - Rotação da linha L em torno de **e**

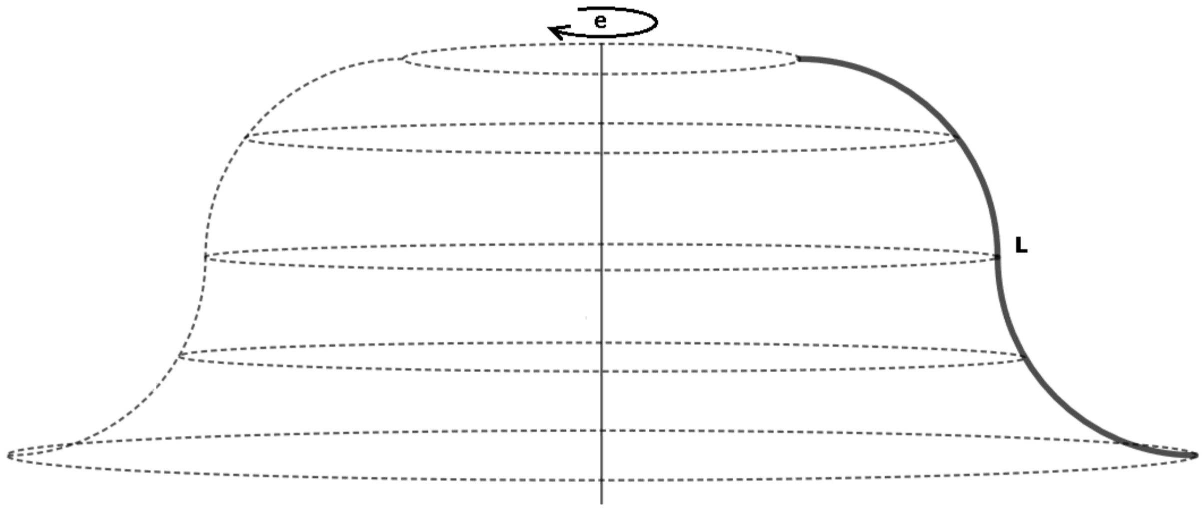

Imagem elaborada pelo autor

Sólidos de revolução são todos aqueles que são formados a partir da rotação de uma figura plana em torno de um eixo. É interessante ressaltar que se tratando de uma revolução de uma figura bidimensional, o objeto tridimensional formado será uma figura sólida.

[2] Pode ou não ser uma região fechada

Alguns exemplos de sólidos de revolução abordados são:

a) Cilindro circular reto é formado por meio da rotação de um retângulo em torno do seu próprio eixo ou o eixo de rotação pode ser qualquer de suas arestas;

Figura 2 - Rotação de um retângulo em torno de **e**

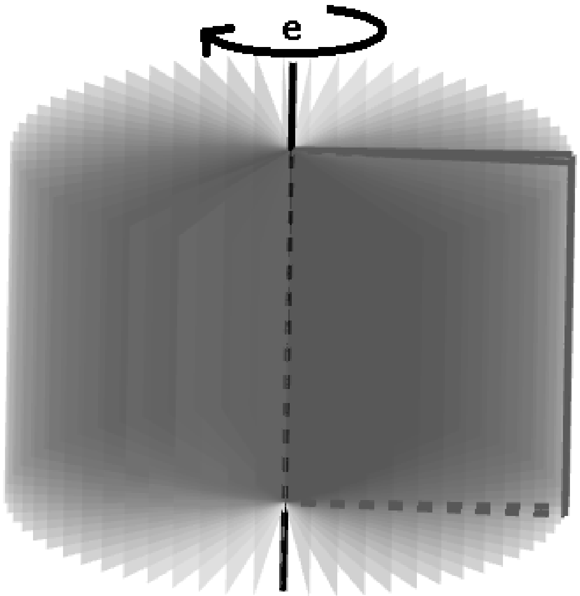

Imagem elaborada pelo autor

b) Esfera é formada por meio da rotação de uma semicírculo em torno de seu diâmetro;

Figura 3 - Rotação de uma semicírculo em torno de **e**

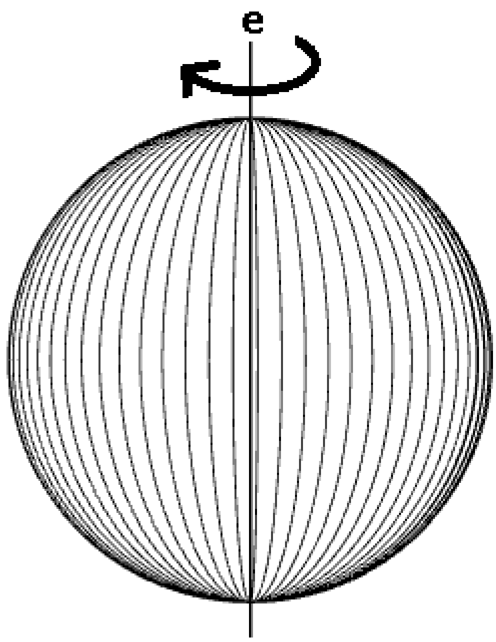

Imagem elaborada pelo autor

c) Cone circular reto é formado pela rotação ou de um triângulo retângulo, onde o eixo de rotação pode ser qualquer dos catetos, ou de um triângulo isósceles no qual o eixo de rotação é a altura relativa à base.

Figura 4 - Rotação de um triângulo retângulo em torno de **e**

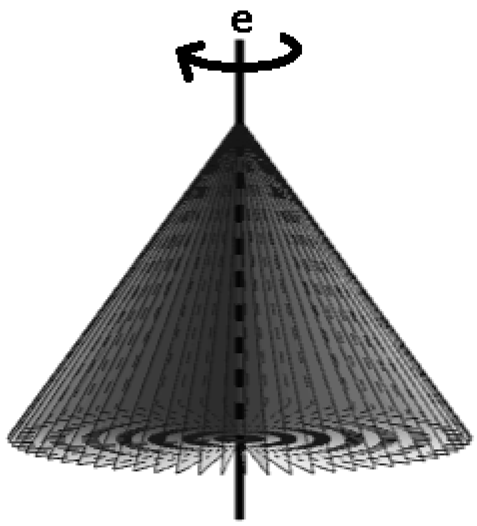

Imagem elaborada pelo autor

d) Toro ou toroide é o sólido gerado na revolução de uma curva plana fechada (no nosso caso um círculo) em torno de uma reta, possui um formato de câmara de ar.

Figura 5 - Rotação de uma circunferência em torno de **e**

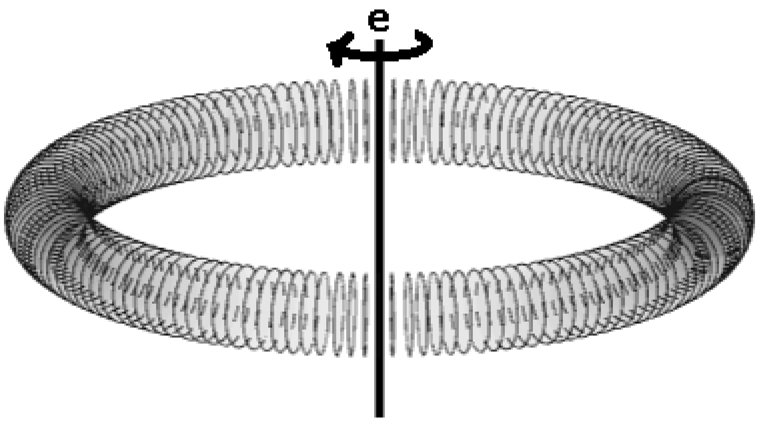

Imagem elaborada pelo autor

3 O TEOREMA

3.1. Contexto histórico

Esse teorema é uma contribuição de dois matemáticos de épocas diferentes, A enciclopédia virtual Britannica diz que o primeiro é Pappus de Alexandria (290 d.C. - 350 d.C), que foi o último geômetra grego de importância, no qual escreveu um tratado de oito livros conhecido como *The Colletion*.

De acordo com o *MacTutor, o* outro contribuinte deste teorema é Paul Guldin (1577 d.C. - 1643 d.C.), que nasceu com o nome de Habakkuk Guldin. Guldin foi criado como protestante, e permaneceu assim até seus 20 anos, pois ele se converteu ao catolicismo (quando mudou seu primeiro nome para Paul). Até então ele não tinha recebido estudos sobre Matemática. Em sua nova religião ingressou na Ordem dos Jesuítas que eram muito comprometidos com seus rigorosos estudos, tanto que Guldin conquistou um doutorado em divindade[3].

Em 1609, Guldin foi levado para o Colégio Jesuíta Romano de Roma, visto que demonstrara uma considerável habilidade matemática. Foi instruído por Clavius que possuía uma abordagem clássica dos métodos euclidianos, que influenciou o matemático, que mais tarde também se tornaria professor deste colégio. Deste ponto em diante Paul Guldin foi se inserindo no campo matemático cada vez mais, publicando diversos trabalhos o seu principal foi o *Centrobaryca*[4], uma obra relacionada ao estudo do centro de gravidade.

Alguns estudiosos divergem sobre a atuação de Guldin neste teorema, pois sua obra *Centrobaryca* além de feita depois de Guldin ter estudado o livro VII de Pappus, o qual continha a 1ª Relação de Pappus (A razão entre dois sólidos de revolução é igual ao produto entre a razão das áreas rotacionadas e a razão das distâncias dos respectivos centróides com os eixos de rotação.) e em sua demonstração utilizou a metafísica.

[3] No texto traduzido a palavra era divinity, que pode ser traduzido também como teologia.
[4] Esta obra foi dividida em quatro volumes de 1635 e 1641: Volume 1: discussão do centro gravitacional da Terra; Volume 2: regra sobre os centros de gravidade; Volume 3: volume e superfície de cones, cilindros, e sólidos de revolução; Volume 4: ataca o trabalho de outros matemáticos.

Um nome que dizem ser o responsável pela demonstração, de acordo com o *Mathematical Association of America*, foi James Gregory, um escocês, que viveu entre os anos de 1638 e 1675, foi professor em Edinburgh e St. Andrews, e em 1668 publicou *Geometriae Pars Universalis*[5], com mais de 70 teoremas, sendo que um destes ele usou para a prova da 1ª Relação de Pappus se baseando no Princípio de Cavalieri.[6]

3.2. Teorema de Pappus - Guldin

A escolha desse teorema foi devido à possibilidade de trabalhar com sólidos de revolução além das propostas convencionais. Trata-se de dois teoremas que envolvem a geometria espacial. Inicialmente teremos uma figura plana que irá projetar uma figura espacial girando em volta de um eixo de rotação, ou seja, criando um sólido de revolução. Nesta figura plana iremos destacar um ponto Q, que seria o centróide. Após a revolução teremos o objeto tridimensional. É válido ressaltar que o seu uso não será para todos os sólidos, portanto será para figuras que tenham o centróide de fácil localização, do contrário iremos utilizar o teorema para calcular o centróide.

Nesta seção estamos nos baseando na

O primeiro teorema irá tratar do volume do sólido gerado: o volume gerado pela figura plana será o produto entre a sua área A e o comprimento da circunferência cujo raio d é a distância entre o centróide e o eixo de rotação.

$$V = 2\pi dA$$

Já o segundo teorema aborda a área do sólido gerado: a área gerada pela linha plana será o produto entre o arco de perímetro L e o comprimento da circunferência cujo raio d é a distância entre o centróide e o eixo de rotação.

[5] Uma tradução livre seria “A Parte Universal da Geometria”.
[6] O Princípio de Cavalieri nos diz que: dado dois sólidos apoiados num plano, de tal forma que suas bases sejam equivalentes, se seccionarmos os sólidos por um plano paralelo ao plano da base e as secções determinadas pelo segundo plano forem equivalentes, os sólidos terão volumes iguais.

$$A = 2\pi dL$$

Não iremos demonstrar as fórmulas de volume e área, pois esse não é o intuito do trabalho. Mas para os interessados, a demonstração da resolução pode ser encontrada em Hipátia - Revista brasileira de história, educação e matemática, v.4, n.2. no artigo **Os Teoremas de Pappus Para Os Sólidos De Revolução: A Demonstração De James Gregory** (RAUTENBERG et al, 2019)

Um ponto importante a se discutir sobre os dois teoremas, e que usaremos para a resolução dos exercícios, é a questão de uma revolução não completa. Quando a figura plana der um giro de α radianos devemos dividir proporcionalmente o fator 2π pelo ângulo em radiano.

3.3. Particularidades dos sólidos

O uso dos teoremas abordados não serve apenas para calcular o valor da área e volume, alguns exemplos de sólidos de revolução que são abordados na Educação Básica podem ter suas fórmulas, de área e volume, deduzidas utilizando os dois teoremas de Pappus - Guldin, ou até mesmo com o cálculo do centróide:

a) Dado um retângulo com seus vértices nos pontos A (0, 0), B (0, a), C (b, a) e D (b, 0), será rotacionado em torno do seu lado AB, com o Eixo y como eixo de rotação:

Apresentação da área (A):

O centróide deste polígono será no encontro de suas diagonais no ponto Q($\frac{b}{2}$, $\frac{a}{2}$), porém a responsável por fazer a área de superfície é a linha poligonal (que não tem o mesmo centróide do retângulo), por isso iremos calcular distância **d** do seu centróide ao eixo de rotação. O perímetro da linha poligonal L será $a + 2b$; a área A do retângulo será ab.

Figura 6 - Montagem do retângulo

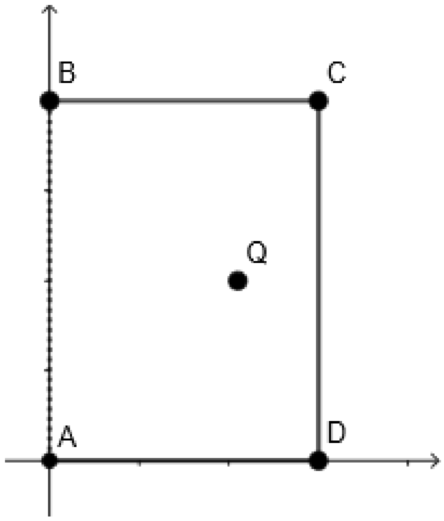

Imagem elaborada pelo autor

Temos que a área total do cilindro circular reto que será formado é dada por $A = 2\pi b(b + a)$e por Pappus - Guldin seria $A = 2\pi d(a + 2b)$, logo podemos criar a igualdade:

$$2\pi b(b + a) = 2\pi d(a + 2b)$$

$$\frac{b(b+a)}{(a+2b)} = d$$

$$d = \frac{b(b+a)}{(a+2b)}$$

Cálculo do volume (V):

$$V = 2\pi dA$$

$$V = 2\pi.\frac{b}{2}.ab$$

$$V = \pi.b.ab$$

$$V = \pi.b^2a$$

$$V = A_{Base}.Altura$$

b) Dado uma semicircunferência que se encontra posicionada diametralmente no eixo de rotação e, possui um raio r, irá fazer uma rotação completa em torno de e. Podemos determinar a distância do ponto Q do centróide da semicircunferência até o eixo de rotação.

Cálculo da distância (d):

A ideia aqui é utilizar a fórmula de volume da esfera já conhecido. Como já foi dito, o sólido gerado será uma esfera, então o volume será $V_{ESFERA} = \frac{4}{3}\pi r^3$.E a área da semicircunferência é $A_{SEMICIRCUNFERÊNCIA} = \frac{\pi r^2}{2}$:

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = 2\pi d \frac{\pi r^2}{2}$$

$$d = \frac{4r}{3\pi}$$

É interessante ressaltar duas coisas, a primeira é se utilizando de d podemos chegar na fórmula do volume, e a segunda é que a figura plana é simétrica e com seu eixo de simetria perpendicular ao eixo e podemos localizar não só a distância como o exato local:

Figura 7 - Demonstrando o eixo de simetria

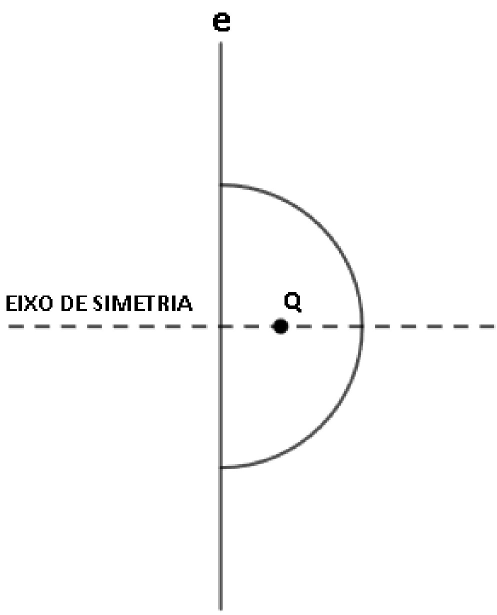

Imagem elaborada pelo autor

c) Dado um triângulo com seus vértices nos pontos A (0, 0), B (0, a) e C (b, 0), será rotacionado em torno do seu lado $\overline{AB}$, com o Eixo y como eixo de rotação:

Apresentação do volume (V):

O centróide deste triângulo será no encontro de suas medianas no ponto Q($\frac{b}{3}$, $\frac{a}{3}$), porém temos que calcular a distância d do centróide da linha poligonal, o perímetro $L = b + \sqrt{a^2 + b^2}$, e a área A do triângulo será $\frac{ab}{2}$.

Figura 8 - Montagem do triângulo

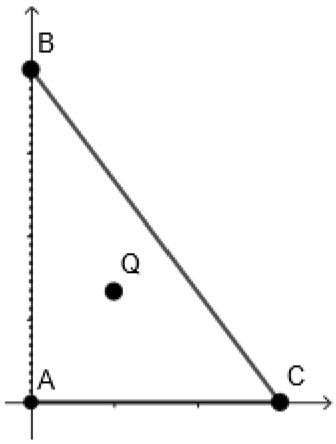

Imagem elaborada pelo autor

Temos que a área total do cone circular reto que será formado é dada por $A = \pi b(\sqrt{a^2 + b^2} + b)$e por Pappus - Guldin seria $A = 2\pi d(b + \sqrt{a^2 + b^2})$, logo podemos criar a igualdade:

$$\pi b(\sqrt{a^2 + b^2} + b) = 2\pi d(b + \sqrt{a^2 + b^2})$$

$$d = \frac{b}{2}$$

Apresentação do volume (V)

$$V = 2\pi dA$$

$$V = 2\pi.\frac{b}{3}.\frac{ab}{2}$$

$$V = \frac{\pi b^2 a}{3}$$

$$V = \frac{1}{3}\pi b^2 a$$

$$V = \frac{1}{3}.A_{base}.Altura$$

4 Exercícios

Neste capítulo iremos trabalhar na resolução de exercícios sobre sólidos de revolução com e sem o auxílio do GeoGebra. Após o enunciado iremos explicar e montar as figuras planas e os sólidos gerados. Na resolução com o auxílio do teorema chamaremos de RCT e sem o auxílio será RST.

1) Calcule a área e o volume do sólido de revolução gerado pela rotação em torno do EixoY, na qual o polígono em questão é o losango ABCD, com A(1, 2) e B(3, 3), e de diagonais medindo 2 e 4.

Montagem:

a) Com as janelas 2D e 3D abertas, inicie seu polígono na janela bidimensional. No caso, criamos o polígono pol1 que é composto pelos pontos A(1, 2), B(3, 3), C(5, 2) e D(3,1).

Figura 9 - Montagem do losango

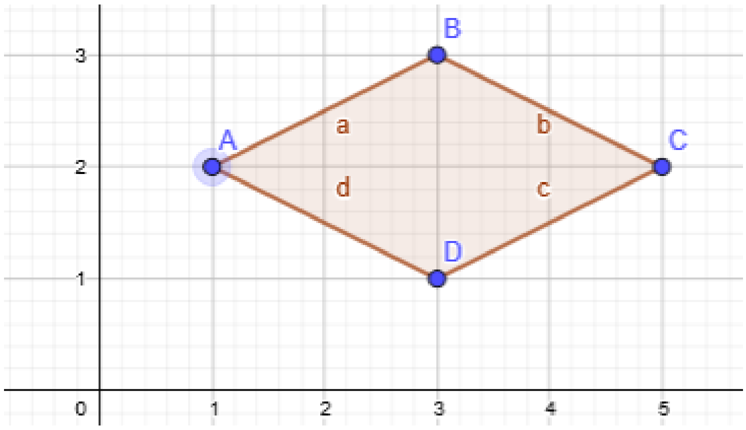

Imagem elaborada pelo autor

b) Clique com o botão direito neste e abra suas configurações, e na guia “Avançado” clique em “Janela de Visualização 3D”.

c) Crie um “Controle Deslizante”, na Janela 2D, troque o nome para α, deixe na opção “Ângulo”, e altere o incremento para 0,1.

d) Na janela de visualização 3D escolha o ícone "Girar em torno de uma reta", selecione o losango, depois o Eixo Y e, então selecione o ângulo α.

Marque a figura e com o botão direito do mouse escolha "animar" e escolha "rastro".

No final da montagem o sólido ficará assim:

Figura 10 - Sólido de revolução formado

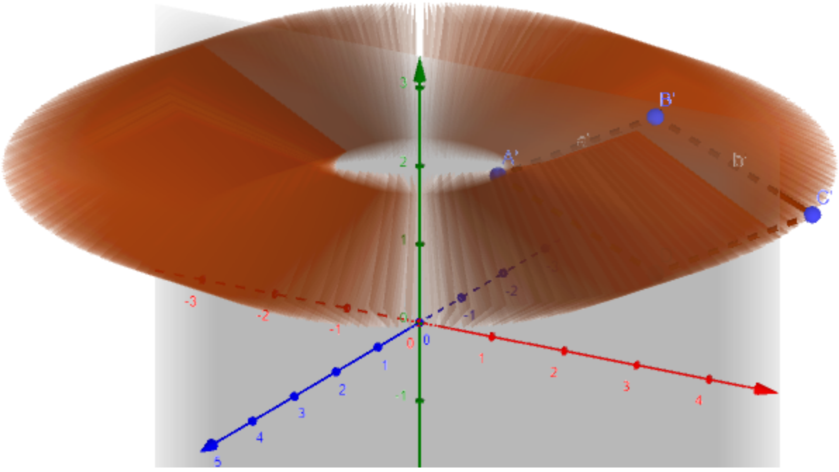

Imagem elaborada pelo autor

Resolução:

- RST:

Uma possível tentativa de resolução do aluno será formar este objeto a partir de outros já conhecidos, devido o sólido formado não ser estudado.

Veja como o sólido formado fica em corte.

Figura 11 - Corte do sólido

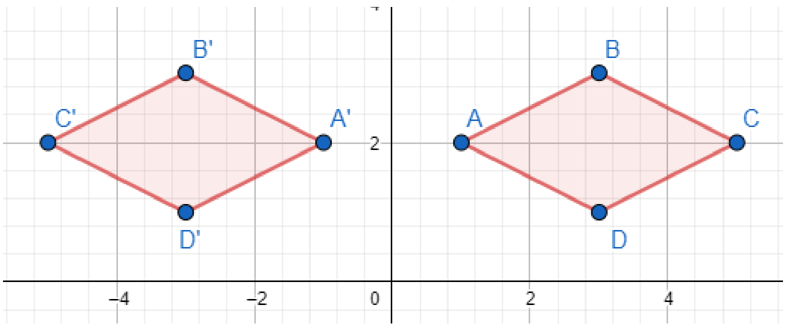

Imagem elaborada pelo autor

Perceba que podemos formar uma nova figura plana (no caso iremos trabalhar só com a metade de cima da reta que passa em AB, já que trata-se de uma figura simétrica), que pode ser formado um triângulo.

Figura 12 - Triângulo formado a partir da Figura 11

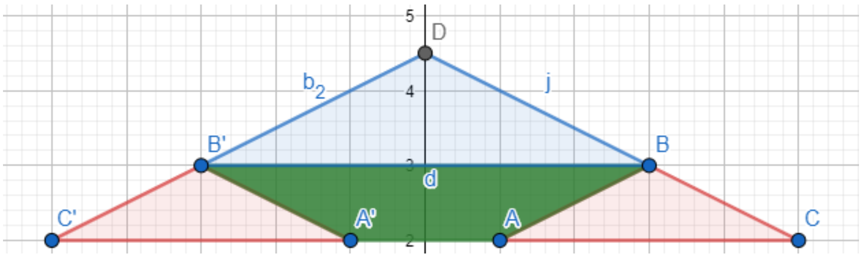

Imagem elaborada pelo autor

Este triângulo se rotacionado em seu próprio eixo vertical formaria, além da metade do primeiro objeto, um cone e um tronco de cone. Como a imagem é espelhada horizontalmente, faremos os cálculos em relação ao sólido de cima e multiplicaremos por 2.

O volume do sólido então será o cone maior menos o cone menor (azul) e o tronco de cone (verde). Para calcular o volume do maior cone precisamos calcular a altura do menor cone, para isso vamos nos utilizar da imagem plana. Perceba que há uma semelhança entre os triângulos CC'D e BB'D. E chamaremos a altura (em relação ao vértice D) do triângulo BB'D de "x", então a razão de proporção ficará:

$$\frac{6}{10} = \frac{x}{x+1} \Leftrightarrow 10x = 6x + 6 \Leftrightarrow 4x = 6 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$$

Veja que para calcular o volume do tronco de cone precisamos calcular a altura do cone que forma o tronco. E para fazer isso iremos fazer uma projeção do trapézio ABB'A' a fim de formar um triângulo.

Figura 13 - Triângulo formado a partir da figura 12

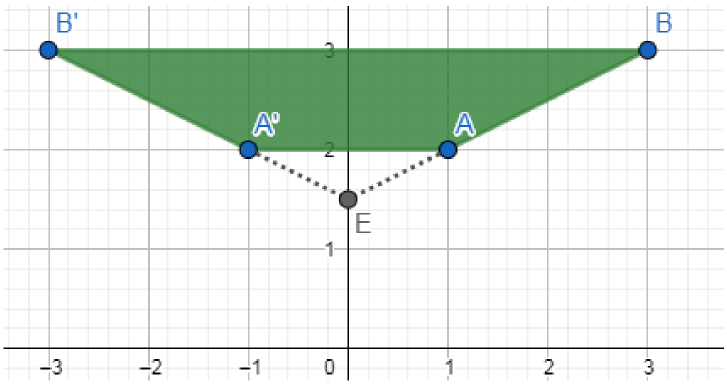

Imagem elaborada pelo autor

Nota-se que os triângulos BB'E e AA'E são semelhantes, e seja y a altura do triângulo AA'E, então a razão de proporção ficará:

$$\frac{6}{2} = \frac{y+1}{y} \Leftrightarrow 6y = 2y + 2 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}$$

Nota: os valores de x e y poderiam ser calculados somente visualizando os gráficos feitos.

Calculados os valores vamos ao volume do sólido desejado. Antes é válido ressaltar alguns valores e ideias para a fim da resolução:

- raio do cone maior = 5
- altura do cone maior = $\frac{5}{2}$
- raio do cone menor = 3
- altura do cone menor = $\frac{3}{2}$
- o volume do tronco de cone será calculado a partir do cone que o completa

$$V = 2(V_{cone\ maior} - V_{cone\ menor} - V_{tronco})$$

$$V = 2(\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 5^2 \cdot \frac{5}{2} - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3^2 \cdot \frac{3}{2} - \left(\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3^2 \cdot \frac{3}{2} - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 1^2 \cdot \frac{1}{2}\right))$$

$$V = 24\pi$$

Para a área usaremos o mesmo artifício:

$$A = 2(A_{LATERAL\ CONE\ MAIOR} - A_{LATERAL\ CONE\ MENOR} + A_{LATERAL\ TRONCO})$$

$$A = 2(\pi. 5.\sqrt{5^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2} - \pi. 3.\sqrt{3^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} + \pi(1 + 3).\sqrt{5})$$

$$A = 24\pi\sqrt{5}$$

RCT:

Perceba que o sólido gerado não possui nenhuma fórmula já definida no âmbito escolar, e também não faz parte de nenhum sólido conhecido (como se fosse um tronco de cone). Dadas as constatações, vamos usar o teorema de Pappus-Guldin, pois a parte que é mais complexa para determinar o centróide neste caso não será complexa neste caso, porque o losango é uma figura simétrica e seu centróide está no encontro das suas diagonais, no caso o ponto é C(3, 2).

Para o cálculo da área e do volume precisamos da distância d de C até o eixo de rotação

$$d = 3$$

o perímetro L do losango.

Como todos os lados são iguais podemos apenas multiplicar por 4 o tamanho do segmento AB.

$$L = 4\sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2} \Leftrightarrow L = 4\sqrt{(3 - 2)^2 + (3 - 1)^2} \Leftrightarrow L = 4\sqrt{5}$$

A área A do polígono

$$A = \frac{D.d}{2} \Leftrightarrow A = \frac{4.2}{2} \Leftrightarrow A = 4$$

A área total será:

$$A = 2\pi dL$$

$$A = 2\pi(3)(4\sqrt{5})$$

$$A = 24\pi\sqrt{5}$$

O volume será:

$$V = 2\pi dA$$

$$V = 2\pi(3)(4)$$

$$V = 24\pi$$

Para as considerações finais do exercício podemos afirmar que a primeira dificuldade será a visualização do sólido gerado, a segunda seria como calcular tanto o seu volume como a sua área total. Esse caso resultou em uma figura não estudada na Educação Básica, da qual necessitou de muitas passagens a mais em RST do que em RCT. Com todas essas divergências podemos constatar que a utilização do teorema nesse exercício o torna muito mais simples.

É interessante constatar que por mais que o exercício possa ser facilmente respondido com o Teorema de Pappus - Guldin o uso do GeoGebra nesse caso fica mais interessante para o aluno, para a questão visual.

2) Um triângulo escaleno de lados 13 cm, 14 cm e 15 cm gira 360° em torno do lado de 14 cm. Determine a área e o volume do sólido gerado:

Montagem:

a) Crie uma circunferência C1, de centro A e raio 13 cm;

b) Em C1 crie uma nova circunferência C2 de centro B e raio 14cm;

c) Em A crie uma terceira circunferência C3 de raio 15cm;

d) Marque o ponto C que será a intersecção entre C2 e C3;

e) Monte o triângulo ABC, onde AB = 13cm,BC = 14cm e CA = 15cm;

f) Para montar o sólido faça os mesmo passos feitos no exercício 1, nos passos 3 e 4.

Figura 14 - Pontos de vistas do sólido gerado

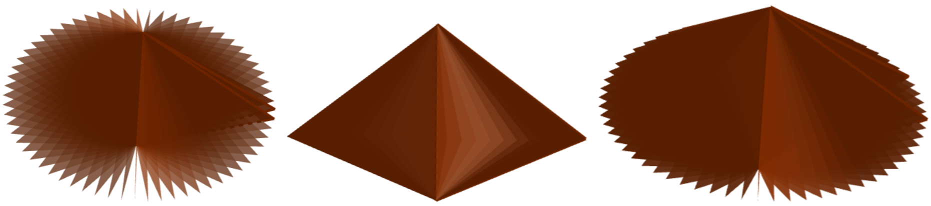

Imagem elaborada pelo autor

Resolução:

RST:

Percebe-se que o sólido em questão é a junção de dois sólidos de mesmo raio r e alturas diferentes, x e 14 - x, como ilustra o esquema a seguir:

Figura 15 - Triângulo que formou a FIgura 14

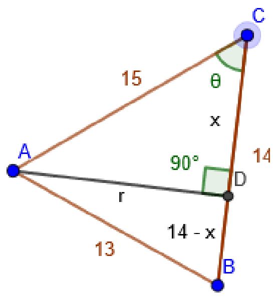

Imagem elaborada pelo autor

A ideia será calcular o valor do $cos\theta$, pois assim poderemos calcular o raio e as alturas:

$$13^2 = 14^2 + 15^2 - 2 \cdot 14 \cdot 15 \cdot cos\theta \Leftrightarrow cos\theta = 0,6$$

$$\frac{x}{15} = 0,6 \Leftrightarrow x = 9 \therefore 14 - x = 5$$

$$15^2 = 9^2 + r^2 \Leftrightarrow r = 12$$

Logo teremos um cone de raio 12cm e altura 9cm, e um cone de raio 12cm e altura 5cm, portanto o volume V do sólido gerado será:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 12^{2} \cdot 9 + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 12^{2} \cdot 5 \Leftrightarrow V = 662\pi\, cm^{3}$$

E sendo A a área do sólido:

$$A = \pi \cdot 12 \cdot 15 + \pi \cdot 12 \cdot 13 \Leftrightarrow A = 336\pi\, cm^{2}$$

RCT:

Note que o triângulo que formou o sólido não possui um centróide de fácil localização, então não seria uma maneira tão indicada usar o teorema de Pappus - Guldin. Porém podemos usar o teorema para achar as distância do centróide até CB

A dificuldade desse exercício é que para achar o raio e as alturas relativas devemos fazer mais de uma relação, não direta.

3) Dado o hexágono regular ABCDEF, com lado 1, sendo que A=(1,2) e B=(2,2). Calcule o volume e a área do sólido formado pela rotação do hexágono em torno do eixo y.

Montagem:

a) Com a ferramenta "Polígono Regular" marque os pontos A e B, e escolha o número de vértices.

b) Para gerar o sólido vamos usar o mesmo método feito nos itens b), c) e d), do exercício 1.

Figura 16 - Hexágono regular referente ao Exercício 3

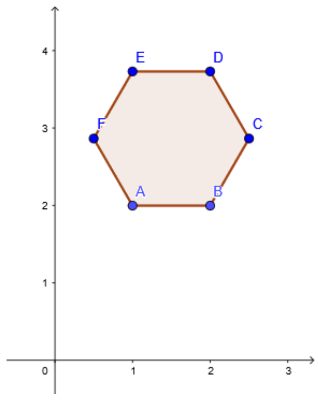

Imagem elaborada pelo autor

c) Depois das etapas a) e b) teremos o seguinte sólido:

Figura 17 - Sólido gerado

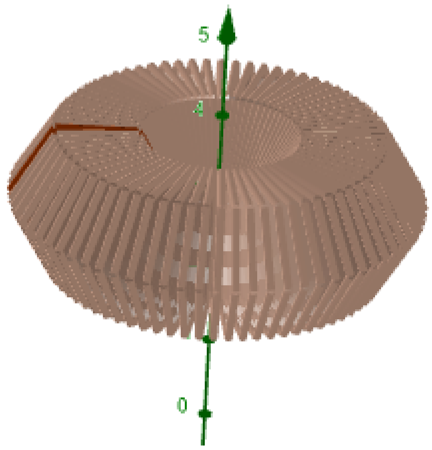

Imagem elaborada pelo autor

Resolução:

RST:

O sólido formado não é um sólido discutido na Educação Básica, e para a resolução desse exercício teríamos que usar a técnica usada no exercício 1, da qual completamos espaços vazios do sólido de forma a transformá-lo em um objeto conhecido. Porém vimos que esta maneira é uma estratégia muito demorada.

RCT:

Como trata-se de um polígono regular de lado 1, então o perímetro L = 6. O centróide será o próprio centro do hexágono, logo d = 1,5.

A área:

$$A = 2\pi.(1,5).6$$

$$A = 18\pi\,(u.m.)^2$$

O volume:

$$V = 2\pi.(1,5).\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$V = \frac{9\pi\sqrt{3}}{2}\,(u.m.)^3$$

5 Considerações Finais

Ficou visível que o fato de se trabalhar com uma ferramenta gráfica, como auxílio, ajuda para que os alunos entendam aquilo que estão fazendo, e não tornando o aprendizado em uma espécie de produção de linha. Fazendo uma analogia: a ferramenta auxiliadora não pode ser ponte entre o aluno e o aprendizado e sim os postes de luz, ou seja, você consegue fazer sem, mas ajuda para a realização da tarefa.

Conseguimos notar com os exercícios feitos que existem dois tipos de exercícios, os que são viáveis e os que não são, se utilizando do Teorema de Pappus - Guldin. E para avaliarmos essa viabilidade o primeiro dos pontos é o centróide, pois como ele é a diferença entre o método estudado e os demais, se para identificar a sua distância do eixo de rotação seja trabalhosa ou não seja possível de calcular, acreditamos que seja melhor usar outros métodos, mesmo que sendo um sólido que para fazer os cálculos tenhamos que utilizar as mesmas técnicas usadas no Exercício 1 (RST). Mas se não for trabalhoso esse cálculo da distância, é interessante usar o teorema. Lembrando que a viabilidade da resolução do exercício está atrelada à sua praticidade.

É interessante fazer alguns exercícios do modo mais longo para que o aluno possa usar de diferentes estratégias. É válido ressaltar que não é de nosso interesse estimular a forma mais rápida de se fazer um exercício.

O aprendizado de um novo conteúdo sempre é válido para os alunos, pois os ajudam a pensar mais, ter mais ferramentas e assim ter mais estratégias.

Quando usamos este teorema em cursos de graduação o seu uso é mais amplo do que seu uso no Ensino Médio, pois há formas planas que não aprendemos a calcular o perímetro, a área, ou o centróide, o que na graduação é algo mais corriqueiro. Por isso não devemos, como professores(as) trabalhar com exercícios de nível elevado achando que a ferramenta irá ser útil em todas instâncias.

Para fazer o cálculo da área total ou do volume de uma figura sólida precisamos saber alguns detalhes, como por exemplo o raio, temos também de saber que sólido está sendo estudado. Utilizando o teorema podemos quebrar essa dificuldade, pois o aluno não precisa saber o que será gerado, e é nessa lacuna que as ferramentas entram para auxiliar o aluno, é válido ressaltar que qualquer dessas ferramentas não têm como objetivo substituir o professor.

Referências

ABREU, A.C. **O Uso de Softwares na Aprendizagem da Matemática.** Disponível em: http://www.ic.ufmt.br/sites/default/files/field/pdf/Monografia/AsturioAbreu.pdf. Acesso em 19 maio 2019.

ANTUNES, Juliana. **Conheça as razões pelas quais inserir a tecnologia na educação é fundamental para enriquecer o ensino na sua instituição de ensino**. Disponível em: https://www.positivoteceduc.com.br/blog-inovacao-e-tendencias/motivos-para-usar-a-tecnologia-na-educacao/. Acesso em 01 ago. 2019.

BRASIL. Secretaria da educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasil. 2019. Acesso em 06 jan. 2021

JONES, Alexander Raymond. **Pappus de Alexandria - Matemático grego**. Disponível em: https://www.britannica.com/biography/Pappus-of-Alexandria. Acesso em 13 set. 2019.

LEAHY, Andrew. **James Gregory e o Teorema de Pappus-Guldin - Antecedentes Históricos: Guldin**. Disponível em: https://www.maa.org/press/periodicals/convergence/james-gregory-and-the-pappus-guldin-theorem-historical-background-guldin. Acesso em 29 out. 2019.

MADEIRA,L.L. **Sólidos de Revolução: Uma Proposta de Estudo**. Disponível em: https://repositorio.ufjf.br/jspui/handle/ufjf/830. Acesso em 12 jun 2019.

O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F.. **Paul Guldin**. Disponível em: http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Guldin.html. Acesso em 11 maio 2020.

OLIVEIRA, Clézio Lemes. **Importância do Desenho Geométrico**. Trabalho de Conclusão de Curso. Universidade Católica de Brasília. Brasília. 2005. Disponível em: https://repositorio.ucb.br:9443/jspui/handle/10869/1547. Acesso em 18 jun. 2020.

ZOTTO, Naiara et al. **GEOGEBRA 3D E QUADRO INTERATIVO: UMA POSSIBILIDADE PARA O ENSINO DE GEOMETRIA ESPACIAL NO ENSINO MÉDIO**. In: **Congresso Internacional de Educação da Matemática**, nº 6, 2013. Disponível em http://www.conferencias.ulbra.br/index.php/ciem/vi/paper/viewFile/778/621. Acesso em 03 mar. 2021