

**INSTITUTO  
FEDERAL**  
São Paulo

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
DE SÃO PAULO  
Campus São Paulo

**MODELAGEM MATEMÁTICA EM HIDRODINÂMICA:  
REVISITANDO UM CLÁSSICO PROBLEMA DE  
ESCOAMENTO IDEAL**

ARILSON MONTEIRO DOS SANTOS

Trabalho de Conclusão de Curso Superior de Licenciatura em  
Matemática, sob a orientação do Prof. Dr. Marco Aurélio Granero  
Santos

IFSP  
SÃO PAULO  
2021



ARILSON MONTEIRO DOS SANTOS

**MODELAGEM MATEMÁTICA EM HIDRODINÂMICA:  
REVISITANDO UM CLÁSSICO PROBLEMA DE  
ESCOAMENTO IDEAL**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo – IFSP, em cumprimento ao requisito parcial para obtenção do grau acadêmico de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marco Aurélio Granero Santos

SÃO PAULO

2021



ARILSON MONTEIRO DOS SANTOS

**MODELAGEM MATEMÁTICA EM HIDRODINÂMICA:  
REVISITANDO UM CLÁSSICO PROBLEMA DE  
ESCOAMENTO IDEAL**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo – IFSP, em cumprimento ao requisito parcial para obtenção do grau acadêmico de Licenciado em Matemática.

Conceito: \_\_\_\_\_

---

**Prof. Dr. Marco Aurélio Granero Santos**  
Orientador

---

**Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Flávia Milo dos Santos**  
Membro da Banca

---

**Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Larissa Marques Sartori**  
Membro da Banca

---

**Arilson Monteiro dos Santos**  
Aluno

SÃO PAULO  
2021



À minha família



## **Agradecimentos**

Aos meus pais, que sempre apoiaram e incentivaram meus estudos.

Aos amigos incríveis que eu conheci, especialmente àqueles que estiveram em todos os momentos importantes comigo: Gabriely, Jaine, João e Sara. Nossas quartas farão uma enorme falta. Também agradeço ao Marcelo pela amizade, principalmente no modo remoto.

Agradeço enormemente à Tabata por todos os momentos e também porque foi a pessoa fundamental para minha permanência no curso. Às minhas amigas de turma original, Luciana Shuhui e Jéssica Pessuto. E também aos amigos de outras turmas: Pedro, Douglas, Kátia Luz, João Paulo, Mavi, Tathiely, Leonardo e tantos outros.

Ao meu orientador, Marco Granero, por ter aceitado me orientar neste trabalho e compartilhar comigo seus conhecimentos e experiências, pelos apontamentos feitos neste trabalho e por toda ajuda e paciência.

Ao excelente corpo docente da Licenciatura em Matemática, especialmente aos seguintes professores: Henrique, Vânia, Leandro, Flávia, Larissa, Luciano, Valéria, Bete, Sílvio, Alda, Amari, Traldi, Wellington e Patrícia. Obrigado por tudo!

Aquela por vezes cristalina [...] e por vezes difusa substância [...] que é [...] a matemática.

---

Imre Lakatos

## Resumo

Este trabalho tem como objetivo investigar um tipo comum de escoamento de líquidos a partir de um estudo teórico e experimental via construção de um modelo matemático. Inicialmente, explica-se os aspectos gerais da Modelagem Matemática, especialmente sobre o ato de modelar. Em seguida, de modo conciso, traz-se elementos da Mecânica de Fluidos para que seja possível elaborar matematicamente o modelo que descreve a dinâmica deste escoamento. Escolheu-se a formulação diferencial porque ela permite interpretar, neste contexto, alguns entes matemáticos do Cálculo de Várias Variáveis. Além disso, com os fundamentos físicos bem estabelecidos, comenta-se das equações de Navier-Stokes e da equação de Euler. Logo após, desenvolve-se a equação de Bernoulli, considerada uma das mais importantes para a Mecânica dos Fluidos. E, assim, finaliza-se com a formulação, a experimentação, a validação e a evolução do modelo matemático. Dentro das hipóteses consideradas para o desenvolvimento deste trabalho, os resultados do modelo se apresentaram de acordo com a literatura.

**Palavras-chaves:** Escoamento Ideal, Campo de Velocidade, Modelagem Matemática, Equação de Bernoulli, Matemática Experimental.



## Abstract

This work aims to investigate a common type of fluid flow by a theoretical and experimental study via the construction of a mathematical model. Firstly, the overall aspects of Mathematical Modeling are commented, especially the particularities in modeling. After that, briefly, elements of Fluid Mechanics are presented to formulate mathematically the model which describes this fluid flow dynamics. The differential approach was chosen because it provides meaning to some mathematical objects from Multi-variable Calculus. Furthermore, with well-established physical foundations, the Navier-Stokes equations and the Euler's equation for incompressible flow are discussed, resulting in the development of Bernoulli's equation, considered as one of the most important equations from Fluid Mechanics. Hence, concluding, there is the creation, experimentation, validation and evolution of the mathematical model. Within the hypothesis considered in this work, the model's outcomes were according the literature.

**Key Words:** Ideal Flow, Velocity Field, Mathematical Modeling, Bernoulli's Equation, Experimental Mathematics.



## Lista de ilustrações

Figura 1 – Relação entre a teoria matemática e os resultados . . . . .	25
Figura 2 – Etapas da modelagem matemática . . . . .	26
Figura 3 – Atuação da força em uma superfície. . . . .	30
Figura 4 – Volume de controle infinitesimal . . . . .	31
Figura 5 – Fluxo paralelo de fluido . . . . .	32
Figura 6 – Tensões para um fluido em repouso . . . . .	33
Figura 7 – Ponto P no volume de controle infinitesimal . . . . .	36
Figura 8 – Escoamento da água . . . . .	43
Figura 9 – Perfil da variação de $h(t)$ para diferentes alturas iniciais . . . . .	47
Figura 10 – Imagem colorida e sua versão binarizada . . . . .	48
Figura 11 – Dados do experimento 1 . . . . .	51
Figura 12 – Linearização dos dados do Experimento 1 . . . . .	51
Figura 13 – Dados do Experimento 2 . . . . .	52
Figura 14 – Linearização dos dados do Experimento 2 . . . . .	52
Figura 15 – Dados do Experimento 3 . . . . .	53
Figura 16 – Linearização dos dados do Experimento 3 . . . . .	53



## Lista de símbolos

$\beta$	Propriedade genérica
$\sigma$	Tensão Normal
$\tau$	Tensão de cisalhamento
$\rho$	Densidade
$\gamma$	Peso específico
$\mu$	Viscosidade
$\phi$	Pressão hidrostática
$g$	Módulo da aceleração da gravidade
$\nabla$	Gradiente
$\vec{V}$	Campo vetorial de velocidades
$\vec{a}$	Campo vetorial de aceleração
$\vec{n}$	Vetor normal
$\vec{g}$	Aceleração da gravidade
$\vec{\omega}$	Aceleração angular
$\vec{\Omega}$	Vorticidade
$\nabla \cdot \vec{V}$	Divergente do campo vetorial de velocidades
$\nabla \times \vec{V}$	Rotacional do campo vetorial de velocidades
$\nabla^2$	Laplaciano
$\tau_{ij}$	Tensor de tensões
$\frac{D}{Dt}$	Derivada Material



## Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>19</b>
<b>2</b>	<b>MODELAGEM MATEMÁTICA</b>	<b>23</b>
2.1	Modelagem como método científico de pesquisa	24
<b>3</b>	<b>ELEMENTOS DE MECÂNICA DOS FLUIDOS</b>	<b>29</b>
3.1	Forças e tensões de superfície	29
3.2	Estática	32
3.3	Dinâmica	35
3.4	Equação de Bernoulli	38
<b>4</b>	<b>O PROBLEMA HIDRODINÂMICO</b>	<b>43</b>
4.1	Modelagem do problema hidrodinâmico e modelo teórico	43
4.2	Validação do modelo	47
<b>5</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>55</b>
	<b>Referências</b>	<b>59</b>



## 1 INTRODUÇÃO

Este trabalho teve início ainda na disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias, com a modelagem matemática de um problema físico, ao qual, buscava-se determinar a equação diferencial que modelaria como a altura da água, em um tanque, passaria a diminuir em relação ao tempo, durante um escoamento, sob ação exclusiva da gravidade. A solução da equação diferencial acabou por resultar em um perfil parabólico para a altura no escoamento.

Porém, a construção de um modelo matemático é insuficiente para garantir a consistência de seus resultados. Conforme apresenta Bassanezi (2014), a construção de modelos matemáticos exige a validação e interpretação dos resultados obtidos em relação aos dados reais.

Assim, a investigação do problema hidrodinâmico teve sua continuação na disciplina de Laboratório de Matemática 2, momento este em que se realizou experimentos para validar o modelo, testando alguns casos com tanques cilíndricos. Porém, os experimentos realizados contaram com métodos simples na obtenção dos dados e a teoria da Mecânica dos Fluidos foi explorada de maneira superficial.

Desse modo, buscou-se sistematizar a construção do experimento e a obtenção dos dados experimentais, tarefas essenciais para compreender e explorar de maneira mais ampla o fenômeno físico envolvido, tal como a teoria matemática que o descreve, aprimorando o método científico com o intuito de explorar a perspectiva experimental da Matemática e ganhar maturação nos processos de modelagem matemática de problemas.

Neste contexto, como a validação do modelo matemático exige experimentação, coloca-se em destaque o caráter experimental da Matemática, área de estudos que tem sido ignorada entre os matemáticos. Porém, faz-se importante resgatar esta face da Matemática, porque os avanços do mundo científico necessitam cada vez mais da integração e colaboração entre as diferentes áreas do conhecimento, e a Matemática não deve ficar de fora das discussões científicas, argumenta Bassanezi (2014).

Para isso, utiliza-se a modelagem matemática como fundamentação teórica na formulação de modelos que representam dinâmicas que ocorrem no mundo real, com o intuito de explorar suas potencialidades, simular cenários possíveis e tomar decisões baseadas nos resultados que os modelos expressam.

A Modelagem Matemática se preocupa com a obtenção e a validação de modelos matemáticos e, como destacam Biembengut e Hein (2019), é tão antiga quanto a própria Matemática.

Embora tenha bases sólidas, por vezes, enfrenta aversão daqueles que prefe-

rem a Matemática Pura. Mas como defende Bassanezi (2014):

A individualização dos cursos de Matemática, com a separação artificial de “Matemática Pura” e “Matemática Aplicada”, pressupõe que a primeira se interessa mais pelas formalizações teóricas enquanto que a segunda se dedica às suas aplicações. Esta separação pode ter como causa o pedantismo exagerado dos puristas que se sentem autossuficientes e na maioria das vezes, nunca experimentaram aplicar seus conhecimentos em outras áreas – talvez com medo de falharem. Consideram a matemática aplicada de categoria inferior, da mesma forma que os matemáticos gregos consideravam o “cálculo” uma ferramenta popular e se isolavam em comunidades secretas para discutirem a ‘verdadeira matemática’. (BASSANEZI, 2014, p. 36).

Um modelo matemático representa certa fração da realidade em termos de teorias e símbolos matemáticos. Isto quer dizer que tanto os fenômenos naturais quanto os sociais podem ser modelados. Para exemplificar, tem-se modelos de crescimento populacional, modelos de previsões climáticas e também modelos de previsão de comportamentos.

Porém, Banerjee (2014) alerta que a elaboração de modelos matemáticos está sujeita aos obstáculos inerentes que surgem ao modelar. Talvez o problema seja muito difícil ou a literatura seja insuficiente.

Além disso, Biembengut e Hein (2019) explicam que a aplicabilidade dos modelos depende de outros fatores como a relação entre os resultados parciais, pois sendo aproximações da realidade, os modelos são incompletos.

A Modelagem Matemática, como método de pesquisa, pode ser aplicada em diferentes problemas utilizando-se de diversas abordagens e, no escopo deste trabalho, ela será aplicada em um problema envolvendo fluidos.

Um corpo fluido é definido por Çengel e Cimbala (2015) como qualquer gás ou líquido, sendo que o estudo dos fluidos em repouso e em movimento recebe o nome de Mecânica dos Fluidos.

Segundo White (2011), a Mecânica dos Fluidos tem sido investigada desde as civilizações antigas, sendo Arquimedes, Leonardo da Vinci, Isaac Newton, Daniel Bernoulli e Leonhard Euler alguns nomes que contribuíram para o progresso nos estudos da área.

No século XVIII, Daniel Bernoulli formulou uma equação para descrever o movimento de fluidos em condições ideais como densidade constante, mesma velocidade em qualquer ponto do fluido e resistência ao movimento desprezível.

Porém, a hipótese de fluido em tais condições raramente é satisfeita pelos fluidos da natureza. Logo se percebeu a necessidade de realizar experimentos práticos.

Para estudar os fluidos é preciso conhecer as leis básicas que governam seus movimentos. Conforme Fox, McDonald e Pritchard (2014), o comportamento de todo fluido está sujeito à segunda lei de Newton, ao Princípio de conservação do Momento Linear, ao Princípio de Conservação de Massa e aos fundamentos da Termodinâmica.

Além disso, como esclarecem Çengel e Cimbala (2015), a Mecânica dos Fluidos parte da hipótese do contínuo, ou seja, considera-se a matéria contínua, logo suas propriedades são interpretadas como funções contínuas de posição e tempo.

Uma propriedade dos fluidos que recebe destaque é a viscosidade. De acordo com White (2011), esta é uma medida de resistência ao escoamento. Isso implica em classificações dada a viscosidade que um fluido apresenta.

Naturalmente, todo fluido apresenta uma certa viscosidade, explicam Fox, McDonald e Pritchard (2014). Mas, em alguns casos, a viscosidade é desprezada com o intuito de facilitar o estudo do fluido.

Segundo White (2011), os fenômenos abordados pela mecânica dos fluidos são complexos, pois envolvem diferentes dinâmicas ocorrendo simultaneamente fazendo com que algumas situações de estudo só possam ser tratadas numericamente devido à dificuldade e até à impossibilidade de se obter uma resolução analítica.

Esta dificuldade em resolver certos problemas matemáticos vem desafiando e motivando a comunidade matemática na busca de teorias e soluções para eles, tanto que, segundo Nobre (2003), em um discurso realizado no 2º Congresso Internacional de Matemáticos, em Paris, em 1900, David Hilbert apresentou 23 problemas abertos que moldaram a forma de se fazer Matemática nas décadas seguintes.

Durante o século XX, diversos destes problemas foram resolvidos, porém, sete continuam sem respostas, são os problemas do *Millennium Prize*. O *Clay Mathematics Institute*<sup>1</sup> oferece 1 milhão de dólares a quem resolver qualquer um desses problemas.

Dentre eles, existe um problema relacionado à Mecânica dos Fluidos que ainda ninguém foi capaz de provar até o momento que diz respeito à existência e suavidade das equações de Navier-Stokes.

Então, associando a Modelagem Matemática à Mecânica dos Fluidos, este trabalho tem como objetivo utilizar as ferramentas do Cálculo Diferencial e Integral para então modelar e validar, matematicamente, o seguinte fenômeno: a variação da altura da água, em um tanque, quando somente a gravidade atua no escoamento do líquido, que flui através de um orifício localizado no centro da base do tanque.

Para isso, optou-se pela pesquisa bibliográfica juntamente com a pesquisa experimental, baseada em Lakatos e Marconi (2003). De maneira que, inicialmente, no

<sup>1</sup> <https://www.claymath.org/millennium-problems/millennium-prize-problems>

primeiro capítulo, faz-se uma apresentação da Modelagem Matemática, comentando seus aspectos principais enquanto método científico de pesquisa.

Em seguida, no segundo capítulo, tem-se uma breve abordagem da Mecânica dos Fluidos, trazendo os fundamentos físicos da teoria e as equações que descrevem os escoamentos dos fluidos.

Tendo as bases bem definidas, o terceiro capítulo segue com a elaboração e a validação de um modelo matemático para o fenômeno. Este capítulo traz o desenvolvimento do modelo matemático, bem como sua resolução. Então, descreve-se a fase de experimentação, comentando-se os cenários testados, a execução dos experimentos e o processamento computacional.

Ao final, são apresentadas as conclusões sobre este trabalho e sugestões para uma possível evolução do modelo matemático.

## 2 MODELAGEM MATEMÁTICA

Os fenômenos do universo sempre fascinaram e assombraram a humanidade. Esta, por sua vez, buscou determinar explicações, das mais diversas, para desvendar suas ocorrências.

Na era pré-histórica, os registros feitos nas pinturas rupestres representavam a percepção de situações vividas pelo homem da época, era uma tentativa de entender o mundo e suas consequências.

Por volta de 2000 a.C., na Babilônia, já existiam métodos para encontrar as raízes de equações quadráticas. Depois, os gregos propuseram raciocínios que buscavam explicar e prever os movimentos dos astros na abóbada celeste. Eratóstenes foi capaz de estimar com boa precisão o raio terrestre e a distância entre o Sol e a Terra. O estudo da geometria com Euclides se fez essencial nas construções arquitetônicas e nas relações entre os números. No mundo oriental, os matemáticos utilizaram meios para auxiliar em questões comerciais e agrícolas (BOYER, 2010).

No ocidente, a partir do século XVI, por meio de experimentos, diversas teorias foram formuladas na tentativa de explicar os fenômenos naturais, como um objeto em queda livre acelerando, a influência da pressão atmosférica nos líquidos, o surgimento do arco-íris, a formação das camadas rochosas, entre outros (HART-DAVIS, 2016).

Atualmente é possível fazer previsões meteorológicas, propor estratégias para o controle de doenças, estimar o crescimento populacional, entre outros. Evidências de que a atividade humana está relacionada à elaboração de modelos.

Para Bassanezi (2014), um modelo é a representação de uma fração da realidade, que visa explicá-la. Reconhecer os objetivos de um modelo é essencial para delimitar o campo de atuação, bem como eliminar itens não essenciais à sua construção.

Ademais, os tipos de modelos variam de acordo com a área do conhecimento e aqueles que utilizam os símbolos e as relações matemáticas são chamados modelos matemáticos.

Os modelos matemáticos podem ser classificados de acordo com as estruturas matemáticas envolvidas. Bassanezi (2014) agrupa-os em quatro principais características:

- i. Linear ou não-linear: a singularidade do elemento a ser modelado influencia o tipo de equações do sistema.
- ii. Estático ou dinâmico: os objetos de um modelo estático não apresentam variações durante o processo, por exemplo, na cubagem de madeira. Em contrapartida, os

objetos do modelo dinâmico sofrem alterações que interferem no contexto analisado, como ocorre no controle de doenças altamente infecciosas.

- iii. Educacional ou aplicativo: os modelos educacionais são aqueles que consideram uma quantidade reduzida de variáveis, com o objetivo de permitir maturação em modelagem e servir como base para o desenvolvimento de modelos mais complexos. Os modelos aplicativos são formulados baseados em hipóteses mais precisas e envolvem diversas variáveis interrelacionadas.
- iv. Estocástico ou determinístico: modelos estocásticos conceituam todos os seus componentes pelo emprego da Teoria das Probabilidades. Enquanto os modelos determinísticos são fundamentados em condições iniciais, que podem prever todo o funcionamento do sistema.

Biembengut e Hein (2019) explicam que a aplicação de um modelo depende da forma como resultados parciais estão relacionados. Ressalta-se, que, todo modelo é incompleto. Portanto, não existe um modelo que seja melhor do que outro, mas sim modelos mais precisos, que retratam de forma mais realística determinado fenômeno.

Embora não haja consenso quanto à definição de Modelagem Matemática, Bassanezi (2014) e Biembengut e Hein (2019) consideram fundamental a atividade de elaborar modelos que descrevam bem como os sistemas se comportam, para eles, a Modelagem Matemática é um processo que tem a intenção de obter e validar modelos matemáticos.

## 2.1 Modelagem como método científico de pesquisa

Utilizar a modelagem matemática como metodologia científica de pesquisa tem como vantagem a simulação de eventos, pois conjecturar que determinado fenômeno aconteça é uma incerteza. Ainda, reproduzir algumas situações pode ser impraticável financeiramente.

E, de acordo com Banerjee (2014), a modelagem matemática visa substituir um problema real por uma representação analítica ou numérica que seja capaz de simular possíveis cenários.

Além disso, segundo Bassanezi (2014), a matemática tem características adequadas para modelar: linguagem simplificada e sem ambiguidades, resultados bem estabelecidos e métodos computacionais. Essas propriedades permitem construir modelos estruturados.

A Figura 1 ilustra o processo da modelagem matemática, em que, usualmente, o problema original a ser modelado está inserido num contexto carregado de dinâmica

e atributos próprios.

Destaca-se que o modelo matemático elaborado fica limitado pela teoria que o fundamenta, sendo essencial que se reconheça os casos em que a teoria é necessária e suficiente e os casos que requerem maior esforço e criatividade ou até mesmo uma combinação de estratégias e teorias.

Mas, atenta-se que os resultados matemáticos podem não ter um significado que faça sentido, portanto, este é um processo em que a solução do modelo matemático necessita de interpretação em seu contexto original.

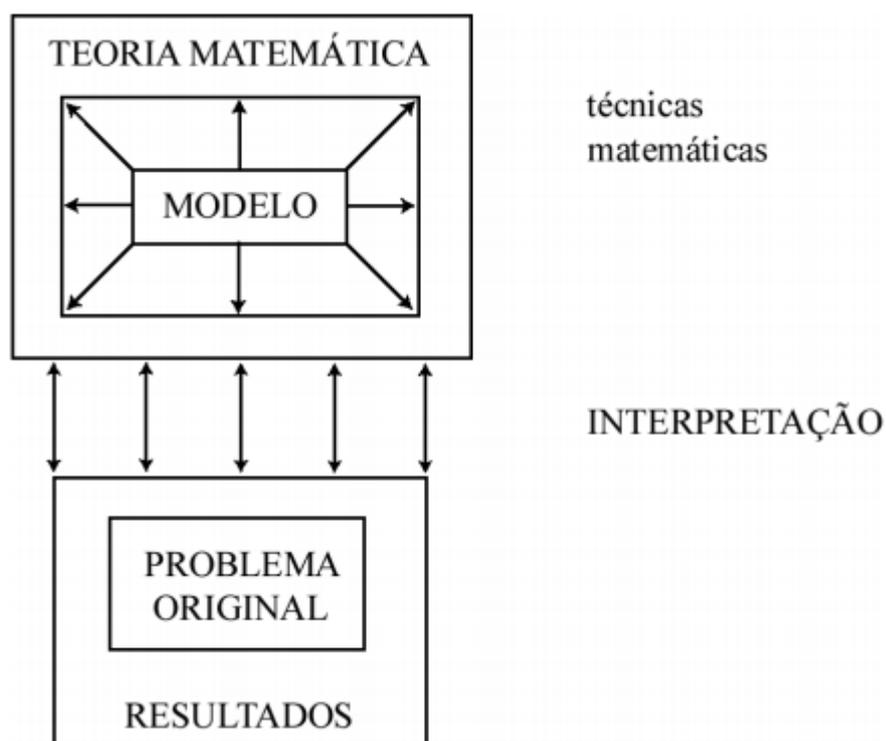


Figura 1 – Relação entre a teoria matemática e os resultados

Fonte: Bassanezi (2014).

Além disso, Banerjee (2014) comenta que formular modelos matemáticos exige a superação de entraves que são intrínsecos do ato de modelar. Por exemplo, podem surgir impasses e situações desafiadoras impostos por mecanismos físicos.

Tem-se também os casos de tradução imprecisa entre a matemática e o mundo real, técnicas matemáticas que são insuficientes para lidar com o problema, escassez de dados para realizar análises, entre outros.

Por essa razão, a formulação dos modelos segue etapas bem definidas e estruturadas, às quais, de acordo com Bassanezi (2014), podem ser organizadas e relacionadas seguindo a esquematização apresentada na Figura 2.

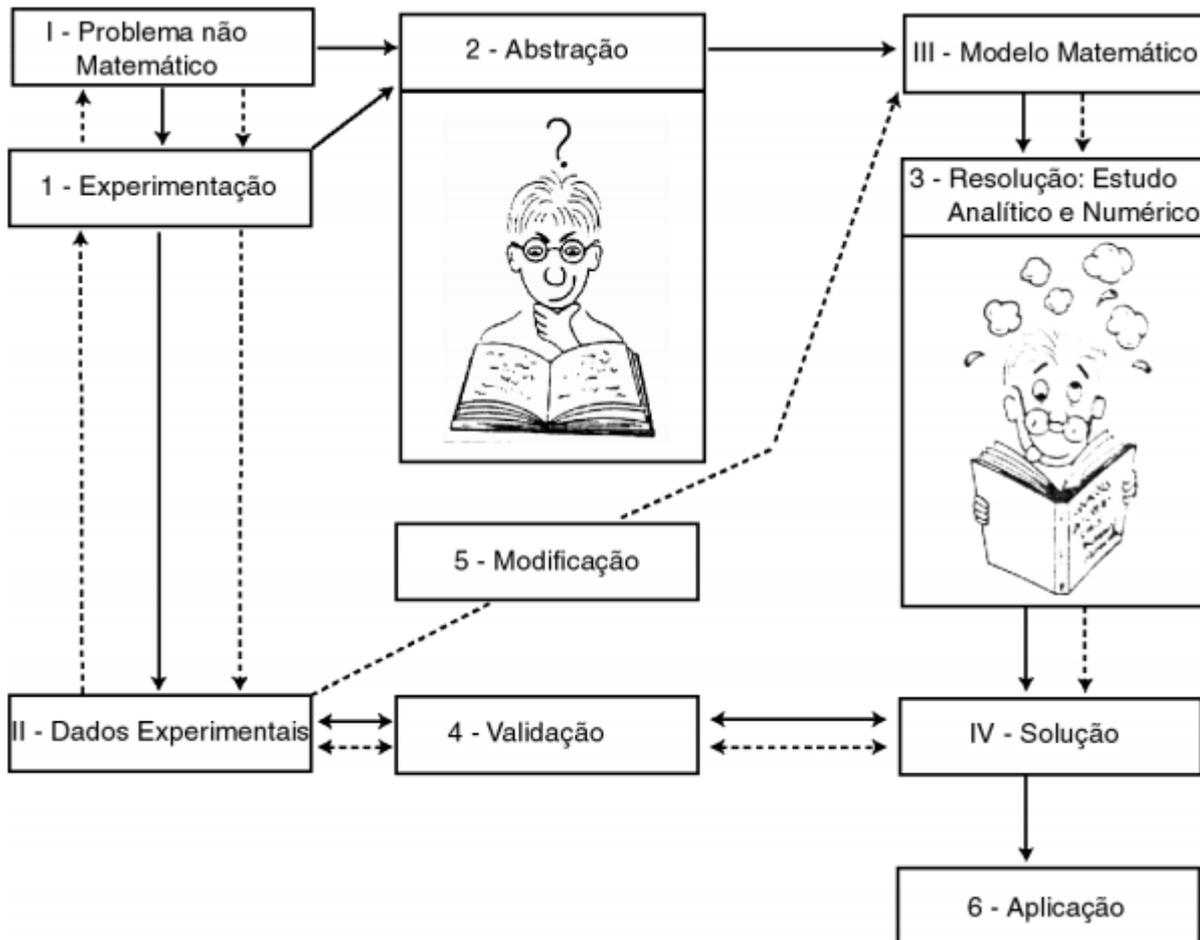


Figura 2 – Etapas da modelagem matemática  
Fonte: Bassanezi (2014).

## 1. Experimentação

É a fase da obtenção dos dados empíricos e deve ser executada de modo cuidadoso pois geralmente os processos são dispendiosos. Além disso, destaca-se que os métodos utilizados na obtenção dos dados dependem da natureza do evento observado.

## 2. Abstração

A etapa da abstração consiste na base da modelagem matemática, é o período em que as variáveis do problema real são identificadas. E, em seguida, escolhe-se qual a teoria mais adequada para abordar o problema. Caso seja necessário, as definições são refinadas até que não reste dúvidas. Esse momento é crucial para se estabelecer quais são os cenários que estão bem servidos pelo modelo, análogo ao raio de convergência das séries de potência.

No entanto, como é um momento de florescimento de ideias, o modelador pode se perder no processo. Dessa maneira, faz-se essencial uma delimitação mais estreita possível do problema, para que não haja outras possibilidades.

Devido à complexidade dos fenômenos que ocorrem no mundo concreto, é preciso levantar hipóteses e investigar quais variáveis são indispensáveis, uma vez que definem a direção da modelagem. De modo que, a relação das variáveis determina o grau de dificuldade e a viabilidade da construção do modelo.

### 3. Resolução

Geralmente, traduzir um problema para o universo matemático tem a finalidade de obter as equações que ditam o modelo. Nota-se que, para determinar uma solução ao conjunto de equações, o modelador matemático deve entender a natureza e o grau de dificuldade do problema.

Por vezes, devido a impossibilidade de se resolver o problema analiticamente, obtém-se apenas a solução computacional. Porém, para o caso em que o modelo tem solução analítica, um método numérico pode revelar características implícitas no desenvolvimento algébrico.

Destaca-se, também, a influência do ferramental matemático selecionado para a resolução do modelo. A teoria utilizada direciona a modelagem de modo que a escolha correta evita formulações desnecessárias e complexas.

Eventualmente, pode ocorrer de nenhuma teoria matemática conseguir tratar o fenômeno de interesse. Neste acontecimento, há duas possibilidades: o modelo é reformulado, levando em conta outras hipóteses ou, uma nova área de estudos é criada.

### 4. Validação

Esta fase é considerada a mais importante do processo de modelar, porque é nesta etapa que se aceita ou rejeita o modelo. As hipóteses são confrontadas por meio da comparação entre os dados experimentais e os dados previstos pelo modelo. Porém, verificar isso diretamente é insuficiente. O modelador deve ser capaz de interpretar os dados obtidos e inferir previsões a partir deles.

Vale ressaltar que todo modelo é uma aproximação e, portanto, traz erros. Existe um limite aceitável de erro para cada modelo, mas isso depende de fatores como: finalidade do modelo, o tempo disponível e os recursos acessíveis.

### 5. Modificação

Construir um modelo matemático tem o sentido de representar uma fração do mundo real. Mas, os fenômenos concretos são complexos, envolvem muitas variáveis e seus mecanismos não estão bem determinados. Então, ao modelar uma situação, considera-se algumas hipóteses. Assim, todo modelo matemático é imperfeito.

Elaborar modelos complexos logo na primeira tentativa pode ser uma tarefa desafiadora. Então, recomenda-se a construção de um modelo simples que poderá ser melhorado. Nesta fase de modificações, outras condições devem ser inspecionadas: hipóteses falsas, a falta de informações, a intuição inadequada da realidade, as variáveis deixadas de lado no modelo teórico e o erro no desenvolvimento matemático formal.

Modificar o modelo implica em validá-lo em seguida, sua aceitação está sujeita ao contexto e a quem analisa. Talvez para o matemático esteja razoável, mas para um especialista da área não esteja. Claro que é possível a construção de um modelo parcial enquanto não há um definitivo.

## 6. Aplicação

Caso a resolução do modelo esteja de acordo com os dados, as mudanças nos parâmetros representem mudanças no mundo real, o erro não ultrapasse o limite imposto, os resultados tenham interpretação em termos de seu contexto originário, e se possa fazer previsões, então o modelo pode ser aplicado.

A Modelagem Matemática tem relevância para diversas áreas do conhecimento e pode ser aplicada para compreender variadas situações, segundo Banerjee (2014), algumas destas são: o crescimento de plantas em ambientes com estresse; o transporte do mRNA e suas funções no aprendizado e na memória; as mudanças climáticas; a dinâmica de dois filmes líquidos em células solares orgânicas.

Além destes, Bassanezi (2014) exemplifica que podem ser modelados os fenômenos que envolvem a eletricidade, o eletromagnetismo, a hidrodinâmica, a teoria da relatividade, a velocidade de reações químicas, dentre outros.

Portanto, a modelagem matemática é um processo dinâmico, criativo e desafiador, que permite elaborar e validar modelos matemáticos com a finalidade de simular o comportamento de fenômenos do mundo real, destacando-se como método científico de pesquisa, pois fundamenta-se em resultados científicos válidos, sendo amplamente utilizada em diversas áreas do conhecimento.

### 3 ELEMENTOS DE MECÂNICA DOS FLUIDOS

Este capítulo apresenta o desenvolvimento teórico de tópicos selecionados referentes à Mecânica dos Fluidos que serão utilizados na análise do problema proposto neste trabalho, com destaque para a Equação de Navier-Stokes em escoamentos incompressíveis e o desenvolvimento da Equação de Bernoulli.

Inicialmente, comenta-se das forças que agem em uma unidade infinitesimal da matéria, a tensão normal e a tensão de cisalhamento, e, define-se o que é fluido. Em seguida, são apresentados os conceitos de sistema e volume de controle, elementos fundamentais para iniciar o estudo sobre os fluidos.

Logo após, para um ponto pertencente a um volume de controle, são explicadas as propriedades peso específico, densidade e viscosidade. Também são discutidos os efeitos da tensão de cisalhamento e sua relação com a viscosidade.

Sucedese um breve tratamento da Estática dos Fluidos, momento em que são abordadas as forças superficiais, as forças volumétricas e a pressão hidrostática, para finalmente se obter a Equação Fundamental da Estática dos Fluidos.

Então, discute-se as características importantes para o estudo da Dinâmica dos Fluidos, momento no qual é apresentada a abordagem euleriana utilizada, destacando a importância do campo vetorial de velocidades.

Posteriormente, partindo-se do campo de velocidades, comenta-se da Equação da Continuidade, da Equação da Quantidade de Momento Linear e da Equação de Navier-Stokes, finalizando-se com a Equação de Euler.

Concluindo o capítulo, tem-se o desenvolvimento da Equação de Bernoulli, obtido a partir da Equação de Euler, do princípio de conservação de massa e do princípio de conservação do momento linear além da introdução de uma propriedade de escoamentos denominada vorticidade.

#### 3.1 Forças e tensões de superfície

Considere a região  $dA$  numa superfície e a força  $d\vec{F}$  que age sobre essa região. Decompondo  $d\vec{F}$  em duas componentes, tem-se uma força  $d\vec{F}_n$  que é normal à superfície e uma força  $d\vec{F}_t$  que é tangente ao plano em que está localizada  $dA$ , como ilustrado na Figura 3.

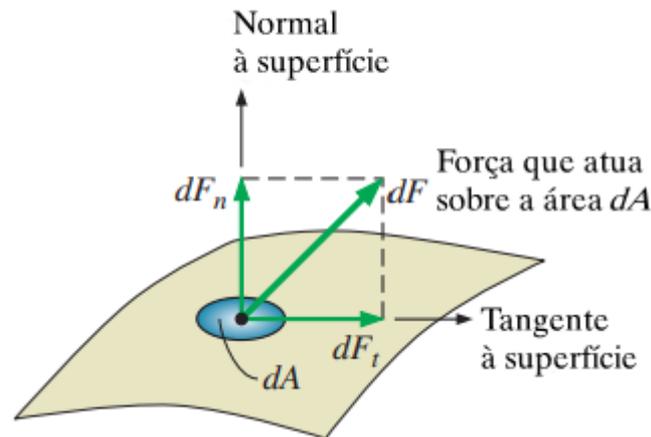


Figura 3 – Atuação da força em uma superfície.  
Fonte: Çengel e Cimbala (2015).

Conforme apresenta White (2011), ao tomar uma área infinitesimal,  $dA \rightarrow 0$ , as componentes, normal e tangencial, de  $d\vec{F}$  são chamadas de tensão normal  $\sigma$  e de tensão de cisalhamento  $\tau$ , representadas pelas equações (3.1) e (3.2), respectivamente.

$$\sigma = \lim_{dA \rightarrow 0} \frac{d\vec{F}_n}{dA}. \quad (3.1)$$

$$\tau = \lim_{dA \rightarrow 0} \frac{d\vec{F}_t}{dA}. \quad (3.2)$$

Nesta perspectiva, White (2011) expressa que fluido é toda substância que se deforma continuamente desde que uma tensão de cisalhamento aja sobre ela, por menor que seja seu módulo. Alternativamente, Çengel e Cimbala (2015) comentam que fluido é “uma substância no estado líquido ou gasoso”. Ainda que equivalentes, a definição oferecida por Çengel e Cimbala (2015) exclui outras possibilidades.

Em mecânica dos fluidos, os objetos de interesse são o sistema e o volume de controle. Fox, McDonald e Pritchard (2014) explicam que um sistema é tido como uma quantidade de massa fixa e identificável, separada do ambiente por suas fronteiras. E o volume de controle é uma região qualquer do espaço, que o fluido escoar, sendo sua fronteira geométrica a superfície de controle.

De uma abordagem de sistema, tem-se que as leis físicas são diretamente aplicadas nos objetos. Um contraponto é que este caminho implica na utilização de uma matemática mais elaborada e geralmente se torna um problema envolvendo equações diferenciais parciais, como afirmam Fox, McDonald e Pritchard (2014).

Alternativamente, para uma abordagem de volume de controle, tem-se que as leis físicas não são diretamente aplicadas nos objetos, mas sim no próprio volume de

controle. Esta aproximação dos efeitos das leis físicas, para Fox, McDonald e Pritchard (2014), é a desvantagem de se utilizar o volume de controle.

Conforme alega White (2011), embora em nível microscópico as moléculas das substâncias estejam distantes por imensos espaços vazios, dadas condições normais de pressão e temperatura, considera-se válida a hipótese do contínuo para os fluidos. Isto é, cada propriedade do fluido assume um valor para todo ponto no espaço. Tem-se a matéria idealizada como contínua. Logo, as propriedades são interpretadas como funções contínuas de posição e tempo.

Considere o ponto P localizado no volume de controle infinitesimal representado na Figura 4.

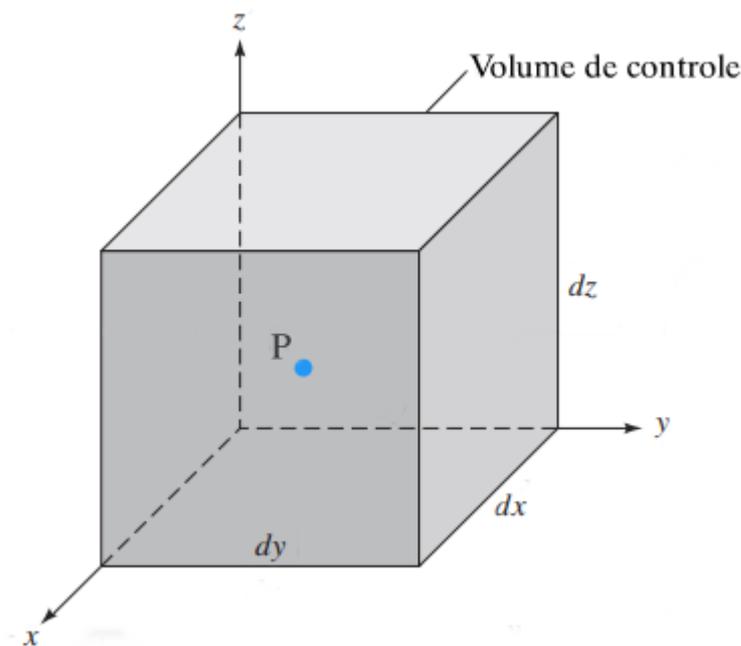


Figura 4 – Volume de controle infinitesimal

Fonte: Adaptado de White (2011).

Por definição, a densidade de um fluido ( $\rho$ ), no ponto P, é proporcional ao valor da unidade de massa ( $dm$ ) por unidade de volume ( $dVol$ ).

$$\rho = \lim_{dVol \rightarrow 0} \frac{dm}{dVol}. \quad (3.3)$$

Sendo  $\vec{g}$  vetor aceleração da gravidade, na direção vertical  $z$ , orientado no sentido positivo e, como o campo gravitacional atua sobre o corpo, define-se que o peso específico ( $\gamma$ ) é proporcional ao produto entre a densidade e o módulo da aceleração da gravidade ( $g$ ):

$$\gamma = \rho g. \quad (3.4)$$

Outra propriedade de grande importância para os fluidos é a viscosidade ( $\mu$ ). Çengel e Cimbala (2015) comentam que, quando um fluido se move, cada elemento

dele se movimenta com uma velocidade diferente, cada unidade infinitesimal de matéria sofre uma certa resistência ao escoamento do fluido.

Para exemplificar o efeito viscoso, suponha que todas as partículas de um fluido estejam se movendo na mesma direção, como na Figura 5. Para cada altura relativa à superfície sólida, tem-se uma camada que apresenta uma velocidade. Esse efeito resulta da tensão de cisalhamento agindo sobre o corpo.

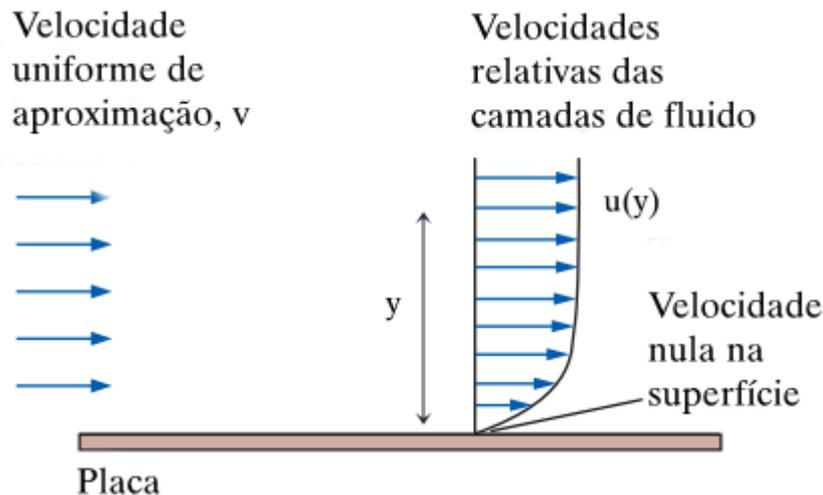


Figura 5 – Fluxo paralelo de fluido  
Fonte: Adaptado de White (2011).

Foi postulado ainda, por Isaac Newton, que a tensão de cisalhamento ( $\tau$ ) é proporcional à viscosidade ( $\mu$ ) e à variação da velocidade de cada camada em relação a distância de separação entre as camadas ( $du/dy$ ), ou seja,

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}. \quad (3.5)$$

Por exemplo, White (2011) explica que os fluidos como a água, o ar e o mercúrio são considerados newtonianos. Entretanto, alguns fluidos não se deformam de modo linear, são os fluidos não-newtonianos, como o sangue, de acordo com Çengel e Cimbala (2015).

Hipoteticamente, quando a viscosidade de um fluido é igual a zero, diz-se que é um fluido ideal. Porém, Fox, McDonald e Pritchard (2014) dissertam que na realidade todo fluido apresenta viscosidade, mas para alguns casos pode-se desprezar o efeito viscoso.

### 3.2 Estática

De modo geral, a Estática dos Fluidos engloba tanto os problemas sobre fluidos em repouso quanto os problemas que envolvem objetos submersos nos fluidos e suas

capacidades de flutuar ou afundar. Esta seção tratará apenas dos fluidos em equilíbrio.

Conforme explicam Çengel e Cimbala (2015), são as forças que interagem com os fluidos que determinam seu estado em repouso ou em movimento. Neste contexto, a propriedade dos fluidos responsável por manter o equilíbrio é a pressão hidrostática, uma grandeza escalar definida como o módulo da força normal exercida por um fluido por unidade de área  $dA$ :

$$\phi = \lim_{dA \rightarrow 0} \frac{|\vec{F}_n|}{dA}. \quad (3.6)$$

Para todo volume de controle, Çengel e Cimbala (2015) afirmam que dois tipos de forças agem sobre ele: as de superfície e as de campo/volumétricas.

As forças de superfície surgem da interação pelo contato com outras partículas, enquanto as forças volumétricas se distribuem por toda extensão de um corpo, como o campo eletromagnético ou o campo gravitacional.

Para ilustrar esta ação das forças de superfície e das forças de campo, suponha a existência do volume de controle tetraedral representado na Figura 6, para um fluido em repouso.

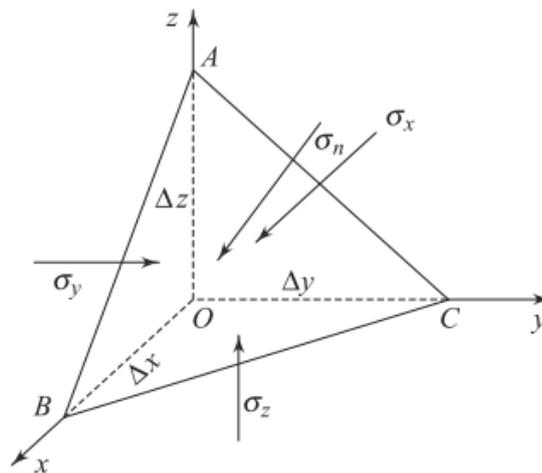


Figura 6 – Tensões para um fluido em repouso  
Fonte: Som, Biswas e Chakraborty (2008).

Adicionalmente, suponha que a única força volumétrica atuando no volume de controle seja a gravidade e que as forças de superfície atuem em cada face do tetraedro.

Neste caso, a tensão de cisalhamento é inexistente, restando apenas a tensão normal em cada face do volume de controle.

Deste modo, conforme asseguram Som, Biswas e Chakraborty (2008), a tensão

normal em cada face do volume de controle compensa a pressão hidrostática:

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \sigma_n = -\phi. \quad (3.7)$$

Como o fluido está em repouso, as forças que agem em cada unidade de massa devem equilibrar as forças que agem na superfície. Sendo  $\vec{F}_b$  a resultante das forças de campo que atuam no volume de controle e  $\vec{F}_s$  resultante das forças de superfície, tem-se:

$$\vec{F}_b + \vec{F}_s = \vec{0}. \quad (3.8)$$

A massa  $m$  de um corpo qualquer ocupando uma região  $E$  no espaço pode ser obtida pela expressão (3.9), em que  $\rho(x, y, z)$  é a função densidade:

$$m = \iiint_E \rho(x, y, z) dVol. \quad (3.9)$$

De modo que se  $\vec{R}$  é a força resultante para cada elemento infinitesimal de fluido, a resultante das forças volumétricas é dada por:

$$\vec{F}_b = \iiint_E \vec{R} \rho(x, y, z) dVol. \quad (3.10)$$

Sendo  $\vec{F}$  um campo vetorial contínuo, em uma superfície orientada  $S$ , com versor normal  $\vec{n}$ , o fluxo de  $\vec{F}$  através de  $S$  é determinado por:

$$Fluxo = \oiint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS. \quad (3.11)$$

Interpretando a pressão como um campo vetorial constante, por (3.11), tem-se:

$$\vec{F}_s = - \oiint_S \vec{n} \phi dA. \quad (3.12)$$

Mas, pelo teorema da divergência de Gauss:

$$\vec{F}_s = - \oiint_S \vec{n} \phi dA = - \iiint_E \nabla \phi dVol. \quad (3.13)$$

Substituindo (3.10) e (3.13) em (3.8), obtém-se:

$$\vec{F}_b + \vec{F}_s = \iiint_E \left( \vec{R} \rho(x, y, z) - \nabla \phi \right) dVol = \vec{0}. \quad (3.14)$$

$$\implies \vec{R} \rho(x, y, z) - \nabla \phi = 0 \implies \vec{R} \rho(x, y, z) = \nabla \phi. \quad (3.15)$$

A equação (3.15) é conhecida como a Equação Fundamental da Estática dos Fluidos e, como pode ser notado, efetivamente, é o gradiente da pressão hidrostática que mantém o fluido em repouso.

Considerando o caso particular em que a densidade é constante e a única resultante que atua em cada elemento infinitesimal de fluido é a gravidade, a expressão (3.15) se torna:

$$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{d\phi}{dz} = g\rho(x, y, z) \implies \phi = \rho g z + C. \quad (3.16)$$

A equação (3.16) é a Lei de Pascal e, ela estabelece que, a pressão hidrostática atua igualmente em todos os pontos de um fluido localizados numa mesma altura.

Decorre pela equação (3.16) que, para um líquido de superfície livre, a pressão em um ponto de profundidade  $h$  é:

$$\phi = \phi_0 + \rho g h \quad (3.17)$$

onde, em geral,  $\phi_0 = 1 \text{ atm}$ .

### 3.3 Dinâmica

Estudar a Dinâmica dos Fluidos é, primeiramente, compreender a geometria do movimento do escoamento. Para tal, pode-se seguir a abordagem lagrangiana (ou método de Lagrange) ou a euleriana (ou método de Euler).

No método de Lagrange, o fluxo é descrito para cada partícula, utilizando um vetor de posição. Por outro lado, no método de Euler é fundamental conhecer o campo de velocidades. Este trabalho segue a perspectiva euleriana.

Conforme afirma White (2011), o sistema euleriano pode ser interpretado como um conjunto de pontos que o fluxo atravessa. Assim, cada ponto indica os valores das propriedades naquela posição. Logo, o interesse está na propriedade instantânea e não em sua variação.

Formular a hidrodinâmica com a metodologia euleriana requer a hipótese de que, para um volume de controle finito, exista um campo de variáveis dependentes de tempo e espaço, sendo vetorial ou escalar (WHITE, 2011).

Assim, suponha que exista um campo vetorial de velocidades  $\vec{V}$ , de modo que suas componentes variem no tempo  $t$  e no espaço  $(x, y, z)$ , e que cada componente espacial também varie no tempo,  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  e  $z = z(t)$  :

$$\vec{V} = u(x, y, z, t)\hat{i} + v(x, y, z, t)\hat{j} + w(x, y, z, t)\hat{k}. \quad (3.18)$$

Em mecânica dos fluidos, recebe destaque o operador  $D/Dt$ , denominado derivada material ou derivada substancial. Este operador indica a variação instantânea de uma propriedade  $\beta = \beta(t)$  do fluido, sendo definido por:

$$\frac{D\beta}{Dt} = \frac{\partial\beta}{\partial t} + \nabla \cdot (\beta\vec{V}). \quad (3.19)$$

Conforme explica White (2011), derivando o campo de velocidades em relação ao tempo, equação (3.18), e utilizando (3.19), obtém-se o campo de aceleração:

$$\vec{a} = \frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla)\vec{V}. \quad (3.20)$$

A equação (3.20) define a derivada material da velocidade, o primeiro termo do lado direito da equação é a aceleração local e o segundo é a aceleração convectiva.

Segundo Fox, McDonald e Pritchard (2014), a aceleração local contribui apenas em escoamentos não permanentes, aqueles nos quais o campo de velocidades varia temporalmente, e a aceleração convectiva existe desde que as partículas se movam pelo campo de escoamento.

Além disso, a expressão (3.20) permite obter as formulações matemáticas para as leis básicas que governam os movimentos dos fluidos, dentre as quais este texto retrata o princípio de conservação de massa e o princípio de conservação do momento linear.

Dessa forma, considere a existência de um volume de controle infinitesimal de dimensões  $dx$ ,  $dy$  e  $dz$ , como na Figura 7.

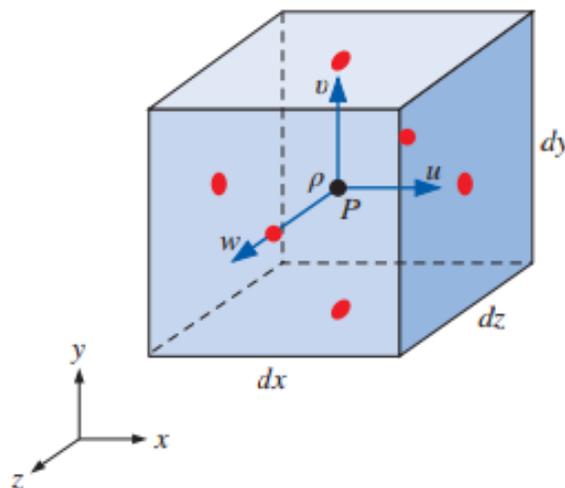


Figura 7 – Ponto P no volume de controle infinitesimal  
Fonte: Çengel e Cimbala (2015).

Para um ponto P localizado no centro do volume de controle, considere a densidade  $\rho$  e o campo vetorial  $\vec{V}$ .

De acordo com Çengel e Cimbala (2015), o fluxo de massa para cada face do volume do controle é tal que a taxa de entrada é igual à taxa de saída, isto é, a massa é conservada. Matematicamente, tem-se que:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0. \quad (3.21)$$

Note que a equação (3.21) traz a derivada material da densidade, no lado esquerdo, indicando que sua taxa de variação instantânea é nula.

Quando as variações da massa específica são desprezíveis, tem-se que o escoamento é dito **incompressível**, ou seja,

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0. \quad (3.22)$$

A equação (3.22) indica que, para todo ponto do campo de velocidades, a taxa de variação da massa escoando é nula. Equivalentemente, para qualquer intervalo de tempo, a forma geométrica do volume de controle permanece a mesma.

Exemplificando, Thomas, Weir e Hass (2014, p. 394) citam que "um gás é compressível, diferentemente de um líquido, e a divergência de seu campo de velocidade mede em qual extensão ele está se expandindo ou se comprimindo em cada ponto". Os autores ainda explicam que esta interpretação permite estabelecer que um gás está se expandindo quando a sua divergência é positiva e que um gás está se comprimindo quando a sua divergência é negativa.

Tratando-se do princípio de conservação do momento linear, Çengel e Cimbala (2015) argumentam que a soma das forças de superfície e das forças volumétricas é equilibrada pela taxa de variação do momento linear para um volume de controle.

Neste contexto, as forças de superfície são a pressão hidrostática e as tensões viscosas, estas últimas podem ser expressas compactamente utilizando-se a notação tensorial<sup>2</sup>,  $(\tau_{ij})$ .

Para o caso em que o campo gravitacional atua como a única força volumétrica, Çengel e Cimbala (2015) descrevem a Equação do Momento Linear como:

$$\rho \vec{g} - \nabla \phi + \nabla \tau_{ij} = \rho \frac{D\vec{V}}{Dt}. \quad (3.23)$$

A equação (3.23) expressa que a resultante das forças superficiais e das forças volumétricas é proporcional ao vetor que indica a taxa de variação do momento linear, no tempo.

<sup>2</sup> Tensor é um ente matemático que generaliza vetores e matrizes

De acordo com White (2011, pg. 52), para um fluido que é newtoniano, em escoamento incompressível tridimensional, sendo a tensão viscosa  $\tau_{ij}$  dada pelos termos em  $\mu$ , expande-se cada componente da equação (3.23) em:

$$\rho g_x - \frac{\partial \phi}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (3.24)$$

$$\rho g_y - \frac{\partial \phi}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) = \rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (3.25)$$

$$\rho g_z - \frac{\partial \phi}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) = \rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (3.26)$$

Utilizando o operador laplaciano, as equações (3.24), (3.25) e (3.26) podem ser reescritas como:

$$\rho \vec{g} - \nabla \phi + \mu \nabla^2 \vec{V} = \rho \frac{D\vec{V}}{Dt}. \quad (3.27)$$

A equação (3.27) é a famosa equação de Navier-Stokes para o escoamento incompressível. Essa é uma equação diferencial parcial de segunda ordem, não linear e que não tem solução analítica geral, somente para casos particulares.

Exclusivamente quando a viscosidade é desprezada, diz-se que o escoamento é **não viscoso** ou **invíscido**, isto é:

$$\tau_{ij} = \mu = \vec{0}. \quad (3.28)$$

Substituindo a equação (3.28) em (3.27), obtém-se:

$$\rho \vec{g} - \nabla \phi = \rho \frac{D\vec{V}}{Dt}. \quad (3.29)$$

conhecida como Equação de Navier-Stokes para o escoamento não viscoso, ou ainda Equação de Euler.

### 3.4 Equação de Bernoulli

Esta seção visa apresentar a formulação da Equação de Bernoulli, levando em conta os desenvolvimentos realizados na seção 3.3. Mas, para que isso seja possível, duas novas ideias são introduzidas: o conceito de linhas de corrente ou linhas de fluxo e a propriedade dos fluidos denominada vorticidade.

No estudo do movimento dos fluidos, um escoamento é classificado em uni, bi ou tridimensional com relação ao número de coordenadas espaciais necessárias para determinar seu campo de velocidade, explicam Som, Biswas e Chakraborty (2008).

Para este objetivo, emprega-se a linha de corrente ou linha de fluxo que, para White (2011, p. 52), é "uma linha tangente ao vetor velocidade em um dado instante".

Então, uma linha de fluxo pode ser interpretada como uma função vetorial, em que a velocidade é uma função do tempo e do espaço. Adicionalmente, White (2011) complementa que para escoamentos cujo campo de velocidades não varia em relação ao tempo, pode-se integrar as componentes da velocidade com relação ao tempo.

Além disso, segundo Som, Biswas e Chakraborty (2008), o escoamento de um fluido é ainda influenciado por sua velocidade angular,  $\vec{\omega}$ , que é definida por:

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}(\nabla \times \vec{V}) \quad (3.30)$$

estabelecendo que a velocidade angular é proporcional ao rotacional do campo de velocidades.

Baseando-se em Thomas, Weir e Hass (2014), tem-se que a velocidade angular é perpendicular ao plano de rotação do fluido e seu módulo indica a taxa de rotação do campo vetorial  $\vec{V}$ , ao redor de um ponto P.

Entretanto, Fox, McDonald e Pritchard (2014) reforçam que apenas tensões de cisalhamento podem gerar rotação de partícula. Portanto, escoamentos invíscidos são irrotacionais a menos que no instante inicial as partículas estejam rotacionando.

Escoamentos irrotacionais são aqueles nos quais a velocidade angular resulta no vetor nulo. Dado um ponto P de um fluido irrotacional, as partículas próximas de P não rotacionam ao redor dele, inexistindo redemoinho em P.

Resulta da equação (3.30) a vorticidade  $\vec{\Omega}$ , dada por:

$$\vec{\Omega} = 2\vec{\omega} = \nabla \times \vec{V}. \quad (3.31)$$

A equação (3.31) mede a ocorrência da rotação em elementos de fluido que se movem no campo de escoamento.

Porém, Fox, McDonald e Pritchard (2014) advertem que não se deve confundir rotação de uma partícula fluida com um escoamento consistindo em linhas de corrente circulares, ou escoamento de vórtice.

Do Cálculo Vetorial e de (3.31), tem-se a seguinte identidade:

$$(\vec{V} \cdot \nabla)\vec{V} = \nabla \frac{\vec{V} \cdot \vec{V}}{2} - \vec{V} \times \vec{\Omega}. \quad (3.32)$$

A identidade (3.32) permite afirmar que a aceleração dada pela equação (3.20) é diretamente influenciada pelo comportamento rotacional do escoamento.

Substituindo as equações (3.32) e (3.20) em (3.29) resulta em:

$$\rho \vec{g} - \nabla \phi = \rho \left( \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \nabla \frac{\vec{V} \cdot \vec{V}}{2} - \vec{V} \times \vec{\Omega} \right). \quad (3.33)$$

Considerando o caso de escoamento **estacionário** ou em **regime permanente**, tem-se que o campo de velocidades não varia em relação ao tempo:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = \vec{0}. \quad (3.34)$$

A equação (3.34) mostra que em um escoamento estacionário, as propriedades do fluido não variam com o tempo. Apesar disso, estas propriedades podem variar com a posição do fluido.

Sendo  $|\vec{V}| = v$ , tem-se:

$$\vec{V} \cdot \vec{V} = |\vec{V}|^2 = v^2. \quad (3.35)$$

Substituindo as equações (3.34) e (3.35) em (3.33):

$$\rho \vec{g} - \nabla \phi = \rho \left( \vec{0} + \nabla \frac{v^2}{2} - \vec{V} \times \vec{\Omega} \right). \quad (3.36)$$

Especialmente, quando um escoamento é **irrotacional**, tem-se que:

$$\vec{\omega} = \vec{0} \implies \vec{\Omega} = \vec{0}. \quad (3.37)$$

Supondo a hipótese de um escoamento irrotacional e rearranjando os termos da equação (3.36), vem que:

$$\rho \vec{g} = \nabla \left( \rho \frac{v^2}{2} + \phi \right). \quad (3.38)$$

Como a aceleração da gravidade atua somente na direção vertical  $z$ ,  $\vec{g} = -g\hat{k}$ , e pela linearidade do operador gradiente:

$$\nabla \left( \rho \frac{v^2}{2} + \phi + \rho gz \right) = \vec{0}. \quad (3.39)$$

Assim, necessariamente, tem-se:

$$\rho \frac{v^2}{2} + \phi + \rho gz = \text{Constante}. \quad (3.40)$$

A equação (3.40) é conhecida como a Equação de Bernoulli, considerada uma das equações mais importantes da Mecânica dos Fluidos. Ela permite compreender o movimento de fluidos no interior de tubos, pela perspectiva de uma linha de corrente. Contudo, sua formulação exige que diversas hipóteses sejam satisfeitas: escoamento incompressível, irrotacional, invíscido e permanente.

Mas Fox, McDonald e Pritchard (2014) discutem que as restrições empregadas na formulação da Equação de Bernoulli são um tanto irrealistas, são poucos os fluidos que apresentam características aproximadas daquelas trazidas por estas hipóteses. Na prática, não existe escoamento invíscido.

Embora tenha limitações, a equação de Bernoulli é versátil, podendo ser utilizada em problemas que envolvem escoamentos, bombeamento de água e até mesmo arrasto aerodinâmico, conforme ilustra White (2011).

Uma alternativa para deduzir a equação de Bernoulli é empregar o Teorema da Energia Mecânica. Tal demonstração encontra-se disponível em Nussenzveig (2014)



## 4 O PROBLEMA HIDRODINÂMICO

Este capítulo visa utilizar os desenvolvimentos apresentados no capítulo 3 para construir e validar um modelo matemático para descrever o escoamento de um fluido através de um orifício circular sob a ação exclusiva da gravidade.

Apesar de Bassanezi (2014) indicar fases sucessivas no processo de modelagem, pode-se adotar a ordem que for mais conveniente.

### 4.1 Modelagem do problema hidrodinâmico e modelo teórico

Considere a situação em que um tanque cheio de água que é escoado por um orifício quando somente a força da gravidade atua sobre esse sistema. Essa situação fica descrita visualmente pela Figura 8.

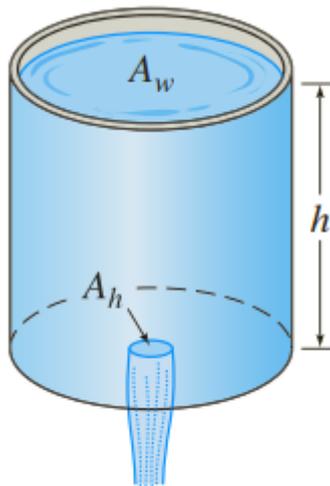


Figura 8 – Escoamento da água  
Fonte: Zill (2017).

Nesta situação, deseja-se encontrar a altura da água em cada instante sabendo que o tanque está preenchido até uma altura  $h$ , possui área de seção transversal  $A_w$  e o orifício circular apresenta uma área  $A_h$ . Zill (2017) descreve esse fenômeno como um clássico problema de Equações Diferenciais Ordinárias.

Segundo Çengel e Cimbala (2015), a viscosidade da água tem pouca relevância para o movimento do fluido, podendo ser desprezada. Além disso, conforme defendem Çengel e Cimbala (2015), usualmente os líquidos escoam de maneira incompressível. Tais hipóteses permitem utilizar a equação de Bernoulli, equação (3.40), para modelar o fenômeno.

Dado o tanque da Figura 8, considere um sistema referencial de coordenadas cartesianas tempo e altura, em que, no instante inicial,  $t = 0$ , o fluido está em repouso,

ou seja:

$$h = h_{inicial} \quad (4.1)$$

e

$$v = v_{inicial} = 0 . \quad (4.2)$$

Ao final do escoamento,  $t = t_{final}$ , tem-se:

$$h = h_{final} = 0 \quad (4.3)$$

e

$$v = v_{final} . \quad (4.4)$$

Como pela equação de Bernoulli, (3.40), a soma dos termos se mantém constante, comparando-se o início do escoamento com seu final, obtém-se:

$$\rho \frac{v_{inicial}^2}{2} + \phi + \rho g h_{inicial} = \rho \frac{v_{final}^2}{2} + \phi + \rho g h_{final} . \quad (4.5)$$

Utilizando as condições iniciais e finais estabelecidas pelas equações (4.1), (4.2), (4.3) e (4.4), tem-se:

$$\rho \frac{0^2}{2} + \phi + \rho g h_{inicial} = \rho \frac{v_{final}^2}{2} + \phi + \rho g 0 \quad (4.6)$$

$$\Leftrightarrow g h_{inicial} = \frac{v_{final}^2}{2} \quad (4.7)$$

$$\Leftrightarrow v_{final} = \sqrt{2gh_{inicial}} . \quad (4.8)$$

Para o caso geral, observe que a altura da coluna água é dependente do tempo, ou seja,  $h = h(t)$ , de tal modo que, tomando-se intervalos de tempo infinitesimais, a velocidade instantânea fica determinada por:

$$v = \sqrt{2gh(t)} . \quad (4.9)$$

Pelo princípio da conservação de massa, o volume por unidade de tempo que escoar é constante. Esta é a definição da vazão ( $Q$ ) que, segundo White (2011) é dada por:

$$Q = \frac{Vol}{t} . \quad (4.10)$$

De maneira análoga, a vazão também pode ser determinada pelo produto da área de seção transversal do orifício,  $A_h$ , pela velocidade do escoamento,  $v$ :

$$Q = A_h v . \quad (4.11)$$

Igualando (4.10) a (4.11) e substituindo (4.9), vem que:

$$Vol = A_h t \sqrt{2gh(t)}. \quad (4.12)$$

Calculado a derivada da equação (4.12) em relação ao tempo obtém-se:

$$\frac{dVol}{dt} = A_h \sqrt{2gh(t)} + A_h t \sqrt{2g} \frac{1}{2\sqrt{h(t)}} \frac{dh}{dt}. \quad (4.13)$$

Considerando que a velocidade é aproximadamente constante, isto é,  $v'(t) = 0$ , a equação diferencial em (4.13) se torna:

$$\frac{dVol}{dt} = A_h \sqrt{2gh(t)}. \quad (4.14)$$

O volume do tanque é igual ao produto de sua altura,  $h(t)$ , por sua área da base,  $A_w$ :

$$Vol = A_w h(t). \quad (4.15)$$

Derivando (4.15) em relação ao tempo, tem-se:

$$\frac{dVol}{dt} = A_w \frac{dh(t)}{dt} \quad (4.16)$$

$$\Leftrightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{1}{A_w} \frac{dVol}{dt}. \quad (4.17)$$

Substituindo a equação (4.14) em (4.17) tem-se:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{A_h}{A_w} \sqrt{2gh}. \quad (4.18)$$

Como a altura do líquido no tanque diminui com o tempo, é conveniente incluir o sinal negativo em (4.18), logo:

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{A_h}{A_w} \sqrt{2gh}. \quad (4.19)$$

A equação (4.19) é uma equação diferencial ordinária, de primeira ordem, que relaciona a variação da altura  $h$ , em função do tempo, às grandezas constantes  $A_w$ ,  $A_h$  e  $g$ .

Sua solução pode ser obtida pelo método de variáveis separáveis, ou seja:

$$\frac{dh}{\sqrt{2gh}} = -\frac{A_h}{A_w} dt. \quad (4.20)$$

Integrando-se ambos os lados obtém-se:

$$\int \frac{dh}{\sqrt{2gh}} = \int -\frac{A_h}{A_w} dt \quad (4.21)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2gh}}{g} = -\frac{A_h}{A_w}t + K \quad (4.22)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2gh}{g^2} = \left(-\frac{A_h}{A_w}t + K\right)^2 \quad (4.23)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2h}{g} = \left(-\frac{A_h}{A_w}t + K\right)^2 \quad (4.24)$$

$$\Leftrightarrow h(t) = \frac{g}{2} \left(-\frac{A_h}{A_w}t + K\right)^2. \quad (4.25)$$

Lembrando que, inicialmente a água está em repouso,  $h(0) = h_{inicial}$ , é possível determinar a constante  $K$  como:

$$K = \pm \sqrt{\frac{2h_{inicial}}{g}}. \quad (4.26)$$

Substituindo o valor positivo de  $K$  na equação (4.25), finalmente obtém-se o comportamento da altura da coluna de água no tanque por meio da função  $h(t)$ :

$$h(t) = \frac{g}{2} \left(-\frac{A_h}{A_w}t + \sqrt{\frac{2h_{inicial}}{g}}\right)^2. \quad (4.27)$$

A equação (4.27) tem sua forma expandida como:

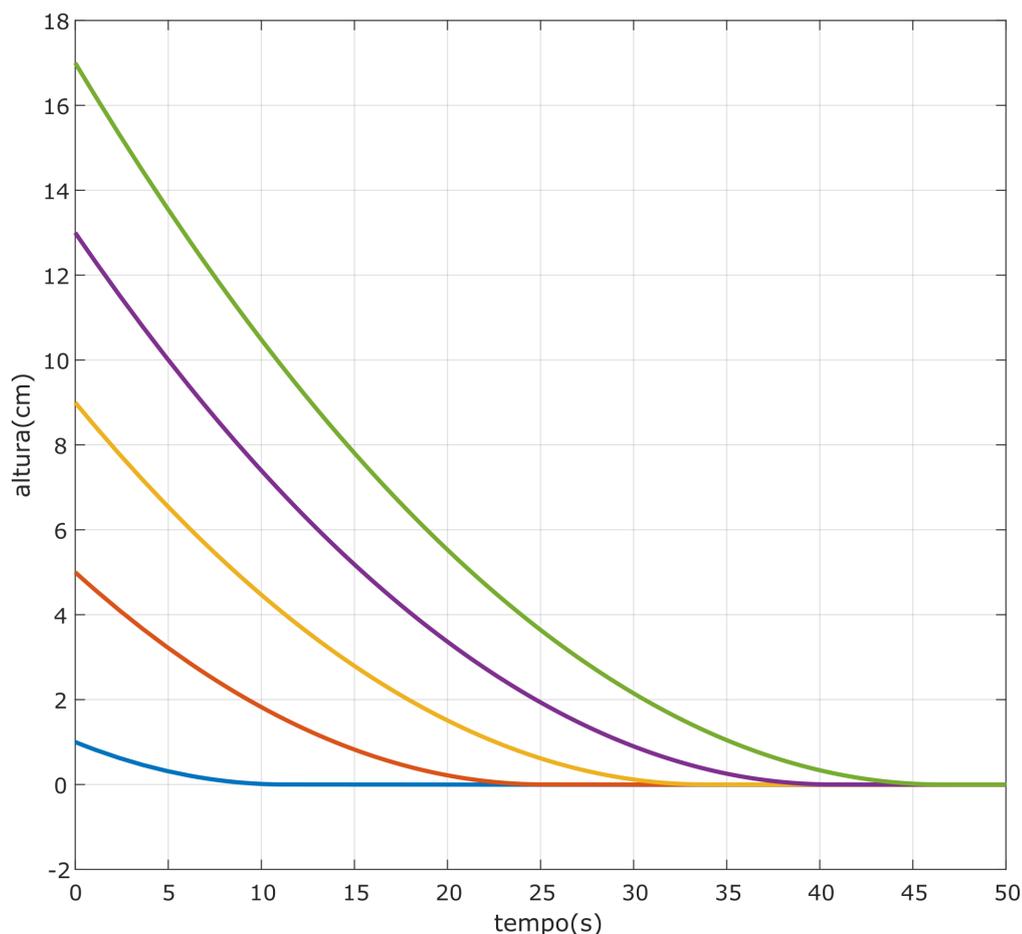
$$h(t) = \frac{g}{2} \left(\frac{A_h}{A_w}\right)^2 t^2 - \frac{gA_h}{A_w} \sqrt{\frac{2h_{inicial}}{g}} t + h_{inicial}. \quad (4.28)$$

Note que, enquanto a equação (4.27) permite estabelecer facilmente o tempo que o tanque levará para esvaziar, a equação (4.28) revela outros detalhes da dinâmica do escoamento.

Observe que os únicos parâmetros da função  $h(t)$  são a altura inicial e as áreas de seção transversal do tanque e do orifício, sendo que a altura inicial pouca influencia o perfil do escoamento, é um fator de deslocamento do gráfico. Em contrapartida, os outros dois parâmetros determinam o formato da curva, porque a razão entre as áreas irá definir a abertura da parábola.

Ainda, destaca-se que a utilização da equação (3.19) para modelar o fenômeno tem sentido apenas para o intervalo de tempo que inicia em  $t = 0$  e termina no vértice da parábola,  $t = \frac{A_w}{A_h} \sqrt{\frac{2h_{inicial}}{g}}$ , pois após este período a interpretação física seria do tanque enchendo de água.

A Figura 9 ilustra o perfil de escoamento em um tanque com água em diferentes alturas iniciais em função do tempo. Neste caso, a área do orifício é  $\pi \text{ cm}^2$  e a área da base do tanque igual a  $25\pi \text{ cm}^2$ .

Figura 9 – Perfil da variação de  $h(t)$  para diferentes alturas iniciais

Fonte: Elaborada pelos autores.

## 4.2 Validação do modelo

Logo após a construção do modelo matemático, é imprescindível que seja testada a sua validade. Bassanezi (2014) defende que esta é a etapa mais importante da modelagem matemática, pois, decide-se sobre a aceitação ou não do modelo.

Segundo Banerjee (2014), os modelos matemáticos apresentam limitações, por isso, é importante delimitar o alcance do modelo. Banerjee (2014) ainda alerta que um modelo apenas aproxima a realidade, dessa forma, não se pode distorcer a realidade na tentativa de obter dados mais precisos.

Para validar o modelo teórico, foram desenvolvidos e implementados três experimentos conforme descrito na Tabela 1, aos quais foram filmados até o esvaziamento completo de cada tanque. Esse momento de obtenção dos dados experimentais utilizou um smartphone com câmera de 8 megapixels, que capturou imagens de tamanho 1920x1080 pixels.

As imagens obtidas foram então processadas de modo a se determinar a altura dos tanques nos instantes seguintes à abertura do orifício. Nesta etapa, utilizou-se as

ferramentas de processamento de imagens do *software* MATLAB.

Tabela 1 – Características dos experimentos realizados  
Fonte: Elaborada pelos autores.

Experimento	Tanque	Altura	Raio da base	Raio de vazão	Líquido
1	$T_1$	25,92 cm	03,10 cm	00,25 cm	Água
2	$T_2$	07,10 cm	06,25 cm	00,25 cm	Água
3	$T_1$	14,26 cm	03,10 cm	00,25 cm	Detergente

Nesta fase de validação, constatou-se que o dispositivo de gravação capturava 30 quadros por segundo e que essa quantidade de imagens era desnecessária. Então, considerou-se 1 entre cada 30 quadros e, desse modo, foi possível obter um perfil de altura com variação por segundo.

Em seguida, os quadros selecionados foram convertidos em elementos matriciais e, ao final da conversão, as imagens em formato matricial foram transformadas em JPEG. É importante ressaltar que o método utilizado transformou os quadros em matrizes 1920x1080x3, processamento que demorou, em média, cerca de 15 minutos para ser executado em um computador de uso doméstico.

Antes de transformar a imagem colorida em uma imagem binária, submeteu-se cada imagem a uma etapa de pré-processamento com o intuito de realçar seu brilho e eliminar ruídos. A Figura 10 apresenta uma imagem pré-processada e sua respectiva versão binarizada.

De posse da imagem binarizada, calculou-se a altura da coluna de líquido. Vale esclarecer que todos os escoamentos foram filmados para coincidir a altura do tanque com o tamanho máximo da imagem, de modo a estabelecer uma relação entre a altura do tanque em centímetros e sua altura em pixels.



Figura 10 – Imagem colorida e sua versão binarizada  
Fonte: Elaborada pelos autores.

Dessa forma, primeiramente, encontrou-se o número de pixels entre o topo da imagem e a altura do líquido, determinando-se a altura da coluna do líquido. E, então, realizou-se a conversão de pixels para centímetros.

Em seguida, houve a etapa de análise dos dados por meio do ajuste de curvas, que, para este trabalho, mostra-se essencial, como destaca Bassanezi (2014):

Em termos de modelagem matemática de fenômenos caracterizados por um processo dinâmico, a formulação do modelo pode muitas vezes preceder a análise dos dados experimentais. Nestes casos, o método de ajuste de curvas é fundamental para a validação dos modelos estabelecidos a priori. A validação de um modelo matemático consiste na verificação da aproximação do modelo com a realidade, ou seja, se os dados experimentais ou observados não estão “muito longe” daqueles fornecidos pelo modelo’. (BASSANEZI, 2014, p. 52).

De modo geral, o ajuste de curvas, também conhecido como regressão, tem a finalidade de propor uma relação entre o comportamento de uma variável dependente e a dinâmica de uma variável independente, e realizar estimativas sobre um processo ou situação.

Bassanezi (2014) explica que idealmente a curva da regressão deve ser capaz de projetar resultados para períodos de tempo em que não se tem dados, isto é, prever o comportamento dos dados no futuro.

Então, este trabalho parte de duas abordagens para investigar a consistência do modelo matemático e a discrepância dos dados, o ajuste linear e o ajuste quadrático, através do Método dos Mínimos Quadrados (MMQ), conforme é descrito em Chapra e Canale (2008). Para tal, utilizou-se o aplicativo de processamento de planilhas digitais Excel.

Ressalta-se que analisar o erro entre os dados se faz importante, uma vez que é preciso que o modelo esteja de acordo com interpretações que façam sentido no mundo real, como afirma Banerjee (2014).

Neste caso, o erro foi avaliado através do cálculo do  $r^2$ , uma medida estatística que varia entre 0 a 1 que, segundo Chapra e Canale (2008), estima o quão próximo os dados estão da curva de regressão ajustada, de modo que, quanto mais próximo de 1 for seu valor, melhor é o ajuste.

As Figuras 11, 13 e 15 exibem os resultados dos experimentos. Cada imagem traz um gráfico gerado no *software* MATLAB contendo a curva do modelo teórico em vermelho, os dados experimentais representados em azul e um modelo experimental na cor verde.

Na tabela 2, tem-se, a partir dos parâmetros altura inicial, área da seção transversal do cilindro e área da seção transversal de vazão, as equações das curvas para

os modelos teóricos dos experimentos.

Tabela 2 – Modelos teóricos  
Fonte: Elaborada pelos autores.

Experimento	Curva do modelo teórico
1	$h(t) = 0,00021 t^2 - 0,14666 t + 25,92000$
2	$h(t) = 0,00001 t^2 - 0,01889 t + 07,10000$
3	$h(t) = 0,00021 t^2 - 0,03626 t + 14,26000$

Em seguida, a Tabela 3 apresenta as equações das curvas que ajustam quadraticamente o fenômeno, trazendo a medida que indica o erro cometido ao realizar a aproximação.

Tabela 3 – Modelos experimentais  
Fonte: Elaborada pelos autores.

Experimento	Curva do modelo experimental	$r^2$
1	$g(t) = 0,00122 t^2 - 0,34728 t + 25,72583$	0,99969
2	$g(t) = 0,00005 t^2 - 0,03594 t + 07,36493$	0,99927
3	$g(t) = 0,00007 t^2 - 0,05229 t + 12,94259$	0,98197

Do mesmo modo, a Tabela 4 exibe as equações das curvas para o ajuste linear, bem como o  $r^2$  de cada experimento.

Tabela 4 – Ajuste Linear  
Fonte: Elaborada pelos autores.

Experimento	Curva do ajuste linear	$r^2$
1	$y = -0,03230 x + 5,01658$	0,98252
2	$y = -0,00572 x + 2,66438$	0,99534
3	$y = -0,00427 x + 3,30955$	0,92565

As Figuras 12, 14 e 16 geradas no MATLAB exibem os dados dos experimentos linearizados em azul e a curva do ajuste linear em laranja. Esta linearização ilustra, claramente, o quanto o modelo experimental coincide com o ajuste quadrático (linearizado).

Em relação aos outros cenários, o Experimento 3 apresentou os maiores erros, tanto quadrático quanto linear. E, de acordo com as curvas ajustadas, levaria cerca de 800 segundos para o tanque esvaziar. Contudo, verifica-se experimentalmente que o tempo total para o tanque esvaziar ultrapassa essa marca. Além de que, observa-se visualmente na Figura 16 que os dados linearizados não se ajustam à uma reta.

Tal efeito não indica que o modelo teórico tenha falhas, mas sim que o processo de modelar matematicamente é consistente, principalmente porque o Experimento 3 trata do escoamento do detergente, que apresenta uma viscosidade imensamente maior do que a água, e uma das hipóteses utilizadas para construir o modelo foi desprezar a viscosidade.

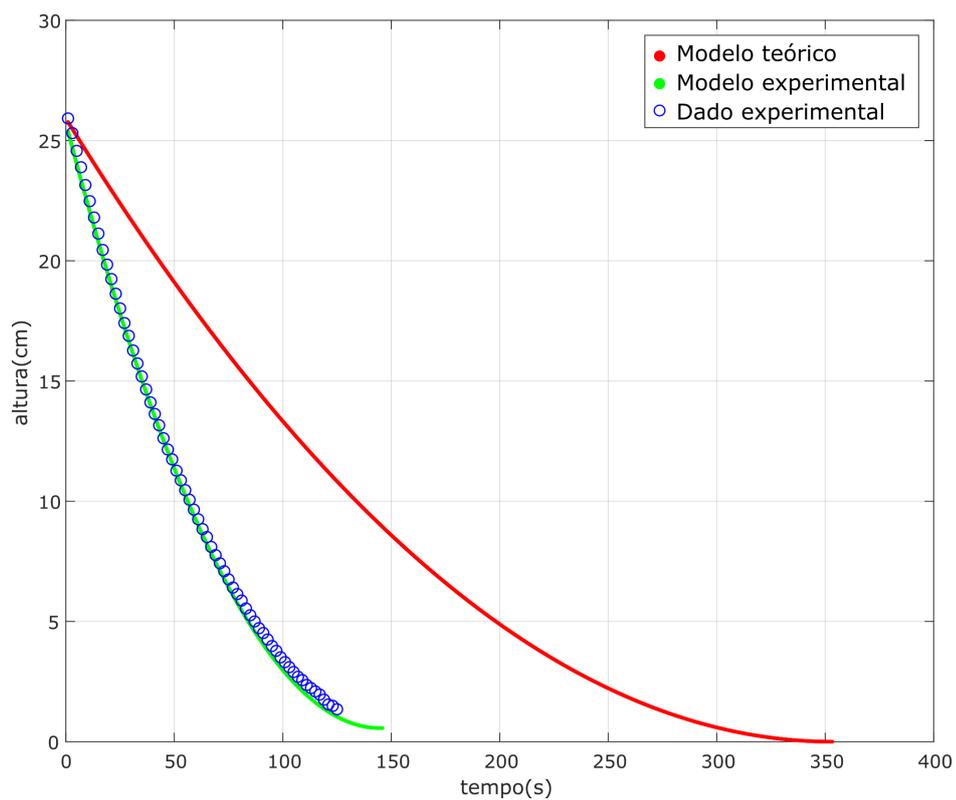


Figura 11 – Dados do experimento 1

Fonte: Elaborada pelos autores.

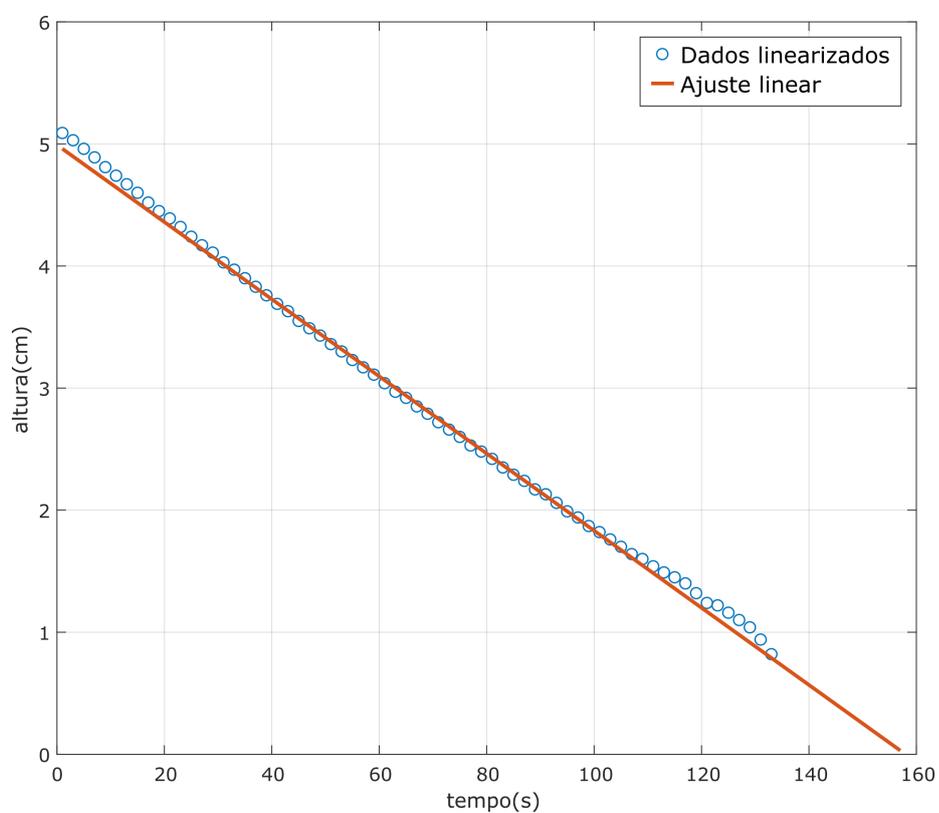


Figura 12 – Linearização dos dados do Experimento 1

Fonte: Elaborada pelos autores.

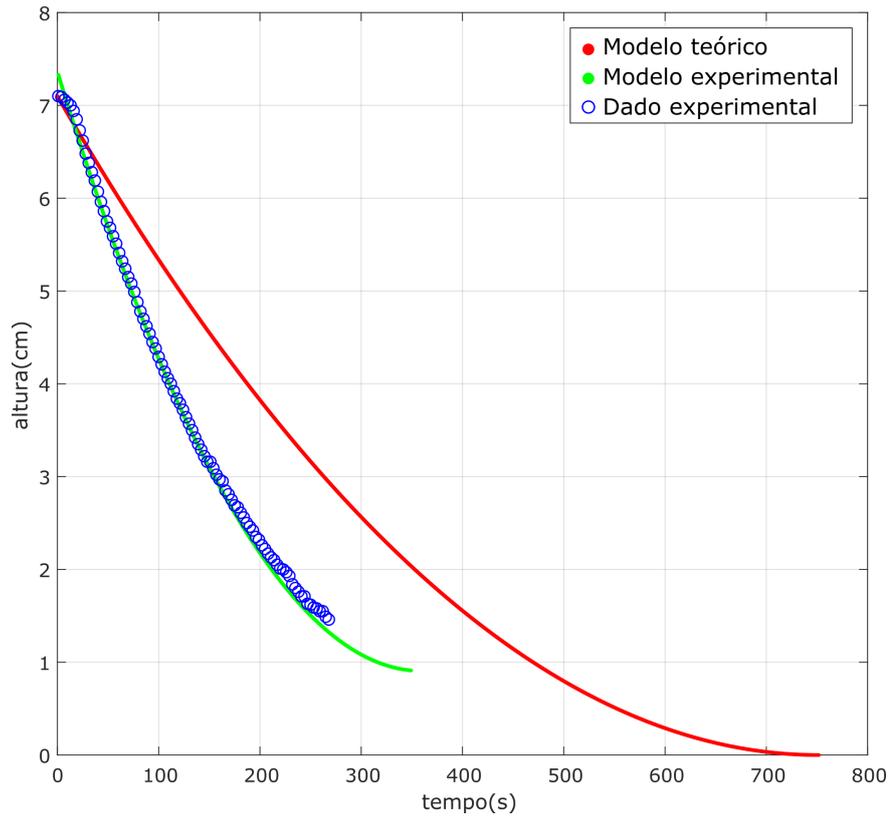


Figura 13 – Dados do Experimento 2

Fonte: Elaborada pelos autores.

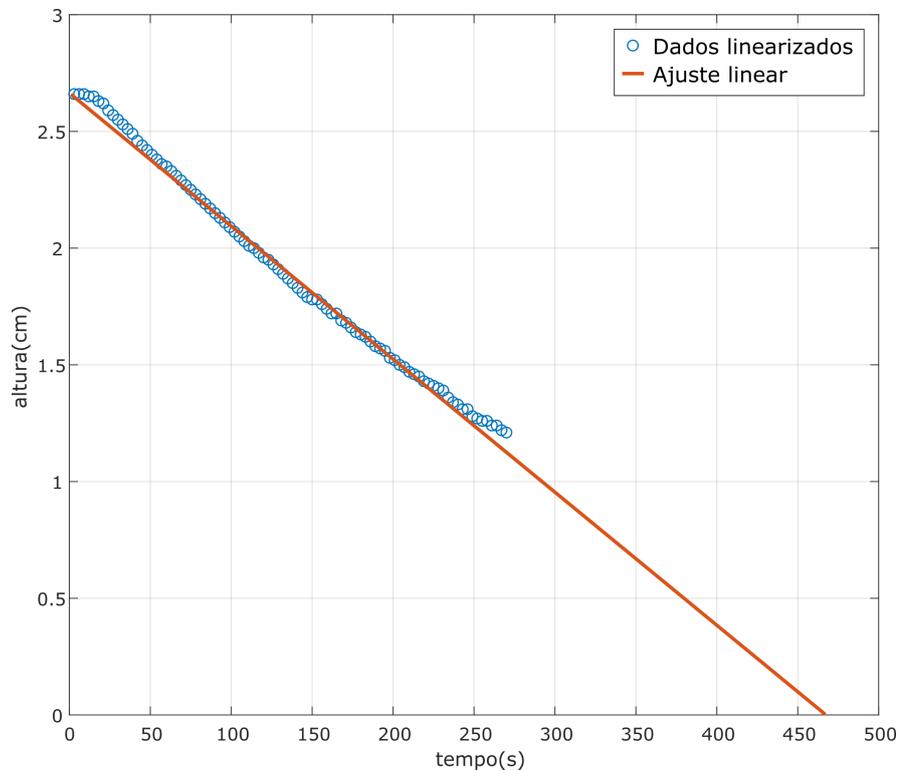


Figura 14 – Linearização dos dados do Experimento 2

Fonte: Elaborada pelos autores.

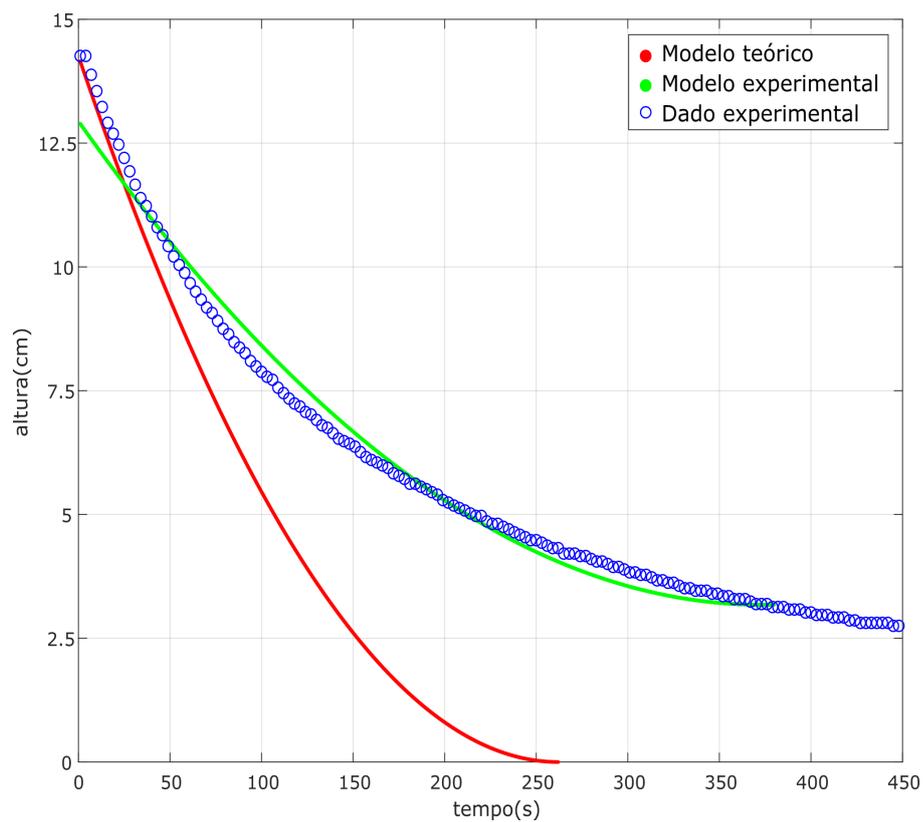


Figura 15 – Dados do Experimento 3

Fonte: Elaborada pelos autores.

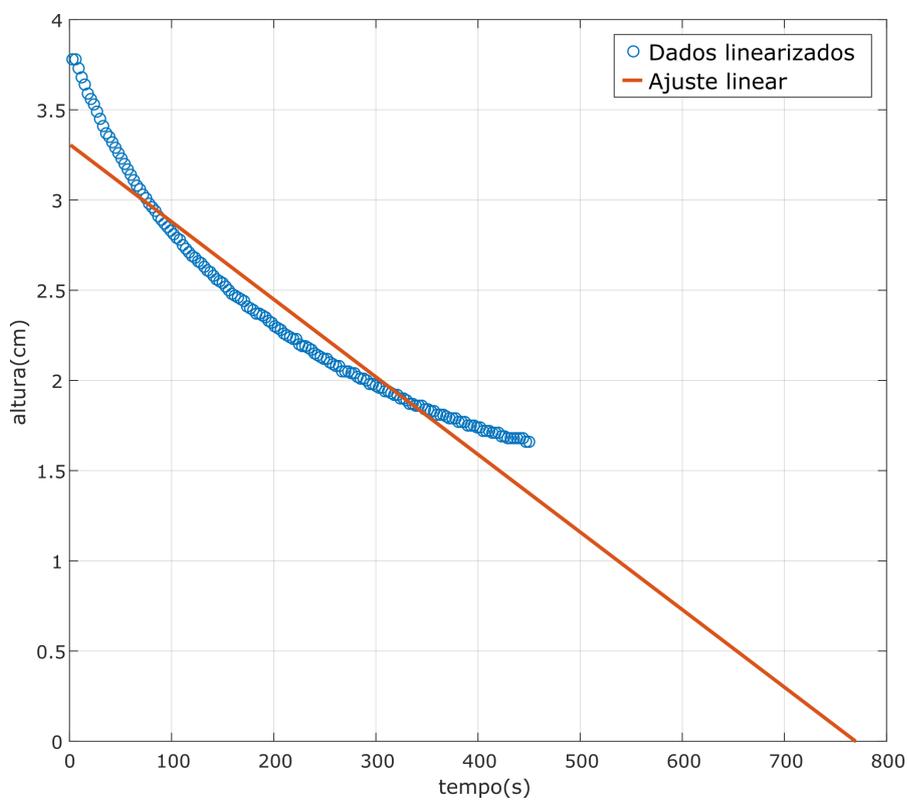


Figura 16 – Linearização dos dados do Experimento 3

Fonte: Elaborada pelos autores.

E, como explicado por Çengel e Cimbala (2015), pode-se desprezar os efeitos viscosos da água. Porém não se pode dizer o mesmo do detergente. O que corrobora com os resultados apresentados pelo Experimento 3.

Reforçando o comentário de Banerjee (2014) sobre o domínio de validade para um modelo, uma das hipóteses iniciais era que o tanque estaria cheio de água. Essa é uma evidência de que reutilizar modelos para outras situações pode ser desastroso.

Assim como recomenda Bassanezi (2014), idealmente seria interessante criar um novo modelo ou então reformular o modelo desenvolvido, de modo a considerar o efeito viscoso dos líquidos.

Na equação (4.14), considerou-se a taxa de variação da velocidade desprezível, por isso teve-se a velocidade constante. Porém, a Figura 11, em comparação à Figura 13, demonstra que no tanque mais alto a velocidade variou mais. Note que, na Figura 11, durante os primeiros 200 segundos, a altura variou cerca de 20 centímetros, enquanto que na Figura 13 a altura variou apenas 3 centímetros para o mesmo intervalo de tempo.

Desse modo, destaca-se que a velocidade como uma função do tempo também é relevante na formulação do modelo. Ainda, desprezou-se o efeito viscoso nos escoamentos dos fluidos, apesar de ser uma propriedade com desdobramentos surpreendentes que, no entanto, traria maior complexidade à obtenção da solução do modelo teórico.

Além disso, um escoamento ainda depende do tamanho do orifício pelo qual o líquido escoar. Como foi visto nos experimentos, um orifício muito pequeno tem como desvantagem a leitura dos dados finais do escoamento, pois a tensão superficial atua de forma que o escoamento se torna quase nulo e termina após um longo período de tempo.

Ainda é possível utilizar uma outra versão da Equação de Bernoulli com menos simplificações, uma vez que este trabalho desconsiderou as perdas de calor e energia envolvidas no escoamento, assim como o trabalho de bombas para escoamentos.

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho foi um desafio, pois a disciplina Mecânica dos Fluidos é repleta de temas minuciosos. Além disso, é uma importante área da ciência que também permite interpretar resultados associados ao Cálculo Vetorial em casos do mundo real.

Vale ressaltar ainda, que, os elementos de Mecânica dos Fluidos apresentados neste trabalho constituem uma parte infinitesimal deste vasto campo do conhecimento. Tem-se diversas situações que se pode estudar, desde uma pequena variação de pressão entre dois pontos até a sustentação de um avião no ar, tornados, o complexo percurso sanguíneo, etc.

Contudo, destaca-se o nível de complexidade que os problemas da Mecânica dos Fluidos apresentam, uma vez que estudar um problema envolvendo um escoamento relativamente simples, levando em conta as diversas simplificações tomadas como hipóteses, resultou em equações não tão simples. Assim, pondera-se sobre os obstáculos presentes no estudo do movimento das ondas marítimas, dos ciclones, da dinâmica das massas de ar atmosféricas.

Além disso, durante todo o trabalho, considerou-se que a única força de campo agindo era a gravidade. Desprezou-se os efeitos da interação do campo elétrico e do campo magnético com os fluidos.

Dada a complexidade dos fenômenos e das equações produzidas em Mecânica dos Fluidos, uma alternativa de estudos é a Fluidodinâmica Computacional/Dinâmica dos Fluidos Computacional (CFD).

Um aspecto que também merece ser comentado é a Matemática utilizada para se estudar os fluidos. Tem-se equações repletas de índices, pois representa, em geral, situações do espaço tridimensional. Ainda assim, os autores da Mecânica dos Fluidos utilizados neste trabalho lançam mão de elementos da Álgebra Multilinear. Além disso, existe uma abordagem sobre fluidos que faz uso do Cálculo de Variável Complexa.

Em relação à Modelagem Matemática, posso dizer que, somente após todo o desenvolvimento do trabalho, finalmente entendi o que é a modelagem, pois passei por todas as fases descritas por Bassanezi (2014). E durante a trajetória, deparei-me com os entraves citados por Banerjee (2014), apesar do fenômeno ser de fácil visualização, está embasado por uma teoria um tanto pesada. Mas, acredito que ganhei maturação em modelagem com este trabalho.

Destaco que o curso de Licenciatura em Matemática do IFSP me proporcionou diversas aprendizagens. Este trabalho pode ser compreendido como a concretização da interdisciplinaridade de, ao menos, cinco disciplinas: Cálculo Diferencial e Integral 3, Interface da Matemática com a Informática, Laboratório de Matemática 2, Equações

Diferenciais Ordinárias e Cálculo Numérico.

Além disso, acredito que este trabalho constituiu uma fonte de experiência em minha formação docente, pois a Modelagem Matemática também é uma tendência de ensino com enfoque na criatividade, na liberdade, na experimentação, no pensamento reflexivo, que visa se contrapor ao ensino que apenas reproduz informações. Contudo, é uma tarefa desafiadora, pois exige tempo e dedicação.

Modelar matematicamente é fazer matemática com as próprias mãos, é ampliar visões matemáticas do mundo e perceber relações matemáticas até então implícitas entre os objetos que compõem um cenário.

Neste trabalho, a Modelagem Matemática é tratada como método científico de pesquisa, entretanto, é brilhante como a modelagem, quando utilizada como estratégia de ensino e aprendizagem, consegue abordar assuntos do Ensino Superior como as simetrias de grupos, adaptando isso para o Ensino Fundamental, como exemplificam Biembengut e Hein (2019).

Existe uma vertente da Modelagem Matemática, dentro do ensino, que trata de utilizar a modelagem como instrumento alavancador de mudanças sociais, isto é, visa um ensino mais questionador, com enfoque nas lutas sociais. Infelizmente o tema está muito distante do que foi tratado aqui, mas é de grande interesse.

Como sugestão de trabalho futuro, indica-se o estudo do mesmo modelo, mas com o caso da velocidade não constante. Seria interessante um estudo computacional e numérico.

Deixa-se como proposta de pesquisa a análise matemática dos escoamentos em que a viscosidade se faz presente. Este é um caso em que se pode ter comportamentos totalmente diferentes.

Além de que, os fluidos newtonianos são afetados pela viscosidade de maneira diferente dos fluidos não newtonianos. Então, pode-se observar o mesmo escoamento pelas duas perspectivas. Também seria o caso de se adaptar a Equação de Bernoulli para o escoamento viscoso.

Outra questão não abordada neste trabalho é em relação ao formato do tanque do problema. Pode-se investigar se o formato do tanque altera o perfil de escoamento, de modo a testar, por exemplo, tanques esféricos ou cônicos.

Voltando-se à Mecânica dos Fluidos, é possível aprofundar-se no tema sobre a linha de corrente, a função corrente e assim investigar uma característica visível de escoamentos, que permite classificar se eles são laminares ou turbulentos.

Tratando-se de ensino, um projeto futuro seria elaborar uma sequência didática deste experimento, pois sua execução é fácil, sendo tranquilamente reproduzido em

sala de aula. Basta que o professor ofereça o suporte necessário.

Espera-se que este trabalho sirva de inspiração àqueles que desejem estudar temas além dos conteúdos da graduação.



## Referências

- BANERJEE, S. *Mathematical modeling: models, analysis and applications*. 1. ed. New York: CRC Press, 2014. Citado 8 vezes nas páginas 20, 24, 25, 28, 47, 49, 54 e 55.
- BASSANEZI, C. R. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia*. 4. ed. São Paulo: Contexto, 2014. Citado 12 vezes nas páginas 19, 20, 23, 24, 25, 26, 28, 43, 47, 49, 54 e 55.
- BIEMBENGUT, S. M.; HEIN, N. *Modelagem matemática no ensino*. 5. ed. São Paulo: Contexto, 2019. Citado 4 vezes nas páginas 19, 20, 24 e 56.
- BOYER, C. B. *História da matemática*. 3. ed. São Paulo: Edgar Blucher, 2010. Citado na página 23.
- CHAPRA, S. C.; CANALE, R. P. *Métodos Numéricos para Engenharia*. 5. ed. São Paulo: McGraw-Hill, 2008. Citado na página 49.
- FOX, R. W.; MCDONALD, A. T.; PRITCHARD, P. J. *Introdução à mecânica dos fluidos*. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2014. Citado 7 vezes nas páginas 21, 30, 31, 32, 36, 39 e 41.
- HART-DAVIS, A. *O livro da ciência*. 6. ed. São Paulo: Globo, 2016. Citado na página 23.
- LAKATOS, E. M.; MARCONI, M. de A. *Fundamentos de metodologia científica*. 5. ed. São Paulo: Atlas, 2003. Citado na página 21.
- NOBRE, S. R. Tradução para o Português do artigo "Problemas Matemáticos" de David Hilbert. *Revista Brasileira de História da Matemática, Rio Claro - SP, v.3, n.5, p. 5–12, 2003*. Citado na página 21.
- NUSSENZVEIG, H. *Curso de física básica, vol 2: fluidos, oscilações e ondas, calor*. 5. ed. São Paulo: Blucher, 2014. Citado na página 41.
- SOM, S. K.; BISWAS, G.; CHAKRABORTY, S. *Introduction to Fluid Mechanics and Fluid Machines*. 6. ed. New Delhi: McGraw-Hill, 2008. Citado 3 vezes nas páginas 33, 38 e 39.
- THOMAS, G.; WEIR, M.; HASS, J. *Cálculo, vol 2*. 12. ed. São Paulo: Pearson, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 37 e 39.
- WHITE, F. M. *Mecânica dos fluidos*. 6. ed. São Paulo: McGraw-Hill, 2011. Citado 11 vezes nas páginas 20, 21, 30, 31, 32, 35, 36, 38, 39, 41 e 44.
- ZILL, D. G. *A First Course in Differential Equations with Modeling Applications*. 11. ed. Boston: Cengage Learning, 2017. Citado na página 43.
- ÇENGEL, Y. A.; CIMBALA, J. M. *Mecânica dos Fluidos – Fundamentos e Aplicações*. 3. ed. São Paulo: McGraw-Hill, 2015. Citado 10 vezes nas páginas 20, 21, 30, 31, 32, 33, 36, 37, 43 e 54.