INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Sentidos e significados do conceito de número irracional na Educação Básica: um estudo a partir da Teoria Histórico-Cultural

Pedro Marcos Mossulin Ferreira

IFSP
São Paulo
2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Ferreira, Pedro Marcos.

Sentidos e significados do conceito de número irracional na Educação Básica: um estudo a partir da Teoria Histórico-Cultural. Manual de Elaboração de Trabalho de Conclusão do Curso (TCC) do Curso de Licenciatura em Matemática / Pedro Marcos Mossulin Ferreira. - São Paulo: IFSP, 2021.

70f

Trabalho de Conclusão do Curso Superior de Licenciatura em Matemática - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo.

Orientador: Wellington Pereira das Virgens.

1. Irracionais. 2. Teoria Histórico-Cultural. 3. Vygotsky. I. Sentidos e significados do conceito de número irracional na Educação Básica: um estudo a partir da Teoria Histórico-Cultural.

Pedro Marcos Mossulin Ferreira

Sentidos e significados do conceito de número irracional na Educação Básica: um estudo a partir da Teoria Histórico-Cultural

Trabalho de conclusão no Curso Licenciatura em Matemática do Departamento de Matemática do Instituto Federal de Educação e Ciência a Tecnologia de São Paulo, apresentado como requisito parcial para obtenção do título de licenciada em Matemática, sob orientação do Prof. Dr. Wellington Pereira das Virgens.

IFSP
São Paulo
2021

FOLHA DE APROVAÇÃO

FERREIRA, Pedro Marcos Mossulin. **Sentidos e significados do conceito de número irracional na Educação Básica: um estudo a partir da Teoria Histórico-Cultural.** Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de São Paulo, São Paulo, 2021.

APROVADO EM ______ _______ CONCEITO ___________

____

Prof. Dr. Wellington Pereira das Virgens - Orientador

____

Prof. Dr. Henrique Marins de Carvalho

____

Prof. Dr. Luciano Magrini

____

Discente: Pedro Marcos Mossulin Ferreira

“Eu determino que termine aqui e agora
Eu determino que termine em mim, mas não acabe comigo
Determino que termine em nós e desate
E que amanhã, que amanhã possa ser diferente pra elas
Que tenham outros problemas e encontrem novas soluções
E que eu possa viver nelas, através delas e em suas memórias”

Linn da Quebrada

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a professora Christiane que através das suas aulas de matemática para a minha turma da oitava série me mostrou pela primeira vez o tamanho da influência que um bom professor tem na vida dos seus alunos. Minha carreira na docência começou ali, assistindo e me encantando com as suas aulas de matemática, não teria chegado até aqui se a senhora não tivesse feito um excelente trabalho. Agradeço também o professor Luciano que foi responsável por me mostrar um horizonte de possibilidades e acima de tudo foi responsável por me mostrar que essas possibilidades eram possíveis para mim. Você é minha maior inspiração, não teria chegado até aqui se você não tivesse me mostrado que eu posso. Agradeço também ao Professor Wellington que me mostrou, através da sua prática pedagógica diária, que ainda existe esperança, que uma educação política, humanizadora e acolhedora não só é possível como necessária. Nos meus momentos de desesperança é de você que eu lembro e é nas memórias das suas aulas que eu me apego, não teria chegado até aqui se você não tivesse me mostrado que chegar até aqui vale a pena.

Agradeço aos meus amigos da faculdade: Paulinha, Façanha, Douglas, Dani, Silas, Arilson e muitos outros que cruzaram meu caminho pelos corredores do Instituto Federal. Vocês me lembram que eu não estou sozinho na luta por uma educação de qualidade.

Agradeço aos meus pais que batalharam e batalham todos os dias para que eu possa me dedicar aos estudos. As minhas conquistas também são suas conquistas. Agradeço ainda a família que eu escolhi para mim: Fernanda, Anie e Rafael. Vocês estiveram ao meu lado nos meus piores e melhores momentos, a gente riu juntos, choramos juntos e acima de tudo permanecemos juntos.

RESUMO

Este presente trabalho consiste na proposição de uma Situação Desencadeadora de Aprendizagem (SDA) para o ensino dos números irracionais. Partindo dos pressupostos da Teoria histórico-cultural e utilizando o materialismo histórico-dialético como metodologia vamos buscar compreender de que forma a atividade humana se deu no processo de significação do conjunto dos números irracionais para que, a partir daí, possamos organizar a atividade de ensino dos irracionais, através da SDA, de forma a superar as contradições que existem atualmente no ensino desse conjunto. Por fim, espera-se que a SDA aqui proposta permita a apropriação, por parte dos alunos, de todos os conceitos que cercam o conjunto dos números irracionais, além de permitir a superação das abordagens de ensino comumente usadas para tratar desses números nas aulas de matemática que não dão conta de abordar de forma plena todas as ideias que permeiam esse conjunto.

Palavras-chaves: Teoria histórico-cultural, Números irracionais, Situação Desencadeadora de Aprendizagem.

Senses and Meanings of the irrational number concept in middle school: an study from the Historical-Cultural Theory.

ABSTRACT

This present work consists in the proposition of a Learning Trigger Situation (SDA) for the teaching of irrational numbers. Based on the assumptions of the cultural-historical theory and using dialectical historical materialism as a methodology, we will seek to understand how human activity took place in the process of meaning the set of irrational numbers so that, from there, we can organize the teaching activity of through the SDA, to overcome the contradictions that currently exist in the teaching of this set. Finally, it is expected that the SDA proposed here allows the appropriation, by the students, of all the concepts that surround the set of irrational numbers, in addition to allowing the overcoming of the teaching approaches commonly used to deal with these numbers in the classes of mathematics that cannot fully address all the ideas that permeate this set.

Keywords:
Historical-cultural theory, Irrational numbers, Learning triggering situation.

LISTA DE TABELAS

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

As discussões aqui apresentadas sintetizam a pesquisa realizada no contexto da realização do Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) do curso de licenciatura em matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo - câmpus[1] São Paulo. Mas, para além disso, as discussões aqui apresentadas também se configuram como um produto direto das frustrações, inquietações e acima de tudo das esperanças de um estudante de licenciatura que busca, através da sua prática de formação docente e da análise das contradições dessa prática, construir uma educação humanizadora que permita, a quem for tocado por ela, não só a capacidade de compreender a realidade em que está imerso, assim emergindo dela, mas também a capacidade de transformar essa realidade, assim se inserindo e se humanizando nela.

> Esta reflexão sobre a situacionalidade é pensar a própria condição de existir. Um pensar crítico através do qual os homens se descobrem em "situação". Só na medida em que esta deixa de lhes parecer uma realidade espessa que os envolve, algo mais ou menos nublado em que e sob o que se acham, um beco sem saída que os angustia e a captam como a situação objetivo-problemática em que estão, é que existe o engajamento. Da *imersão* em que se achavam, *emergem,* capacitando-se para se *inserirem* na realidade que se vai desvelando. (FREIRE, 2019, p. 141, destaques no original).

Dito isto, a busca por essa educação humanizadora tem seu ponto de partida na aceitação da tese marxista de que o sujeito se torna humano a partir do trabalho, entendendo trabalho como os processos "de que participam o homem e a natureza, processo em que o ser humano, com sua própria ação, impulsiona, regula e controla seu intercâmbio material com a natureza" (MARX, 2002, p. 211), de tal forma que o conhecimento produzido pela humanidade tem a sua origem nesse intercâmbio material, e portanto tem sua origem no trabalho, sendo esse intercâmbio enriquecido pela apropriação, por parte do sujeito, de conhecimentos anteriormente produzidos. Em síntese, considerando que o aprendizado acontece quando a apropriação de conhecimentos acontece, aprender é também se humanizar.

[1] Ainda que, de acordo com a norma-padrão da língua portuguesa, a palavra "campus" não deva ser acentuada, há orientação específica do IFSP para que, no contexto das produções daquela instituição, tal termo receba acento circunflexo. Como este é um trabalho vinculado à realização de um cursa daquela instituição, respeitamos a norma interna e incorporamos esta nota de rodapé para dar contexto a leitores externos.

> É neste contexto que podemos entender que a educação é humanizadora, já que é a partir dela que o indivíduo da espécie humana se apropria da cultura historicamente produzida e pode ser reconhecido como humano. Em outras palavras, aquilo que há de humano no indivíduo da espécie não decorre apenas das características biológicas que lhe são específicas, mas também da apropriação cultural que decorre de sua atividade humana (VIRGENS, 2019, p. 84).

A partir daí, percebemos que a apropriação dos conhecimentos produzidos pela humanidade é direito dos sujeitos como característica fundamental de sua condição de ser humano e não demanda social vinculada exclusivamente à formação escolar. Nosso interesse pelo conjunto dos números irracionais vem desse contexto. Reconhecemos a existência de contradições entre a essência do significado, historicamente produzido, de números irracionais e as práticas de ensino que buscam apresentar a estudantes esses números. Por isso, o objetivo deste trabalho é apresentar a forma se deu o processo de significação do conjunto dos números irracionais, compreendendo de que formas a atividade humana (trabalho) mediou esse processo para que assim seja possível subsidiar a proposição de uma Situação Desencadeadora de Aprendizagem (SDA) que coloque a atividade de ensino dos números irracionais em relação dialética com a atividade humana que permitiu, à humanidade, a significação desse conjunto. Entendemos que somente assim, dentro de uma perspectiva histórico-cultural, é que podemos contribuir para aproximar os sentidos pessoais de estudantes da educação básica dos significados sociais sobre números irracionais, promovendo assim uma apropriação dos conceitos que relacionados a esse conjunto, além de superarmos metodologias de ensino tradicionalmente usadas para se abordar os números irracionais na sala de aula, que abordam apenas superficialmente a noção do que seja um número irracional.

> Assim, adotamos como premissa que os processos de ensino e de aprendizagem devem considerar a cultura e a história humana para suscitar, no contexto ontogenético, as necessidades que levaram a humanidade, filogeneticamente, a produzir o conhecimento por ela acumulado, de modo que cada sujeito possa superar a mera adaptação à natureza à sua volta para modificá-la ao mesmo tempo em que é modificado por ela (VIRGENS, 2019, p. 202).

A escolha pelo conjunto dos números irracionais se deu pelo fato de que, desta perspectiva histórico-cultural, as abordagens de ensino normalmente utilizadas para se tratar desse conjunto, em nosso entendimento, estão em contradição com proposições curriculares das quais esse conjunto numérico emerge como objeto a ser ensinado, ou seja, ainda que textos oficiais indiquem que os estudantes devem desenvolver habilidades que envolvam a compreensão de números irracionais e suas propriedades, as práticas docentes, da forma como são realizadas tradicionalmente, não dão conta de contribuir para que estudantes se apropriem dos conceitos que abrangem esses números. Conceitos esses, como as noções de grandezas e a possibilidade de comparação entre grandezas distintas, por exemplo, que fazem parte da realidade material dos e das estudantes, de modo que se apropriar delas é condição necessária para que o processo de apropriação possa promover a compreensão e a transformação da realidade.

1. Materialismo histórico-dialético e a Teoria Histórico-cultural.

Este capítulo tem por objetivo apresentar, ainda que em linhas gerais, as ideias que subsidiam a adoção do materialismo histórico-dialético como metodologia deste trabalho e a teoria histórico-cultural como fundamentação teórica. As discussões feitas neste capítulo vão fundamentar, ainda, a proposição da Situação Desencadeadora de Aprendizagem – SDA para o ensino dos números irracionais e vão explicar o porquê e o como a SDA pode oferecer ao estudante uma apropriação completa de todos os conceitos que envolvem o conjunto dos números irracionais.

1.1 Materialismo histórico-dialético como método de compreensão e transformação da realidade.

O ponto de partida deste trabalho se encontra em assumir a existência de unidades contraditórias entre a essência do significado de números irracionais, produzido histórica e culturalmente pela humanidade, e a maneira como, tradicionalmente, se organizam as práticas de ensino desses números. Essas contradições dificultam que os estudantes se apropriem dos conceitos que cercam esse conjunto numérico, de modo que a capacidade crítica de compreender e transformar a realidade tendo os irracionais como unidade de análise fica prejudicada. As contradições serão futuramente apresentadas e mais bem discutidas, mas, aceitando a existência delas, é importante entender de que forma este trabalho, organizado a partir de uma perspectiva materialista histórico-dialética (MHD), vai propor a superação delas.

O MHD é um método de análise de fenômenos sociais que vai partir do princípio de que esses fenômenos são, em essência, produto do trabalho humano em movimento ao longo da história, sendo que esse movimento se dá tendo a cultura como elemento mediador (VIRGENS, 2019). É importante destacar que para compreender a realidade a partir do movimento feito pelo trabalho humano é preciso reconhecer nesse movimento a sua característica dialética, de forma que: "a dialética vê esse movimento como o resultado das lutas internas que não se imobilizam entre afirmações e negações, entre teses e antíteses, mas se produz na síntese, como negação da tese e da antítese" (MORETTI et al., 2018, p. 7). Desta forma é possível entender que um fenômeno social não ocorre de certa forma “porque é da sua natureza ser assim” (antítese), de modo independente da ação humana, mas também não é aquilo que os seres humanos decidiram (apenas por suas vontades) que seria (tese), independente do momento histórico e do lugar que eles ocupam no mundo. Um fenômeno, para que possa ser verdadeiramente compreendido, precisa ser entendido a partir do trabalho humano historicamente e culturalmente delimitado (síntese).

Além disso, O MHD é um método que não se contenta unicamente com a compreensão dos fenômenos que constituem a nossa realidade. Para Marx: “os filósofos têm apenas interpretado o mundo de maneiras diferentes, a questão, porém, é transformá-lo” (MARX, 1845). De forma que a transformação da realidade parte de uma análise materialista, histórica e dialética do presente, sendo que essa análise vai permitir identificar as contradições existentes nas condições materiais, antíteses e teses, para que assim, identificadas essas contradições seja possível superá-las (sínteses).

A partir daí, este trabalho se propõe a analisar, em uma perspectiva materialista, histórica e dialética, a forma com que se dá o ensino dos números irracionais na atualidade estabelecendo as contradições existentes entre a essência do significado dos números irracionais (tese) e a forma com que se organiza a atividade de ensino desses números (antítese), para possibilitar a superação dessas contradições (síntese) através da proposição de uma Situação Desencadeadora de Aprendizagem.

1.2 A organização do ensino a partir da teoria histórico-cultural.

Estabelecido o objetivo deste trabalho e a metodologia que subsidia a análise e a proposição de uma SDA para o ensino dos números irracionais, entendemos ser importante destacar que uma SDA não é meramente a proposição de tarefas a serem realizadas por alunos e alunas, mas sim uma forma de organizar a atividade de ensino pautada na Teoria Histórico-Cultural (THC). Portanto torna-se importante compreender do que se trata a THC e de que forma é possível pensar o ensino a partir dela. Por isso, apresentamos, em linhas gerais, a seguir, algumas considerações.

Lev Vygotsky (1896 - 1934) foi um psicólogo bielo-russo que, juntamente com um pequeno grupo de estudiosos, buscou explicar a origem do que ele chamava de funções psicológicas superiores (memorização, imaginação, pensamentos, entre outros) e a origem da consciência humana. Para Vygotsky e seus colaboradores as correntes de pensamento vigentes à sua época, no campo da psicologia, não davam conta de explicar adequadamente a origem dessas funções (MORETTI et al., 2018).

Insatisfeito com as abordagens de estudo da psique humana que a abordavam de forma empirista, ignorando seus aspectos mais complexos e focando na descrição de comportamentos humanos mais rudimentares ou que tratavam para a psique de forma idealista, enfatizando questões mais complexas de forma subjetiva e focando na ideia de consciência humana como produto do espírito, Vygotsky adotou o materialismo histórico dialético como método e, de seus estudos, desenvolveu o arcabouço teórico que culminou no que atualmente conhecemos como teoria histórico-cultural, que se constituiria como superação dessas duas abordagens antagônicas – consciência como como espírito e consciência como corpo (REGO, 1995).

Assim, a teoria histórico-cultural se apropriando metodologicamente do MHD passa a defender que as funções psicológicas superiores e a consciência humana têm origem na relação dialética que o indivíduo estabelece com o meio em que ele vive (REGO, 1995). É a maneira como o indivíduo modifica o meio e como o meio modifica o indivíduo, ou seja, o indivíduo se desenvolve mental e culturalmente à medida que as relações indivíduo-meio vão se desenvolvendo historicamente (VIRGENS, 2019).

Os aspectos socioculturais são particularmente importantes para o desenvolvimento humano, em uma perspectiva histórico-cultural, pois inserido e atuando em relações sociais o sujeito não recebe passivamente as mudanças do meio, mas se apropria da cultura humana historicamente produzida, passando a interferir em tal meio, de forma que as relações que ele vai estabelecendo com esse meio são intermediadas por essa apropriação cultural e o produto dessas relações vão constituindo a formação de novos elementos culturais que serão apropriados pelas próximas gerações e, novamente, atuando sobre o meio. Por essa razão dizemos que as relações são dialéticas.

> O homem não é um ser passivo diante da natureza. Ele possui capacidade de apropriação da produção cultural histórica da própria espécie. Ao nascer, o indivíduo - ser biológico - é inserido em uma sociedade que possui uma ampla produção cultural. A linguagem possibilita que esse indivíduo se torne

> sujeito da produção dessa cultura, ao mesmo tempo que se apropria dela. (VIRGENS, 2019, p. 82)

E nesse contexto é possível compreender a importância da educação no processo de desenvolvimento humano, pois se o indivíduo se desenvolve a partir da apropriação da cultura historicamente produzida, atualmente, é através da educação que essa apropriação se torna possível e, portanto, é através da educação que o indivíduo se desenvolve e constitui as características que são tipicamente humanas. A partir daí, na perspectiva histórico-cultural, a atividade de ensino precisa ser organizada e pensada, ou seja, deve ser consciente, de modo que o resultado dela seja a apropriação, também consciente, por parte do aluno, do conhecimento humano, compreendendo o conhecimento humano como parte constituinte da cultura humana.

Por isso a Situação Desencadeadora de Aprendizagem, compreendida em uma perspectiva histórico-cultural, se apresenta como uma forma de organizar a atividade de ensino, pois potencializa que a atividade de ensino permita ao aluno a apropriação do conhecimento humano e, a partir daí, permita ao aluno se desenvolver. A SDA organiza o ensino partindo da ideia de que o conhecimento, como parte constituinte da cultura, é produzido a partir da relação que os indivíduos estabeleceram com o meio em um dado recorte histórico, portanto para conhecer a essência desse conhecimento é preciso entender o contexto histórico em que ele se deu e de que forma a atividade humana o possibilitou. Compreendida a essência desse conhecimento, a SDA destaca, na atividade de ensino, a essência da atividade humana que possibilitou a constituição desse conhecimento. Isto se torna possível, pois toda atividade humana tem origem em uma necessidade imposta ao indivíduo pelo meio em que ele vive (VIRGENS, 2019) e entender de que forma a atividade humana possibilitou a produção desse conhecimento é entender quais necessidades que levaram os sujeitos a agir sobre o meio, sendo que colocar a atividade de ensino em sintonia com a atividade humana é, de forma simples, reproduzir em sala de aula as necessidades que levaram os sujeitos a agir sobre o meio, modificando o meio que, em processo constante de modificação, modifica os próprios sujeitos.

É importante pontuar que reproduzir na sala de aula as necessidades que levaram o indivíduo a agir sobre o meio é, em uma perspectiva histórico-cultural, permitir aos e às estudantes se apropriarem daquele conhecimento, pois o movimento que desencadeia a aprendizagem de tais conhecimentos se inicia, precisamente, em necessidades análogas, porém isto não significa fazer da atividade de ensino a imitação de um determinado fato histórico. Essa diferença será melhor abordada quando for apresentada a SDA para o ensino dos irracionais. Importante registrar, no entanto, que colocar a atividade de ensino em sintonia com a atividade humana não é a mesma coisa que tentar imitar na sala de aula um determinado acontecimento histórico.

2. O conjunto dos números irracionais e as grandezas incomensuráveis.

Este capítulo propõe-se a apresentar o processo histórico de significação do conjunto dos números irracionais, explicitando a forma como esses números estão intimamente ligados à geometria e as ideias de grandezas e medidas, além de buscar compreender de que forma a atividade humana esteve presente nesse processo.

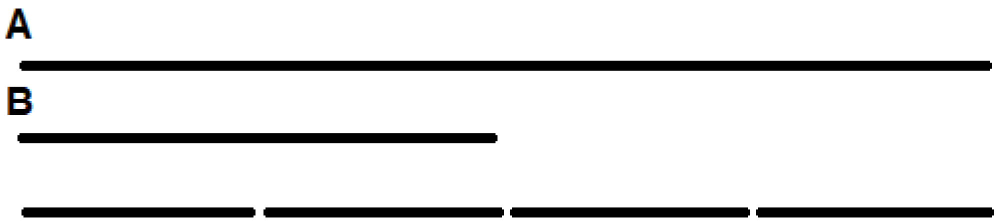
2.1 Pitágoras e a fé na comensurabilidade.

Diferente da concepção marxista, que reconhece a matemática como produto do trabalho humano oriundo na relação dialética estabelecida entre o sujeito e o lugar (espaço e tempo) que ele ocupa, Pitágoras, um importante filósofo e matemático grego, juntamente da escola de pensamento pitagórico, entendia a matemática por um ponto de vista que pressupunha acreditar não só que ela existia independentemente da ação humana, mas também que a essência da nossa realidade estava na matemática e nos números (DEWDNEY, 200, p. 21).

A fé de Pitágoras na matemática culminava, especificamente, na ideia de comensurabilidade e nas relações entre números inteiros. Para Pitágoras o mundo era composto única e exclusivamente por grandezas e medidas comensuráveis ("tudo são números", teria dito ele certa vez), sendo elas expressas, quaisquer que fossem, através dos números inteiros e das suas razões (DEWDNEY, 2000, p.24). E é aqui que a geometria se torna parte fundamental no processo de significação dos irracionais, pois os gregos tinham um sistema de numeração muito limitado no que diz respeito a representação aritmética e, a partir daí, a geometria vai funcionar como base para o desenvolvimento do pensamento matemático grego (DEWDNEY, 2000, p.24). Desta forma os estudos e descobertas atribuídos a Pitágoras relacionados à comensurabilidade, que acabariam levando-o, paradoxalmente, a se deparar com os números irracionais, foram feitos a partir de elementos da geometria. A partir de uma perspectiva histórico-cultural, se os elementos da geometria são parte do processo de significação dos números irracionais então eles devem ser, também, parte dos processos de ensino e aprendizagem desses números.

Podemos entender comensurabilidade como sendo a existência de uma unidade de medida em comum entre duas outras medidas, de forma que essa unidade de medida em comum permita representar ambas as medidas usando números inteiros (OLIVERO, 2010, p.31). Por exemplo, sendo o segmento A e o segmento B medidas de distância diferentes, dizemos que A e B são comensuráveis se existir entre eles uma unidade de medida que permita representar ambos os segmentos através de números inteiros. Sendo assim, tomando um segmento C como unidade de medida observe, na figura 1, que o segmento B vai ter uma medida de 2 unidades e o segmento A vai ter uma medida de 4 unidades.

Figura 1: Segmentos A e B e a unidade de Medida C



Fonte: produção do autor.

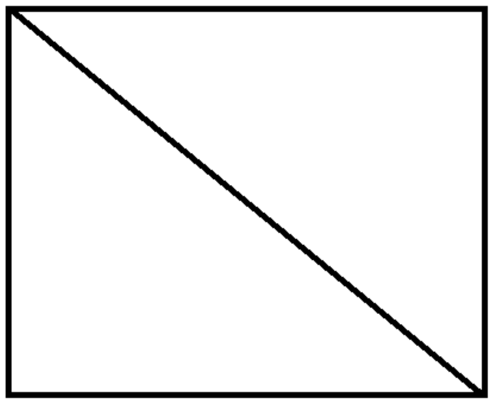
Assim, como que A e B são podem ser medidas pela unidade C, ou seja, como a medida C cabe um número inteiro de vezes nas medidas de A e também de B dizemos que essas medidas são “co”-“mensuráveis”. Também podemos considerar intuitivo que, se adotarmos o próprio segmento B como unidade de medida, ele caberia uma (inteiro) vez dentro de si mesmo e duas (inteiro) vezes dentro de A. Essa observação nos leva a pensar que, se C existir, deve haver uma forma de diminuir C, tanto quanto possível para que ele seja considerado uma *unidade*.

De modo resumido, a fé da escola de pensamento pitagórico consistia na ideia de que tomado duas medidas quaisquer, necessariamente, existiria entre elas uma unidade de medida comum que permitiria medi-las por um número inteiro.

2.2 A “irracionalidade” na incomensurabilidade.

No subitem anterior, 2.1, tratamos a noção de comensurabilidade da escola pitagórica adotando o termo “fé”. Isso porque se baseava em uma noção intuitiva, ou seja, razoavelmente aceitável em uma perspectiva *racional*, ainda que não tivesse sido demonstrada. Entendemos, portanto, que se aproximava de uma crença, em um sentido próximo daquele que atribuímos atualmente ao termo, ou seja, apesar de parecer aceitável, não havia, ainda, provas de que, dadas duas medidas quaisquer, elas seriam sempre comensuráveis. Porém, segundo Dewdney (2000), a “fé” de Pitágoras teria sido “abalada” quando seu professor, Tales de Mileto (outro importante filósofo e matemático grego) teria pedido para ele verificar a comensurabilidade entre o lado de um quadrado e a sua diagonal (DEWDNEY, 2000, p. 29).

Figura 2: Quadrado e a sua diagonal



Fonte: produção do autor.

O processo de verificação da eventual unidade que poderia medir, com um número inteiro, o lado e a diagonal de um quadrado, decorre dos estudos da razão entre os segmentos, admitindo o conceito de comensurabilidade segundo o qual se duas medidas são comensuráveis é possível estabelecer entre elas uma comparação com uma unidade comum.

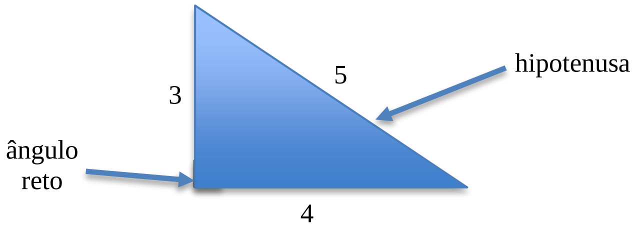
Retomando, na figura 1: sendo os segmentos representações de distância entre dois pontos, é possível determinar que a distância B é metade da distância A, pois a unidade de medida C cabe duas vezes na distância B e 4 vezes na distância A, o que também é equivalente a afirmar, reciprocamente, que a distância A é o dobro da distância B. Essa comparação é chamada de razão e é determinada pela divisão dos inteiros que expressam cada um dos segmentos, ou seja, se dividirmos as 4 vezes que a unidade C cabe em A pelas 2 vezes a mesma unidade cabe no segmento B, obteremos 2 – que representa o que chamamos “dobro” – da mesma forma que se dividirmos as duas vezes que a unidade C cabe em B pelas 4 vezes que a mesma unidade cabe em A, obteremos a fração $\frac{1}{2}$ – que representa o que chamamos "metade".

Pitágoras não foi (nem poderia) capaz de encontrar a unidade de medida que pudesse "co"-"medir", ou seja, medir uma quantidade inteira de vezes, a diagonal e o lado do quadrado, o que equivale à conclusão que Pitágoras não pôde determinar a razão de dois inteiros que indicasse a quantidade inteira que certa unidade de medida pudesse medir a diagonal e o lado de um quadrado. Essa conclusão se opunha à sua fé, baseada em uma análise *racional*. Dessa forma, essa razão só pode ser representada por um valor que não seja *racional*, sendo por isso, ***irracional***. Atualmente, inclusive, assumir que a razão entre a diagonal de um quadrado e seu lado é um número racional nos leva a uma contradição, e constitui a forma de demonstrar que tal razão é um número irracional. Chamamos essa técnica de "demonstração por absurdo", o que mostramos mais adiante.

Voltando ao movimento de Pitágoras: ele tomou o lado do quadrado como sendo a unidade inteira e verificou que independentemente da quantidade de divisões feitas no lado do quadrado ele continuava a não caber um número inteiro de vezes na diagonal (ROCHO, et al., 2018, p. 56) e, portanto, não poderia existir uma unidade de medida em comum entre os segmentos, de modo que eles não eram comensuráveis.

Tomar o lado do quadrado como unidade e mostrar que o lado e a diagonal desse quadrado não são comensuráveis é equivalente a mostrar que a raiz quadrada de dois ($\sqrt{2}$) não é um número racional (OLIVERO, 2010, p. 31). Assumindo que o lado do quadrado é a unidade, ou seja, se o lado mede 1 unidade de medida, sabemos hoje, a "terna pitagórica" resultante disso remeteria a (1, 1, $\sqrt{2}$). As ternas pitagóricas são conjuntos de três valores que, se atribuídos como medidas aos lados de um triângulo, constituirão triângulos retângulos com a medida maior correspondendo à hipotenusa, O exemplo mais conhecido é a terna (3, 4, 5). Atribuir as medidas 3 unidades, 4 unidades e 5 unidades a um triângulo constituirá *sempre* um triângulo em que o ângulo formado pelos lados menores é reto e o lado maior se oporá a esse ângulo reto, sendo chamado de hipotenusa.

Figura 3: Triângulo Pitagórico (3, 4, 5)



Fonte: elaborado pelo autor

Se esses segmentos 1 (lado do quadrado) e $\sqrt{2}$ (diagonal do quadrado) fossem comensuráveis, então existiriam os números *p* e *q* inteiros, tais que $\sqrt{2} = p \,.\, u$ e $1 = q \,.\, u$, sendo *u* a unidade de medida.

Fazendo a razão da diagonal em relação ao lado do quadrado teríamos $\frac{\sqrt{2}}{1} = \frac{p \cdot u}{q \cdot u}$ e, portanto, $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, com *p* e *q* inteiros. Mais do que isso, *p* e *q* são primos entre si, o que significa que a fração $\frac{p}{q}$ é irredutível já que *u* é a *unidade* de medida adotada (em outras palavras, $\frac{p \cdot u}{q \cdot u}$ é equivalente a $\frac{p \cdot 1}{q \cdot 1} = \frac{p}{q}$).

Admitindo verdadeiras as propriedades da igualdade, poderemos elevar ambos os termos da igualdade $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ ao quadrado, teremos:

$$\left(\sqrt{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2$$

Daí decorre que:

$$2 = \frac{p^2}{q^2}$$

Multiplicando agora ambos os termos por q^2 teremos:

$$2q^2 = p^2$$

Analisando essa afirmação verificamos que p^2 é um número par. Daí é possível demonstrar[2] que *p* também será um número par. E, sendo *p* um número par ele pode ser escrito na forma 2k, sendo k um número inteiro qualquer. Daí:

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \rightarrow 2 = \frac{(2k)^2}{q^2} \rightarrow 2 = \frac{4k^2}{q^2} \rightarrow 2q^2 = 4k^2 \rightarrow q^2 = 2k^2$$

[2] Demonstração no apêndice B, neste mesmo trabalho.

Essa última igualdade nos permite concluir que q² é um número par e, portanto, q é um número par. Mas observar que p e q são pares, contraria nosso ponto de partida – que tinha como premissa que p e q são primos entre si. Dessa forma, não existe p e que que possa ser multiplicado por uma unidade de tal modo que $\sqrt{2} = p\,.u$ e $1 = q\,.u$.

Assim $\sqrt{2}$ é reconhecida como o primeiro número irracional (ROCHO, et al., 2018, p.56).

Com a compreensão de que grandezas podem ser incomensuráveis emergiu também a existência de números que não poderiam ser escritos como razão de números inteiros, já que a essência do conceito de incomensurabilidade se encontra na ideia de grandezas ou medidas que não compartilham uma unidade de medida em comum e, portanto, são grandezas e medidas que não podem ser comparadas por uma unidade comum.

Entendemos que, se a necessidade de comparar grandezas a uma unidade de medida comum, que dá origem ao conceito de grandezas incomensuráveis, está presente na gênese do que reconhecemos hoje como número irracional, deve estar presente também nas práticas de ensino que tenham por objetivo ensinar esse conceito. Surge daí uma pergunta importante: as práticas de ensino de irracionais incluem, de modo geral, essa perspectiva? Pensando nisso buscamos respostas nas práticas de professores que foram publicadas no canal do Centro de Mídias do Estado de São Paulo[3], no portal YouTube. Apresentaremos adiante esta análise.

2.3 O ensino dos números irracionais.

É importante destacar que a diagonal e o lado do quadrado não foram o único par de segmentos incomensuráveis estudados pelos antigos e nem são os únicos elementos da geometria que possibilitaram a constituição do conjunto dos irracionais. A relação entre o lado de um pentágono e as suas diagonais, a relação entre o comprimento de uma circunferência e o seu diâmetro, além dos três problemas clássicos da geometria como, por exemplo, o problema de duplicação do volume do

[3] O canal do Centro de Mídias do Estado de São Paulo – CMSP é onde ficam arquivadas as gravações das aulas das disciplinas que compõem a grade curricular da rede pública do Estado de São Paulo, realizadas no contexto do ensino remoto adotado em razão da Pandemia COVID-19 de SARS-COV-2, no ano de 2020.

cubo e o problema da quadratura do círculo, também são elementos da geometria que fizeram parte do processo de significação do conjunto dos números irracionais (BOYER, 1974). O que todos eles têm em comum com a diagonal e o lado do quadrado é que, de forma geral, eles envolvem grandezas incomensuráveis e, portanto, acabam, de alguma maneira, trabalhando a noção de número irracional. A partir daí, fica evidente que a essência dos números irracionais se encontra nas grandezas e medidas incomensuráveis e na impossibilidade de comparar essas grandezas, simultaneamente, a partir de uma unidade comum que caiba um número inteiro de vezes em ambas.

Destacando ainda que a atividade humana que possibilita a constituição desse conjunto – dos irracionais – se encontra justamente nas investigações, comparações e estudos feitos em torno dos segmentos e medidas incomensuráveis e dos problemas da geometria que envolviam esses segmentos e medidas. Logo, em uma perspectiva histórico-cultural, a atividade de ensino desse conjunto deve ser organizada levando em consideração a atividade humana que possibilitou a constituição dele, pois é somente assim poderia ser desencadeada a necessidade que iniciaria os movimentos para se apropriar do conceito, ou seja, para aproximar os sentidos pessoais dos e das estudantes dos significados sociais de números irracionais.

No entanto, entendemos que as práticas ensino dos números irracionais tradicionalmente adotadas apresentam, de modo, imediato, uma definição de número racional dissociada dos sentidos, bem como características sensoriais (baseadas na observação) de características relacionadas à apresentação de uma aproximação da representação decimal dos irracionais que visa indicar que tal representação não é periódica. O que apresentamos a seguir é um indício de que essas práticas como, tradicionalmente, organizamos o ensino dos números irracionais não leva em consideração esse movimento histórico de constituição, presente na atividade humana, o que se constitui como uma contradição entre os movimentos de significação de número irracional e as práticas de ensino desses números.

No que diz a respeito à organização da atividade de ensino, o documento que se propõe a organizar, na atualidade, os conteúdos do currículo é a Base Nacional Comum Curricular (BNCC). A BNCC começou a ser elaborada em 2015 e teve a sua versão final publicada em 2017. Ela regulamenta as bases do currículo a ser seguido na educação básica, em todo o país, baseando-se no desenvolvimento de competências e habilidades, ou seja, pretende organizar um currículo em que o ensino seja organizado para desenvolver as competências apresentadas como fundamentais na BNCC para cada disciplina, a partir do desenvolvimento de habilidades que remetem aos conteúdos disciplinares a serem ensinados. Por isso, para compreender a forma como as práticas de ensino dos irracionais são organizadas por professoras e professores, na atualidade, é fundamental olhar para as habilidades que a BNCC estabelece a respeito dos números irracionais.

Com relação aos irracionais a BNCC destaca duas habilidades específicas, são elas:

> (EF09MA01) Reconhecer que, uma vez fixada uma unidade de comprimento, existem segmentos de reta cujo comprimento não é expresso por número racional (como as medidas de diagonais de um polígono e alturas de um triângulo, quando se toma a medida de cada lado como unidade) (BRASIL, 2017).

E também:

> (EF09MA02) Reconhecer um número irracional como um número real cuja representação decimal é infinita e não periódica, e estimar a localização de alguns deles na reta numérica (BRASIL, 2017).

Tomando essas habilidades como referência nos propusemos a analisar dois exemplos a serem discutidos: (I) uma aula sobre o conjunto dos números irracionais disponível no centro de mídias do governo do estado de São Paulo - CMSP para as turmas do 9º ano do ensino fundamental e disponibilizada no canal do YouTube para as turmas do 9º ano do ensino fundamental e (II) uma aula sobre o conjunto dos números reais, também disponível no CMSP, para as turmas do 1º ano do ensino médio. É importante destacar que ambas as aulas estão disponíveis para alunos que estão cursando essas séries no ano de 2021 e foram gravadas e disponibilizadas por meio remoto devido a pandemia Covid de SARS-COV-2, que impossibilitou as aulas presenciais nos anos de 2020 e 2021.

No exemplo (I) o professor que ministra a aula, ao qual vamos nos referir como PROF1-CMSP, começa apresentando as habilidades que seriam contempladas com aquela aula, sendo essas habilidades as habilidades EF09MA01 e EF09MA02, que são as habilidades referentes aos irracionais na BNCC, destacadas nas citações anteriores. Ao apresentar a habilidade EF09MA02 o professor destaca o trecho *“[...] infinita e não periódica”* e diz:

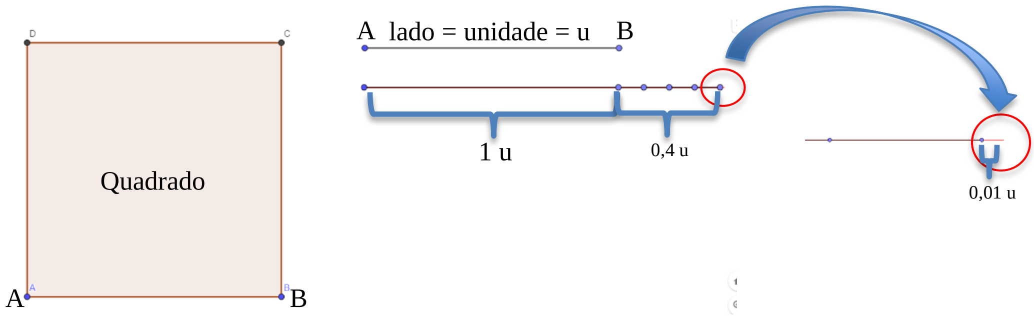
> Reconhecer um número irracional como um número real cuja representação decimal é infinita e não periódica. Alunos! Eu sei que é importante principalmente nesse momento agora, ó: i**nfinita e não periódica**! Até a **definição** está na habilidade, né? Até a **definição do que que é um número irracional** está na habilidade (PROF1-CMSP, 1:41-2:09, 2021, destaques nossos).

A BNCC, como vimos, de fato destaca a necessidade de o aluno reconhecer a representação decimal de um número irracional como sendo uma representação infinita e não periódica, mas reconhecer um número irracional dessa forma não é a mesma coisa que defini-lo assim. A representação decimal de um número irracional é infinita e não periódica, pois esses números estão expressando grandezas medidas por unidades que não permitem comparações realizadas um número inteiro de vezes, de forma que é necessário entender o processo de medir como um processo de comparação entre grandezas. Retomando os segmentos A, B e C que apresentamos trabalhados no subitem 2.1, deste trabalho: o segmento C é a unidade de medida determinada, de forma conveniente, como unidade de medida de modo que pudesse medir os segmentos A e B, sendo estas medições (de A e de B pela unidade C) representadas por um número inteiro. A razão entre os segmentos A e B, ou seja, a comparação entre esses dois segmentos, é feita tendo a unidade C convenientemente estabelecida para medir um número inteiro de vezes.

Todavia, quando realizamos essa comparação tendo o segmento B como o lado de um quadrado e o segmento A como a diagonal do mesmo quadrado, que, como vimos, são segmentos incomensuráveis, não somos capazes de determinar uma unidade de medida C que possa fazer essa medição (por um número inteiro de vezes). Se tomarmos a medida do lado do quadrado como unidade de medida, a medida da diagonal será, de fato, representada por um número decimal infinito e não periódica, justamente em razão de esta unidade não poder medir a diagonal um número inteiro de vezes.

De forma objetiva, encontramos a não periodicidade e a infinitude na representação decimal de um número irracional como uma consequência da incomensurabilidade. Mas isso não fica claro para o aluno, de modo geral, apenas por afirmarmos para ele que “é importante [reconhecer que a representação é] infinita e não periódica! Até a definição está na habilidade, né? Até a definição do que que é um número irracional está na habilidade” (PROF1-CMSP, 1:41-2:09, 2021). A figura a seguir ilustra, de modo sintético, a comparação entre o lado e a diagonal de um quadrado.

Figura 4: Representação decimal de raiz de 2



Fonte: elaborado pelo autor

Resumidamente, a figura 4 mostra que, ao assumirmos a medida do lado do quadrado como unidade de medida, não conseguimos medir com ela a diagonal do mesmo quadrado. Nem mesmo se subdividirmos a unidade um número inteiro de vezes conseguiremos medir a diagonal. Além disso, a subdivisão da unidade um número inteiro de vezes – 10 vezes, por exemplo, já que o sistema de numeração que adotamos é decimal – permite medir o trecho faltantes de modo aleatório. Na imagem, observamos que a tentativa de medir a diagonal permite colocar a unidade 1 única vez. Colocar uma segunda vez (próximo número inteiro) vai extrapolar os limites da diagonal. Para contornar esse problema, subdividimos a unidade – o que, na prática, cria uma unidade menor e que pode ser comparada com a primeira. Subdividindo a unidade em 10 unidades menores e iguais entre si, verificamos que ela pode medir a diagonal 14 (inteiro) vezes, mas medir 15 (inteiro) também ultrapassaria os limites da diagonal. Continuando a estratégia de subdividir a unidade, podemos agora dividir a nova unidade, novamente, em 10 partes menores e iguais entre si – essa nova unidade equivale à unidade original (lado do quadrado) dividida em 100 partes. A fim de continuar esse processo, é conveniente dar um nome às unidades que vamos criando. Manteremos o termo “unidade” para nos referir à medida do lado, e chamaremos a subdivisão da unidade em 10 partes menores e iguais entre si de "décimos". À divisão dos décimos em 10 partes menores e iguais entre si, chamaremos de "centésimos" (já que é a unidade dividida em 100 partes). E assim sucessivamente.

Usando os centésimos conseguimos medir 141 (inteiro) vezes a diagonal, mas não conseguimos medir 142 (vezes) sem extrapolar o limite da diagonal. O que nos levaria a criar a próxima subunidade: os milésimos. Com os milésimos conseguiríamos medir a diagonal 1.414 vezes, mas não 1415. E assim sucessivamente. A tabela a seguir indica o número inteiro de vezes que podemos subdividir a unidade para tentar medir a diagonal:

Tabela 1: Representação decimal da raiz de 2

Subdivisões da unidade	Quantidade de medições inteiras	Conclui a medição exatamente?
1	1	Não
10	14	Não
100	141	Não
1.000	1414	Não
10.000	14142	Não
100.000	141421	Não
1.000.000	1414213	Não
10.000.000	14142135	Não
100.000.000	141421356	Não
...	141421356...	Não

Fonte: Elaborado pelo autor

O fato de a unidade de medida (e suas subdivisões) estarem relacionadas à possibilidade de medir, um número inteiro de vezes, o lado do quadrado atrelado à constatação, já demonstrada, que o lado do quadrado e sua diagonal são grandezas incomensuráveis, nos permite concluir duas coisas: a primeira é que a coluna em que temos a pergunta "conclui a medição exatamente?" **sempre** estará preenchida com "não", ou seja, *sempre* haverá um "pedaço" da diagonal a ser medido com uma unidade menor; a outra conclusão é que uma linha da segunda coluna, a partir da segunda, **sempre** estará preenchida por um número formado pelos mesmos algarismos que a linha anterior e mais algum algarismo que não tem nenhuma relação direta com o último algarismo desta linha anterior.

Essas conclusões explicam o que seria a “representação infinita” (*sempre* haverá um “pedaço” da diagonal a ser medido com uma unidade menor), bem como a ideia de que essa representação não é periódica (*sempre* estará preenchida por um número formado pelos mesmos algarismos que a linha anterior e mais algum algarismo que não tem nenhuma relação direta com o último algarismo desta linha anterior). Nessa conclusão também pode estar inserida a aproximação entre os sentidos dos estudantes e o significado das reticências (“...”) que, geralmente, são utilizadas arbitrariamente para indicar a infinitude e falta de periodicidade de um número irracional.

Quando o PROF1-CMSP inicia a aula definindo um número irracional a partir da sua representação decimal ele omite a ideia de incomensurabilidade da discussão, o que atrela o sentido dos estudantes meramente à aparência de exemplos particulares e não a uma ideia, ou seja, ele apresenta a aparência e não discute o conceito. O termo “incomensurabilidade” não é dito em momento algum da aula, o que dificulta a compreensão do conceito que seria essencial para a compreensão do que seja um número irracional.

Em seguida a aula continua com a apresentação na tela de uma definição para os números irracionais, juntamente com um exemplo de como se encontra a $\sqrt{2}$ que é apresentada como um exemplo de um número irracional. O PROF1-CMSP faz o seguinte comentário acerca da definição apresentada na tela:

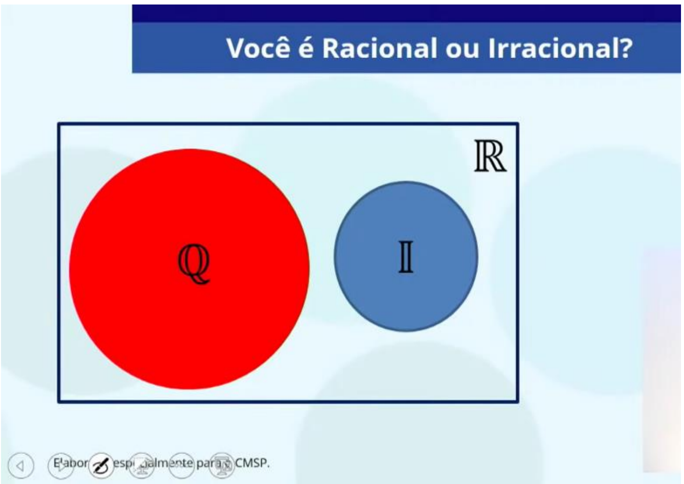
> Na telinha eu vou colocar a ideia que é o seguinte ó: São números reais… a gente vai falar aí o conjunto dos reais, né? **São números reais, mas não racionais.** Uma coisa que não é racional é irracional né? Então essa é a ideia aí, se ele não é racional ele é irracional. Sua **principal característica** é isso que eu comentei: **uma dízima não periódica**, tá? (PROF1-CMSP, 4:29-5:04, 2021, destaques nossos)

Nesse segundo momento a representação decimal dos irracionais já é apresentada não mais como o que define esses números, mas sim como uma característica deles. Os irracionais são definidos nesse momento como números que são reais, mas não são racionais. Essa forma de olhar para os irracionais, ainda que não esteja errada, dificulta que os e as estudantes possam relacionar a incomensurabilidade como noção essencial para esse tipo de número. Isso também leva à identificação de um número irracional apenas pelas suas características constituintes, mas não perceba esse tipo de número como aquele que não tem a propriedade que os racionais têm, que é a possibilidade de comparar duas grandezas tendo uma unidade comum que permita medir a ambas um número inteiro de vezes.

O fato de um irracional ser um real que não é racional decorre, também, da incomensurabilidade. Enquanto o conjunto dos números racionais expressam grandezas e medidas comensuráveis, ou seja, comparáveis entre si por meio de uma unidade de medida comum que permita medir a ambas um número inteiro de vezes, o conjunto dos números irracionais expressam grandezas incomensuráveis. Essa observação, por parte do aluno, potencializa a apropriação da ideia de que essas características mutuamente excludentes, ou seja, ou as grandezas possuem uma unidade comum que permita medi-las um número inteiro de vezes, ou não possuem, e não há uma terceira opção. Dessa forma eles próprios concluiriam que ou um número é racional, ou é irracional.

Todavia, apesar de o professor PROF1-CMSP ter afirmado explicitamente que “essa é a ideia aí, se ele não é racional ele é irracional”, ele apresenta a imagem reproduzida na figura 5, a seguir, com o diagrama utilizado para explicar o conjunto dos números reais e os seus subconjuntos.

Figura 5: Diagrama números reais (CMSP)

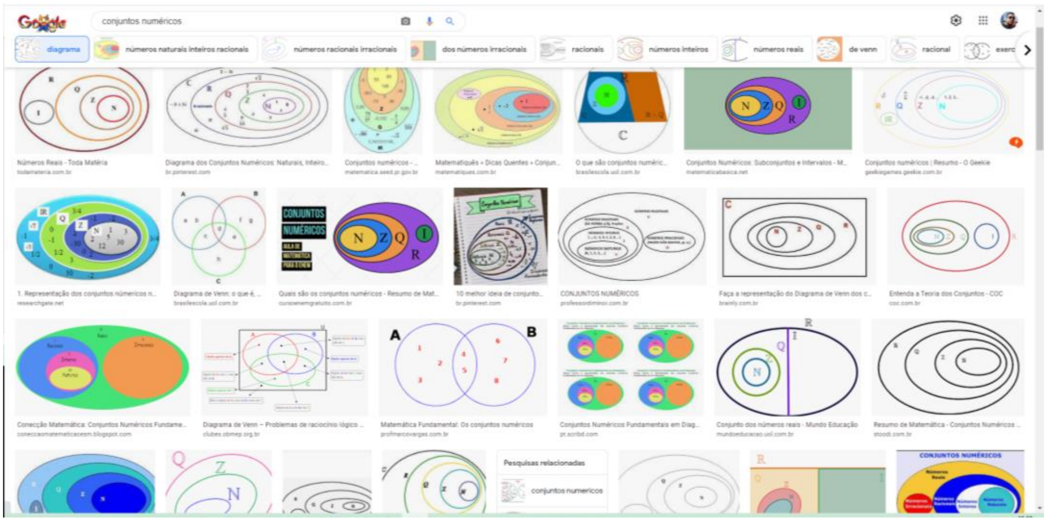


Fonte: Print imagem aula irracionais CMSP

A imagem, aliada à proposta de apresentação direta de definições e características aparentes – superficiais – dificulta a compreensão e esconde inferências que a imagem que a imagem permite fazer: (a) (de acordo com a imagem) existiriam números que são reais, porém não são nem racionais e nem irracionais e (b) o conjunto dos irracionais tem menos elementos que o dos racionais. Ambas as inferências são equivocadas e, ao menos a primeira, poderia ser superada se os e as estudantes, compreendendo o conceito e a essencialidade da comensurabilidade dos racionais e incomensurabilidade dos irracionais, refutassem a representação de uma terceira possibilidade presente na imagem.

Um exercício curioso que fizemos para ilustrar a necessidade de superação destas estratégias de ensino foi a busca no portal “Google Imagens” pelo termo “conjuntos numéricos” com filtro para que os resultados da busca retornassem diagramas. O resultado da primeira parte da busca (em tese, de acordo com o mecanismo de busca daquele portal, estes seriam os resultados mais relevantes) está reproduzido na imagem a seguir:

Figura 6: Busca diagramas conjuntos numéricos no Google



Fonte: Busca Google Imagens por “conjuntos numéricos” + “diagramas”

A análise da imagem indica que, das 27 primeiras imagens, 14 (quase 52%) apresentam erros decorrentes da incorreta compreensão dos números irracionais. Além de diagramas que, a exemplo do utilizado pelo professor PROF1-CMSP, suscitam a possibilidade de existirem números que não são nem racionais e nem irracionais, há outros que, analiticamente, implicam que os racionais fazem parte dos irracionais, ou seja, que o conjunto dos racionais seria subconjunto dos irracionais.

Já na análise que realizamos no exemplo (II), verificamos que a professora que está ministrando a aula, a quem vamos nos referir como PROF2-CMSP, quando se propõe a apresentar o conjunto dos irracionais aos alunos, da mesma forma que o PROF1-CMSP, define os irracionais a partir da não periodicidade e da infinitude da sua representação decimal. Ambos os exemplos servem para indicar o indício de que existe uma tendência, nas aulas de matemática, para tratar os números irracionais a partir das características aparentes da sua representação decimal e, como já abordado no exemplo (I), isso não permite às estudantes e aos estudantes se apropriarem dos conceitos que constituem o conjunto dos irracionais.

> Os irracionais! Quem são os irracionais? A gente chama eles de conjunto I, o I de irracionais, certo? A gente tem lá o que? Os **números com vírgula que não tem fim**, que nem a dízima periódica! **Não tem fim, é infinito, porém ele não é periódico**. Como assim professora? [pergunta retórica]. **Não fica repetindo**! (PROF2-CMSP, 5:56-6:17, 2021, grifos do autor).

No exemplo (II) a PROF2-CMSP busca constantemente, via afirmações, associar os irracionais à sua representação decimal. Ela traz, como exemplos, diversos números e pede aos alunos que, através da observação das casas decimais, identifiquem quais números são racionais ou não, estabelecendo para o aluno a ideia de que observar a forma como se dispõem as casas decimais de um número seja suficiente para determinar a sua irracionalidade.

Problematizando: observemos o número

$$1{,}41421356...$$

A estratégia de ensino da professora PROF2-CMSP exige pressupor, pela observação, que as reticências incluídas arbitrariamente após o algarismo 6 implicam a infinitude e que a observação da não periodicidade observada nas primeiras casas decimais é algo que vai se manter indefinidamente. Mas ao não relacionar essa representação a $\sqrt{2}$ não há motivo para não supor que o número possa ser

$$1{,}414213566666\overline{6}...$$

Sendo, portanto, um número racional. Somente ao atrelar o significado das reticências ao sentido prévio de incomensurabilidade é que se poderia relacionar

1,41421356... a um número irracional. Vejamos por exemplo, a representação decimal de $\sqrt{10}$, que também é irracional, com 8 casas decimais:

3,16227766...

Admitindo apenas a explicação apresentada pela professora PROF2-CMSP (bem como pelo PROF1-CMSP) esse número pode ser racional ou irracional pois poderíamos inferir que os próximos infinitos algarismos fossem 6, o que tornaria o número racional (dízima periódica). O próprio conceito de "dízima periódica" parece não estar bem definido e claro nessa perspectiva. Vejamos:

A dízima periódica remete à compreensão de que, ao dividirmos a unidade de medida em potências de 10 unidades menores e iguais entre si (daí o termo "dízima") para fazer a medição do segmento, a quantidade de subunidades que serão necessárias vai se repetir periodicamente. Por exemplo:

Figura 7: ideia de dízima periódica

Fonte: Elaborado pelo autor

Admitindo a necessidade de comparar os segmentos AB e CD, temos duas opções. A primeira é tomar o segmento CD como unidade e comparar com o segmento AB, do que decorreria que o segmento CD mede $\frac{1}{3}$ do segmento AB (ou, de modo equivalente, que o segmento AB é 3 vezes o segmento CD). Essa verificação nos leva a compreender (conclusão 1), se reconhecemos o conceito de comensurabilidade, que os segmentos AB e CD são comensuráveis, ou seja, existe uma unidade de medida comum a ambos que nos permite medi-los por um número inteiro de vezes.

A segunda possibilidade é tomar o segmento AB como unidade. Como ele é maior do que o segmento CD, usamos a estratégia de subdividi-lo em 10 partes iguais, criando a unidade representada pelo segmento EF que podemos chamar de "décimo". Ao comparar a unidade décimo com o segmento CD, notamos que ela cabe 3 vezes em CD, mas ainda sobra um “pedaço” a ser medido. O que nos leva de volta à estratégia de subdividir a unidade (o décimo) em outras 10 partes para medir o “pedaço” que falta. Essa nova subdivisão (que chamaremos “centésimo”) no entanto, não é suficiente para medir o pedaço que falta. Ela (o centésimo) também cabe três vezes no pedaço que falta, mas fica faltando um outro pedaço. E se dividirmos o centésimo em outras 10 partes, dando origem ao milésimo, também poderemos usar três milésimos, mas não conseguiremos medir o segmento CD, pois ainda faltará um pedaço. E assim sucessivamente, infinitamente. Teremos sempre que subdividirmos uma unidade em 10 partes, um pedaço faltando que poderá ser “ocupado” por e subunidades menores, mas sempre deixará um pedaço faltando. Cada vez que se realiza uma subdivisão tem-se um período e a quantidade de subunidades que devo utilizar a cada novo período sempre será a mesma se as grandezas forem comensuráveis, sendo, nesse caso particular, iguais a 3. Assim a representação numérica da medição de CD tendo as sucessivas subunidades proporcionais a AB como unidade de medida será: 0,333333...

Acontece que, considerando a comensurabilidade entre os segmentos CD e AB e nossa verificação de que a razão entre os segmentos CD e AB é igual a $\frac{1}{3}$ (decorrente da conclusão 1), quando tomamos uma unidade de medida proporcional a CD, e a constatação de que esta razão entre CD e AB deve ser a mesma sempre, temos o caso particular, que nos permite concluir que $\frac{1}{3}$ e 0,3333... são representações ***da mesma medida***.

A repetição (período) pode acontecer quando subdividimos a unidade em 10 partes, ou 100, ou 1.000... etc... novamente atribuímos sentido às reticências, que indicam que a quantidade de subdivisões vai sempre sendo feita em 10, 100, 1.000, 10.000 (e assim sucessivamente, o que remete à ideia de infinitude) partes menores e iguais entre si e que a quantidade dessas subdivisões necessárias para medir o trecho que falta sempre será a mesma (o que representa a ideia de periódico).

A diferença entre o número irracional e um número racional, cuja representação decimal é infinita e periódica, é que, apesar de ambos possuírem uma quantidade infinita de possibilidades de subdivisões para medir o “pedaço” que ainda falta do segmento, no caso dos racionais a quantidade subunidades necessárias será sempre a mesma, diferentemente dos números irracionais, quando essa quantidade é aleatória.

Outra constatação é que ao compararmos ***infinitas*** subdivisões do segmento AB com o segmento CD, “no infinito” **não sobrará mais o espaço ainda a ser medido**. Essa conclusão, por mais contraintuitiva e paradoxal que pareça, é necessária para compreender o porquê de uma dízima periódica é um número racional. Esta situação constitui uma oportunidade para os estudos relacionados à noção matemática de infinito, que muitas vezes é negligenciada, na educação básica, bem como ajuda a compreender as razões pelas quais é importante que o professor, durante a formação, estude as noções de infinito, limites e somatório de séries geométricas infinitas, por exemplo.

No caso da professora PROF2-CMSP, não existe nenhuma discussão acerca da incomensurabilidade e não é estabelecida nenhuma relação entre os irracionais e a geometria, bem como nenhuma relação entre os irracionais e os conceitos de grandezas e medidas. Os irracionais são tratados exclusivamente a partir da sua representação decimal aparente e tratá-los assim, a partir de uma perspectiva histórico-cultural, é oferecer às e aos estudantes uma noção muito superficial desse conjunto numérico, o que dificulta a tais estudantes terem contato com a riqueza de conceitos e ideias que perpassam por esse conjunto e se constituem como conhecimento humano.

Por fim, ambos os exemplos que indicamos neste trabalho foram abordados para ilustrar um movimento que é, tradicionalmente, realizado nas aulas de matemática quando se depara diante da necessidade de estudar o conjunto dos irracionais. Os dois professores iniciaram as aulas trazendo uma definição para os irracionais, ainda que ela não fosse precisa e rigorosa, discutiram as características aparentes desses números e em seguida realizam alguns exemplos modelares, a serem observados, para, enfim, poderem propor exercícios de aplicação e reprodução do que eles mostraram. Essa estratégia adotada pelos professores faz com que o movimento realizado pelos alunos seja um movimento de reprodução. Os alunos observam os professores fazendo, observam como eles definem e identificam os irracionais e se colocam a reproduzir aquilo que eles observaram.

Não existe espaço para discussões, para investigações, para conjecturas, para a proposição de hipóteses. Reproduzir aquilo que os dois professores fizeram e disseram não faz com que o aluno desenvolva nenhuma das duas habilidades estabelecidas na BNCC para os irracionais nem, tão pouco, potencializa que o aluno se aproprie verdadeiramente dos conceitos que envolvem esse conjunto numérico.

> A natureza do conhecimento matemático deve estar intrínseca ao trabalho do professor de modo que ele possibilite ao estudante fazer matemática que significa construí-la, produzi-la, por meio de resolução de problemas inteligentes ou desafiadores. O estudante deve ter a oportunidade de dialogar, formular perguntas, elaborar hipóteses, exercitar conjecturas, realizar experimentações e procurar comprovações para encontrar a solução. Isso deve ocorrer em um ambiente de comunicação de ideias e de negociação e produção de significados que vão sendo construídos nas interações espontâneas que o ambiente permite (PASSOS et al., 2018, p. 126).

Desta forma fica evidente a existência de uma contradição entre essa forma comum de se organizar as práticas de ensino dos irracionais e a essência do significado dos irracionais, ficando evidente também a necessidade de superação dessa contradição para que assim se possa oferecer ao aluno a apropriação desse conhecimento para que este promova, também em uma perspectiva histórico-cultural, o seu desenvolvimento.

3. A superação através da Situação Desencadeadora de Aprendizagem.

Como estamos destacando até aqui, a THC entende que a atividade de ensino deve ser organizada, conscientemente, de forma a estar em sintonia com a atividade humana que possibilitou a significação do conceito que se pretende ensinar. No caso dos irracionais, conforme já indicamos, a atividade humana que possibilitou a significação desse conjunto se encontra no processo de investigação, mediado por elementos da geometria, especificamente os movimentos de medição e comparação de medidas, que se deu em torno das grandezas incomensuráveis. A partir daí a SDA proposta neste trabalho busca colocar o aluno em um contexto que permita a ele estabelecer o seu próprio processo de investigação acerca da incomensurabilidade.

A DAS, apresentada no apêndice A, apresenta às e aos estudantes o José, um latifundiário que precisa de ajuda para determinar as medidas dos lados do seu terreno. Apresentada a SDA às e aos estudantes, espera-se que elas e eles, buscando ajudar José a resolver o seu problema, consigam ter seu primeiro contato com os números irracionais e as medidas incomensuráveis de modo estabelecer as suas próprias teorias acerca do que significa ser uma medida incomensurável e das implicações de suas conclusões na apropriação que constitui o conceito de número irracional.

É fundamental destacar ainda que apesar de a resposta para o problema do José possa parecer óbvia, dado um quadrado de área equivalente a 2 unidades de área, os seus lados vão medir $\sqrt{2}$ unidades de comprimento cada, a diferença entre a SDA aqui proposta e as práticas adotadas nas aulas analisadas, bem como nas práticas tradicionalmente utilizadas ao se abordar os irracionais, se encontra, justamente, no fato de que a SDA é o ponto de partida da atividade de ensino dos números irracionais. Essa condição é fundamental, pois é deste modo que ela vai possibilitar às e aos estudantes irem além da observação e reprodução dos modos de fazer do professor.

As formas tradicionalmente utilizadas para se abordar os irracionais em sala de aula remetem a estratégias para de se organizar a atividade de ensino que permitem ao aluno, quase que exclusivamente, o saber fazer – assim entendida capacidade de ser capaz de reproduzir aquilo que ele observou do professor – de forma que, quando o professor apresenta o conjunto dos irracionais, trazendo a definição, a sua representação decimal e a impossibilidade de escrevê-los como uma fração (que precisa ser uma crença e não uma constatação ou conclusão), o professor, entendemos, faz essa apresentação por estar confortável e também ser capaz de enxergar essas características. Ambos – professores e estudantes – nesse processo de observação e reprodução dos fazeres do professor, perpetuam uma zona de conforto que implica em não pensar sobre as próprias práticas, não revisitá-las, não as questionar e, muito menos, modificá-las.

Sendo assim, o problema do José busca suscitar nos e nas estudantes a necessidade de estudar representações para a medida equivalente a $\sqrt{2}$, sem dizer, a elas e eles, a priori, uma definição de número irracional, sem falar sobre representação decimal infinita e não periódica ou tão pouco assumir arbitrariamente a classificação de $\sqrt{2}$ como um número irracional. Para o movimento de resolução da SDA, os e as estudantes buscarão, pela resolução do Problema Desencadeador de Aprendizagem – PDA (VIRGENS, 2019), aproximar seus sentidos pessoais iniciais dos significados historicamente constituídos de número irracional, analisando o caso particular da $\sqrt{2}$ para concluir sobre o que significa não ser possível representar essa medida através de uma fração que envolve dois números inteiros, sobre o que significa a infinitude e não periodicidade na sua representação decimal, e por fim, vai colocar os alunos a pensar sobre a incomensurabilidade. De forma simples, a SDA busca reproduzir movimentos humanos no contexto da aprendizagem do conceito em estudo.

Além disso, o contexto criado para uma SDA precisa ser constituído de elementos da nossa realidade, possibilitando assim que as variáveis envolvidas no PDA se relacionem com os sentidos dos e das estudantes, que passam da condição de indivíduo passivo, que recebe os conhecimentos transmitidos pelo professor, à condição de sujeito ativo e dono dos processos de produção do próprio conhecimento. O contexto criado em torno do PDA de José envolve conceitos de outras áreas do conhecimento e permite que o aluno reflita sobre questões da sociedade brasileira e enxergue nessas questões elementos matemáticos. Por exemplo, quando o terreno do José é apresentado como um latifúndio, as e os estudantes se veem diante da necessidade de refletir sobre a questão de distribuição de terras e riquezas, as formas como se dão os processos de produção agrícola e a questão da concentração de renda e de bens, sendo estas reflexões que têm como ponto central a ideia de espaço (área) que é um conceito essencialmente matemático.

No mais é importante pontuar que ao contar a história de Pitágoras nosso objetivo foi ilustrar, através dela, como a atividade humana ocorreu no processo de significação dos irracionais para que, reconhecendo essa atividade humana, fosse possível propor uma organização da atividade de ensino, aproximando as necessidades a serem suscitadas pela SDA daquelas experimentadas, historicamente, pela humanidade. Quando, propomos, por exemplo, que o terreno de José tem seu formato aproximado para o formato de um quadrado e é apresentado ao aluno o PDA relacionado às medidas desse quadrado. Esse PDA deve suscitar necessidades para que os estudantes busquem comparar essas dimensões com outras unidades, a exemplo das necessidades que teriam levado Pitágoras a realizar seus estudos. Em outras palavras, ambos os contextos levam à necessidade de atribuir sentidos ou significar o que significa medir segmentos incomensuráveis.

Por fim a SDA proposta não tem como objetivo tentar fazer com que os e as estudantes reproduzam na sala de aula os passos de Pitágoras ao realizar suas investigações. De fato, a proposta pode ser realizada sem mesmo citar o personagem histórico Pitágoras. Não se trata, portanto, de uma perspectiva em que a história da matemática assume um caráter de história a ser contada, que podemos chamar de “contação de histórias” (VIRGENS, 2019). Mas sim um contexto no qual a história da matemática subsidia as práticas docentes, ao fundamentar o processo de organização da atividade pedagógica, ainda que a história em si não precise, necessariamente, ser contada para os e as estudantes.

A SDA proposta tem como objetivo principal que, através do problema do José, os e as estudantes consigam construir a sua própria investigação, sendo que o PDA vai suscitar as necessidades que devem, de forma mediada, como indicava Vygotsky (2001),culminar na apropriação do conceito de incomensurabilidade. Isso porque, como vimos, é esse conceito que é essencial para a compreensão do que vem a ser um número irracional (bem como, por oposição, o que significa uma representação de um racional por uma dízima periódica). Por isso podemos concluir que a ideia de incomensurabilidade é a essência do conceito de número irracional.

CONCLUSÃO

A THC é uma teoria que pode trazer importantes contribuições para o campo da educação, sobretudo porque ela permite aos professores organizar as suas práticas pedagógicas de uma maneira que potencialize a apropriação do conhecimento por parte dos e das estudantes. Isso ocorre porque, partindo dos pressupostos do materialismo histórico dialético, a teoria histórico-cultural entende o desenvolvimento humano como o resultado do processo em que o sujeito, na busca suprir as suas necessidades e as necessidades da sociedade em que vive, se apropria da cultura que foi produzida antes dele, sendo essa apropriação possível, na perspectiva da THC, somente quando esse sujeito compreende que o elemento constituinte da cultura é o trabalho humano em movimento ao longo da história e, após a apropriação, o sujeito se modifica e modifica a cultura de forma que essas modificações possibilitem a superação das suas necessidades.

A partir daí, na perspectiva da THC, defendemos que o conhecimento humano, produzido com o passar do tempo, passa fazer parte da cultura e, portanto, passa a ser direito de todos os sujeitos da sociedade se apropriarem desse conhecimento, para que possam, a partir do trabalho, compreender e modificar a realidade e não simplesmente se adaptar a ela. O processo de desenvolvimento humano envolve, portanto, se apropriar desse conhecimento. Logo, a SDA atua como uma forma de fazer com que o e a estudante trabalhem – em uma compreensão marxista de trabalho - para compreender a realidade e, mais do que isso, modificá-la.

Nesse sentido a SDA que foi proposta neste trabalho foi pensada visando que o movimento realizado pelos alunos na busca pela solução do PDA de José fosse um movimento que estivesse em sintonia com o movimento realizado pela própria humanidade durante o processo de significação que culminou na nossa compreensão atual de números irracionais. Entendemos que assim a aproximação entre os sentidos pessoais dos e das estudantes e o significado social dos irracionais se caracterize, de fato, como apropriação de um aspecto do conhecimento humano e permitam a superação das práticas pedagógicas tradicionalmente utilizadas para apresentar esse conjunto numérico.

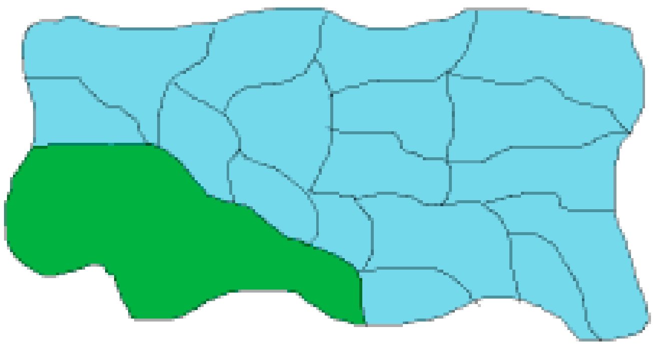
No mais, o movimento de constituição da SDA proposta neste trabalho foi um movimento que pode ser descrito como desconfortável e revigorante ao mesmo tempo. Desconfortável, pois foi um movimento que tem como ponto de partida a aceitação de contradições existentes no ensino dos números irracionais e isto significou olhar para as práticas tradicionais de ensino desses números, práticas as quais também adotávamos, e as entender como insuficientes para a aprendizagem dos e das estudantes. Em síntese este trabalho se iniciou no momento que reconhecemos a necessidade de superação das nossas próprias práticas pedagógicas em relação aos irracionais. Revigorante, pois foi um movimento que tem como ponto de chegada uma SDA com potencial para superar as contradições existentes no ensino dos números irracionais e isto significou olhar para as práticas de ensino desses números, organizadas a partir da SDA, e entender elas como provavelmente suficientes para superar práticas tradicionais e subsidiar um movimento que, pela mediação, possibilita a aprendizagem do conceito. Sinteticamente, este trabalho remete ao reconhecimento da possibilidade de superação das nossas próprias práticas pedagógicas em relação aos irracionais, em um movimento consciente que envolve o autorreconhecimento como professor de matemática em formação, para além de um estudante de matemática.

Por fim, concluímos este trabalho reforçando a necessidade de repensar as práticas pedagógicas nas aulas de matemática de forma que essas práticas possam permitir a todos que tiverem contato com elas uma verdadeira apropriação do conhecimento matemático, sendo este uma particularidade do conhecimento humano, portanto direito subjetivo de todos os humanos.

APÊNDICE A: SITUAÇÃO DESENCADEADORA DE APRENDIZAGEM

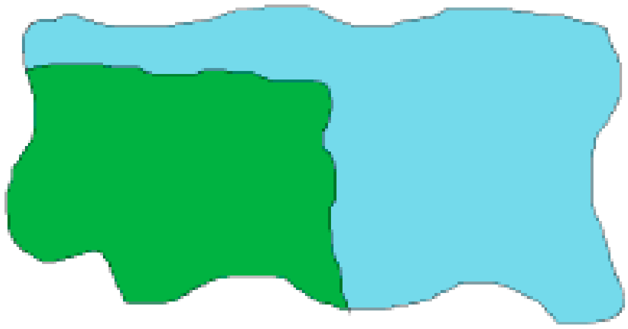
Este é José. Ele é um grande latifundiário e vai precisar da nossa ajuda. Você sabe o que é um latifundiário? José vai explicar para nós!

Latifúndio é uma enorme propriedade rural destina e produção de um único produto agrícola. Eu, por exemplo, produzo apenas soja nas minhas terras para vender ela para outros países!



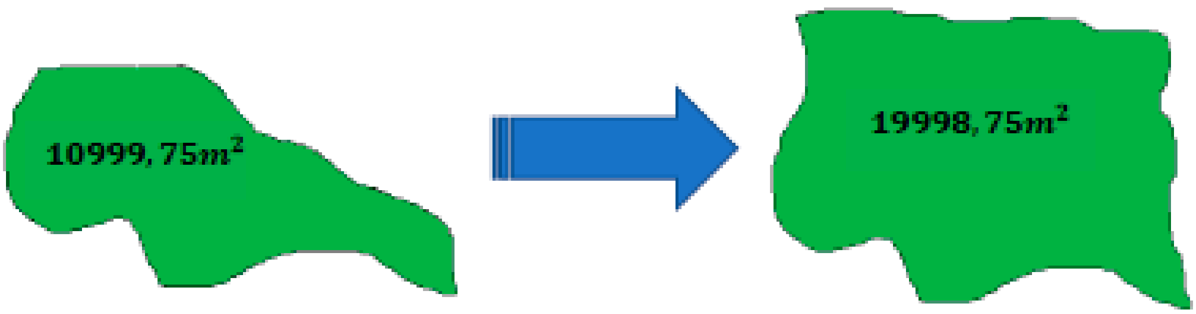
Observe no mapa que tudo que está em verde pertence ao José e tudo que está em azul pertence a outros produtores. A terra do José é bem maior que a terra de outros produtores.

José precisa da nossa ajuda, pois ele anexou novos pedaços de terra a sua propriedade e ele quer determinar a medida do seu novo terreno.



É comum que próximo a grandes latifúndios pequenos produtores agrícolas não tenham condições de competir com a produção em larga escala dos latifúndios. A partir daí, grandes proprietários de terra como eu vão comprando a terra dos pequenos proprietários e vamos ficando com nossos latifúndios cada vez maior.

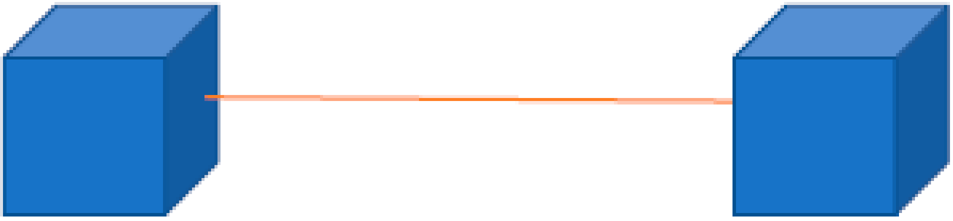
José tinha uma determinada área de terreno e com incapacidade dos pequenos produtores que estavam próximos as terras do José em competir com a produção do Latifúndio, José acabou comprando mais terras e aumentando a área do seu terreno, veja:



Propriedade do José antes da compra.

Propriedade do José depois da compra.

Antes de a gente continuar ajudando José a descobrir as medidas do seu terreno que tal a gente lembrar um pouco sobre o que significa a ideia de medir as coisas.



Vamos supor que a gente queira medir a distância entre os cubos (distância que está sendo representada pela linha laranja). Como vamos fazer isso?

Para conseguir medir a distância entre os cubos nós vamos estabelecer uma distância qualquer que seja conveniente para nós e determinar que essa distância vale o equivalente a uma unidade (1 unidade).

A partir daí vamos comparar a distância entre os cubos com a nossa unidade e, através da comparação da distância entre os cubos com a unidade, vamos determinar quanto vale a distância entre os cubos.

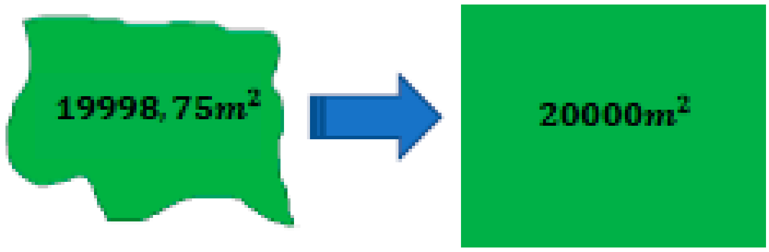
Distância entre os cubos

Unidade de medida

Se a gente comparar as distâncias da para perceber que a distância entre os cubos é equivalente a três vezes a unidade de medida!

Se eu chamar a distância equivalente a unidade de metro e dizer que ela vale 1 metro, então a distância entre os cubos é de 3 metros.

Importante pontuar que a distância é unidimensional (medida em uma única dimensão). Já área, por exemplo, é bidimensional o volume, por exemplo, é tridimensional. O processo de medir para área e volume ocorre de forma semelhante ao processo de medir distância, porém será estabelecido como unidade um determinado espaço que seja conveniente, se estiver sendo medido área, ou um determinado volume que seja conveniente, se estiver sendo medido volume.



José aproximou o formato do terreno dele para um quadrado e a medida da área ele aproximou para mil metros quadrados. Para facilitar ainda mais o nosso processo vamos converter de metros quadrados para hectares, desta forma, a área do José equivale a dois hectares.

Então vamos lá! Junto com seus colegas determine a medida do lado da propriedade de José!

$$Área = 2\ hectares$$

APÊNDICE B: se p^2 é par p também será par

Definimos que um número par é aquele que pode ser escrito na forma 2.k sendo k um número inteiro qualquer. Analogamente, número ímpar é aquele que pode ser escrito na forma (2.k + 1) sendo k um número inteiro qualquer, o que implica que um número ímpar é um número par acrescido de 1 unidade.

Afirmamos: se p^2 é um número par p também é um número par.

Demonstraremos por absurdo.

Hipótese: Suponhamos que p^2 seja um número par e que p seja um número ímpar. Isso significa que:

p pode ser escrito como $2.k + 1$, sendo k um número inteiro qualquer. Dessa forma

$$p = 2.k + 1$$

Elevando ambos os termos ao quadrado teremos:

$$p^2 = (2k + 1)^2$$

Desenvolvendo o quadrado do binômio temos:

$$p^2 = 4k^2 + 2k + 1$$

Analisando essa expressão temos:

$4k^2 = 2 . 2k^2$; como k é inteiro $2k^2$ é um inteiro k'. Portando $4k^2$ pode ser escrito como

2.k' é, por definição, é par

2.k é, por definição, par.

1 é ímpar, pois pode ser escrito como 2.0 + 1

Com isso p^2 é igual a 2k' (par) + 2.k (par) + 2.0 (par) + 1. Ou seja, p^2 é um número par acrescido de uma unidade, o que implica que ele é um número ímpar.

Mas essa conclusão é absurda, pois admitimos, na hipótese, que p^2 é um número par. Então sua negação deve ser verdade.

Assim, se p^2 é um número par p também será um número par.

REFERÊNCIAS

BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**. São Paulo: Ed. da universidade de São Paulo, 1974.

BRASIL. Base Nacional Comum Curricular. Ministério da Educação, Brasília. 2017.

CMSP, 1a série EM. 15/02/21 - 1ª série EM - Matemática - Números reais. Youtube, 17/07/2021. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=rkj5RCbqMzI&list=PL1EAsbCb8zESFDnko-PnBUS_HO4Rwwoj_&index=3.

CMSP, 9o ano EF. 10/03/21 - 9º ano EF - Matemática - Conjuntos numéricos: Parte II. Youtube, 16/07/2021. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=aJt2BNOXeG8&list=PLAbRprP4phEg8Ri9xNim0waU0aW8HXhcJ&index=17.

DEWDNEY, Alexander Keewatin. **20.000 léguas matemáticas**. 1. ed. [*S. l.*]: Zahar, 2000. 236 p.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia do Oprimido**. 70. ed. São Paulo: Paz e Terra, 2019.

MARX, K. **O Capital**: crítica da economia política. Vol. 1 – Tomos 1-2, 20ª ed. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira. 2002.

MARX, K. **Teses sobre Feuerbach.** Disponível em: marxists.org/portugues/marx/1845/tesfeuer.htm>. Acesso em: 20 julho de 2021.

MOURA, Manoel Oriosvaldo de et al. Atividade Orientadora de Ensino: fundamentos. **Linhas Críticas**, Brasília, DF, v. 24, p. 411-430, 20 nov. 2018.

MORETTI, Vanessa Dias et al. Método Histórico-Dialético, Teoria Histórico-cultural e Educação: Algumas apropriações em pesquisa sobre formação de professores que ensinam Matemática. **RIPEM - International Journal of Research in Mathematics Education**, [S. l.], v. 6, n. 2, p. 54-72, 9 Maio 2018.

OLIVERO, Mario. **História da Matemática através de Problemas**. Rio de Janeiro: Fundação Cecierj / Consórcio Cederj, 2010. 160 p. v. 1.

PASSOS, Cármen Lúcia Brancaglion; NACARATO, Adair Mendes. Trajetória e perspectivas para o ensino de Matemática nos anos iniciais. **Estudos Avançado**s, São Paulo, v. 32, ed. 94, p. 119-135, 13 dez. 2018.

REGO, Teresa Cristina. **VYGOTSKY**: UMA PERSPECTIVA HISTÓRICOCULTURAL DA EDUCAÇÃO. Petropólis: Vozes, 1995. 138 p.

ROCHO, Valdirene da Rosa et al. **História da matemática**: e-book – como surgiram alguns conceitos matemáticos?. Santa Catarina: Editora do Instituto Federal Catarinense, 2018.

VIRGENS, Wellington Pereira das. **Problemas desencadeadores de Aprendizagem na Organização do Ensino**: sentidos em movimento na formação de professores de matemática. Orientador: Dra. Vanessa Dias Moretti. 2019. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2019.