INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE SÃO PAULO

SARAH GÉRCIA DA SILVA SOARES

HISTÓRIA DOS NÚMEROS COMPLEXOS

SÃO PAULO
2021

SARAH GÉRCIA DA SILVA SOARES

HISTÓRIA DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo – Campus São Paulo como requisito parcial para obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Leandro Albino Mosca Rodrigues.

SÃO PAULO
2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

SOARES, Sarah Gércia da Silva.

História dos Números Complexos / Sarah Gércia da Silva Soares. - São Paulo: IFSP, 2021.

61f

Trabalho de Conclusão do Curso Superior de Licenciatura em Matemática – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo. Orientador: Leandro Albino Mosca Rodrigues.

1. Números Complexos. 2. História da Matemática. 3. Aplicações. História dos Números Complexos.

SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE SÃO PAULO

DIRETORIA GERAL/CAMPUS SAO PAULO

Câmpus São Paulo, (11) 2763-7520, Rua Pedro Vicente, 625, CEP 01109-010, São Paulo (SP)

ATA DE DEFESA DE TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

Na presente data realizou-se a sessão pública de defesa da Trabalho de Conclusão de Curso intitulada **História dos Números Complexos** apresentada pela aluna **Sarah Gercia da Silva Soares (SP1664891)** do Curso **LICENCIATURA EM MATEMÁTICA (Câmpus São Paulo)**. Os trabalhos foram iniciados às **13:30** pelo Professor presidente da banca examinadora, constituída pelos seguintes membros:

Membros	IES	Presença	Aprovação/Conceito *(quando exigido)*
Leandro Albino Mosca Rodrigues (Orientador)	IFSP	Sim	10,0
Henrique Marins de Carvalho (Examinador Interno)	IFSP	Sim	10,0
Felipe Marcos Pinto (Examinador Interno)	IFSP	Sim	10,0

Observações:

____

____

____

____

____

A banca examinadora, tendo terminado a apresentação do conteúdo da monografia, passou à argüição da candidata. Em seguida, os examinadores reuniram-se para avaliação e deram o parecer final sobre o trabalho apresentado pelo aluno, tendo sido atribuído o seguinte resultado:

[x] Aprovado [ ] Reprovado Nota (quando exigido): 10,0

Proclamados os resultados pelo presidente da banca examinadora, foram encerrados os trabalhos e, para constar, eu lavrei a presente ata que assino juntamente com os demais membros da banca examinadora.

SÃO PAULO / SP, 12/02/2021

Leandro Albino M Rodrigues

____

Leandro Albino Mosca Rodrigues

____

Henrique Marins de Carvalho

Felipe Marcos Pinto

____

Felipe Marcos Pinto

"Para compreender a ciência é preciso conhecer sua história"

– Augusto Comte.

À minha mãe Ana, que apesar de tantas dificuldades esteve sempre ao meu lado me incentivando, me apoiando e contribuindo para minha formação tanto pessoal quanto acadêmica. A ela, que acordava todos os dias às quatro da manhã para me levar ao ponto de ônibus para que eu pudesse chegar até aqui. Mãe, é por você. Obrigada.

AGRADECIMENTO

Agradeço...

Primeiramente a Deus, por ter me dado forças, saúde, sabedoria, me ouvir e me acolher durante todos esses longos anos. Que cuidou da minha família para que eu pudesse realizar essa conquista, que me protegeu durante todo esse período e colocou pessoas maravilhosas na minha vida, pessoas que me ajudaram a chegar até aqui.

À minha mãe Ana, porque sem ela nada seria possível. Por ter batalhado para que eu conseguisse fazer pelo menos um ano de cursinho e conseguisse uma vaga no IFSP. Por todas as vezes que ela me levou ao ponto de ônibus de madrugada para que eu pudesse assistir às aulas. Por todos esses anos de amizade, amor e carinho. Por me entender e me ajudar nos finais de semana que eu tinha que estudar até tarde. Por se preocupar comigo todos os dias que eu saia de casa. Por me ajudar com os trabalhos mesmo que não entendesse quase nada. Por fazer minhas marmitas, e se preocupar em colocar na minha mochila de manhã porque sabia que eu ia esquecer. Por ter tido paciência comigo nos meus dias ruins e de mau-humor. Por me ajudar a enfrentar a vida de trabalho e faculdade, me lembrando de que eu era capaz e não me deixando desistir. E, agradeço, principalmente, por me apoiar em todas as minhas escolhas até aqui. Eu poderia passar uma vida agradecendo por tanto que ela fez por mim.

Ao meu noivo Matheus, que é um anjo na minha vida. Sem sua ajuda eu não seria nada. Desde a época de escola, quando me ajudava com os exercícios de vestibular, quando me encorajava a nunca desistir. Por me lembrar sempre quem eu era e o quanto eu era forte. Por enfrentar e viver comigo cada dia dessa loucura acadêmica. Agradeço por todas as vezes que abriu mão de alguma coisa só para me ajudar a estudar aos finais de semana e por me entender. Agradeço a nossa vida juntos, às inúmeras vezes que você cuidou de mim, da nossa casa, para que eu pudesse estar escrevendo isso agora. Agradeço todo o amor, cuidado, carinho, conselho, todas as vezes que me ouviu reclamar, chorar, espernear, entre outras coisas. Por me aceitar nas melhores e piores versões de mim. Foram anos de faculdade e não sei o que seria de mim esses anos se não tivesse você. Obrigada por ser além de esse noivo maravilhoso, meu melhor amigo.

Agradeço ao meu pai José Maria, que nunca me deixou faltar nada, por ter saído todos os dias cedo de casa para me dar o melhor para comer e vestir. Por sempre patrocinar os melhores materiais de estudo, mesmo que fosse gastar todo dinheiro que não tínhamos. Agradeço por ter me dado meu primeiro computador para que eu pudesse estudar com conforto. Agradeço por todas as vezes que também me apoiou nos meus estudos e nas minhas conquistas.

Ao meu irmão, que mesmo não estando mais presente entre nós, sei que está olhando por mim e cuidando para que nada de ruim me aconteça. Por me ensinar a andar quando criança, por ter me carregado no colo quando eu fiquei doente, por ter ido nas minhas reuniões de escola e por além de tudo, me amar.

Ao meu orientador Leandro, que sem dúvidas é um dos maiores responsáveis por tudo que eu conquistei academicamente. Agradeço o primeiro dia que entrou na aula de Números Complexos e Polinômios e introduziu, tão lindamente, a aula com uma boa história, pois foi a partir desse dia que eu soube qual seria minha matéria preferida do curso. Professor, eu agradeço por todas as vezes que me ouviu, por me ajudar na escolha do tema de TCC e por ter tido toda a paciência comigo. Agradeço por todas as orientações, por ser tão organizado, e, principalmente, por não me deixar desistir, sempre me cobrando e mandando um “oi, sumida!”. Agradeço suas palavras de incentivo e por ter sido, além de meu professor e orientador, meu amigo.

Aos amigos que fiz na faculdade, em especial o Marcelo, que bondosamente me ajudou MUITO nessa reta final de curso, por ser tão amigo dentro e fora da faculdade. Agradeço ao Alexander, Thaís, Claudia, Jéssica, Ramon, Michele, Wemerson e Fabio, por todas as vezes que me ajudaram com tanto amor, carinho e paciência. Que estiveram comigo nas minhas dificuldades, dedicando horas de seus dias para que eu pudesse estar aqui. Aproveito para agradecer as minhas amigas Jéssica Pessuto e Jaíne Alves, que foram amigas de faculdade, de trabalho e amigas que eu vou levar para o resto da vida no meu coração.

Agradeço aos meus professores, em especial ao Silvio que tanto me ajudou, com conselhos, me apoiando e sendo um ombro amigo em momentos difíceis e o professor Amari, pela confiança e por sempre me ajudar a conquistar meus objetivos. Aos professores Henrique e Felipe por aceitarem participar da banca deste trabalho e por trazer contribuições para minha pesquisa.

Por fim, a todos que eu não consegui citar aqui, mas que de alguma forma contribuíram para minha formação e que com certeza foram muito importantes para a realização desse sonho e que serei eternamente grata.

RESUMO

Este trabalho teve como objetivo o estudo dos Números Complexos em caráter histórico, compreendendo, por meio de pesquisas, o surgimento das cúbicas com os trabalhos de Tartaglia e Cardano, o processo de desenvolvimento dos Números Complexos, destacando o matemático Rafael Bombelli, quais foram os impactos dentro da área da Matemática, das ciências e das humanidades, e ainda, o que levou os matemáticos da época à necessidade da criação de um outro conjunto. Observaremos como era o pensamento dos nossos ancestrais durante séculos de estudos, além de como os resultados construídos durante esses anos são abordados atualmente e quais são suas aplicações em áreas como a Física, Engenharia e até mesmo na Arte.

Palavras-Chaves: Números Complexos; História da Matemática; Aplicações;

ABSTRACT

This work aimed to study Complex Numbers in a historical character, understanding, through research, the emergence of cubics with the works of Tartaglia and Cardano, the development process of Complex Numbers, highlighting the mathematician Rafael Bombelli, which were the impacts within the area of Mathematics, sciences and humanities, and yet, which led mathematicians of the time to the need to create another set. We will observe how our ancestors thought during centuries of studies, as well as how the results built over the years are current and what are their applications in areas such as Physics, Engineering and even in Art.

Keywords: Complex numbers; History of Mathematics; Applications;

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{N}$	Conjunto dos Números Naturais
$\mathbb{Z}$	Conjunto dos Números Inteiros
$\mathbb{Q}$	Conjunto dos Números Racionais
$\mathbb{R}$	Conjunto dos Números Reais
$\mathbb{C}$	Conjunto do Números Complexos
i	Número Imaginário
ϵ	Pertence
$\neq$	Diferente
θ	Letra Grega Theta
$\geq$	Maior ou igual

Sumário

1 Introdução

Ao longo do curso, quando tive contato com a disciplina de Números Complexos e Polinômios, pude perceber o quão importante foi quando o professor introduziu a aula a partir de um contexto histórico, que, mesmo que breve, me fez querer entender mais sobre o que como esse conjunto foi descoberto, como eram feitas as demonstrações na época, quais foram as motivações para o estudo desse conjunto e como isso foi introduzido na Matemática.

A motivação para essa pesquisa é entender o desenvolvimento da história dos Números Complexos, bem como o desenvolvimento do pensamento dos nossos antepassados que foram grandes responsáveis pelas descobertas citadas neste trabalho e que deram base para explorarmos suas aplicações e conexões com outras áreas da Matemática e da Ciência.

> Acreditamos que um dos grandes fatores que contribuem para que a Matemática não tenha uma “concretude” vem da forma como aprendemos e ensinamos a Matemática. Por esta razão, diante de um objeto matemático, é muito importante conhecermos os “problemas” que envolveram o seu surgimento e o seu desenvolvimento. (JUNIOR, 2009, p.8)

Em algumas áreas da Matemática, ao tentar resolver problemas é muito provável nos depararmos com questões que envolvam soluções com raízes quadradas negativas. Hoje, sabemos que usando o conjunto dos Números Complexos é possível resolvê-los, mas como surgiu isso ao longo da história? Como foi percebido a necessidade de um outro conjunto que completasse os conhecimentos que tinham até então? Quem foi o responsável por essa descoberta? Quais são as aplicações que eles possuem dentro e fora da Matemática?

De acordo com Neto (2009), uma das aplicações dos Números Complexos foi explicar como um número ao quadrado pode ter resultado negativo, esta questão foi descoberta pelo matemático Rafael Bombelli (1526-1572) buscando uma tentativa de resolução de uma equação polinomial de terceiro grau onde a possível solução envolvia raiz quadrada de um número negativo.

O conjunto dos Números Complexos é pouco abordado na educação básica, e apesar da finalidade do trabalho não ser sobre sua relevância no ensino médio, é notório sua importância para o conhecimento e construção da Matemática. Desse modo, esse trabalho tem como objetivo mostrar o quão rico é esse conjunto e sua importância para o desenvolvimento não só da Matemática, mas de outras áreas tais como a Física, por exemplo, além da elaboração de uma nova fonte de pesquisa que complemente o conhecimento sobre a Matemática e sua história.

Ainda de acordo com Neto (2009), podemos dizer que um bom entendimento de Números Complexos nos traz diversas formas de apoio para entender conteúdos distintos. Desta forma, temos como propósito percorrer pela história, desde as Equações Algébricas até os quatérnios e com mais um capítulo sobre as aplicações dos Números Complexos em outros âmbitos. Para esse propósito iremos estruturar o trabalho em quatro capítulos:

I. A importância dos números de forma geral até chegar ao surgimento das resoluções das Cúbicas, bem como a sua demonstração de maneira algébrica e geométrica, além de mencionarmos o contexto histórico por trás dessas demonstrações. Ainda, destacamos os trabalhos de Tartaglia (1500–1557) e Girolamo Cardano (1501–1576).

II. O desenvolvimento e formalização dos Números Complexos, salientando Rafael Bombelli (1526–1572) que foi um dos responsáveis pelo estudo dos Números Complexos por meio de uma resolução de uma cúbica utilizando a fórmula desenvolvida por Cardano-Tartaglia, Euler (1707-1783), que introduziu notações usadas até hoje na Matemática, Carl Friedrich Gauss (1777-1855) que teve como sua principal tese de doutorado o Teorema Fundamental da Álgebra, no qual se demonstra que o conjunto dos Números Complexos é algebricamente fechado, e ainda, outros Matemáticos que tiveram participação significativa para a história dos Números Complexos.

III. A origem da Álgebra de quatérnios que se inicia como uma extensão dos Números Complexos. Destacamos nesse capítulo Hamilton (1805-1865), que foi o responsável por desenvolver esse novo conjunto.

IV. As aplicações que envolvem os Números Complexos não só na Matemática, mas em outras áreas tais como Física e Arte, por exemplo.

2 Das Equações Algébricas aos Números Complexos

2.1 Sobre os números

Os números estão enraizados na história da sociedade, mesmo que indiretamente, desde o início da humanidade. Temos a necessidade de quantificar objetos e trocas. Assim, surgiu a Matemática, com o objetivo de formalizar tudo aquilo que pensamos, escrevemos ou enumeramos.

> (...) a História que nos dá a visão da Matemática que hoje temos. Esta, como edifício em permanente evolução, (…) estará sempre ligada às necessidades culturais, econômicas, ambientais ou físicas dos povos em que se desenvolve. Através de conceitos e algoritmos análogos desenvolvidos por povos muito distanciados no tempo ou nas fronteiras geográficas, a História da Matemática é também um elemento de união das diferentes raças, culturas, civilizações, cada uma com a sua criatividade própria, mas sempre valiosa e indispensável. (ESTRADA, 2000, p.17 apud DIAS, 2003, p. 39)

Desta forma, conhecemos o conjunto dos números naturais ($\mathbb{N}$) que são exatamente os que nos ajudam a quantificar as coisas, como contar os dedos da mão, os dias do mês, as horas ou até mesmo contar mercadorias. Logo, surgiu a necessidade de criar os inteiros ($\mathbb{Z}$) que englobam também os números negativos, são aqueles que nos ajudam a saber quanto estamos devendo, por exemplo. Os números racionais ($\mathbb{Q}$) vieram para nos auxiliar em casos de partilha, quando temos que dividir algo, ideia usada até pelos antigos, quando precisavam partilhar alimentos, entre outros. Temos os irracionais ($\mathbb{R} - \mathbb{Q}$), que é um conjunto disjunto com os racionais, ou seja, nenhum elemento dos irracionais é racional. Logo temos o conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$) que formam o conjunto que engloba todos os conjuntos citados anteriormente.

> O número é um conceito fundamental em Matemática que foi construído numa longa história. Existem evidências arqueológicas de que o homem, já há 50.000 anos, era capaz de contar. O número e a Matemática nasceram e se desenvolveram juntos e tanto as atividades práticas do homem e das sociedades quanto àquelas intrínsecas à Matemática, como ciência, foram determinantes na evolução deste conceito. A necessidade de contar objetos deu origem ao número natural e todas as civilizações que criaram alguma forma de linguagem escrita desenvolveram símbolos para o número natural e operaram com eles. (CARNEIRO, [2008?], p.1)

2.2 As Equações Algébricas de uma forma geral

As equações algébricas são uma das partes mais importantes da Matemática, pois diversos problemas do cotidiano podem ser modelados por meio de equações e, não é à toa que temos até ditados populares sobre *o x da questão*. Resolver uma equação pode significar determinar grandezas, como na Física, por exemplo, e isso faz parte do nosso cotidiano.

> É no século IV d.C., na Aritmética de Diofanto, que encontramos pela primeira vez o uso de uma letra para representar a incógnita de uma equação que o autor chamava de o número do problema. (FELGUEIRAS, 2011, p.59)

Segundo Garbi (2009), os babilônios foram os primeiros a começar a realizar tentativas de métodos de resolução das equações de grau três, eles criavam espécies de tabelas com raízes cúbicas para auxiliar na busca de equações do terceiro grau. Os matemáticos babilônicos dessa época, já haviam feito muitos avanços surpreendentes tais como a utilização do *Teorema de Pitágoras* que explicaremos em breve.

O matemático Tales de Mileto transformou o pensamento matemático de tal forma que as resoluções passaram a serem feitas de forma indutiva, (se para alguns casos era verdadeiro ele assumia como verdade para todo o resto) e não mais como antes, mediante raciocínio dedutivo não formalizado (faz uso da dedução para obter uma conclusão). Tales, então, introduziu um conceito revolucionário, onde segundo Carneiro (2015) "as verdades Matemáticas precisam ser demonstradas*",* e assim realizou evidentes demonstrações, nas quais uma delas herdou seu nome, *Teorema de Tales*.

E ainda, segundo Carneiro (2015), "Entretanto na Universidade de Alexandria por volta de 300 a.C., um gênio matemático que se encarregou de sintetizar e sistematizar o conhecimento matemático que se tinha até aquele momento, cujo nome é Euclides*"*. Desta forma, Euclides possuí um de seus trabalhos mais importantes que levou seu nome, como *Os Elementos de Euclides*, que tem uma influência bastante notória na Matemática.

Uma equação é uma sentença aberta que envolve uma igualdade entre duas expressões Matemáticas que se verifica para determinados valores das variáveis.

Desta forma, podemos definir[1] equações algébricas como sendo toda equação redutível na forma $p(x) = 0$, em que $p(x)$ é um polinômio de grau $n \geq 1$, sendo n um número inteiro positivo, os coeficientes são Números Complexos e a variável x também é complexa, isto é, x pode ser substituído por um número complexo qualquer.

Logo, pode ser expressa da seguinte forma:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x^1 + a_0 = 0$$

onde o maior expoente determina o grau da equação. O Teorema demonstrado pelo matemático Carl Friedrich Gauss (1777-1855) diz que toda equação polinomial de grau n, irá admitir exatamente n raízes complexas[2].

São exemplos de equações algébricas:

$$ax + b = 0$$

$$ay^2 + by + c = 0$$

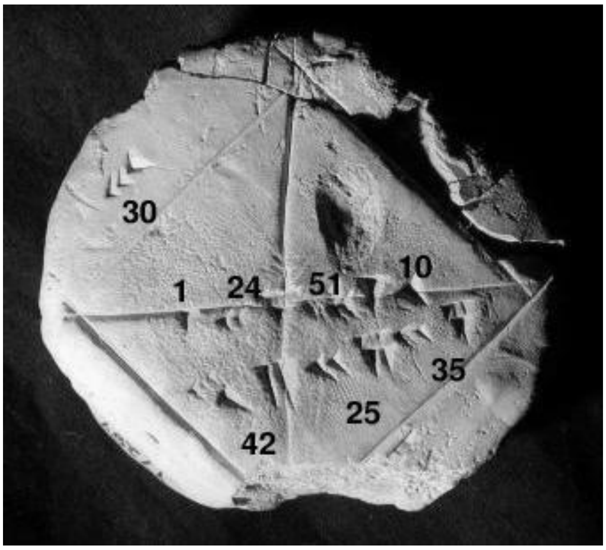
$$3x^4 + 2x^2 + k = 5$$

Definida o que é uma equação algébrica, partimos para o próximo passo que é entender como e quando surgiu esse estudo.

Podemos dizer que a necessidade de enumerar objetos é tão importante e antiga quanto a história da humanidade, visto que a necessidade de realizar tais tarefas, na época, veio junto com a descoberta da escrita. As primeiras resoluções de equações Matemáticas, ainda que fossem relativamente mais simples, foram encontradas no que chamamos de tabuletas de argila, como vemos na imagem a seguir:

[1]IEZZI, Gelson. Fundamentos da Matemática Elementar, vol. 6, 1977.
[2]Mais informações em: http://repositorio.unicamp.br/bitstream/REPOSIP/306555/1/Alves_AlinedePaula_M.pdf

Figura 1: Tabuleta de argila babilônica com inscrições.

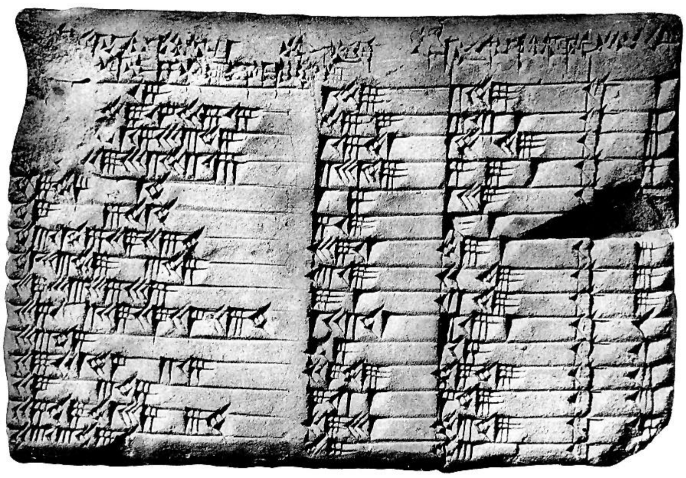


Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Matem%C3%A1tica_babil%C3%B4nica

Existem algumas outras formas de tábua criadas quando os povos precisavam dividir igualmente as mercadorias entre si.

Um exemplo disso é a tabua de Plimpton 322, que segundo Oliveira et al. ([20--]), seu nome faz referência a um aluno da universidade de Colúmbia e foi escrita na época dos Babilônios, onde há três colunas de caracteres que representam os valores das medidas dos lados de um triângulo retângulo (Terno Pitagórico). E de acordo com Eves (2011), os Babilônios já haviam evoluído para uma Álgebra retórica bem desenvolvida, não resolviam só as equações quadráticas, como também discutiam algumas equações cúbicas e algumas biquadradas.

Figura 2: Plimpton 322



Fonte: https://en.wikipedia.org/wiki/Plimpton_322

Desde o início, a Álgebra se encarregava de criar métodos gerais, mas ainda assim precisos, que resolvessem de fato as diversas equações que se resumem em encontrar um número que torne iguais expressões que a princípio aparentavam ser diferentes.

Sabemos que na Matemática é de extrema importância a utilização de notações que facilitem e contribuam para o desenvolvimento de novos conteúdos da Matemática, desta forma, conseguimos generalizar métodos e assim construir propriedades. Um bom exemplo disso é o sistema *indo-arábico*, que nada mais é do que um conjunto de símbolos utilizados pela maioria dos povos para enumerar objetos e contar os dias.

> Estes são os nove símbolos dos hindus: 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1. Com eles, mais o símbolo 0, que em árabe é chamado de zéfiro, qualquer número pode ser escrito. (PISA, 1202 apud BRANCO; DEURSEN, 2011, *on-line*)

A necessidade da utilização de notações mais desenvolvidas começou a se acentuar quando os povos começaram a sentir outras necessidades que a Matemática até então não resolvia, enquanto os egípcios começavam a resolver equações algébricas de primeiro grau (e algumas exceções de equações de segundo grau), os babilônios já possuíam suas formas gerais que resolviam algumas equações. Os métodos mais simples já não estavam mais bastando, assim foi necessária uma evolução da simbologia Matemática para que os povos pudessem avançar na área. Nesse sentido, podemos dizer que a Matemática servia como uma linguagem geral, na qual as civilizações conseguiam se comunicar e dar sentido à escrita da época.

Como podemos observar, resolver equações sempre foi um grande desafio e um assunto que encantava os matemáticos. Muitos processos aritméticos eram efetuados com a ajuda de tábuas (como vimos anteriormente) fazendo operações como a multiplicação, inversos multiplicativos, quadrados e outras potências naturais. Garbi (2009) relata que eles já resolviam equações quadráticas por volta do séc. XVIII a. C., sem nenhuma demonstração, eles apenas o apresentavam a resolução como se fosse uma “receita de bolo”, onde havia um método e eles aplicavam para diferentes problemas. Os antigos da babilônia, por exemplo, conseguiam resolver equações do segundo grau da forma que chamamos hoje de *completando quadrados*.

Os matemáticos gregos resolviam algumas equações de segundo grau por meio de construções, utilizando régua e compasso. Segundo Silveira (2005), os antigos gregos não conheciam a Álgebra abstrata e seu raciocínio matemático. As suas provas e as suas demonstrações eram geométricas, conforme exemplo abaixo.

Exemplo[3]: Consideremos o problema de determinar, com régua e compasso, as raízes da equação $x^2 + bx + c = 0$

Suporemos $c \neq 0$ porque, se $c = 0$, as raízes da equação são 0 e $-b$.

1° caso: $\mathbf{c > 0}$

Neste caso, as raízes x_1 e x_2 da equação têm o mesmo sinal e

$$|x_1| + |x_2| = |b|$$

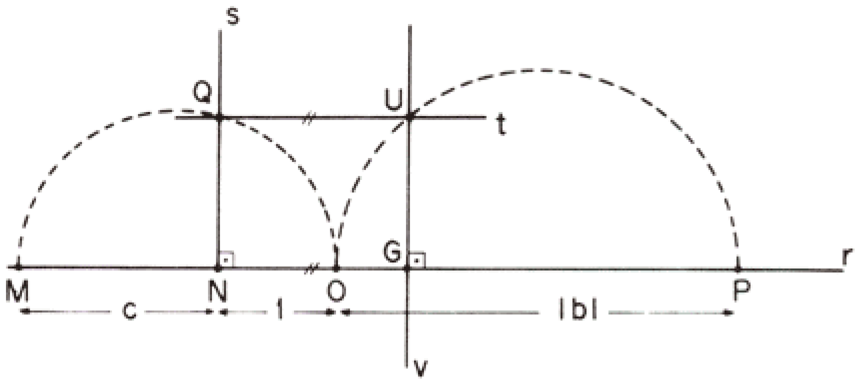
$$|x_1| . |x_2| = c$$

O problema consiste em determinar dois segmentos de reta cuja soma seja $|b|$ e cujo produto seja c.

Construção

Tracemos uma reta r e, sobre ela, marquemos os segmentos MN, NO e OP de comprimentos, respectivamente, c, 1 e $|b|$.

Figura 3: Construção 1



Fonte: http://www.rpm.org.br/cdrpm/12/9.htm

[3] Exemplo disponível em: https://www.rpm.org.br/cdrpm/12/9.htm

A seguir, tracemos duas semicircunferências tendo MO e OP como diâmetros.

Por N levantemos a perpendicular s à reta r, determinando Q na semicircunferência de diâmetro MO.

Deste modo, $\mathrm{NQ}^2 = \mathrm{MN}\,.\,\mathrm{NO} = \mathrm{c}\,.\,1 = \mathrm{c}$ e $\mathrm{NQ} = \sqrt{\mathrm{c}}$.

Por Q tracemos a reta t, paralela a r, determinado U na semicircunferência de diâmetro OP. Por U, tracemos a reta v, perpendicular a r, determinado G em r.

Os segmentos OG e GP representam os valores absolutos das raízes da equação.

De fato, $\mathrm{GU} = \mathrm{NQ} = \sqrt{\mathrm{c}}$ e $\mathrm{GU}^2 = \mathrm{OG}\,.\,\mathrm{GP} = \mathrm{c}$. Temos OG e GP e além disto, por construção, $|\,\mathrm{b}\,| = \mathrm{OG} + \mathrm{GP}$.

Então OG e GP são dois segmentos cuja soma é $|\,\mathrm{b}\,|$ e cujo produto é c.

$\mathrm{Se}\ \mathrm{b} > 0,\ \mathrm{x}_1 = \mathrm{OG}\ \mathrm{e}\ \mathrm{x}_2 = \mathrm{GP}$ são as raízes.
$\mathrm{Se}\ \mathrm{b} < 0,\ \mathrm{x}_1 = -\mathrm{OG}\ \mathrm{e}\ \mathrm{x}_2 = -\mathrm{GP}$ são as raízes.

Observação: Se a reta t, suporte de U, não interceptar a semicircunferência de diâmetro OP, isto é, se $\sqrt{\mathrm{c}} > \frac{1}{2}|\mathrm{b}|$, as raízes são imaginárias e a construção não permite determiná-las. O mesmo ocorre, em particular, no caso degenerado $\mathrm{b} = 0$ ($\mathrm{com\ c} > 0$).

2° caso: c < 0

Neste caso, as raízes têm sinais contrários e sendo x_1 a raiz de maior valor absoluto devemos ter:

$$|\mathrm{x}_1| - |\mathrm{x}_2| = |\mathrm{b}|$$

$$|\mathrm{x}_1|.|\mathrm{x}_2| = |\mathrm{c}|$$

O problema consiste em determinar dois segmentos de reta, cuja diferença seja $|\,\mathrm{b}\,|$ e cujo produto seja $|\,\mathrm{c}\,|$.

Construção

Como no 1° caso, determinaremos os pontos $\mathrm{M}, \mathrm{N}, \mathrm{O}$ e P numa reta r e o ponto Q. Temos, como antes, $\mathrm{NQ} = \sqrt{\mathrm{c}}$.

Transladamos NQ numa direção paralela a s, obtendo o segmento OU. Liguemos U ao centro I da circunferência, determinando o diâmetro GH.

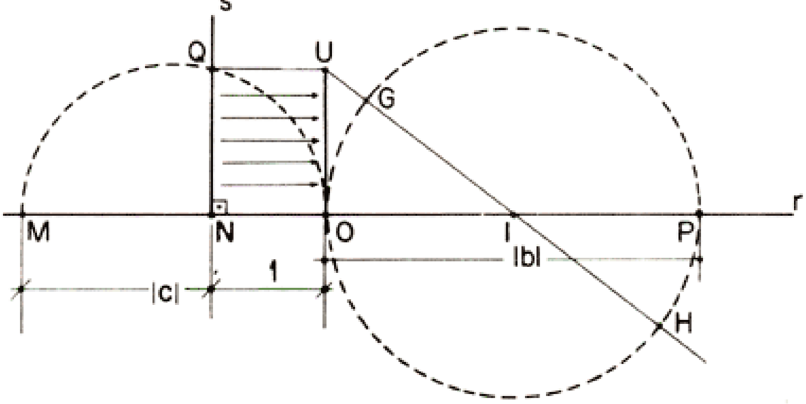
Os segmentos UH e UG representam as raízes da equação.

De fato: $UH - UG = GH = |b|$ (diâmetro).

Por outro lado, por ser OU tangente e UH secante[4] ao círculo de diâmetro, temos:

$$OU^2 = NQ^2 = |c| = UH.UG$$

Figura 4: Construção 2



Fonte: <http://www.rpm.org.br/cdrpm/12/9.htm>

Então UH e UG são dois segmentos cuja diferença é $|b|$ e cujo produto é $|c|$

$$b > 0, x_1 = -UH \text{ e } x_2 = UG \; b < 0, x_1 = UH \text{ e } x_2 = -UG$$

Observação. Neste caso, o problema sempre tem solução. Se b = 0, temos o caso degenerado em que $I = O = G = H$ (o raio da circunferência de centro I é zero) e as raízes são UO e $-UO$.

Os gregos registravam a contabilidade dos impostos, transações comerciais e estoque e para isso era necessário realizar pequenos cálculos aritméticos e geométricos. Mas, quando Roma conquistou a Grécia, enfraqueceu todo seu poderio

4 Em Geometria Plana, a **potência de ponto** Q pode ser definida como o produto de todas as distâncias de Q aos pontos de interseção de uma reta que passa por Q com uma circunferência dada. Definição adaptada de: http://www.profcardy.com/geometria/potencia-de-ponto.php#:~:text=Em%20Geometria%20Plana%2C%20a%20pot%C3%AAncia,E%20com%20uma%20circunfer%C3%AAncia%20dada.

econômico, assim o desenvolvimento da Matemática acabou sendo prejudicado, dando a vez para os Árabes e os Hindus que passaram a dar desenvolvimento na área.

Quando pensamos na resolução de equações polinomiais do segundo grau, imediatamente lembramos a fórmula de resolução das equações quadráticas ou fórmula resolutiva das equações polinomiais de grau dois. De acordo com Carneiro (2015), a tal fórmula foi criada pelo Matemático hindu Sridhara no século XI, mas foi publicada somente por Leonardo Fibonacci (1175-1250), mais conhecido como Fibonacci, em sua obra chamada *Liber Abaci*. Ele a publicou com o objetivo de substituir os algarismos romanos, que de certa forma, acabavam sendo pouco úteis para o desenvolvimento das resoluções das equações algébricas. A fórmula, nos garante que dada a equação $ax^2 + \mathrm{bx} + \mathrm{c} = 0$ com $a \neq 0, x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Demonstração da fórmula da equação quadrática pelo método de completar quadrados de forma algébrica:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = 0$$

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + c = 0$$

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - a\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + c = 0$$

$$a\left(x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a}\right) + c = 0$$

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c = 0$$

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a} - c$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{\sqrt{4a^2}}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Dependendo da equação poderiam acontecer mais alguns casos. Considerando Δ= $b^2 - 4ac$, se Δ= 0 só teríamos uma raiz real se $\Delta < 0$ não há raízes reais, porém na época isso não afligia muito os matemáticos, pois eles apenas declaravam que não existia solução para aquela equação.

Carneiro (GUIMARÃES, 2006, p. 44 apud 2015), afirma que o hábito de dar o nome de fórmula de Bhaskara para o algoritmo de resolução da equação de segundo grau se estabeleceu no Brasil por volta de 1960, e aparentemente, é um costume só brasileiro, pois não se encontram nome de Bhaskara associado a esse algoritmo na literatura internacional.

2.3 História das cúbicas

Quando Fibonacci se tornou um matemático de grande reputação, o imperador romano Frederico II resolveu realizar uma disputa para testar os conhecimentos de Leonardo, uma das propostas feitas, era encontrar por métodos euclidianos, um valor para x que satisfizesse a equação $x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$. Fibonacci conseguiu provar que não era possível encontrar as raízes por métodos euclidianos, entretanto o mesmo determinou uma única raiz aproximada até a nona casa decimal, sendo ela 1,3688081075. (GARBI, 2009, p. 30).

Figura 5: Leonardo Fibonacci (1170 - 1250)

Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Leonardo_Fibonacci

Depois de muitas tentativas de avanço, o interesse em estudar Matemática se intensificou na Europa, mais especificamente na Itália, no século XVI, onde um grupo de matemáticos italianos se juntaram e acabaram causando um grande impacto positivo para a história da Matemática. E, na Alemanha, estava sendo inventada a imprensa (1430), técnica que ajudaria de maneira mais rápida a dispersão do conhecimento em livros publicados.

Os matemáticos da época costumavam fazer competições entre si, para que dessa forma eles ganhassem mais publicidade, e a partir desse momento, as equações de grau três começaram a ser o alvo para então descobrir um método algébrico de resolução para elas.

Houve outras tentativas de resolução das cúbicas, uma delas foi feita por Luca Bartolomeo de Pacioli (1455-1514), que não obtive muito sucesso e chegou até a publicar que não havia solução para tal equação. Em meados de 1510, Scipione Del Ferro (1465-1526) acabou encontrando uma forma geral para resolução das cúbicas do tipo $x^3 + px + q = 0$, mas acabou falecendo e revelou apenas para duas pessoas muito próximas dele, seu aluno Antônio Maria Fiore e Annibale Della Nave seu futuro genro.

Naquela época era muito comum que as pessoas desafiassem umas às outras para conseguir mérito por algo ou para ver quem era o mais inteligente, desta forma, eles conseguiam ter certeza da veracidade de suas teorias e divulgar seu nome em publicações. Com essa grande descoberta em mãos, Fiore, em 1535, desafia Niccoló Fontana, mais conhecido como Tartaglia, para uma disputa do método de resolução das equações de grau três, mas Tartaglia descobre que Antônio estava planejando e então começa buscar conhecimento e Carneiro (2015) afirma que, "no dia 10 de fevereiro de 1535, determinou um método de resolução das equações cúbicas do tipo $x^3 + px + q = 0$ e também determinou um método de resolução das equações do tipo $x^3 + px^2 + q = 0$".

Figura 6: Niccoló Fontana Tartaglia (1500-1557)

Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Niccol%C3%B2_Fontana_Tartaglia

> Este segundo método foi seu grande triunfo pois Fiore não tinha o conhecimento de resolução das equações cúbicas com o termo ao quadrado e sem o termo do primeiro grau. Com isso, Tartaglia resolveu todos os trinta problemas propostos por Fiore, enquanto esse saiu humilhado, pois na maioria dos problemas que Tartaglia propôs fez referência as equações cúbicas sem o termo do primeiro grau. (GARBI, 2009, p. 36)

A notícia sobre a conquista de Niccoló logo se propaga, até que chega nos ouvidos de Girolamo Cardano (1501-1576), filósofo, físico, matemático, médico, astrólogo e professor, também nascido na Itália, em Pavia. Nessa época, Cardano estava criando um livro sobre Álgebra e pediu para que Tartaglia lhe revelasse qual era o tal método que resolvia as cúbicas para que ele pudesse publicar em sua obra, Tartaglia não concordou, pois queria fazer o mesmo.

Figura 7: Girolamo Cardano (1501-1576)

Fonte: https://www.onthisday.com/people/girolamo-cardano

Cardano continuou insistindo para que Tartaglia lhe mostrasse o método, e após muitos juramentos que manteria segredo da tal fórmula, Niccoló resolve enviar o segredo em formato de poema. O poema escrito por Tartaglia para Cardano, de acordo com Vieira (1999) será apresentado a seguir:

1. Quando o cubo com a coisa em apreço
Se igualam a qualquer número discreto
Acha dois outros diferentes nisso.
2. Depois terás isto por consenso
Que seu produto seja sempre igual
Ao cubo do terço da coisa certo.
3. Depois, o resíduo geral
Das raízes cúbicas subtraídas
Será tua coisa principal.
4. Na segunda destas operações,
Quando o cubo estiver sozinho
Observarás estas outras reduções.
5. Do número farás dois, de tal forma
Que um e outro produzam exatamente
O cubo da terça parte da coisa.
6. Depois, por um preceito comum
Toma o lado dos cubos juntos
E tal soma será teu conceito.
7. Depois, a terceira destas nossas contas
Se resolve como a segunda, se observas bem
Que suas naturezas são quase idênticas.
8. Isto eu achei, e não com passo tardo,

No mil quinhentos e trinta e quatro
Com fundamentos bem firmes e rigorosos
Na cidade cingida pelo mar.

Apesar do poema, Cardano não conseguiu decifrar o que Tartaglia havia escrito, então continuou insistindo na revelação do segredo, até que Tartaglia cede. Porém, Cardano não cumpre com a sua palavra e acaba publicando em uma de suas principais obras *Ars Magna*, o segredo da resolução das equações de terceiro grau.

Tartaglia por conveniência não utilizava coeficientes negativos em suas equações. Milies ([20--]), em uma de suas obras traz a tradução da interpretação do poema citado acima, que apresentaremos a seguir.

> Considerando, então, esses três casos possíveis:
>
> $$x^3 + ax = b$$
>
> $$x^3 = ax + b$$
>
> $$x^3 + b = ax$$
>
> Tartaglia chama cada um desses casos de operações e afirma que irá considerar, de início, equações do primeiro tipo: "cubo e coisa igual a número". No quarto verso começa a considerar o segundo tipo "quando o cubo estiver sozinho" e, no sétimo, faz referência ao terceiro caso. Vejamos agora como se propõe a resolver o primeiro caso, nos três versos iniciais, para depois justificar seu método, de uma forma simples. O número se refere ao termo independente, que nós denotamos aqui por b. Quando diz "acha dois outros diferentes nisso", está sugerindo tomar duas novas variáveis cuja diferença seja precisamente b, $i.e.$, escolher U e V tais que: $U - V = b$. A frase "... que seu produto seja sempre igual a cubo da terça parte da coisa" significa que U e V devem verificar: $UV = \left(\frac{a}{3}\right)^3$. Finalmente, "o resíduo geral das raízes cúbicas subtraídas será tua coisa principal" significa que a solução estará dada por $x = \sqrt[3]{U} - \sqrt[3]{V}$. Os outros dois casos carecem de interesse para o leitor moderno, uma vez que podemos reduzí-los ao primeiro, mudando termos de um membro a outro da equação. A frase final "... a cidade cingida pelo mar" é uma referência a Veneza, onde realizou suas descobertas. (MILIES, [20--], *on-line*)

Agora, ainda com base na obra de Miles ([20--]), trazendo para notações atuais, a justificativa da fórmula de Tartaglia para resolução de equações de grau três, é a seguinte:

Consideremos uma equação do terceiro grau de forma:

$$x^3 + ax = b$$

Por meio da fórmula do cubo de um binômio, usualmente conhecida como produto notável de grau três, de uma forma mais simples, temos:

$$(u - v)^3 = u^3 - 3u^2v + 3uv^2 - v^3.$$

Colocando em evidência o produto uv, escolheremos $u\ e\ v$ de modo que se verifiquem:

$$uv = \frac{a}{3} \qquad (i)$$

$$u^3 - v^3 = b \qquad (ii)$$

Utilizando o produto notável apresentado acima, substituiremos $(i)\ em\ (ii)$ de forma que nos trará o seguinte resultado:

$$(u - v)^3 + a(u - v) = b$$

Se conseguirmos encontrar $u\ e\ v$, tais que sejam soluções do sistema acima, consideremos $x = u - v$, que será uma solução da equação dada. Assim, só nos resta resolver o sistema criado, que é o que faremos a seguir.

Ao elevarmos ao cubo a equação (i), temos que o sistema se transforma em:

$$u^3v^3 = \left(\frac{a}{3}\right)^3 \qquad (iii)$$

$$u^3 - v^3 = b \qquad (iv)$$

Chamando $u^3 = U\ e\ v^3 = V$, e substituindo nas equações $(iii)\ e\ (iv)$, chegamos em:

$$UV = \left(\frac{a}{3}\right)^3$$

$$U - V = b.$$

Temos que $U\ e\ -V$ são as raízes da equação:

$$x^2 - bx + \left(-\frac{a}{3}\right)^3 = 0$$

que são dadas por:

$$x = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4\left(-\frac{a}{3}\right)^3}}{2} = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}$$

Tomando uma dessas raízes como sendo U e a outra como $-V$, chegamos em $u = \sqrt[3]{U}$ e $v = \sqrt[3]{V}$. Finalmente, podemos obter precisamente a solução enunciada por Tartaglia:

$$x = \sqrt[3]{U} - \sqrt[3]{V}$$

Por fim, substituindo U e V pelos seus respectivos valores, resulta a conhecida fórmula que, no geral, é chamada de *fórmula de Cardano* ou *de Tartaglia:*

$$x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}}$$

Concluímos, então, que Tartaglia conhecia um método geral para resolver qualquer equação do terceiro grau dada a equação geral do terceiro grau, que podemos escrever na forma:

$$x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0.$$

Fazendo uma mudança de variável, podemos ainda reduzir[5] o caso acima para $x = y - \frac{a_1}{3}$. Tal redução, era conhecida por Tartaglia, mas não por Fiore e inclusive foi o que determinou a vitória do desafio com Del Ferro.

[5] Para saber mais: https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=89305.

3 História dos Números Complexos

Como visto no capítulo anterior, resolver equações sempre foi um assunto pelo qual os matemáticos se encantavam durante toda a história. Devemos lembrar que o método de resolução das cúbicas descoberto por Del Ferro e as demonstrações apresentadas por Tartaglia encontrava apenas uma raiz na equação de terceiro grau.

Ao considerarmos a equação $x^3 - 15x - 4 = 0$, podemos obter por métodos vistos no ensino básico testando as raízes da equação, por exemplo, que $x = 4$ será solução da equação. E ainda, se dividirmos a equação por $x - 4$, iremos encontrar outras duas soluções ($x = -2 \pm \sqrt{3}$) da equação que serão números reais.

Uma das aplicações dos Números Complexos foi explicar como extrair raiz quadrada de um número negativo. Esta questão foi descoberta pelo matemático Rafael Bombelli (1526-1572), por meio de uma tentativa de resolução de uma equação polinomial de terceiro grau onde a possível solução envolvia raiz quadrada de um número negativo.

Figura 8: Rafael Bombelli (1526-1572)

Fonte: https://www.somatematica.com.br/biograf/bombelli.php

Bombelli, nascido na Itália, na cidade de Bolonha, em 1526, e engenheiro hidráulico como profissão, observou que ao aplicar a fórmula de raiz quadrada de Cardano-Tartaglia para resolver a equação $x^3 - 15x - 4 = 0$, obteve a equação $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$ como solução (o que é diferente do resultado visto anteriormente), aparecendo uma raiz quadrada de número negativo.

Quando essas questões surgiram, os matemáticos não podiam simplesmente ignorá-las, pois, além da extração de raízes quadradas de números negativos, havia também uma extração de raízes cúbicas de natureza desconhecida. E, por mais que nas resoluções de exercícios de equação polinomial do segundo grau levasse à raízes negativas, era comum dizer que a solução não existia. Agora, com a equação de grau três, não dava mais para se contentar com tal declaração.

> Encontrei uma outra espécie de R.c (raiz cúbica), legado muito diferente dos outros, que surge no Capítulo de cubo igual a tanto e número, quando o cubo da terça parte do tanto é maior do que o quadrado da metade do número, como nesse capítulo se demonstrará, a dita espécie de R.q (raiz quadrada) tem no seu Algoritmo operações diferentes das outras e nome diferente porque quando o cubo da terça parte do tanto é maior do que o quadrado da metade do número, não se pode chamar nem mais, nem menos, pelo que o chamarei “mais de menos”, quando ele deva ser acrescentado, e, quando deva ser diminuído chamarei “menos de menos” e esta operação é muito necessária, mais do que a outra R. c. L. (raiz cúbica da expressão entre parêntesis) (...). (Bombelli, 1966, p. 133 apud LOPES; SANTOS, [entre 1999 e 2004], *on-line*)

Não dava mais para negar que os números usados não supriam as necessidades para explicar a Matemática, como Cerri e Monteiro (2001) declararam em sua obra, assim como aconteceu no século XVI com os gregos antigos, onde se verificou a insuficiência dos números racionais com a construção do número $\sqrt{2}$, que não era racional: o conceito de número precisava ser estendido.

Para resolver o problema das raízes negativas, Rafael Bombelli procurou uma expressão da forma $a + b\sqrt{-1}$, cujo cubo fosse $2 + \sqrt{-121}$ e outra da forma $a - b\sqrt{-1}$, cujo cubo fosse $2 - \sqrt{-121}$, calculado da seguinte forma:

Pegando a primeira expressão, temos:

$$\left(a + b\sqrt{-1}\right)^3 = 2 + \sqrt{-121}\ (i)$$

$$a^3 + 3a^2b\sqrt{-1} + 3a\left(b\sqrt{-1}\right)^2 + \left(b\sqrt{-1}\right)^3 = 2 + \sqrt{-121}$$

$$a^3 + 3a^2b\sqrt{-1} - 3ab^2 - \sqrt{-1}b^3 = 2 + \sqrt{-121}$$

$$\begin{cases} a^3 - 3ab^2 = 2 \\ 3a^2b\sqrt{-1} - b^3\sqrt{-1} = 121 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a(a^2 - 3b^2) = 2 & (ii) \\ b(3a^2 - b^2) = 11 & (iii) \end{cases}$$

Desta forma, supondo que $a\ e\ b$ são números inteiros $\mathbb{Z}$, temos que o produto de dois números primos só dará um número primo se um deles for igual a 1 e o outro for o primo, assim, de (ii), temos que se $a = 1\ e\ (a^2 - 3b^2) = 2$ ou $(a^2 - 3b^2) = 1$ e $a = 2$ (analogamente para (iii)). Assim, Bombelli chegou à conclusão que $a\ =\ 2\ e\ b\ =\ 1$.

Seguindo essa ideia, concluímos que a resposta da equação será:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

De (i), temos que:

$$x = \sqrt[3]{\left(a + b\sqrt{-1}\right)^3} + \sqrt[3]{\left(a - b\sqrt{-1}\right)^3}$$

Substituindo $a\ e\ b$ encontrados acima, temos:

$$x = \sqrt[3]{\left(2 + 1\sqrt{-1}\right)^3} + \sqrt[3]{\left(2 - 1\sqrt{-1}\right)^3} = 4.$$

Ainda que tivesse essa descoberta, demorou-se mais dois séculos para que se conseguisse, com Euler, descobrir como se extraía raízes de Números Complexos.

Segundo Lopes e Santos ([entre 1999 e 2004]), Bombelli considera novos números a que chama “più di meno” e “meno di meno”, que atualmente significa “i” e “-i” e que representam $\sqrt{-1}$ e $-\sqrt{-1}$, respectivamente.

> Estava finalmente encontrada a solução geral da cúbica que Luca Pacioli, na “Summa”, declarava ser tão impossível como a quadratura do círculo. Pela mão dos italianos del Ferro, Tartaglia, Cardano e Bombelli, a álgebra elementar dava um passo importantíssimo na resolução de equações e na criação de um novo tipo de números, que vieram mais tarde a designar-se Números Complexos. (LOPES; SANTOS, [entre 1999 e 2004], *on-line*)

Assim, decidiu então, introduzir as regras operatórias (BOMBELLI, 1996, p. 133 apud LOPES e SANTOS, [entre 1999 e 2004], *on-line*) que apresentaremos no quadro seguinte:

Quadro 1: Regras Operatórias

Regras operatórias criadas por Bombelli	*Atualmente*
Piú via più di meno, fa più di meno	$+(+i) = +i$
Meno via più di meno, fa meno di meno	$-(+i) = -i$
Piú via meno di meno, fa meno di meno	$+(-i) = -i$
Meno via meno di meno, fa più di meno	$-(-i) = +i$
Più di meno via più di meno, fa meno	$(+i)(+i) = -1$
Più di meno via meno di meno, fa più	$(+i)(-i) = +1$
Meno di meno via più di meno, fa più	$(-i)(+i) = +1$
Meno di meno via meno di meno, fa meno	$(-i)(-i) = -1$

Fonte: http://webpages.fc.ul.pt/~ommartins/seminario/renascenca/bombelli.htm

Ainda segundo Lopes e Santos ([entre 1999 e 2004]), quando foi publicada a obra de Bombelli sobre o uso de raízes quadradas de números negativos já não era novidade, pois Cardano tinha-os introduzido em alguns problemas, como por exemplo no capítulo XXXVII da *Ars Magna*.

É comum acreditar que foi na obra de Cardano que surgiram os números que futuramente chamaríamos de Números Complexos, mas foi Bombelli quem estabeleceu regras para operar com esses números, contribuindo de forma determinante para o seu desenvolvimento. Cardano limitou-se a usar essa descoberta somente para auxiliar em cálculos e os chamou de números imaginários.

De acordo com Cerri e Monteiro (2001), depois de Bombelli, surgiram outros matemáticos importantes para história, os quais contribuíram significativamente para o desenvolvimento dos Números Complexos. Entre eles Abraham de Moivre (1667-1754) e Leonhard Paul Euler (1707-1783), sendo este último quem realmente fez trabalhos mais relevantes para este assunto.

Euler nasceu em Basiléia, na Suiça, em 1707, foi um dos matemáticos que mais contribuiu para os avanços da Matemática e foi o que mais teve publicações em seu nome em todos os tempos.

Faleceu em 1783, depois de ter passado boa parte de sua vida totalmente cego, deixando um dos seus maiores legados na Matemática que é conhecido como Número de Euler, cujo valor é aproximadamente $2{,}71828$, e que é bastante usado em equações para descrever fenômenos físicos.

Figura 9: Leonhard Euler (1707-1783)

Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler

Dentre suas incontáveis contribuições, foi Euler quem teve participação notável para a melhoria da simbologia, inclusive, muitas delas são utilizadas até hoje. Dentre as diversas representações Matemáticas pela qual teve participação, destacamos aqui o i que substitui $\sqrt{-1}$. Euler, ainda estudou sobre os números da forma $z = a \pm bi,$ onde $a \; e \; b$ são considerados números reais e $i = \sqrt{-1}$. Na época, se aprofundou tanto nesse assunto, que ficou conhecido como o Matemático que dominou o segmento dos Números Complexos.

> Permanece como maneira mais comum de introduzir os Números Complexos a abordagem puramente algébrica e formal: "Um número complexo é um objeto da forma a + bi, onde a e b são reais, i^2= -1, e permanecem válidas as leis operatórias básicas da álgebra". Esta definição (correta) permite começar logo a operar com Números Complexos sem dificuldade, mas este enfoque perde a magnífica oportunidade de apresentar os complexos imediatamente como entes geométricos, e a experiência de aula nos mostra que muitas vezes esta oportunidade não se recupera, mesmo quando, mais tarde, aparece a "forma trigonométrica". O iniciante permanece com uma visão excessivamente formal e algebrizante, e não lhe ocorre aplicar conhecimentos de Números Complexos a problemas de Geometria, como se faz desde Gauss. (CARNEIRO, 2007 apud NETO, 2009 p. 16)

No século XVII os Números Complexos passaram a ser interpretados de forma geométrica como pontos no plano conhecido como *plano de Argand Gauss*[6] que permitiu que um número complexo fosse escrito em sua forma polar. Deste modo, conseguiu-se calcular potências e raízes de uma maneira mais eficiente.

Figura 10: Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Carl_Friedrich_Gauss

Carl Friedrich Gauss (1777-1855), nascido em Braunschweig, na Alemanha, foi matemático, físico e astrônomo conhecido como príncipe dos matemáticos e muitos o consideram como o maior gênio da Matemática de todos os tempos segundo Eves (2011). Em 1799, Gauss apresentou uma de suas maiores teses de doutorado em Matemática, conhecida como *Teorema Fundamental da Álgebra*, onde é demonstrado que o conjunto dos Números Complexos é algebricamente fechado[7].

Ainda no século XVII, os matemáticos franceses Pierre de Fermat e René Descartes criaram, independentemente, e quase ao mesmo tempo o que atualmente conhecemos como Geometria Analítica. Fermat não se preocupou em publicar suas ideias.

Descartes pelo contrário, publicou em seu mais famoso livro *Discurso Sobre o Método de Bem Utilizar a Razão e de Encontrar a Verdade nas Ciências*, publicado

[6] Jean Robert Argand nasceu em Genebra (Suiça), a 18 de Julho de 1768. Apesar de ser apenas um matemático amador, Argand ficou famoso pela sua interpretação geométrica dos números complexos, onde i é interpretado como uma rotação de 90º.

[7] Um corpo K diz-se algebricamente fechado se qualquer polinômio $p(x) \in K[x]$, de grau ≥ 1, possui uma raiz em K.

em 1637, um trabalho dedicado à geometria, que é considerado fundamental para a Geometria Analítica.

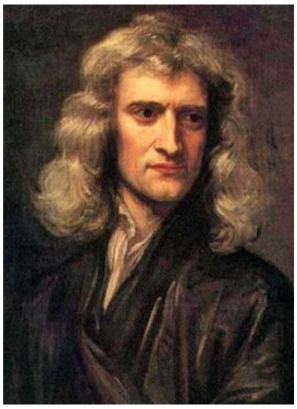
> Com o domínio da geometria analítica, Descartes estudou, entre outras coisas, as equações algébricas. Em uma passagem do Discurso do Método Descartes escreveu a seguinte frase: “Nem sempre as raízes verdadeiras (positivas) ou falsas (negativas) de uma equação são reais. Às vezes elas são imaginárias” (CERRI; MONTEIRO, 2001, p.5).

Descartes já possuía o domínio da geometria Analítica, então passou a estudar, entre diversas coisas, as equações algébricas. Por esse motivo, até hoje o número $\sqrt{-1}$ é chamado de número imaginário pelos Matemáticos, juntamente consagrado com a expressão “número complexo”, que infelizmente até hoje é considerada uma expressão um tanto inadequada para este objeto matemático.

O matemático Françóis Viéte (1540-1603), contribuiu para os estudos das equações do terceiro grau e foi o maior matemático francês do século XVI, segundo Carneiro (2015), nasceu em Fontenay na França e morreu em Paris. Viéte foi um grande algebrista, tinha bastante facilidade em resolver problemas com incógnitas.

Isaac Newton (1642-1727), nascido em Woolsthorpe, localizada em Lincolnshire, na Inglaterra, foi um dos principais físicos-matemáticos da história. Entre suas principais teorias estão as leis de Newton e a lei da gravitação universal.

Figura 11: Isaac Newton (1643 - 1727):



Fonte: https://www.infoescola.com/biografias/isaac-newton/

Segundo Carneiro (2015), Newton, na época, desenvolveu métodos para determinar raízes de equações algébricas de forma aproximada, mas acabou não se interessando pelo estudo dos Números Complexos, no qual ele chamava de “impossíveis”, já que estava trabalhando na construção do Cálculo diferencial e Integral, cujo assunto foi estudado por ele e por Leibniz.

De acordo com Junior (2009), além de Euler e os outros matemáticos citados, podemos destacar outros que contribuíram para o desenvolvimento dos Números Complexos, tais como: Caspar Wessel (1745-1818), que foi o primeiro responsável por representar os Números Complexos como pontos no plano e ainda, iniciou uma representação tridimensional e por fim, Jean Robert Argand (1768-1822) que deu continuidade a representação geométrica para os Números Complexos.

A partir disso, o conjunto dos Números Complexos passou a ser representado pela letra $\mathbb{C}$ e definido como o conjunto dos pares ordenados de números reais para os quais são definidas as operações de multiplicação e soma.

Com esse novo conjunto, os matemáticos já podiam resolver equações que apresentavam em sua solução extrações de raízes de índice n quaisquer, como por exemplo, raízes quadradas e cúbicas de números negativos, e ainda conseguiam representar esse conjunto em um plano.

Existe um conjunto chamado quatérnios desenvolvido por Sir William Rowan Hamilton (1805-1865) que é uma extensão dos Números Complexos e que estuda os números 4-dimensionais, no qual abordaremos no capítulo seguinte.

4 História dos quatérnios

Acompanhamos nos capítulos anteriores a evolução dos conjuntos numéricos e podemos resumi-la, até agora, da seguinte forma:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Por mais que aparecesse um novo conjunto numérico, as propriedades algébricas e aritméticas eram mantidas, já que o objetivo desse processo sucessivo era trazer sempre um novo conjunto com propriedades extras, e assim, suprir as deficiências do conjunto anterior.

Poderíamos nos questionar se o conjunto dos Números Complexos seria enfim o último conjunto que iríamos estudar, porém, foi visto no final do capítulo anterior que essa linha sucessiva não acaba por aqui.

O objetivo desse capítulo é, sobretudo, dar continuidade a história da Matemática e introduzir um novo conjunto, chamado quatérnios ou Números de Hamilton ou ainda conhecido como números *Hiper Complexos*.

4.1 O surgimento dos quatérnios

A origem da Álgebra de quatérnios iniciou-se nos Números Complexos, como foi abordado no capítulo anterior. Por volta do século XIX, começaram a surgir descobertas que revolucionaram a Álgebra, como, por exemplo, o surgimento da representação geométrica para os números imaginários.

> A insatisfação de Hamilton diante da falta de clareza e precisão em relação a alguns resultados utilizados na Matemática, em particular, a utilização dos números imaginários num artigo do seu amigo Graves, sobre logaritmos de números negativos, e a sua concepção pessoal da álgebra como uma ciência, o motivaram a tentar estruturar algebricamente os conjuntos numéricos via a ideia inovadora de extensões numéricas, desde os inteiros positivos até os pares numéricos (x, y), identificando estes com os números imaginários. (NEVES, 2008, p.30)

John Thomas Graves (1806-1870) foi um jurista e matemático, nascido na Irlanda. Amigo de William Rowan Hamilton, Graves foi um dos responsáveis em despertar o interesse em Hamilton para estudar a extensão dos Números Complexos e descobrir, então, os quatérnios.

William Rowan Hamilton (1805-1865), nascido em Dublin, Irlanda, foi astrônomo, matemático e físico. Ele começou a se destacar muito cedo, já em 1827 tornou-se professor de astronomia, ainda em sua cidade natal, no *College Trinity,* onde havia sido aluno.

Depois de inúmeras publicações em variados temas, publicou sua primeira obra com natureza dos Números Complexos: *The Elements of quatérnios (1866; Os elementos dos quatérnios).*

Figura 12: William Hamilton (1805-1865).

Fonte: https://www.ime.unicamp.br/~vaz/hamilton.htm.

Hamilton apresentou o primeiro conceito moderno dos Números Complexos como pares ordenados (x, y) de reais e tentou levar essa ideia para o espaço tridimensional.

> Após inúmeras tentativas verificou-se que não era possível a existência de um complexo tridimensional. Com isso, Hamilton descobriu os Quatérnios, que é uma álgebra de dimensão quatro sobre o corpo dos números reais e que possui todas as propriedades de um corpo, exceto a comutatividade da multiplicação. (SANTOS; FERREIRA, 2011).

De acordo com Santos e Ferreira (2011), William Hamilton era um matemático e físico que sempre procurava encontrar uma Álgebra que representasse e operasse vetores não só em $\mathbb{R}^2$. O desejo dele era fornecer para $\mathbb{R}^3$ uma estrutura de Álgebra que permitisse operar vetores.

Coube a Hamilton a responsabilidade da criação de um novo sistema algébrico, essa Álgebra teria aplicabilidade na Física, uma vez que várias forças que agem sobre um corpo, não são, necessariamente, unidimensionais.

Ele tentou demonstrar por muitos anos a possibilidade de um Complexo ser tridimensional, mas infelizmente não conseguiu, pois a sugestão a ser seguida era que a adição pudesse servir como método para a realização de translações no espaço, e a multiplicação serviria como artifício para a realização de rotações no espaço, o que para a adição poderia ser definida de forma análoga, mas para a multiplicação não serviria.

> O problema cuja solução resultou na descoberta dos Quatérnios por Sir William Rowan Hamilton (1805-1865) em 16 de outubro de 1843 pode ser resumido no seguinte: como o método para operar rotações no plano, via multiplicação de números imaginários, pode ser estendido para o espaço? (NEVES, 2008, p.14)

Antes de refletir sobre esse problema, Hamilton fundamentou a estrutura algébrica dos números imaginários. Segundo Neves (2008), ele havia confidenciado a seu amigo Graves em outubro de 1828, que os números imaginários não deveriam precisar do apelo a considerações geométricas para serem percebidos com clareza.

Ele considerou a tripla ordenada (a, b, c), e análogo ao que fazemos para os Números Complexos, conseguimos chegar ao número

$$z = a + bi + cj, \text{ com } i^2 = j^2 = -1.$$

Temos que a adição de dois números nesse sistema é dada por:

Dados $z = a + bi + cj$ e $z' = a' + b'i + c'j,$ temos:

$$z + z' = (a + bi + cj) + (a' + b'i + c'j) = (a + a') + (b + b')j + (c + c')j$$

A questão está no surgimento do termo ij ao fazermos essa multiplicação. Observe:

$$z.z' = (a + bi + cj).(a' + b'i + c'j)\text{b}$$

$$= aa' + ab'i + ac'j + ba'i + bb'i^2 + bc'ij + ca'\,j \; + \; cb'ji \; + \; cc'\,j^2$$

$$= \; (aa' \; - \; bb' - \; cc') \; + \; (ab' \; + \; ba'\,)i \; + \; (ac' \; + \; ca')j \; + \; bc'ij \; + \; cb'\,ji$$

Para resolver esse problema, depois de inúmeras tentativas sem sucesso para realizar a generalização dos Números Complexos, William Hamilton acabou desconsiderando os ternos ordenados, mas passou a considerar os ordenados quádruplos, ou seja, acrescentando um novo número imaginário.

Ele descobriu, assim, a fórmula fundamental dos quatérnios, que daria ao $\mathbb{R}^4$ uma estrutura de Álgebra associativa:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

Além disso, Hamilton descobriu que a Álgebra dos quatérnios foi a primeira não-comutativa como iremos provar adiante.

Ele conseguiu definir a adição e a multiplicação dos quatérnios conseguindo verificar as propriedades associativa e comutativa da adição, a propriedade associativa da multiplicação, a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, mas não valia a lei comutativa da multiplicação.

Definição[8]: Definimos a álgebra dos quatérnios $\mathbb{Q}$ como sendo o $\mathbb{R} -$ espaço vetorial

$$\mathbb{Q} = \{\mathrm{x} + \mathrm{yi} + \mathrm{zj} + \mathrm{wk} \mid \mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{w} \ \in \mathbb{R}\}$$

de dimensão quatro. A soma de dois quatérnios quaisquer é obtida da seguinte forma:

$$\begin{aligned}(\mathrm{a}_1 + \mathrm{b}_1\mathrm{i} + \mathrm{c}_1\mathrm{j} + \mathrm{d}_1\mathrm{k}) + (\mathrm{a}_2 + \mathrm{b}_2\mathrm{i} + \mathrm{c}_2\mathrm{j} + \mathrm{d}_2\mathrm{k}) \\ = (\mathrm{a}_1 + \mathrm{a}_2) + (\mathrm{b}_1 + \mathrm{b}_2)\mathrm{i} + (\mathrm{c}_1 + \mathrm{c}_2)\mathrm{j} + (\mathrm{d}_1 + \mathrm{d}_2)\mathrm{k}.\end{aligned}$$

O produto dos elementos básicos $1, \mathrm{i}, \mathrm{j}, \mathrm{k}$ é definido pela tábua:

$$1\mathrm{i} = \mathrm{i}, \quad 1\mathrm{j} = \mathrm{j} \quad 1\mathrm{k} = \mathrm{k};$$

$$\mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = \mathrm{k}^2 = -1;$$

$$\mathrm{ij} = -\mathrm{ji} = \mathrm{k};$$

$$\mathrm{jk} = -\mathrm{kj} = \mathrm{i};$$

$$\mathrm{ki} = -\mathrm{ik} = \mathrm{j}.$$

O produto é estendido para todos os elementos de $\mathbb{Q}$ distributivamente. Com isso, $\mathbb{Q}$ tem também uma estrutura de anel associativo. Portanto, $\mathbb{Q}$ é uma álgebra associativa de dimensão 4 sobre o corpo dos números reais.

---

[8] Definição disponível em: http://www2.uefs.br/semic/upload/2011/2011xv-702juc938-120.pdf

Segundo Martins et al. (2017), existe uma história de que a ideia de abandonar a lei comutativa da multiplicação, na época, ocorreu quando Hamilton estava caminhando com sua esposa, em *Royal Canal*. Pouco antes de anoitecer, ele utiliza seu canivete para gravar uma parte fundamental da tábua de multiplicação dos quatérnios em uma das pedras da Ponte de Brougham.

De acordo com Santos (2016), Hamilton escreveu para seu filho uma carta descrevendo como foi sua descoberta final que ocorreu no dia 16 de outubro de 1843:

> Era uma segunda-feira e dia de reunião do Conselho da Real Sociedade da Irlanda, eu ia andando para participar e presidir, e tua mãe andava comigo, ao longo do Royal Canal, embora ela falasse comigo ocasionalmente, uma corrente subjacente de pensamento estava acontecendo na minha mente, que finalmente teve um resultado, cuja importância senti imediatamente. Pareceu como se um circuito elétrico tivesse se fechado; e saltou uma faísca, o Heraldo de muitos anos vindouros de pensamento e trabalho dirigidos, por mim, se poupado, e de qualquer forma por parte de outros, se eu vivesse o suficiente para comunicar minha descoberta. Nesse instante eu peguei uma libreta de anotações que ainda existe e fiz um registro naquela hora. Não pude resistir ao impulso tão não filosófico quanto possa ser de gravar com um canivete numa pedra da ponte de Brougham, quando a cruzamos, a fórmula fundamental dos símbolos i, j,k. (EVES, 2011 apud SANTOS, 2016, p.48).

Figura 13: Ponte Brougham.

Fonte: http://vigo.ime.unicamp.br/~fismat/2006/04/manifestaes-algbricas.html

E ainda segundo Santos (2016), no dia seguinte, em 17 de outubro de 1843, Hamilton escreve ao seu amigo John T. Graves lhe contando sobre seus novos resultados.

Assim, temos a primeira Álgebra não-comutativa, a Álgebra dos quatérnios, que nasceu e abriu as portas para Álgebra abstrata e que deu início, tempos depois, a introdução de análise vetorial.

Hamilton dedicou o resto de sua vida a desenvolver aplicações dos seus quatérnios para Física, Mecânica e Geometria. E como resultado desse trabalho, realizou mais publicações com foco nos quatérnios, tais como: *Lectures on Quaternions* (1853) e *Elements of Quaternions* (1866).

5 Aplicações dos Números Complexos

Até agora, fomos capazes de acompanhar a evolução dos Números Complexos durante a história da Matemática, mostrando seu papel e seu espaço. O intuito deste capítulo é dar continuidade a história, mas dessa vez mostrando quais são suas aplicações na Matemática e em outras áreas.

Apesar de já se ter provado sua existência, os Números Complexos ainda aparentam ser um conjunto estudado de forma isolada dos demais conjuntos, pois sua relação com o mundo não é tão direta como os demais conjuntos. No conjunto dos Naturais ($\mathbb{N}$), por exemplo, conseguimos mostrar sua existência apenas contando a quantidades de objetos em um local, no conjunto dos Inteiros ($\mathbb{Z}$) conseguimos mostrar falando sobre dinheiro, mas isso não é tão simples para os Números Complexos.

As aplicações diretas dos Números Complexos são variadas e na maioria das vezes de difícil acesso, mas não podemos descartar o quanto esse conjunto nos ajuda indiretamente. Segundo Portolan (2017), as propriedades dos números reais só se tornam conhecidas quando são vistas como parte do Conjunto dos Números Complexos.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM), a Matemática possuí papel fundamental na vida escolar e na formação básica do aluno “Adquirir uma compreensão do mundo da qual a Matemática é parte integrante, por meio dos problemas que ela consegue resolver e dos fenômenos que podem ser descritos por meio de seus modelos e representações”. (Portal MEC).

Desta forma, podemos considerar que é de suma importância que ensinemos os conteúdos da Matemática estabelecendo objetivos que de fato tragam um aprendizado significativo, pois devemos lembrar que a Matemática não está só para pessoas que pretendem entrar para uma universidade, seu objetivo é maior, é para formação do cidadão.

Conforme visto nos capítulos anteriores, uma das aplicações dos Números Complexos foi explicar como um número ao quadrado pode ter resultado negativo, esta questão foi descoberta pelo matemático Rafael Bombelli por meio de uma tentativa de resolução de uma equação polinomial de terceiro grau na qual a possível solução envolvia raiz quadrada de um número negativo.

Como Gauss provou que todas as equações de grau n tem n raízes complexas, passou a ser possível determinar toas as raízes, uma vez que já se tinha o conhecimento do conjunto dos Números Complexos.

Existem medidas no nosso mundo que só conseguimos expressar perfeitamente por meio dos Números Complexos. Em Física, podemos compreender vários fenômenos com o auxílio desse conjunto.

> Não se julgue, entretanto, que a importância dos Números Complexos resulta apenas do Teorema Fundamental da Álgebra. Eles se fazem presentes em praticamente todos os grandes ramos da Matemática como Álgebra, Teoria dos Números, Topologia, Geometria (Analítica, Diferencial ou Algébrica), Análise, Equações Diferenciais e em aplicações como Física Matemática, Dinâmica dos Fluidos, Eletromagnetismo etc. A Teoria das Funções de Variável Complexa é uma área nobre, de grande tradição Matemática e, ao mesmo tempo, com notável vitalidade, refletida na intensa atividade de pesquisa que se desenvolve atualmente. (LIMA,1991, p.01 apud SILVA, 2016, p.7)

A representação de um Número Complexo como vetor, suas propriedades e operações estabelecem relações com a disciplina de Física. Um campo eletromagnético, por exemplo, possui um campo magnético e outro elétrico e por isso precisa de um par de números reais para descrevê-los, e este par pode ser visto como um Número Complexo.

Assim, podemos afirmar, então, que a compreensão dos Números Complexos, nos traz diversas formas de apoio para entender conteúdos distintos. Segundo Silva (LIMA, 1991 apud 2016), o fato é que os Números Complexos são indispensáveis na Matemática, pois se tornou bastante responsável pelo desenvolvimento das Equações Diferenciais e em várias outras vertentes, tais quais abordaremos ainda neste capítulo.

5.1 Os Números Complexos em Conexão com outras áreas da Matemática

5.1.1 Os Números Complexos em Geometria Plana

A descoberta dos Números Complexos nos trouxe algumas facilidades. Podemos utilizar esse conjunto como ferramenta para representações geométricas no plano cartesiano e relacioná-lo com geometria plana, por exemplo, para resolver alguns problemas.

> Os Números Complexos, por sua vez, têm duas dimensões, sendo uma real e outra imaginária. Por isso, eles devem ser representados num plano cartesiano formado por um eixo horizontal real Re e por um eixo vertical imaginário Im. (MARKUS, 2000, p. 25 apud MELLO, 2005, p.104)

Desta forma, a seguir, vamos apresentar alguns tópicos para abeirar-se deste conteúdo.

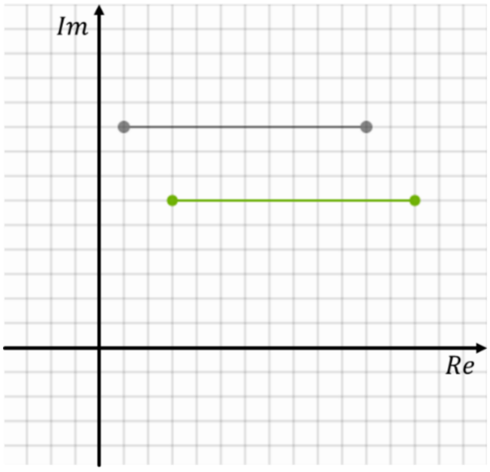
5.1.1.1 Movimentos no plano

O plano complexo é um plano cartesiano utilizado para representar geometricamente o Conjunto dos Números Complexos. Podemos relacionar qualquer movimento no plano de tal forma que o eixo das abcissas seja o eixo Real *(Re)* e o das ordenadas o Imaginário *(Im).*

5.1.1.2 Translação

Uma translação em geometria significa movermos um objeto geométrico (ponto, segmento, figura, ângulo etc.), na direção de um vetor não nulo $\vec{v}$ de uma distância $|\vec{v}|$ sem alterar seu tamanho, ou seja, ele continua sendo o mesmo objeto só que em pontos diferentes do plano. Como um vetor pode ser representado por um número complexo, podemos também transladar objetos no plano complexo. Considere o exemplo a seguir:

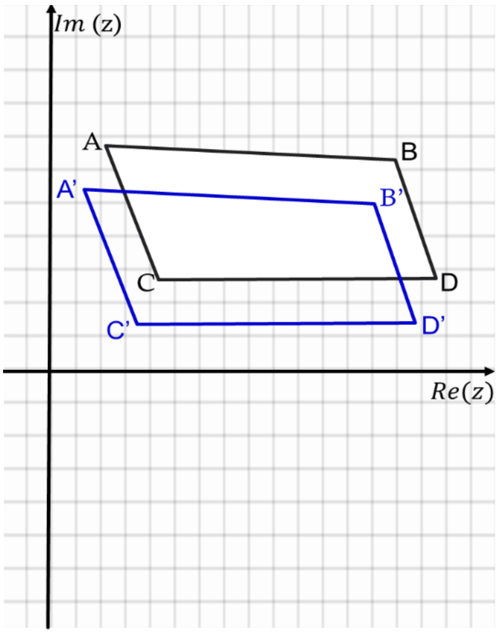
Figura 14: Translação de um segmento no plano complexo



Fonte: Elaborada pela autora.

Seja um quadrilátero $ABCD$ e z um Número Complexo não nulo da forma $z = x + yi$, com $x \neq 0$ e $y \neq 0$, podemos transladar a figura no plano de um vetor z, obtendo o quadrilátero $A'B'C'D'$, tal que $A' = A + \vec{Z}$, analogamente para os demais.

Figura 15: Translação da figura



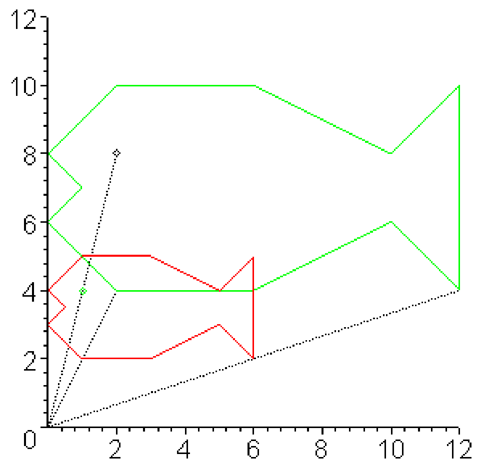
Fonte: Elaborada pela autora.

Neste caso, a figura foi movida tanto para esquerda, quanto para baixo sem mudar seu tamanho.

5.1.1.3 Homotetia

Homotetia são transformações com um ponto fixo, nas quais podem ocorrer ampliações ou reduções de figuras. Em outras palavras, dada uma figura qualquer, seus segmentos podem ser reduzidos ou ampliados em torno desse ponto fixo: conforme a figura abaixo:

Figura 16: Representação de uma Homotetia



Fonte: http://www.dmm.im.ufrj.br/projeto/projetoc/precalculo/sala/conteudo/capitulos/cap26s5.html

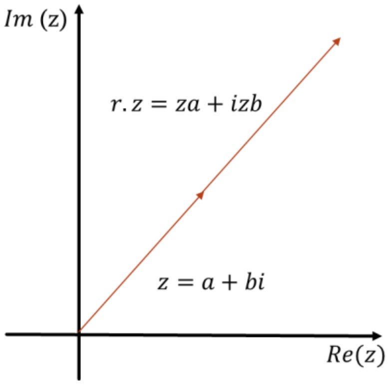
Ao observarmos os Números Complexos, podemos notar que se tomarmos um Número Complexo $z = a + bi$ e um número real $r,\ r > 1,$ a multiplicação de z por r é definida de forma:

$$r.z = z(a + bi)$$

$$r.z = za + izb$$

Assim, podemos notar que esta expressão é a mesma que a Homotetia de razão r representada na figura abaixo:

Figura 17: Homotetia



Fonte: Elaborada pela autora.

5.1.1.4 Multiplicação de Números Complexos na forma trigonométrica (Rotação)

A rotação de uma figura no plano complexo acontece quando há um deslocamento de todos os pontos dessa figura em torno de um ponto central definido. Sendo assim, dado um Número Complexo z da forma $z = a + bi$, ao multiplicarmos esse z por $i,$ teremos:

$iz = i(a + bi)$, fazendo a distributiva, temos

$iz = ai + b.i.i$, ou seja,

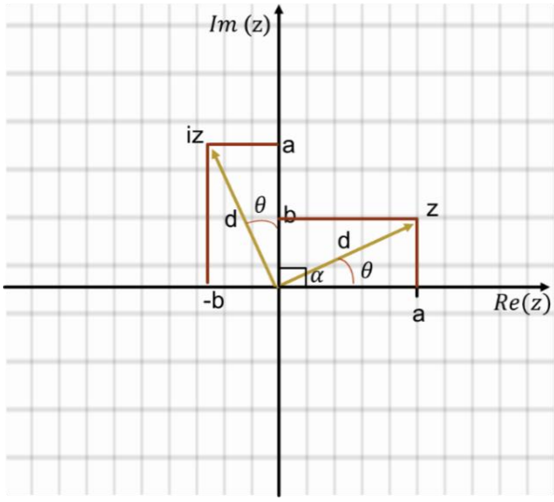
$$iz = ai + bi^2$$

Sabendo que $i^2 = -1$, então:

$$iz = ai - b$$

Abaixo, representando isso no plano complexo, temos:

Figura 18: Rotação no plano complexo



Fonte: Elaborada pela autora.

Desta forma, podemos observar que a figura cuja sua extremidade é z e a figura $de\ afixo\ iz$ mantem a mesma medida e distância d. Assim, se fizermos $\theta + \frac{\pi}{2} - \theta = \frac{\pi}{2}$, o que nos mostra que ao pegarmos qualquer Número Complexo z e multiplicarmos por i, rotacionamos esse mesmo número de centro na origem no sentido anti-horário em $\frac{\pi}{2}$.

5.1.2 Aplicação dos Números Complexos na Engenharia Elétrica

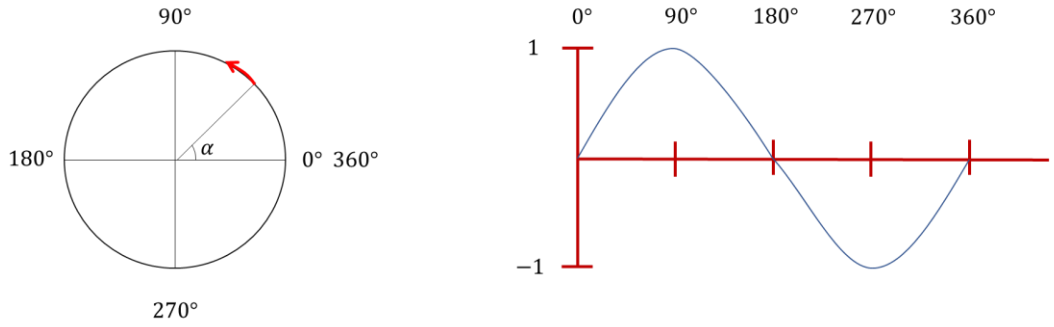
5.1.2.1 Geração de Energia Elétrica

Pelo princípio da indução eletromagnética, podemos dizer que quando variamos o fluxo magnético induzimos uma corrente elétrica, em outras palavras, quando um imã é movimentado nas proximidades de uma bobina, temos uma variação do fluxo magnético e, consequentemente, uma corrente elétrica induzida i.

> A álgebra dos Números Complexos permite representar e operar vetores no plano. Possibilita que grandezas que variam senoidalmente em função do tempo, sejam representados por vetores bidimensionais (fasores). É mais fácil operar com Números Complexos de diferentes módulos e argumentos do que operar com funções trigonométricas (senos e cossenos) de diferentes amplitudes e fases. (MELLO, 2005, p.104)

Com essa variação do fluxo magnético, ocorre também a variação na tensão elétrica, ou seja, a tensão elétrica será alternada, e sendo alternada ela pode ser representada por uma senoide, desta forma, segundo Caon (2013), isso irá facilitar os cálculos e as representações junto ao uso dos fasores[9]. Cada fasor pode ser representado por um número Complexo na forma trigonométrica.

Figura 19: Fasor

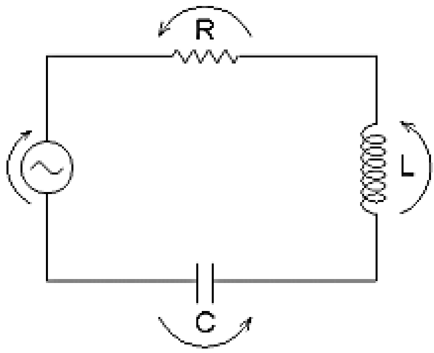


Fonte: Elaborada pela autora.

5.1.2.2 Circuitos de Corrente Alternada

Os Números Complexos costumam ser usados para explicar o funcionamento de circuitos de corrente alternada (AC), pois contém um resistor (R), um capacitor (C) e um indutor (L), que são conectados em paralelo ou em série. A corrente elétrica (i) e a tensão (V) têm sempre a mesma direção e sentido, já que estão em fase.

Figura 20: Circuito RLC - série



Fonte: Adaptado Circuito RLC série

[9] Seu comprimento representa a amplitude da grandeza, enquanto a fase da mesma é representada pelo ângulo que o vetor faz com alguma direção fixa escolhida como referência; se a grandeza representada varia no tempo, sua variação se expressa pela rotação do fasor.

No geral, nas instalações elétricas residenciais, os circuitos são de corrente alternada e as grandezas elétricas são avaliadas com o auxílio dos Números Complexos para facilitar os cálculos.

> A relação U = Ri, estudada na Física do ensino médio e que se utiliza dos números reais, torna-se U = Zi, em que U é a tensão (diferença de potencial ou voltagem), Z é a impedância (resistência) e i é a corrente elétrica (variação de cargas elétricas ao longo do tempo), sendo essas grandezas representadas através de números complexos. (CANDIDO et al., 2014, p.10)

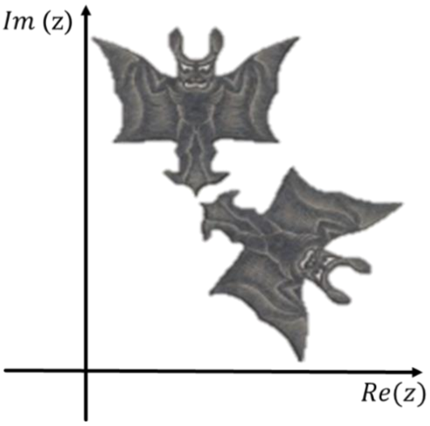
Como a letra i é também utilizada para representar a unidade imaginária nos Números Complexos, a fim de evitar confusão com o símbolo da corrente elétrica, “os engenheiros optam por usar a letra j para indicar a unidade imaginária na representação algébrica $a + bi$ de um Número Complexo. E ainda, usam a notação $|w| < \theta$ para a forma trigonométrica $|w|(cos\theta + isen\theta)$". (DANTE, 2011)

5.1.3 Aplicações dos Números Complexos na Arte

Maurits Cornelis Escher (1898 – 1970), é um artista holandês, formado em arquitetura e bastante influenciado pele arte espanhola. O artista dedicava suas obras em figuras concretas como demônios, pessoas, peixes etc. Além disso, Escher dedicou algumas de suas obras de arte à Matemática e algumas delas, traz aspectos que podemos associar com os Números Complexos, sobretudo geometricamente.

Como abordado nos parágrafos anteriores, estudamos alguns movimentos no plano complexo, a rotação, por exemplo, são movimentos que você faz na figura em relação a origem, sem alterar seu tamanho, como vimos nos parágrafos anteriores. Visto isso, a figura a seguir é uma obra de Escher que mostra o movimento de rotação de uma figura:

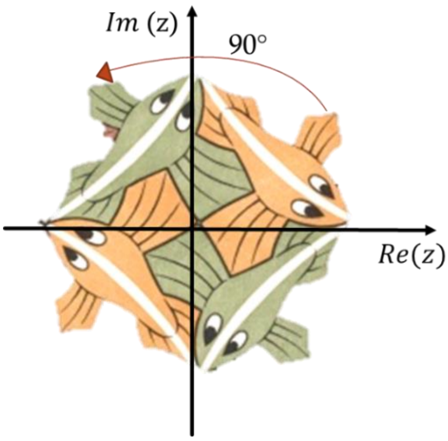
Figura 21: Rotação no plano complexo



Fonte: adaptado de https://mcescher.com

Na Limite Circular IV, M.C. Escher, também relaciona sua obra com o deslocamento rotacional em torno da origem por um ângulo de $\frac{\pi}{2}$ no qual relacionamos a operação de multiplicação. A figura a seguir, apresenta essa relação:

Figura 22: Rotação no plano complexo



Fonte: adaptado de https://mcescher.com

6 Considerações Finais

A escolha de pesquisar sobre a história dos Números Complexos nos proporcionou diversas experiências, principalmente poder inferir como funcionavam os estudos naquela época. Nos fez entender o momento das descobertas e como isso era divulgado no meio acadêmico. É interessante olhar por esse ângulo e fazer um comparativo de como são feitas as publicações de trabalhos hoje em dia.

Naquela época, por exemplo, não havia a tecnologia que existe hoje, o que tornava tudo um pouco menos tecnológico. O exemplo disso está quando vimos como eram feitos os duelos para ver qual seria o Matemático responsável por determinada descoberta. Esses duelos poderiam durar dias, ou até anos e ainda assim não serem justos, porque, assim como atualmente, há sempre um lado com mais oportunidade. Atualmente isso é menos recorrente, visto que temos política de direitos autorais entre outros recursos.

O acesso à história dos Números Complexos nos faz entender que existem resultados bastante importantes, que podem inclusive serem utilizados até hoje, mas que não tiveram seu devido reconhecimento na época, tendo como exemplo a fórmula da equação polinomial do segundo grau, que aqui no Brasil é conhecida como fórmula de Bhaskara, mas não foi ele quem descobriu. Isso é um assunto bastante importante para refletirmos, como o estudo da história da Matemática pode nos ajudar a consertar possíveis propagações de erros. É de suma importância conhecer e compreender o desenvolvimento que há por trás de todo conteúdo que aprendemos ou ensinamos. Tendo como exemplo uma sala de aula, ensinar esse conteúdo com uma base histórica é importante para entendermos o desenvolvimento do pensamento dos matemáticos da época.

No decorrer deste trabalho, conseguimos perceber que o motivo para a descoberta dos Números Complexos surgiu de um problema encontrado na resolução de cúbicas. É interessante ressaltar que nesse contexto a palavra “problema” nos trouxe um enorme ganho, pois a partir das raízes quadradas de números negativos, decorrentes da fórmula da cúbica, tivemos o estopim para o início do estudo dos Números Complexos.

Podemos relacionar com os aspectos vivenciados em uma sala de aula, por exemplo, não é porque encontramos um “problema” que isso será ruim.

Além disso, podemos aqui refletir sobre como a linguagem Matemática se desenvolveu ao longo do tempo, como as regras operatórias criadas por Bombelli, por exemplo, onde *più di meno* passou a ser denotada atualmente como $-i$. Os “problemas” encontrados em resoluções de exercícios matemáticos contribuíram para o desenvolvimento da linguagem Matemática, graças a isso, podemos hoje tornar menos “imaginário” e mais acessível o estudo do conjunto dos Números Complexos.

Por várias décadas os estudos de muitos Matemáticos foram de extrema importância para o desenvolvimento da Matemática, mesmo com a finalidade de resolver equações de grau três, eles acabaram gerando grandes descobertas. Pesquisar sobre os Números Complexos faz com que possamos compreender diversos assuntos da Matemática, já que é impossível falar sobre esse assunto sem estudar os demais conjuntos, além disso, resgatamos a importância do estudo desse conjunto para o desenvolvimento dela.

Com a publicação desse trabalho, esperamos poder esclarecer eventuais dúvidas sobre a história dos Números Complexos, e ainda ajudar as pessoas que se interessam por esse assunto a pesquisarem mais sobre a história desse conjunto para que possamos cada vez mais contribuir com a história da Matemática e o ensino da Matemática.

REFERÊNCIAS

ATAHIDE, Janaino Soares Vieira de. **Números Complexos e Algumas Aplicações**. 2018. Trabalho de conclusão de curso (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal de Mato Grosso, [*S. l.*], 2018. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=160310444. Acesso em: 17 jan. 2021.

BRANCO, Claudia Castelo; DEURSEN, Felipe Van. **A vida sem números.** SUPER INTERESSANTE, [*S. l.*], p. 1, 18 out. 2011. Disponível em: https://super.abril.com.br/historia/a-vida-sem-numeros/#:~:text=O%20sistema%20desenvolvido%20na%20%C3%8Dndia,simples%20do%20que%20o%20romano.&text=%E2%80%9CEstes%20s%C3%A3o%20os%209%20s%C3%ADmbolos,em%201202%2C%20o%20Liber%20Abbaci. Acesso em: 17 jan. 2021.

CANDIDO, Ana Cláudia Piau *et al*. **Números Complexos**. 2014. Monografia (Matemática - Licenciatura) - UNICAMP, [*S. l.*], 2014. Disponível em: https://www.ime.unicamp.br/~ftorres/ENSINO/MONOGRAFIAS/NC2.pdf. Acesso em: 17 jan. 2021.

CAON, Fernanda. **Números Complexos: Iter-Relação Entre Conteúdos e Aplicações**. 2013. Trabalho de conclusão de curso (MESTRADO PROFISSIONAL PROFMAT) - Universidade Estadual de Ponta Grossa, [*S. l.*], 2013. Disponível em: https://tede2.uepg.br/jspui/bitstream/prefix/1518/1/Fernanda%20Caon.pdf. Acesso em: 17 jan. 2021.

CARNEIRO, Raylson dos Santos. **Métodos de Resolução de Equações do Terceiro Grau**. 2015. Trabalho de conclusão de curso (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Tocantins, [*S. l.*], 2015. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=89305. Acesso em: 17 jan. 2021.

CARNEIRO, Vera Clotilde Garcia. **História dos Números,** [*s. l.*], [2008?]. Disponível em: http://www.mat.ufrgs.br/~vclotilde/disciplinas/html/historia_numeros.pdf. Acesso em: 17 jan. 2021.

CERRI, Cristina; MONTEIRO, Martha S**. História dos Complexos**. 2001. 13 p. Artigo (Instituto de Matemática e Estatística) - Universidade de São Paulo, São Paulo, 2001. Disponível em: <https://www.ime.usp.br/~martha/caem/complexos.pdf>. Acesso em: 04 nov. 2018.

DANTE, L. R. **Matemática: Contexto e Aplicações**. Vol. III. Editora Ática, 1.ed. São Paulo, 2011.

DIAS, Isabel Cristina. História da Matemática. **Leituras**, APM, ed. 73, p. 39, 2003. Disponível em: http://www.apm.pt/apm/revista/educ73/Leituras73.pdf. Acesso em: 17 jan. 2021.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. 5. ed. [*S. l.*]: UNICAMP, 2011.

FELGUEIRAS, Fábio Medina. História da Matemática. **Anotações Sobre História da Matemática**, [*s. l.*], 2016. Disponível em: https://silo.tips/download/universidade-do-estado-da-bahia-uneb-23. Acesso em: 17 jan. 2021.

GARBI, Gilberto G. **O Romance das Equações Algébricas**. 3. ed. [*S. l.*]: Livraria da Física, 2009. 151 p.

IEZZI, Gelson. **Fundamentos da Matemática Elementar**, vol. 6, 1977.

JUNIOR, Ulício Pinto. **A História dos Números Complexos: "das quantidades sofisticadas de Cardano às linhas orientadas de Argand"**. 2009. Trabalho de conclusão de curso (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2009. Disponível em: http://www.pg.im.ufrj.br/pemat/MSc%2012_Ulicio%20Pinto%20Junior.pdf. Acesso em: 17 jan. 2021.

LOPES, Ana Isabel; SANTOS, Sônia Cristina. **Bombelli e o caso irredutível na equação de 3ºgrau**. Ulisboa, [entre 1999 e 2004]. Disponível em: https://webpages.ciencias.ulisboa.pt/~ommartins/seminario/renascenca/bombelli.htm#:~:text=%E2%80%9CEncontrei%20uma%20outra%20esp%C3%A9cie%20de,quadrada)%20tem%20no%20seu%20Algoritmo. Acesso em: 17 jan. 2021.

MARTINS, Jheovany Henrique *et al*. **Os quatérnios, octônios como álgebras não comutativas de dimensão finita sobre os reais: existem outras do mesmo tipo?**: História dos quatérnios. 2017. Monografia (SI) - UNICAMP, [*S. l.*], 2017. Disponível em: https://www.ime.unicamp.br/~ftorres/ENSINO/MONOGRAFIAS/martins_EA_2017.pdf. Acesso em: 17 jan. 2021.

MELLO, Silvio Quintino de. **O Ensino de Matemática e a Educação Profissional: A Aplicabilidade dos Números Complexos na Análise de Circuitos Elétricos**. 2005. Trabalho de conclusão de curso (Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Luterana do Brasil, [*S. l.*], 2005. Disponível em: http://www.ppgecim.ulbra.br/teses/index.php/ppgecim/article/view/30/29. Acesso em: 17 jan. 2021.

MILIES, César Polcino. **A Solução de Tartaglia para a Equação do Terceiro Grau**. IME-USP, SD [20--]. Disponível em: https://www.rpm.org.br/cdrpm/25/4.htm. Acesso em: 17 jan. 2021.

NETO, Raimundo Martins Reis. **Alternativa Metodológica para o Ensino e Aprendizagem de Números Complexos: Uma Experiência com Professores e Alunos.** 2009. 143 p. Dissertação (Mestre em Ensino de Matemática.) - Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2009. Disponível em: <http://www.biblioteca.pucminas.br/teses/EnCiMat_ReisNetoR_1.pdf>. Acesso em: 06 nov. 2018.

OLIVEIRA, Ana Paula de *et al*. História da Matemática I. **Geometria na Babilônia**, USP, SD [20--]. Disponível em: https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/4475055/mod_resource/content/1/Geometria%20na%20Babil%C3%B4nia.pdf. Acesso em: 17 jan. 2021.

PORTOLAN, Juliano. **A Importância do Ensino de Números Complexos no Ensino Médio, na Visão dos Professores de Matemática, em Alguns Municípios da**

Região Oeste do Paraná. 2017. Dissertação (Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, [*S. l.*], 2017. Disponível em: https://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/bitstream/1/3024/1/PB_PROFMAT_M_Portolan%2C%20Juliano_2017.pdf. Acesso em: 17 jan. 2021.

SANTOS, Davi José dos. **A Álgebra dos Complexos/Quatérnios/Octônios e a Construção de Cayley-Dickson**. 2016. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal de Goiás, [*S. l.*], 2016.

SANTOS, Jucineide Silva; FERREIRA, Maurício de Araújo. Álgebra de Quatérnios. **Álgebra de Quatérnios**, Universidade Estadual de Feira de Santana, 2011. Disponível em: http://www2.uefs.br/semic/upload/2011/2011XV-702JUC938-120.pdf. Acesso em: 17 jan. 2021.

SILVA, Patrícia Ferreira da. **História Dos Números Complexos**. 2016. Trabalho de conclusão de curso (Graduado em Matemática.) - Universidade Federal de São João Del-Rei – UFSJ, [*S. l.*], 2016. Disponível em: http://dspace.nead.ufsj.edu.br/trabalhospublicos/bitstream/handle/123456789/89/PATRICIA%20FERREIRA%20DA%20SILVA_11931_assignsubmission_file_TCC.pdf?sequence=1&isAllowed=y. Acesso em: 17 jan. 2021.

SILVEIRA, Fernando Lang da. A Matemática dos antigos gregos era a Geometria. **Raciocínios Geométricos**, UFRGS, 2005. Disponível em: http://www.if.ufrgs.br/mpef/ieeefis/Lang/Raciocinios%20geometricos.pdf. Acesso em: 17 jan. 2021.

VIEIRA, Lúcia Helena da Silva. **Epistemologia dos números complexos**. 1999. Trabalho de conclusão de curso (Matemática - Habilitação Licenciatura) - Universidade Federal de Santa Catarina, [*S. l.*], 1999. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/97064/Lucia_Helena_Silva_Vieira.PDF?sequence=1&isAllowed=y. Acesso em: 17 jan. 2021.