



UM MODELO FUZZY PARA O PROCESSO DE FERMENTAÇÃO DE PÃES ARTESANAIS VIA PRINCÍPIO DA EXTENSÃO DE ZADEH

WEMERSON MAURICIO DOS SANTOS

Trabalho de Conclusão do Curso Superior de Licenciatura em Matemática, orientado pelo Prof. Dr. Marco Aurélio Granero Santos e coorientado pela Prof.^a Dr.^a Mônica Helena Ribeiro Luiz

São Paulo

2020

WEMERSON MAURICIO DOS SANTOS

**UM MODELO FUZZY PARA O PROCESSO DE FERMENTAÇÃO DE PÃES
ARTESANAIS VIA PRINCÍPIO DA EXTENSÃO DE ZADEH**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo – IFSP, em cumprimento ao requisito parcial para obtenção do grau acadêmico de licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marco Aurélio Granero Santos

Coorientadora: Prof.^a Dr.^a Mônica Helena Ribeiro Luiz

São Paulo

2020

Catalogação na fonte
Biblioteca Francisco Montojos - IFSP Campus São Paulo
Dados fornecidos pelo(a) autor(a)

s237m	<p>Santos, Wemerson Mauricio dos UM MODELO FUZZY PARA O PROCESSO DE FERMENTAÇÃO DE PÃES ARTESANAIS VIA PRINCÍPIO DA EXTENSÃO DE ZADEH / Wemerson Mauricio dos Santos. São Paulo: [s.n.], 2020. 91 f.</p> <p style="text-align: center;">Orientador: Marco Aurélio Granero Santos Co-orientadora: Mônica Helena Ribeiro Luiz</p> <p style="text-align: center;">Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, IFSP, 2020.</p> <p style="text-align: center;">1. Modelagem Matemática. 2. Modelo Matemático. 3. Princípio da Extensão de Zadeh. 4. Teoria de Conjuntos Fuzzy. I. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo II. Título.</p>
-------	---

CDD 510

ATA 1/2020 - SAM-SPO/DCM-SPO/DEN-SPO/DRG/SPO/IFSP

Ata de Defesa de Trabalho de Conclusão de Curso - Graduação

Na presente data realizou-se a sessão pública de defesa do Trabalho de Conclusão de Curso intitulado **UM MODELO FUZZY PARA O PROCESSO DE FERMENTAÇÃO DE PÃES ARTESANAIS VIA PRINCÍPIO DA EXTENSÃO DE ZADEH** apresentado(a) pelo(a) aluno(a) **WEMERSON MAURICIO DOS SANTOS (SP1673645)** do Curso **SUPERIOR EM LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**, (Campus São Paulo). Os trabalhos foram iniciados às 14:00 pelo(a) Professor(a) presidente da banca examinadora, constituída pelos seguintes membros:

Membros	IES	Presença (Sim/Não)	Aprovação/Conceito (Quando Exigido)
Marco Aurélio Granero Santos (Presidente/Orientador)	IFSP	Sim	10,0
Mônica Helena Ribeiro Luiz (Coorientadora)	IFSP	Sim	10,0
Henrique Marins de Carvalho (Examinador 1)	IFSP	Sim	10,0
Rogério Ferreira da Fonseca (Examinador 2)	IFSP	Sim	10,0

Observações: O trabalho foi desenvolvido com excelência e aprovado com menção honrosa, servindo de exemplo para futuros trabalhos.

A banca examinadora, tendo terminado a apresentação do conteúdo da monografia, passou à arguição do(a) candidato(a). Em seguida, os examinadores reuniram-se para avaliação e deram o parecer final sobre o trabalho apresentado pelo(a) aluno(a), tendo sido atribuído o seguinte resultado:

Aprovado(a) Reprovado(a) Nota (quando exigido): 10,0 (dez)

Proclamados os resultados pelo presidente da banca examinadora, foram encerrados os trabalhos e, para constar, eu lavrei a presente ata que assino juntamente com os demais membros da banca examinadora.

Câmpus São Paulo, 28 de agosto de 2020

Avaliador externo: Sim Não

Assinatura:

Documento assinado eletronicamente por:

- Rogerio Ferreira da Fonseca, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 28/08/2020 17:02:21.
- Henrique Marins de Carvalho, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 28/08/2020 16:40:36.
- Monica Helena Ribeiro Luiz, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 28/08/2020 16:35:22.
- Marco Aurelio Granero Santos, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 28/08/2020 16:35:02.

Este documento foi emitido pelo SUAP em 28/08/2020. Para comprovar sua autenticidade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse <https://suap.ifsp.edu.br/autenticar-documento/> e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 90409
Código de Autenticação: fe6af05a80



À minha família e amigos

Agradecimentos

Acredito que a palavra que define este trabalho e minha jornada no mundo é gratidão. Olho para trás e vejo que nada disso seria possível sem a ajuda de outras pessoas. Por esse motivo, antes mesmo de destacar algumas delas preciso me desculpar com tantas outras que posso ter esquecido de colocar nesse pequeno texto de agradecimento. Você que acha que seu nome deveria estar aqui, obrigado e me desculpe por não ter colocado é que as linhas são limitadas e o autor desse trabalho é humano e falha em muitos momentos.

Primeiro, agradeço a Deus. Em seguida, como não poderia ser diferente agradeço aos meus pais Anéria e Marcos por fazerem tudo o que estava ao alcance deles para que fosse possível me formar. Em especial, obrigado mãe por me mostrar os caminhos pelos quais seguir e por ser um exemplo de como se deve colocar o amor pelas pessoas em primeiro lugar.

Agradeço meu irmão Wellington Mauricio por todo seu carinho, apoio e por me ensinar a ser uma pessoa melhor. Ao meu irmão Willian Mauricio agradeço por tornar a casa mais alegre e pelo apoio. Agradeço também por ser sobrinho de Elizângela Mauricio e Josimar Menezes, obrigado por terem me ajudado em todos momentos que precisei. Obrigado tia Maria Aparecida (Ida) e tio Antônio Carlos por acreditarem na minha capacidade e por sempre estarem dispostos a me ajudar. Agradeço à minha vó Oirce Siqueira por ser a pessoa mais gentil do universo, isso me ensina tanto. Um muito obrigado ao meu falecido avô Leandro Leocádio, você faz muita falta para toda a família. Obrigado meu primo Iron Victor, por ser um grande amigo. Agradeço também aos meus avós paternos Joana e Luiz Miguel por mesmo estando distantes acreditarem em mim.

A frase: “Você não precisa de muitos amigos, só alguns aqueles com os quais você pode realmente contar” é tão presente em minha vida que nem parece que foi feita para um personagem do anime Naruto. Eu tenho excelentes amigos (as) e sou eternamente grato a isso. Obrigado por fazerem parte da minha vida.

Obrigado ao meu irmão de outros pais Wesley Patrick por ter me estendido o braço em momentos difíceis da vida e também pelos momentos de diversão. Um agradecimento especial a Lídia e Laelcio por sempre me tratarem tão bem e me ajudarem em momentos difíceis. A esses três últimos eu não tenho palavras para

descrever tudo o que vocês fizeram por mim, não posso deixar de agradecer pelas caronas quase diárias, por todos os momentos alegres e por me fazerem sentir parte da família.

Agradeço a Laura Correia por todos os conselhos e por ser uma excelente amiga, mesmo com a distância você me ajudou muito. Agradeço a você Nicolas Félix por ser um amigo tão valioso, com o qual sei que posso sempre contar. Obrigado Denise Gonzaga pelas risadas e excelentes ideias de diversão.

Aos amigos do IFSP-SPO, agradeço muito por tudo. Em especial, agradeço a você Jéssica Pessuto por ser uma grande amiga e a melhor dupla possível de toda a instituição. Valter Felix e Gustavo Costa agradeço vocês por comporem comigo a “ganguê” que de gangue não tem nada, obrigado por todos os momentos incríveis. Obrigado Marcelo Júnior por ser um amigo incrível, por todas as conversas “cabeça” e também aquelas sem sentido nenhum que foram hilárias e não posso esquecer do apoio para ingressar no mestrado, muito obrigado. Obrigado Ramon Santana (Ralmito) e Silas Cavalcante por serem tão incríveis e me ajudarem em muitas disciplinas. Michele Miyazaki, obrigado por fazer parte da minha jornada e por ser uma grande amiga. Matheus Alves, apesar de você não ser da mesma instituição eu agradeço pela ajuda em Física e por sua amizade. Agradeço a Sara Ávila minha parceira de Iniciação Científica, pelos estudos sobre temas de lógica fuzzy. Agradeço a você Luiz Sena, por compartilhar as angústias das incertezas nesse momento final do curso.

Agradeço a meu orientador Marco Granero e minha orientadora Mônica Ribeiro. Sem a ajuda de vocês este trabalho não existiria. Obrigado por me ajudarem a ser melhor como aluno e principalmente como pessoa e por acreditarem no meu potencial. Mônica, saiba que te admiro muito e não tem esse papo de coorientadora não, você é minha orientadora. Granero, obrigado por ser, em vários aspectos, um exemplo a ser seguido, por me dar conselhos sobre a vida extremamente valiosos que vou guardar com muito carinho. Agradeço a vocês também pela oportunidade e confiança de me convidarem para fazer Iniciação Científica.

Agradeço a todos os professores do IFSP campus São Paulo por todos ensinamentos, paciência e compreensão. A diferença dessa instituição é o tratamento maravilhoso que a maior parte de vocês dá aos alunos. Em especial, agradeço aos professores Henrique Marins, Flávia Milo, Armando Traldi, Lucas Casanova e Valéria

Ostete. Henrique, você é um exemplo de professor e de pessoa, agradeço muito por ser atencioso, por sempre acreditar e valorizar a capacidade de cada um de seus alunos. Flávia, muito obrigado por ser uma pessoa tão preocupada com as outras e por sempre estar disposta a ajudar. Traldi, obrigado pela confiança, por me dar a oportunidade de ser monitor e por sempre me valorizar como aluno. Lucas, agradeço por você me ensinar a estudar e por me fazer gostar mais de Matemática. Valéria, obrigado por ser tão incrível e por me ajudar tanto no final do curso. Agradeço também a Larissa Sartori por todo apoio. Cada um de vocês junto com meu orientador e orientadora me tornaram um aluno melhor e eu sou muito grato por tudo.

Agradeço também ao IFSP por ter me ajudado financeiramente por meio das bolsas de monitoria e iniciação científica. Tenho muito orgulho de ter estudado nessa instituição. Obrigado pela oportunidade e por fazer parte da minha história. Agradeço a todos funcionários dessa instituição.

Por fim, agradeço a você leitor (a) que disponibilizou uma parte de seu tempo para ler esse trabalho que tem seus defeitos, mas foi feito com muito carinho, dedicação e esforço. Espero que você tenha uma excelente leitura e que de alguma forma as poucas linhas que ele possui sejam úteis para o seu aprendizado.

“Não é o que o mundo reserva para você,
mas o que você traz para o mundo.”

Lucy Maud Montgomery

RESUMO

Neste trabalho, foi desenvolvido um modelo matemático utilizando a Teoria dos Conjuntos Fuzzy para o processo de fermentação de pães artesanais. A abordagem escolhida para construí-lo foi o Princípio da Extensão de Zadeh. Usando como metodologia a Modelagem Matemática. O desenvolvimento do modelo fuzzy foi feito a partir dos dados experimentais presentes em Boeno (2018) e é também com esse texto que se justifica a escolha de fuzzificar o modelo logístico contínuo de Verhulst. O parâmetro escolhido para ser descrito com a Teoria dos Conjuntos Fuzzy (fuzzificado) foi a população inicial que é representada por um número fuzzy triangular. Durante o texto, são apresentados os conceitos de Modelagem Matemática, modelo matemático, modelo determinístico de Verhulst, e conceitos da Teoria dos Conjuntos Fuzzy que são utilizados na aplicação do Princípio da Extensão de Zadeh, tais como: subconjuntos fuzzy, suporte, α -nível, extensão de Zadeh e números fuzzy. Além disso, uma solução fuzzy do modelo logístico para a fermentação de pães artesanais é apresentada.

Palavras-chave: Modelagem Matemática; Modelo Matemático; Princípio da Extensão de Zadeh; Teoria dos Conjuntos Fuzzy.

ABSTRACT

In this work, a mathematical model was developed using Fuzzy Sets Theory for the fermentation's process of handmade breads by Zadeh Extension Principle. For that, the Mathematical Modeling was used as a methodology. The choice of the fuzzy parameter and the mathematical model was based on the experimental data present in Boeno (2018). The parameter chosen to be described with the Fuzzy Sets Theory was the initial population, which is represented by a triangular fuzzy number. During the text, the concepts of Mathematical Modeling, mathematical model, Verhulst deterministic model, and concepts of Fuzzy Sets Theory are used in the application of Zadeh Extension Principle are presented, such as: subsets fuzzy, support, α -cut, Zadeh Extension Principle and fuzzy numbers. In addition, a fuzzy solution of the logistic model for the fermentation of handmade breads is presented.

Keywords: Fuzzy Sets Theory; Mathematical modeling; Math model; Zadeh Extension Principle.

Lista de Figuras

Figura 1.1: Analogia entre Modelagem Matemática e fotografia	33
Figura 1.2: O processo de Modelagem Matemática.	34
Figura 2.1: Representação gráfica da função XA do Exemplo 2.2	42
Figura 2.2: Representação gráfica da função φF do Exemplo 2.2	43
Figura 2.3: Representação gráfica de um conjunto fuzzy F de \mathbb{R}	46
Figura 2.4: Representação gráfica do conjunto fuzzy F do Exemplo 2.8	47
Figura 2.5: Representação gráfica do número fuzzy do Exemplo 2.8	50
Figura 2.6: Relação entre X e Z a partir de f injetora	51
Figura 2.7: Relação entre X e Z a partir de f sobrejetora	53
Figura 2.8: Extensão de Zadeh do Exemplo 2.13	56
Figura 2.9: Comparação entre as funções 1, 2 e 3 do Exemplo 2.13	59
Figura 2.10: Representação gráfica de um número fuzzy triangular $(a; u; b)$	61
Figura 2.11: Representação gráfica do número fuzzy $(3;4;5)$	63
Figura 2.12: Representação gráfica de um número fuzzy trapezoidal $(a; b; c; d)$	64
Figura 2.13: Representação gráfica do número fuzzy trapezoidal do exemplo 2.15	65
Figura 3.1: Gráfico do Modelo determinístico de Verhulst para população crescente	74
Figura 3.2: Gráfico dos dados do Pão 1 e curva logística do modelo de Verhulst associado	76
Figura 4.1: Representação gráfica da solução do modelo logístico fuzzy	81
Figura 4.2: Aproximação do gráfico da Figura 4.1 do modelo logístico fuzzy	82
Figura 4.3: Modelos fuzzy e determinístico para a fermentação de pães artesanais	83
Figura 4.4: Aproximação dos gráficos da Figura 4.4	84

Lista de Tabelas

Tabela 2.1: Representação na forma de tabela do subconjunto fuzzy F	44
Tabela 3.1: Informações sobre o Modelo determinístico de Verhulst.....	74
Tabela 3.2: Parâmetros do modelo logístico determinístico.....	75
Tabela 3.3: Populações iniciais	77
Tabela 3.4: Parâmetros do modelo logístico fuzzy.	78

SUMÁRIO

Introdução	26
1 Modelagem Matemática	31
2 Teoria dos Conjuntos Fuzzy	39
2.1 Subconjuntos fuzzy	39
2.1.1 Representações de um subconjunto fuzzy	44
2.1.2 Suporte e α -níveis de um subconjunto fuzzy	46
2.2 Princípio da Extensão de Zadeh e números fuzzy	50
3 Dados experimentais e Modelo	67
3.1 Modelo determinístico de Verhulst	67
3.2 Justificativa e escolha dos parâmetros	75
3.3 Modelo logístico de Verhulst com condição inicial fuzzy	78
4 Discussão e resultados	81
Considerações finais	85
Referências	87
Anexo A – Receita para a fabricação de pães caseiros	89
Anexo B – Código do modelo fuzzy	91

INTRODUÇÃO

Ao longo dos anos, muitos autores têm apresentado definições acerca do que é o processo de Modelagem Matemática. Para este trabalho, a Modelagem Matemática pode ser descrita como “[...] um processo que alia teoria e prática, motiva seu usuário na procura do entendimento da realidade que o cerca e na busca de meios para agir sobre ela e transformá-la” (BASSANEZI, 2006, p. 17).

Dito de outra forma, é um processo dinâmico capaz de transformar fenômenos do mundo real em expressões matemáticas que conseguem descrevê-los com um determinado grau de fidelidade.

Segundo Bassanezi (2006), a Modelagem Matemática com seu poder de síntese e abrangência é por excelência o método científico usado nas ciências factuais. Neste trabalho, ela terá esse viés. A relevância de usá-la como instrumento de pesquisa está na sua capacidade de poder:

- Estimular novas ideias e técnicas experimentais;
- Dar informações em diferentes aspectos dos inicialmente previstos;
- Ser um método para se fazer interpolações, extrapolações e previsões;
- Sugerir prioridades de aplicações de recursos e pesquisas e eventuais tomadas de decisão;
- Preencher lacunas onde existe falta de dados experimentais;
- Servir como recurso para melhor entendimento da realidade;
- Servir de linguagem universal para compreensão e entrosamento entre pesquisadores em diversas áreas do conhecimento (BASSANEZI, 2006, pp. 32-33).

Para Bassanezi (2006), a eficiência da Modelagem Matemática está na conscientização de que o matemático está trabalhando com aproximações da realidade, que está elaborando representações de um sistema ou parte dele.

O autor ainda destaca que a modelagem eficiente permite fazer previsões, tomar decisões, explicar e entender; enfim participar do mundo real com capacidade de influenciar mudanças.

Existem diferentes formas, técnicas e teorias para se modelar matematicamente um problema, dentre elas destaca-se a modelagem através da Teoria dos Conjuntos Fuzzy ou simplesmente Modelagem Fuzzy.

Segundo Barros e Bassanezi (2010), a Teoria dos Conjuntos Fuzzy foi introduzida no meio científico em 1965 pelo azerbaijano Lofti Asker Zadeh com a

intenção de dar um tratamento matemático a termos linguísticos subjetivos, como “aproximadamente” e “em torno de”. E, desde então, vem ganhando destaque por ser capaz de formalizar matematicamente fenômenos e termos que carregam subjetividades e/ou imprecisões em suas classificações, através do conceito de grau de pertinência a um conjunto.

Palavras como “muito”, “pouco”, “aproximadamente”, “próximo”, “perto”, “longe”, “alto”, “baixo” e intensificadores no geral são exemplos de termos que podem ser matematizados usando essa teoria, uma vez que em diversas situações do mundo real o ser humano deve lidar com frases, orações, acontecimentos, momentos, fenômenos etc. que são subjetivos e/ou imprecisos.

Ao utilizar a lógica convencional é possível "traduzir" esses termos da linguagem natural (língua portuguesa, inglesa etc.) para a linguagem Matemática. Porém, esse tipo de modelagem não consegue contemplar as subjetividades, imprecisões e incertezas que estão presentes em seus significados e usos.

Isso acontece, pois a lei do terceiro excluído que é definida por Mortari (2001) como: Dada uma proposição e sua negação, pelo menos uma delas é verdadeira. É uma das leis que rege a lógica clássica. Ou seja, no caso desse tipo de lógica a modelagem não permite meio termo, ou um elemento está completamente em um conjunto ou não está.

No caso da lógica fuzzy, os elementos podem pertencer parcialmente a um conjunto e com isso, aumenta-se significativamente a quantidade de símbolos/expressões matemáticas que são capazes de estabelecer correspondências com esses termos subjetivos e/ou imprecisos.

Para que a ideia fique mais clara, considere, como exemplo, uma pessoa que está a caminho de um parque. É razoável pensar que ela está mais próxima do parque conforme a distância entre ambos fica menor, isto é, no sentido de proximidade estar a 10 km do destino não é exatamente o mesmo que estar a 5 km.

Pode-se dizer que, no segundo caso, a pessoa está mais próxima, e conforme a distância entre ela e o parque vai diminuindo a pessoa estará cada vez mais próxima do seu ponto de chegada. Sendo assim, é perceptível que existe um grau de proximidade entre a pessoa e o parque. Além disso, a palavra “próximo” é subjetiva, pois depende do que se considera como próximo.

Para modelar a palavra “próximo” pode-se recorrer à Teoria dos Conjuntos Fuzzy, pois como descrito anteriormente, estar próximo pode ser algo gradualmente diferente e subjetivo.

Nos modelos matemáticos, há parâmetros que carregam incertezas que podem influenciar na representatividade dos resultados obtidos. A Teoria dos Conjuntos Fuzzy permite modelar tais incertezas ao considerar sua subjetividade com o intuito de obter modelos que sejam mais representativos do problema real.

Modelos Fuzzy ou Sistemas Variacionais Fuzzy são modelos matemáticos que utilizam a Teoria dos Conjuntos Fuzzy na sua construção. Eles “[...] podem comportar vários tipos de incertezas (subjetividades ou *fuzziness*) que podem estar acopladas nos parâmetros, nas condições iniciais ou nas próprias variáveis de estado”, (CECCONELLO; SILVA; BASSANEZI, 2010, p. 8).

Bassanezi ressalta que:

A importância do modelo matemático consiste em se ter uma linguagem concisa que expressa nossas ideias de maneira clara e sem ambiguidades, além de proporcionar um arsenal enorme de resultados (teoremas) que propiciam o uso de métodos computacionais para calcular suas soluções numéricas. (BASSANEZI, 2006, p. 20)

Diferentemente da Modelagem Matemática de sistemas por meio de equações determinísticas, a Modelagem Matemática de sistemas por meio da Teoria dos Conjuntos Fuzzy propõe a inserção de elementos subjetivos e/ou imprecisos ao processo de modelagem.

A característica essencial da Modelagem Matemática, utilizando sistemas de equações determinísticas, é a precisão obtida nas previsões de fenômeno. Evidentemente, tais previsões ou inferências estão sempre dependentes de informações precisas que são inseridas nos valores médios dos parâmetros utilizados. (JAFELICE; BARROS; BASSANEZI, 2012, p. 11)

O objetivo deste trabalho é aplicar ao processo de fermentação de pães artesanais uma abordagem utilizando a Teoria dos Conjuntos Fuzzy e com isso construir um modelo fuzzy para este processo.

Visto que esse processo foi apresentado por Boeno (2018) e envolve características que indicam a incerteza e a imprecisão desse tipo de fenômeno, como por exemplo, a medição dos ingredientes para se fazer os pães, o papel da temperatura no processo de fermentação, frases como “sove bem” presentes na receita (Anexo A), é possível utilizar a Teoria dos Conjuntos Fuzzy para modelar matematicamente esse problema.

Para isso, é necessário escolher a abordagem a ser utilizada. Barros e Bassanezi (2010) destacam quatro formas para se trabalhar com sistemas dinâmicos fuzzy: Equações Diferenciais fuzzy, Inclusões Diferenciais fuzzy, Base de Regras fuzzy e o Princípio da Extensão de Zadeh. Cada uma dessas formas se distingue pelo tratamento dado à taxa de variação e/ou como ela se relaciona com as variáveis de estado (variáveis que descrevem a evolução do sistema).

Os autores também destacam que a primeira utiliza a derivada de Hukahara¹ relacionada com funções fuzzy; a segunda utiliza os conceitos de integrais e diferenciais fuzzy; a terceira relaciona a variação a partir de regras fuzzy construídas por especialistas da área, isto é, não utiliza propriamente as equações diferenciais para descrever os fenômenos; a quarta é dada pela fuzzificação da solução determinística via Extensão de Zadeh, supondo que algum parâmetro da equação diferencial seja representado por um conjunto fuzzy.

Como modelos determinísticos para a fermentação de pães artesanais já foram desenvolvidos por Boeno (2018), a abordagem escolhida para elaborar um modelo fuzzy para a fermentação de pães artesanais nesta pesquisa foi o Princípio da Extensão de Zadeh, e o parâmetro escolhido para ser descrito com a Teoria dos Conjuntos Fuzzy (fuzzificado) foi a população inicial.

A escolha por essa abordagem também se justifica pelo fato de que não há a necessidade de se construir o modelo determinístico novamente, pois é possível inserir as subjetividades presentes no processo de fermentação de pães artesanais após a resolução do problema determinístico que já foi realizada por Boeno (2018).

Além disso,

A reformulação de modelos é uma das partes fundamentais do processo de modelagem e isto pode ser evidenciado se considerarmos que: Os fatos conduzem constantemente a novas situações; qualquer teoria é passível de modificações; as observações são acumuladas gradualmente de modo que novos fatos suscitam novos questionamentos; a própria evolução da Matemática fornece novas ferramentas para traduzir a realidade (Teoria do Caos; Teoria Fuzzy etc). (BASSANEZI adaptado, 2006, p. 31)

¹ A função $u': [a, b] \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R})$ cujos α -níveis são dados por: $[u'(t)]^\alpha = [(u_1^\alpha)'(t), (u_2^\alpha)'(t)]$, para todo $\alpha \in [0, 1]$, é a derivada fuzzy da função fuzzy $u(t)$, conhecida como derivada de Hukahara. A existência das derivadas clássicas $(u_1^\alpha)'(t)$ e $(u_2^\alpha)'(t)$ está sendo suposta. Para mais informações consulte "Tópicos de Lógica fuzzy e Biomatemática" (BARROS e BASSANEZI, p. 252-253, 2010).

É importante destacar que Boeno (2018) concluiu em seu trabalho que o modelo logístico de Verhulst é o mais indicado para representar o processo de fermentação de pães artesanais. Dessa forma, a Teoria dos Conjuntos Fuzzy será aplicada nesse modelo com os dados experimentais e resultados presentes no texto de Boeno (2018).

Para tanto, são apresentados no Capítulo 1 os conceitos de Modelagem Matemática e de modelo matemático. No Capítulo 2, apresenta-se a teoria envolvendo conjuntos fuzzy utilizada na construção do modelo fuzzy de fermentação de pães artesanais. No Capítulo 3, os dados experimentais utilizados para a construção do modelo fuzzy e a construção desse modelo são apresentados. No Capítulo 4, finalmente, são feitas as discussões com base nos resultados obtidos.

1 MODELAGEM MATEMÁTICA

A Matemática tem sido usada em diversas Ciências, como na Física, na Biologia, na Economia, na Química, na Estatística, entre outras, e sua aplicação não está restrita apenas à construção de tabelas, gráficos e cálculos de porcentagem. Ao contrário, ela vem sendo utilizada como uma base sólida de conhecimento, capaz de sustentar e/ou subsidiar afirmações feitas em diferentes pesquisas científicas.

Nas pesquisas científicas, a matemática passou a funcionar como agente unificador de um mundo racionalizado, sendo o instrumento indispensável para a formulação das teorias fenomenológicas fundamentais, devido, principalmente, ao seu poder de síntese e generalização. (BASSANEZI, 2006, p. 19)

Neste ponto, a Modelagem Matemática apresenta-se como uma importante área de pesquisa, pois, por meio dela, é possível traduzir fenômenos e problemas do mundo real para linguagem matemática, servindo como uma interlocutora entre o problema real e o fenômeno ao qual ela modela.

É importante destacar que a Modelagem Matemática “[...] pode ser tomada tanto como um método científico de pesquisa quanto como uma estratégia de ensino-aprendizagem [...]” (BASSANEZI, 2006, p. 16).

Neste trabalho, o interesse está em utilizar a Modelagem Matemática como método de pesquisa, a qual pode ser descrita como a “[...] arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real” (BASSANEZI, 2006, p. 16). Sendo assim, a Modelagem Matemática é utilizada para transformar fenômenos do mundo real em equações matemáticas, estas, por sua vez, descrevem o fenômeno estudado por meio de modelos.

A palavra “modelo” é usada em diferentes áreas do conhecimento humano, por exemplo, na moda, nas ciências exatas e na arte, apresentando diferentes significados dentro de cada uma dessas áreas.

Neste texto, modelo teórico será tratado segundo Bassanezi (2006), como aquele vinculado a uma teoria geral existente. E modelo como:

[...] representação de um objeto ou fato concreto sendo suas características predominantes a estabilidade e a homogeneidade das variáveis. [...] Ele deve conter as mesmas características que o sistema real, isto é, deve apresentar as mesmas variáveis essenciais existentes no fenômeno e suas relações são obtidas através de hipóteses (abstratas) ou de experimentos (reais). (BASSANEZI, 2006, p. 19-20)

Tal definição sobre modelo, em nenhum momento, cita que ele precisa ser obrigatoriamente matemático, mas, então, por que utilizar um modelo matemático? Existe alguma vantagem em seu uso? As respostas a esses questionamentos são dadas por Bassanezi ao citar que:

O objetivo fundamental do “uso” de matemática é de fato extrair a parte essencial da situação-problema e formalizá-la em um contexto abstrato onde o pensamento possa ser absorvido com uma extraordinária economia de linguagem. Desta forma, a matemática pode ser vista como um instrumento intelectual capaz de sintetizar ideias concebidas em situações empíricas que estão quase sempre camufladas num emaranhado de variáveis de menor importância. (BASSANEZI, 2006, p. 18)

Nota-se, portanto, que a utilização de modelos matemáticos auxilia na sintetização e generalização dos objetos/acontecimentos que estão sendo estudados.

É importante destacar que o modelo matemático não é o fenômeno em si, mas, sim, uma aproximação dele, capaz de carregar consigo as principais características observadas para a ocorrência do fenômeno. Por exemplo, se uma característica importante do fenômeno observado é o crescimento, então o modelo desenvolvido deverá, no mínimo, descrever algo crescente.

Sendo o modelo uma aproximação da realidade, ele não precisa carregar todas as características e relações que o fenômeno possui, mas deve carregar as características essenciais para uma boa representação do que está sendo estudado no fenômeno. Por exemplo, em um modelo sobre o estudo da quantidade de veículos em um engarrafamento, não é viável considerar o peso do veículo, já que isso não é uma informação essencial para o estudo. Porém, se o objetivo do estudo for outro, como, por exemplo, a relação entre o peso do veículo e o desgaste do asfalto, então essa informação se torna relevante e deverá ser considerada.

Assim, a missão do pesquisador, ao construir um modelo matemático, é procurar “[...] resolver o problema da maneira mais simples possível, e não complicá-lo desnecessariamente” (BASSANEZI, 2006, p. 26). Além disso, para Bassanezi (2006), os fenômenos são, geralmente, muito complexos se forem considerados em todos os detalhes.

Portanto, a seleção de variáveis/características é essencial para a criação do modelo matemático. Uma vez que essa escolha está diretamente ligada à validade do modelo e também à sua característica de síntese, a Modelagem Matemática se torna

um processo dinâmico, utilizado para obtenção de modelos matemáticos (BASSANEZI, 2006, p. 24).

Para que os conceitos de Modelagem Matemática e de modelo matemático fiquem mais claros, considere a seguinte analogia com um fotógrafo, uma câmera fotográfica, uma paisagem e uma fotografia.

O matemático seria o fotógrafo buscando capturar a melhor foto de uma paisagem, isto é, uma fotografia que traduza mais fielmente o que está acontecendo naquele local, quando a foto for tirada. Ele sabe escolher qual é o melhor ângulo, quadro e lugar para fotografar. A paisagem seria o fenômeno real, o que, de fato, acontece com a participação de todas as variáveis. A câmera representaria a modelagem, pois, através dela, o fotógrafo é capaz de observar a realidade e verificar quais aspectos da paisagem são os mais relevantes, isto é, selecionar as variáveis que têm mais relevância dentro do seu plano de estudo. A fotografia seria o modelo, uma vez que traz uma aproximação da realidade. Vale ressaltar que essa fotografia pode ser editada; o mesmo acontece com o modelo, ele não é fixo, pode ser sempre revisto e recriado dependendo das características do problema de estudo. Vide ilustração na Figura 1.1.

Figura 1.1: Analogia entre Modelagem Matemática e fotografia



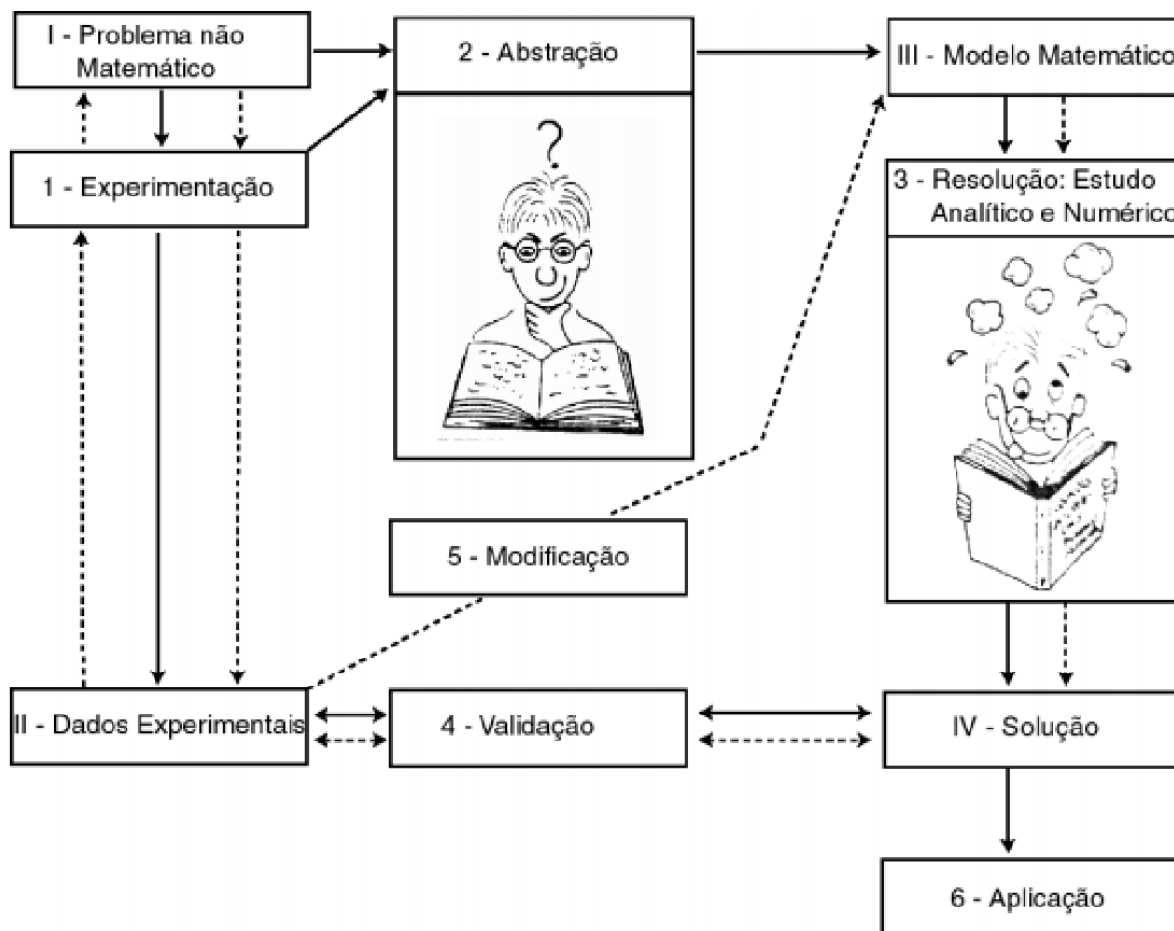
Fonte: Autoria própria.²

Uma vez definidos os conceitos de modelo e modelagem, apresentar-se-á como esse processo acontece.

A Figura 1.2 é apresentado um fluxograma representando um processo de Modelagem Matemática, no qual as setas contínuas indicam a primeira aproximação, e o dinamismo do processo é representado pelas setas pontilhadas.

² Ilustração produzida por Heitor Aquino.

Figura 1.2: O processo de Modelagem Matemática.



Fonte: Bassanezi (2007, p. 27).

Inicialmente, tem-se um problema não matemático que se deseja resolver. A partir daí, é necessário observá-lo e, se possível, reproduzi-lo em um laboratório para que se possa criar diferentes faces para o fenômeno ou até mesmo ter controle sobre algumas variáveis, conduzindo à etapa de experimentação.

Após se obter os dados experimentais, é necessário extrair as informações que estão presentes nestes dados como, por exemplo, as características sobre seu comportamento, isto é, verificar a existência de tendências como crescimento/decrescimento ou qualquer outra característica que auxilie na construção do modelo do fenômeno analisado, o que é feito na fase da abstração. Em seguida, o modelo matemático é desenvolvido e, então, deve ser resolvido.

Terminada a etapa de resolução, é necessário validar o modelo, para determinar se o mesmo pode ser aplicado ou necessita ser modificado. Caso o modelo não seja validado, é necessário modificá-lo; do contrário, já pode ser feita a aplicação do mesmo, que é a última etapa do processo de modelagem.

As etapas do processo de Modelagem Matemática, segundo Bassanezi (2006), são descritas com mais detalhes a seguir.

1- Experimentação

É a fase de obtenção dos dados. Geralmente, ocorre em um laboratório. O papel do matemático, nessa etapa, é facilitar o cálculo dos futuros parâmetros, ao utilizar métodos estatísticos. É importante destacar que a metodologia utilizada para a obtenção dos dados é escolhida de acordo com o objeto de pesquisa, isto é, não é fixa.

2- Abstração

a. Seleção das variáveis

É nesta fase que ocorre o processo de seleção e separação das variáveis do sistema. É importante que essas estejam bem definidas para que fique claro com o que se está trabalhando. Aqui, também, ocorre a distinção entre as variáveis de estado (que descrevem a evolução do sistema) e as de controle (que agem sobre o sistema).

b. Problematização ou formulação dos problemas teóricos em uma linguagem própria da área em que se está trabalhando

É, nesta etapa, que se descreve o problema de pesquisa, ou seja, se especifica e se indica o que realmente se pretende resolver. É importante tomar cuidado com a formulação do problema, para que ele não fique aberto e a pesquisa se torne mais abrangente do que deveria ser.

c. Formulação de hipóteses

Nesta etapa, são criadas formulações que vão guiar a investigação. A geração das hipóteses acontece de vários modos: observação dos fatos, comparação com outros estudos, dedução lógica, experiência pessoal

do modelador, observação de casos singulares da própria teoria, analogia de sistemas etc.

d. Simplificação

Esta etapa é importante, pois é possível chegar a problemas incompreensíveis ou sem solução, e nesse momento, deve-se voltar e simplificar o problema, tomando cuidado para que o modelo não perca a sua capacidade de representar o fenômeno e, ao mesmo tempo, consiga ser algo que possa facilitar as análises/previsões que o pesquisador deseja obter ao utilizá-lo.

3- Resolução

É, nesta etapa, que se resolve o modelo desenvolvido. É importante destacar que a sua resolução está sempre ligada ao grau de complexidade de sua formulação e pode se dar por métodos computacionais. A resolução é papel do matemático e pode ser desvinculada do problema real.

4- Validação

É nessa etapa que ocorre o processo de aceitar ou não o modelo. Este teste é feito por meio da comparação entre os dados empíricos, hipóteses, soluções e previsões do modelo. O grau de aproximação entre o modelo e o sistema real será fundamental na aceitação ou não do mesmo. A aceitação ou não do modelo está mais ligada aos objetivos e recursos do modelador do que à comparação entre os dados. É nesta etapa que se verifica a necessidade de aperfeiçoamento dos modelos.

5- Modificação

É, nesta etapa, que ocorre a modificação dos modelos; para isso, é necessário verificar se alguma hipótese é falsa ou simplifica demais o fenômeno, se os dados experimentais foram obtidos de maneira incorreta ou são insuficientes, assim como as hipóteses; se existem variáveis importantes para o estudo do fenômeno, que não foram consideradas; e, também, se não ocorreu algum erro no desenvolvimento matemático do modelo. Resumidamente, é, aqui, que se reformulam os modelos caso eles não sejam considerados válidos.

6- Aplicação

Nesta etapa, como o próprio nome já diz, acontece a aplicação do modelo matemático. O objetivo da aplicação está diretamente ligado à pesquisa, isto é, se inicialmente o intuito de criação do modelo era prever o comportamento do fenômeno, o modelo será usado para este fim.

Note que o processo de Modelagem Matemática é dinâmico, pois conforme novas teorias vão surgindo o modelo dito “bom” pode deixar de ser. Segundo Bassanezi (2006), um bom modelo é aquele que tem capacidade de fazer previsão de novos fatos ou relações insuspeitas, de tal forma que o usuário, especialista na área onde se executou a modelagem, o considera como tal, tendo as qualidades de ser suficientemente simples e representar, razoavelmente, a situação analisada. Além disso, “[...] a aplicabilidade de um modelo depende substancialmente do contexto em que ele é desenvolvido - um modelo pode ser “bom” para um biólogo e não para o matemático e vice-versa” (BASSANEZI, 2006, p. 31).

O dinamismo dos modelos é fundamental para sua evolução, conforme pode ser visto no histórico de alguns modelos matemáticos clássicos. Caso o leitor tenha interesse nesse assunto, sugere-se a leitura das obras Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática (Bassanezi, 2006), Modelagem Matemática (Bassanezi, 2013) e Sistemas Dinâmicos Fuzzy: Modelagens Alternativas Para Sistemas Biológicos (Ceconello, Bassanezi e Silva, 2010).

2 TEORIA DOS CONJUNTOS FUZZY

A Teoria dos Conjuntos Fuzzy foi desenvolvida em meados dos anos 60 por Lofti Asker Zadeh, com o objetivo de dar um tratamento matemático a termos linguísticos subjetivos por meio do estabelecimento de graus de pertinência de elementos a um conjunto, permitindo um tratamento matemático para fenômenos cujas variáveis e parâmetros envolvem subjetividades e/ou incertezas.

“As incertezas das quais a lógica fuzzy trata são do tipo monotônicas, no sentido que quanto menos incertas forem as premissas, menos incertas serão as conclusões” (BARROS e BASSANEZI, 2010, p. 80).

Ainda, segundo Barros e Bassanezi (2010), é possível pensar que para conjuntos clássicos, essas incertezas tendem a zero. Com isso, percebe-se que esse tipo de conjunto é um caso particular dos conjuntos fuzzy.

Uma vez que a Teoria dos Conjuntos Fuzzy trabalha com incertezas e subjetividades, entender de que forma a Matemática poderia ser utilizada para estudar fenômenos ou objetos que possuem essas características se torna essencial.

As próximas seções deste capítulo apresentam os conceitos preliminares a respeito da Teoria dos Conjuntos Fuzzy, que ajudarão a responder tal questionamento.

As definições e os teoremas encontrados neste capítulo foram baseados nos livros “Tópicos de Lógica Fuzzy e Biomatemática” (Barros e Bassanezi, 2010), “Teoria dos Conjuntos Fuzzy com Aplicações” (Jafelice, Barros e Bassanezi, 2012) e “Sistemas Dinâmicos Fuzzy - Modelagens Alternativas para Sistemas Biológicos” (Bassanezi, Ceconello e Silva, 2010), e na dissertação de mestrado “Um estudo sobre o espalhamento da dengue usando equações diferenciais parciais e lógica fuzzy” (Gomes, 2009).

2.1 SUBCONJUNTOS FUZZY

Nesta seção, inicialmente, será apresentado o conceito de subconjuntos fuzzy, que é utilizado tanto nas aplicações, quanto nos conceitos teóricos. Em seguida, nas subseções, serão abordadas as possíveis representações de um conjunto fuzzy e as definições de suporte e α -nível.

“Entre as características próprias da lógica clássica costuma-se colocar a obediência a alguns princípios lógicos fundamentais [...] denominados princípios lógicos clássicos” (MORTARI, 2001, p. 352).

Segundo Mortari (2001), os princípios e suas definições são os quatro listados a seguir:

1. Princípio da identidade: Se uma proposição é verdadeira então ela é verdadeira.
2. Princípio da não-contradição: Dada uma proposição e sua negação, pelo menos uma delas é falsa.
3. Princípio do terceiro excluído: Dada uma proposição e sua negação, pelo menos uma delas é verdadeira.
4. Princípio da bivalência: Toda proposição é verdadeira ou falsa.

Seguindo esses princípios, é possível construir uma função capaz de representar os conjuntos clássicos, a qual é dada na definição a seguir.

Definição 2.1: Seja U um conjunto clássico e A um subconjunto de U . A função característica de A é dada por:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A, \\ 0 & \text{se } x \notin A, \end{cases}$$

sendo U o domínio da função, e a imagem está contida no conjunto $\{0; 1\}$.

Note que a função avalia se os elementos de U pertencem ou não a A . Se a imagem do elemento for 1, significa que ele pertence a A ; se for 0, significa que ele não pertence.

Exemplo 2.1: Sejam $U = \{2; 3; 5; 7; 11; \pi\}$ e $A = \{2; 5\}$. Sendo $\chi_A(x)$ a função característica de A , segue que:

$$\chi_A(2) = \chi_A(5) = 1,$$

$$\chi_A(3) = \chi_A(7) = \chi_A(11) = \chi_A(\pi) = 0.$$

Isto é, 2 e 5 são elementos de A , enquanto 3, 7, 11 e π não o são.

Por outro lado, em problemas envolvendo fenômenos reais, existe a possibilidade de elementos pertencerem, parcialmente, a um determinado conjunto, por exemplo, um copo de suco. Esse copo não estando totalmente cheio e nem totalmente vazio, não atende aos três últimos princípios lógicos clássicos. Além disso, pode-se dizer que o copo está parcialmente cheio (ou vazio). Dessa forma, ele não pertence totalmente ao conjunto dos copos cheios (ou vazios) e, assim, não se pode utilizar a Definição 2.1.

Uma possível abordagem para este problema consiste em estender o contradomínio da função característica, de modo que englobe mais casos de pertinência.

Definição 2.2: Seja U um conjunto clássico; um subconjunto fuzzy F de U é caracterizado por uma função

$$\varphi_F: U \rightarrow [0, 1],$$

pré-fixada, chamada função de pertinência do subconjunto fuzzy F .

A imagem de cada elemento de U representa o quanto esse elemento pertence ao conjunto F (grau de pertinência); $\varphi_F(x) = 1$ e $\varphi_F(x) = 0$ representam, respectivamente, a pertinência e a não pertinência completa de x ao conjunto F .

Essa função indica o quanto um elemento do domínio U pertence ao conjunto F , e é escolhida dentro das características e/ou do contexto que o pesquisador deseja analisar no fenômeno estudado.

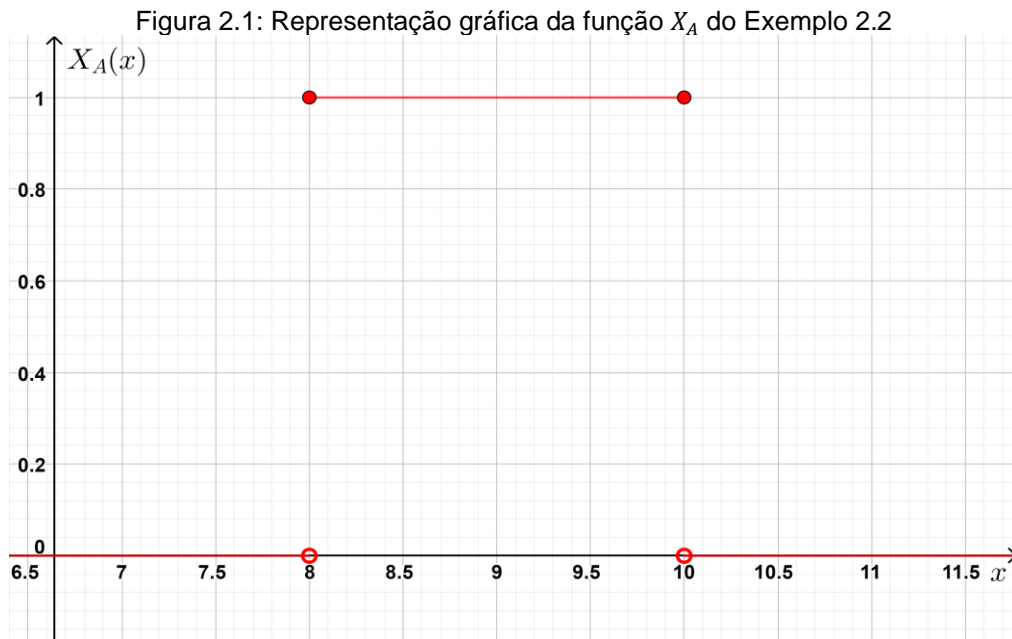
Neste trabalho, ora será dito conjunto fuzzy, ora será dito subconjunto fuzzy. Deixa-se claro ao leitor que, sem perda de generalidade, ambos os termos se referem a subconjunto fuzzy.

Exemplo 2.2: Suponha que se deseja representar os números reais próximos a 9 com conjuntos numéricos. Nesse caso, pode-se usar tanto a teoria de conjuntos clássica quanto a fuzzy. Ao utilizar a primeira, pode-se escolher como resposta, por exemplo, o intervalo $[8,10]$. Porém, se esse fosse o raciocínio escolhido todo elemento do

intervalo estaria igualmente próximo de 9, isto significa que 8 e 8,9 são igualmente próximos a 9, o que não é verdade. A representação matemática para isso é:

$$X_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [8,10] \\ 0 & \text{se } x \notin [8,10] \end{cases}$$

cuja representação gráfica pode ser visualizada na Figura 2.1.



Fonte: Autoria própria.

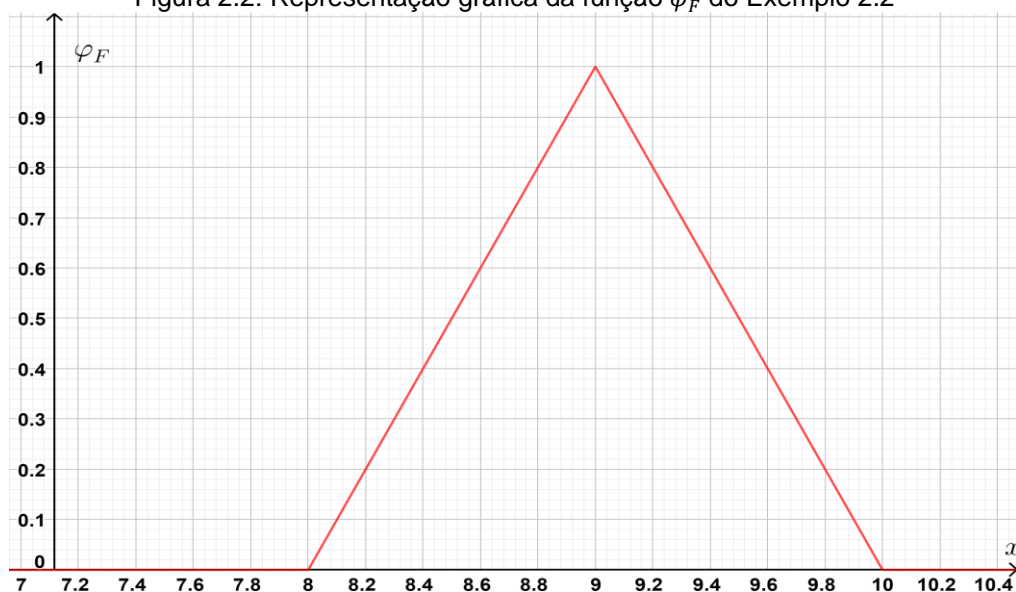
Observe que a transição entre a pertinência e a não pertinência de um elemento ao conjunto formado pelos elementos próximos a 9 é abrupta, isto é, existem degraus no gráfico.

Pensando em evitar essa transição abrupta, a Teoria dos Conjuntos Fuzzy pode ser utilizada para construir outros tipos de funções de pertinência, como, por exemplo:

$$\varphi_F(x) = \begin{cases} x - 8 & \text{se } 8 \leq x \leq 9 \\ -x + 10 & \text{se } 9 < x \leq 10, \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

cuja representação gráfica pode ser observada na Figura 2.2.

Figura 2.2: Representação gráfica da função φ_F do Exemplo 2.2



Fonte: Autoria própria.

Neste caso, a partir do valor 8, conforme os valores aproximam-se de 9, pela esquerda, seu o grau de pertinência a F aumenta, atingindo o máximo no próprio 9. O raciocínio é análogo ao se aproximar de 9, a partir de 10, pela direita. Por exemplo, 8,5 é próximo de 9 com grau de pertinência 0,5.

Sendo assim, nota-se que a representação que utiliza a Teoria dos Conjuntos Fuzzy é capaz de adicionar informações como os diferentes graus de proximidade a 9; que não são consideradas quando se utiliza a teoria de conjuntos clássica. Logo, se essas características forem relevantes para análise do fenômeno, a Teoria dos Conjuntos Fuzzy é mais indicada do que a clássica.

Note que a Definição 2.2 engloba a Definição 2.1, o que torna os conjuntos clássicos (crisp) casos particulares dos subconjuntos fuzzy.

Além disso, é possível relacionar os subconjuntos fuzzy com um conjunto clássico de pares ordenados. Para isso, considere um subconjunto F de U , tal que:

$$F = \{(x, \varphi_F(x)), x \in U\},$$

no qual, a abscissa é um elemento de U e a ordenada representa o grau de pertinência da abscissa ao conjunto F .

2.1.1 Representações de um subconjunto fuzzy

Segundo Jafelice, Barros e Bassanezi (2012), as representações das funções que definem um conjunto fuzzy podem ser feitas em forma de tabelas, listas, gráficos ou representação analítica.

I. Representação em Tabela

Essa representação consiste em listar todos os elementos do conjunto em uma coluna da tabela e os seus graus de pertinência em outra coluna.

Exemplo 2.3: Seja U um conjunto clássico que representa os clientes que foram a um determinado restaurante em uma quarta-feira das 14h às 15h. Considere F , subconjunto fuzzy de U , como o conjunto dos clientes que gostam do restaurante. É razoável que alguns gostem mais e outros menos do restaurante. A representação de F pode ser vista na Tabela 2.1.

Tabela 2.1: Representação na forma de tabela do subconjunto fuzzy F

Cliente	Grau de pertinência a F
Naruto	0,8
Kakashi	0,3
Itachi	0,4
Tsunade	0,1

Fonte: Autoria própria.

Assim, Naruto gosta do restaurante com grau de pertinência 0,8, enquanto Tsunade gosta com grau de pertinência 0,1.

II. Representação em Lista

Essa representação é semelhante a anterior, porém não utiliza uma tabela para dispor os dados. Nela, os elementos e os graus de pertinência são dispostos em linha segundo a fórmula a seguir:

$$F = \sum_{i=1}^n \varphi_F(x_i) / x_i ,$$

em que o símbolo “/” não significa divisão. Ele serve como uma forma de associar o elemento x do conjunto universo em questão com o seu respectivo grau de pertinência $\varphi_F(x)$ ao conjunto F . O símbolo de “ Σ ” também não significa somatório, é utilizado para conectar os elementos do conjunto.

Exemplo 2.4: A representação em forma de lista dos dados da Tabela 2.1 é dada por:

$$F = 0,8/Naruto + 0,3/Kakashi + 0,4/Itachi + 0,1/Tsunade .$$

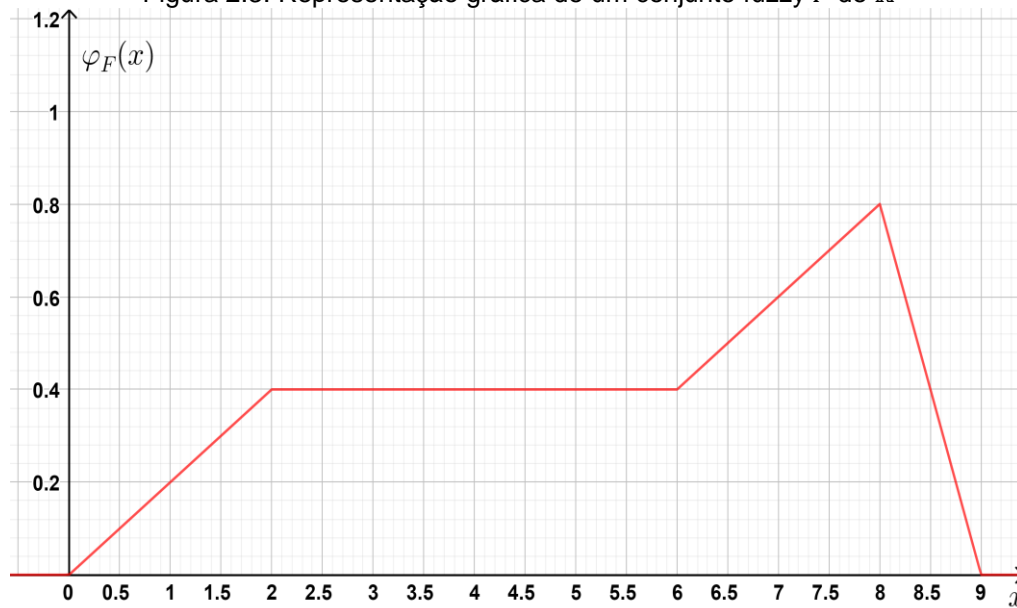
Vale ressaltar que as duas formas de representação de um conjunto fuzzy apresentadas até aqui só podem ser usadas em conjuntos finitos.

III. Representação Gráfica

“A interpretação gráfica é a mais usada na literatura fuzzy por ter uma interpretação mais intuitiva” (JAFELICE, BARROS e BASSANEZI, 2012, p. 16). No caso da representação em duas dimensões, o eixo horizontal representa os elementos do conjunto universo (informação a ser modelada) e o eixo vertical representa o grau de pertinência de cada um desses elementos ao subconjunto fuzzy, dentro do intervalo $[0, 1]$.

Exemplo 2.5: Na Figura 2.3 está a representação gráfica de um subconjunto fuzzy F de \mathbb{R} . Ele indica qual é o grau de pertinência de cada número real a F .

Figura 2.3: Representação gráfica de um conjunto fuzzy F de \mathbb{R}



Fonte: Autoria própria.

Assim, o elemento 3 tem grau de pertinência 0,4, enquanto o elemento 8 tem grau de pertinência 0,8.

IV. Representação Analítica

Essa forma também é muito utilizada e consiste em escrever a equação algébrica da função de pertinência do subconjunto fuzzy em questão.

Exemplo 2.6: A representação analítica do subconjunto fuzzy F cuja representação gráfica é apresentada no exemplo 2.5 é:

$$\varphi_F(x) = \begin{cases} 0,2x & \text{se } 0 < x < 2 \\ 0,4 & \text{se } 2 \leq x \leq 6 \\ 0,2x - 0,8 & \text{se } 6 < x \leq 8 \\ -0,8x + 7,2 & \text{se } 8 < x \leq 9 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

2.1.2 Suporte e α -níveis de um subconjunto fuzzy

Nesta subseção, são apresentados os conceitos referentes a suporte e α -nível, que servem como base para realizar cálculos, utilizando a Teoria dos Conjuntos Fuzzy

, e, também, para definir conceitos posteriores, como, por exemplo, o de números fuzzy.

Definição 2.3: O suporte do subconjunto fuzzy F de U é definido por:

$$\text{supp}(F) = \{x \in U; \varphi_F(x) > 0\},$$

ou seja, o suporte de um subconjunto fuzzy F de U são todos os elementos de U que têm grau de pertinência diferente de zero em F .

Exemplo 2.7: Seja F um subconjunto fuzzy de U dado por:

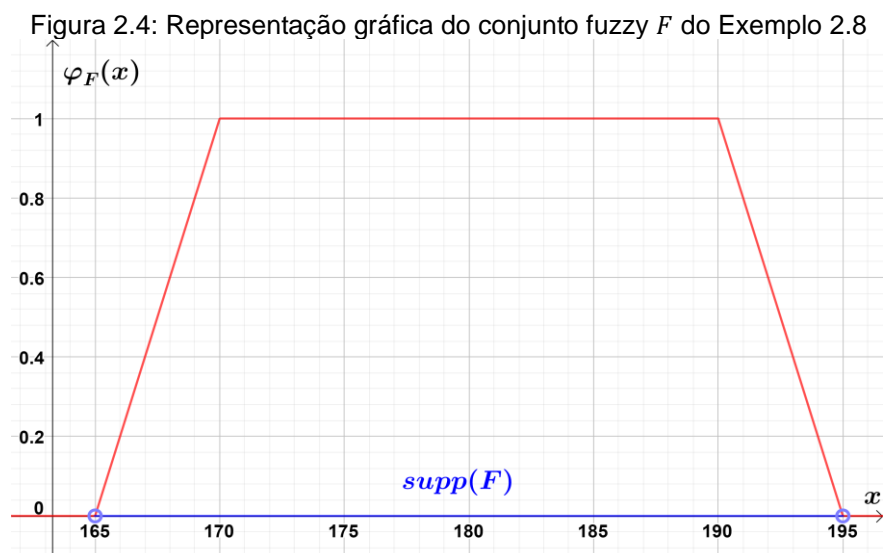
$$F = 0,7/4 + 0,3/5 + 0,4/3 + 0,9/0 + 0/15 + 0,1/7.$$

Neste caso, $\text{supp}(F) = \{0; 3; 4; 5; 7\}$.

Exemplo 2.8: Suponha que a temperatura média de um forno de cozinha a gás é dada pelo subconjunto fuzzy F de \mathbb{R} com função de pertinência:

$$\varphi_F(x) = \begin{cases} \frac{x - 165}{5} & \text{se } 165 \leq x < 170 \\ 1 & \text{se } 170 \leq x \leq 190 \\ \frac{195 - x}{5} & \text{se } 190 < x \leq 195 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

cuja representação gráfica é apresentada na Figura 2.4.



Fonte: Autoria própria.

Para calcular o $\text{supp}(F)$ basta observar em quais pontos o grau de pertinência dos elementos é maior do que zero, o que ocorre no intervalo $]165, 195[$. Deste modo, tem-se que $\text{supp}(F) =]165, 195[$.

Definição 2.4³: Seja F um subconjunto fuzzy de U e $\alpha \in [0, 1]$. O α -nível de F é o subconjunto clássico de U definido por

$$[F]^\alpha = \{x \in U: \varphi_F(x) \geq \alpha\}, \forall \alpha \in]0, 1].$$

O nível zero do subconjunto fuzzy F é definido como o fecho do suporte de F , ou seja, é menor subconjunto clássico fechado de U que contém o suporte de F ,

$$[F]^0 = \overline{\text{supp}(F)}.$$

Exemplo 2.9: Considerando o Exemplo 2.7, tem-se:

a) $[F]^{0,1} = \{0; 3; 4; 5; 7\}$

Neste caso, o conjunto é formado por todos elementos do conjunto universo $U = \{0; 3; 4; 5; 7; 15\}$ que possuem grau de pertinência a F maior ou igual a 0,1.

b) $[F]^{0,4} = \{0; 3; 4\}$

Neste caso, o interesse está nos elementos de U cujo grau de pertinência a F seja maior ou igual a 0,4.

c) $[F]^0 = \overline{\text{supp}(F)} = \text{supp}(F) = \{0; 3; 4; 5; 7\}$

Diferente dos itens anteriores, para este conjunto deve-se considerar os elementos que estão no fecho do suporte de F , ou seja, o menor conjunto fechado que contém o suporte de F . No caso, como $\text{supp}(F)$ é fechado, por definição, tem-se que ele e o seu fecho são iguais.

³ Note que a definição 2.4 não admite $\varphi_F(x) > 1$, pois de acordo com a definição 2.2 (subconjunto fuzzy) a imagem de uma função de pertinência não assume valores maiores que 1.

Exemplo 2.10: Considerando o Exemplo 2.8, tem-se:

a) $[F]^{0,4} = [167,193]$

Observando sua representação gráfica, nota-se que o grau de pertinência 0,4 se encontra nos intervalos $[165, 170[$ e $]190, 195]$, respectivamente, trechos crescente e decrescente de $\varphi_F(x)$. Além disso, o intervalo $[170, 190]$ também fará parte do 0,4-nível de F , pois todo elemento pertencente a ele tem grau de pertinência igual a 1, ou seja, maior que 0,4.

Os trechos crescente e decrescente de $\varphi_F(x)$, são dados respectivamente por $\varphi_{F_1}(x) = \frac{x-165}{5}$ e $\varphi_{F_2}(x) = \frac{195-x}{5}$, e determinar o 0,4-nível de F consiste em encontrar os valores de x , nas duas expressões, que são maiores ou iguais a 0,4.

Para $\varphi_{F_1}(x) = \frac{x-165}{5}$, tem-se:

$$\frac{x - 165}{5} \geq 0,4 \Leftrightarrow x \geq 167,$$

e, para $\varphi_{F_2}(x) = \frac{195-x}{5}$, tem-se:

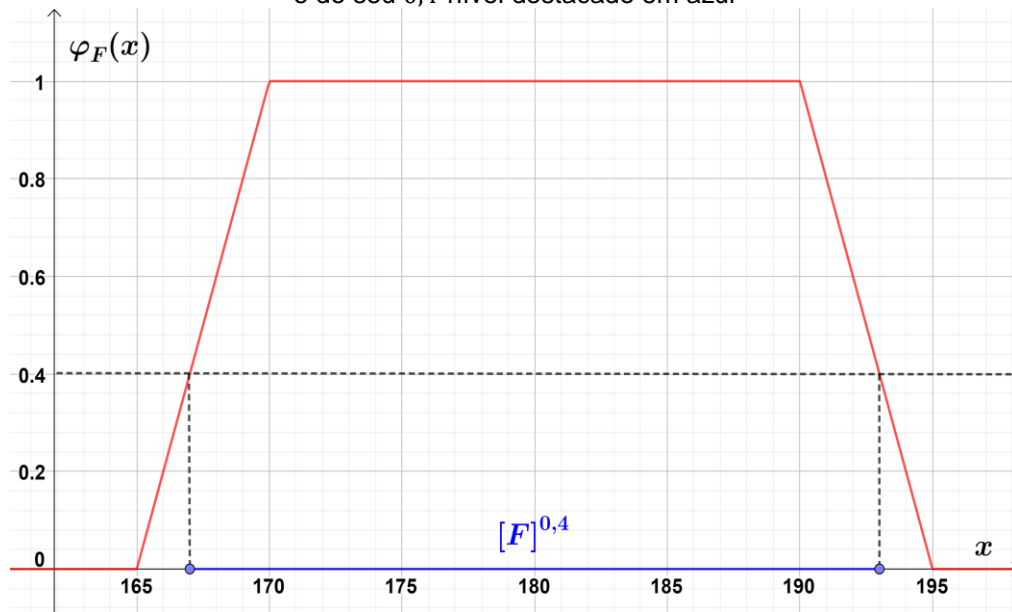
$$\frac{195 - x}{5} \geq 0,4 \Leftrightarrow -x \geq -193 \Leftrightarrow x \leq 193.$$

Dessa forma, organizando as informações, obtém-se:

$$[F]^{0,4} = [167,193].$$

A Figura 2.5 representa no gráfico de $\varphi_F(x)$ o 0,4-nível de F .

Figura 2.5: Representação gráfica do número fuzzy do Exemplo 2.8 e do seu 0,4-nível destacado em azul



Fonte: Autoria própria.

b) $[F]^0 = \overline{\text{supp}}(F) = [165, 195]$

Para este caso, basta calcular o fecho do suporte. Do exemplo 2.8, tem-se

$$\text{supp}(F) =]165, 195[.$$

Sendo assim,

$$[F]^0 = \overline{\text{supp}}(F) = [165, 195] .$$

Na próxima seção, são apresentados o Princípio da Extensão de Zadeh e o conceito de números fuzzy.

2.2 PRINCÍPIO DA EXTENSÃO DE ZADEH E NÚMEROS FUZZY

O Princípio da Extensão de Zadeh é uma das ideias que estendem conceitos matemáticos não-fuzzy em fuzzy.

Segundo Barros e Bassanezi (2010), dada uma função $f: X \rightarrow Z$, esse princípio tem como objetivo indicar como deve ser a imagem de um subconjunto fuzzy A de X por f . É de se esperar que esse conjunto seja um subconjunto fuzzy de Z .

Definição 2.5: Sejam f uma função tal que $f: X \rightarrow Z$ e A um subconjunto fuzzy de X . A Extensão de Zadeh de f é a função \hat{f} (lê-se f chapéu) que, aplicada a A , fornece o subconjunto fuzzy $\hat{f}(A)$ de Z , cuja função de pertinência é dada por

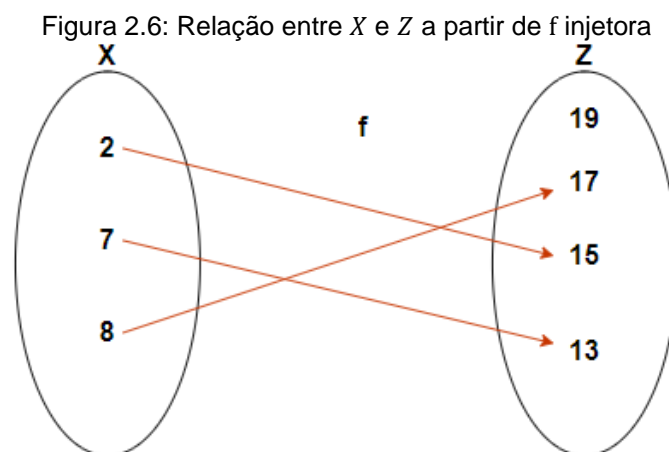
$$\varphi_{\hat{f}(A)}(z) = \begin{cases} \sup_{f^{-1}(z)} \varphi_A(x) & \text{se } f^{-1}(z) \neq \emptyset \\ 0 & \text{se } f^{-1}(z) = \emptyset \end{cases}$$

onde $f^{-1}(z) = \{x: f(x) = z\}$ denomina-se a pré-imagem de z .

Os três tópicos a seguir descrevem o Princípio da Extensão de Zadeh.

- O grau de pertinência de um valor do contradomínio Z a $\hat{f}(A)$ é definido diretamente pelo grau de pertinência de sua pré-imagem a A .
- Quando um valor do contradomínio Z é mapeado por vários do domínio X , o seu grau de pertinência a $\hat{f}(A)$ é obtido pelo supremo dos graus de pertinência dos valores da entrada a A .
- Quando um valor do contradomínio Z não é mapeado por nenhum do domínio X , o seu grau de pertinência a $\hat{f}(A)$ é zero.

Exemplo 2.11: Considere o diagrama da Figura 2.6, que ilustra como X se relaciona com Z a partir de f .



Fonte: Autoria própria

Observe que $f: X \rightarrow Z$ é injetora. Sendo assim, $f^{-1}(15) = \{2\}$, $f^{-1}(13) = \{7\}$, $f^{-1}(17) = \{8\}$, $f^{-1}(19) = \emptyset$. Note que o número de elementos das pré-imagens é no máximo um.

Considere o subconjunto fuzzy A de X representado a seguir:

$$A = 0,1/2 + 0,2/7 + 0,7/8 .$$

O que se deseja fazer, neste exemplo, é encontrar o subconjunto fuzzy $\hat{f}(A)$ de Z utilizando o princípio da extensão.

A extensão de Zadeh indica como relacionar os graus de pertinência dos elementos de X a A com os elementos de Z a $\hat{f}(A)$ a partir de uma função $f: X \rightarrow Z$.

Viu-se, no início do exemplo, que, para todo $z \in Z$ o número de elementos da sua respectiva pré-imagem é igual a zero ou um.

Para o caso do número de elementos da pré-imagem ser um, pode-se considerar que o grau de pertinência desses $z \in Z$ a $\hat{f}(A)$ será o mesmo que o do único elemento que está na sua respectiva pré-imagem a A , isto é, não há necessidade de calcular o supremo. Sendo assim, tem-se:

$$\varphi_{\hat{f}(A)}(17) = \varphi_A(8) = 0,7 ;$$

$$\varphi_{\hat{f}(A)}(15) = \varphi_A(2) = 0,1 ;$$

$$\varphi_{\hat{f}(A)}(13) = \varphi_A(7) = 0,2 .$$

Por outro lado, o número de elementos de $f^{-1}(19)$ é igual a zero, isto é, não há nenhum elemento x de X que se relaciona com 19 em Z a partir de f (vide Figura 2.6). Desse modo, é necessário indicar que o grau de pertinência de 19 a $\hat{f}(A)$ é zero, pois, caso isso não seja feito, $\varphi_{\hat{f}(A)}: Z \rightarrow [0, 1]$ não seria uma função, uma vez que existiria um elemento do domínio que não estaria relacionado com nenhum elemento do contradomínio.

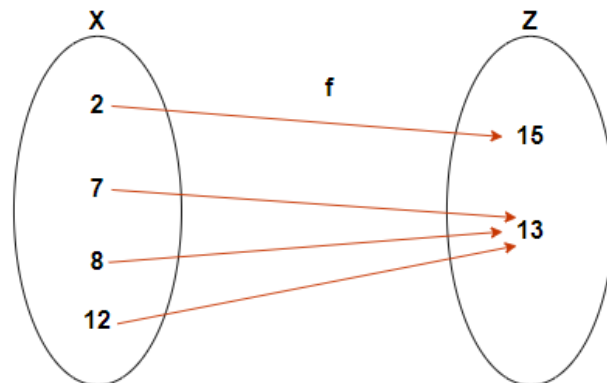
A escolha de $\varphi_{\hat{f}(A)}(19) = 0$ estabelece a não pertinência de 19 a $\hat{f}(A)$, resolvendo, assim, o problema de um elemento do domínio não ter nenhum representante na imagem, transformando $\varphi_{\hat{f}(A)}$ em uma função.

Dessa forma, o subconjunto fuzzy $\hat{f}(A)$ de Z dado após a aplicação da extensão de Zadeh no subconjunto fuzzy A de X é:

$$\hat{f}(A) = 0,1/19 + 0,7/17 + 0,1/15 + 0,2/13 .$$

Exemplo 2.12: Considere o diagrama da Figura 2.7, que representa como X se relaciona com Z a partir de f .

Figura 2.7: Relação entre X e Z a partir de f sobrejetora



Fonte: Autoria própria.

Observe que $f: X \rightarrow Z$ é sobrejetora, tal que $f^{-1}(15) = \{2\}$ e $f^{-1}(13) = \{7, 8, 12\}$. Note que o número de elementos das pré-imagens é pelo menos um.

Considere o subconjunto fuzzy A de X representado a seguir:

$$A = 0,1/2 + 0,2/7 + 0,7/8 + 0,9/12 .$$

O que se deseja fazer, neste exemplo, é encontrar o subconjunto fuzzy $\hat{f}(A)$ de Z utilizando o Princípio da Extensão de Zadeh.

Utilizando a extensão de Zadeh para relacionar os graus de pertinência dos elementos de X a A com os elementos de Z a $\hat{f}(A)$ a partir de uma função $f: X \rightarrow Z$, tem-se que para todo $z \in Z$ o número de elementos das pré-imagens é igual a 1 ou 3.

Para o caso de o número de elementos da pré-imagem ser um, pode-se considerar que o grau de pertinência desses $z \in Z$ a $\hat{f}(A)$ será o mesmo que o do único elemento que está na sua respectiva pré-imagem a A , ou seja,

$$\varphi_{\hat{f}(A)}(15) = \varphi_A(2) = 0,1 .$$

Por outro lado, o número de elementos de $f^{-1}(13)$ é igual a três, isto é, existem três elementos x de X que se relacionam com 13 em Z a partir de f (vide Figura 2.7).

Como $\varphi_{\hat{f}(A)}$ é uma função de pertinência, deve-se escolher uma única imagem para o elemento 13 do domínio (Z). Para isso, utiliza-se o conceito de supremo, que neste caso resulta em:

$$\varphi_{\hat{f}(A)}(13) = \sup\{\varphi_A(7); \varphi_A(8); \varphi_A(12)\} = \sup\{0,2; 0,7; 0,9\} = 0,9 .$$

Com isto, resolve-se o problema de um elemento do domínio ter mais que um representante no contradomínio. Sendo assim, ao aplicar a extensão de Zadeh no exemplo, obtém-se:

$$\hat{f}(A) = 0,1/15 + 0,9/13 .$$

Para o caso de $f: X \rightarrow Z$ não ser nem injetora e nem sobrejetora, tem-se os problemas encontrados nos exemplos 2.11 e 2.12. Haverá elementos no contradomínio que não possuem representante no domínio (a pré-imagem desses elementos será igual ao conjunto vazio), nesse caso basta escolher como imagem em $\varphi_{\hat{f}(A)}: Z \rightarrow [0,1]$ o valor zero. Também haverá elementos no contradomínio que terão mais de um representante no domínio de $f: X \rightarrow Z$, neste caso, utiliza-se como imagem em $\varphi_{\hat{f}(A)}: Z \rightarrow [0,1]$ o supremo do grau de pertinência dos elementos de X a A , cuja imagem por f leva no mesmo elemento do contradomínio. Para os elementos de Z , que não se encaixam nos dois problemas destacados, o grau de pertinência deles a $\hat{f}(A)$ será o mesmo que o dos elementos de X a A , que se relacionam com eles a partir da f .

Quando f for bijetora, não haverá os problemas elencados no último parágrafo e, portanto,

$$\varphi_{\hat{f}(A)}(z) = \varphi(f^{-1}(z)) .$$

Em resumo, os exemplos apresentados permitem discutir acerca da necessidade de se utilizar o conceito de supremo e $f^{-1}(z) = \emptyset$ na extensão de Zadeh. É claro que, na resolução de exercícios, não é necessário fazer toda essa discussão, já que apenas a aplicação dos conceitos é suficiente.

Teorema 2.1: Sejam $f: X \rightarrow Z$ uma função contínua e A um subconjunto fuzzy de X . Então, para todo $\alpha \in [0,1]$ vale

$$[\hat{f}(A)]^\alpha = f([A]^\alpha).$$

“Este resultado indica que os α -níveis do conjunto fuzzy, obtidos pelo Princípio da Extensão de Zadeh, coincidem com as imagens dos α -níveis pela função crisp” (BARROS e BASSANEZI, 2010, p.40).

Exemplo 2.13: Considere $U = [0, \frac{3}{2}]$, $V = [0, \frac{9}{4}]$ e a função

$$\begin{aligned} f: U &\rightarrow V \\ x &\rightarrow 5x^2 - 4x + 1 \end{aligned}$$

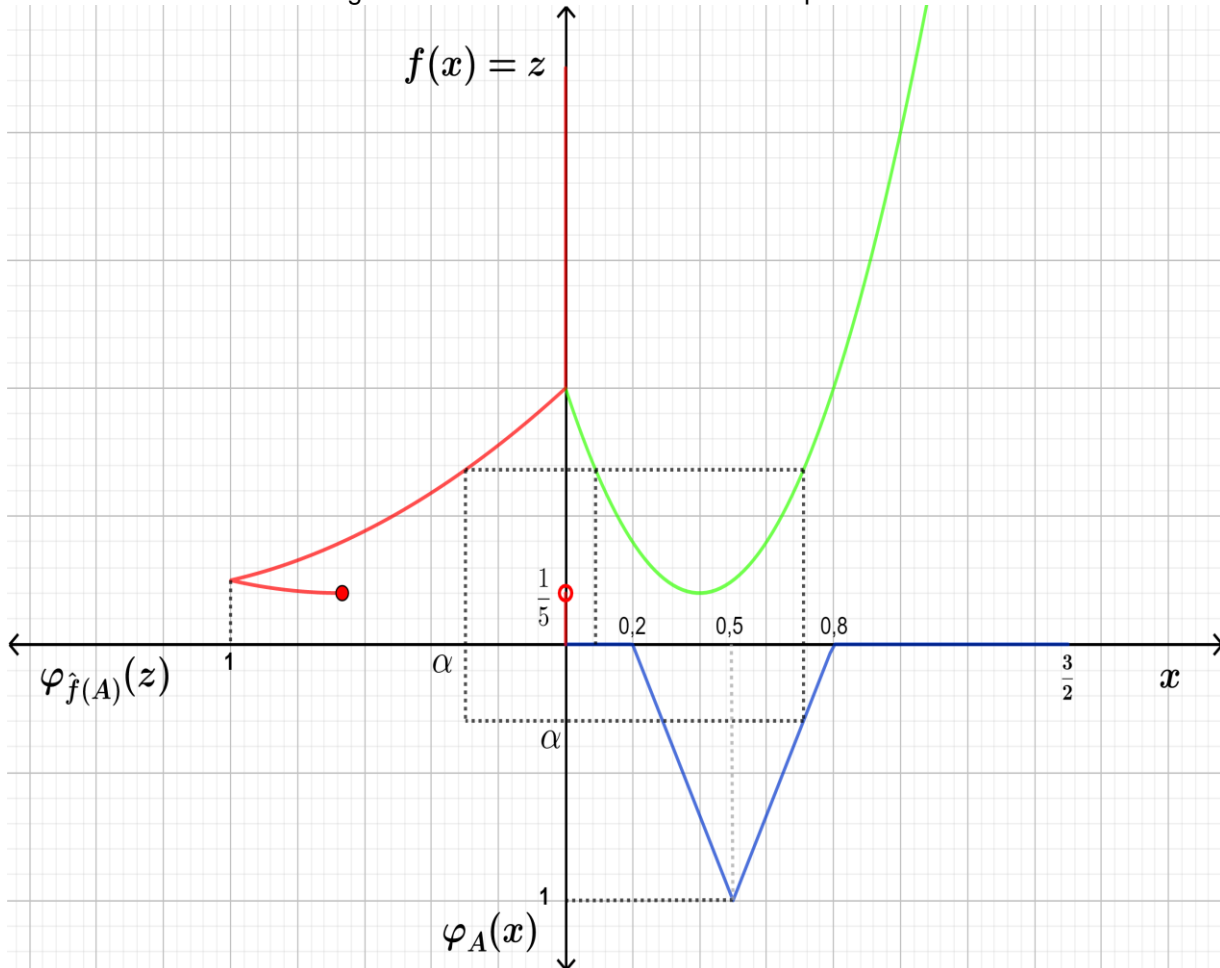
Determine a extensão de Zadeh $\hat{f}: \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$ aplicada ao conjunto fuzzy A de U dado por:

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} \frac{x - 0,2}{0,3} & \text{se } 0,2 < x \leq 0,5 \\ -x + 0,8 \\ \frac{0,3}{0,3} & \text{se } 0,5 < x \leq 0,8 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

sendo $\mathcal{F}(U)$ e $\mathcal{F}(V)$ as famílias de todos os subconjuntos fuzzy de U e V , respectivamente.

A Figura 2.8 é normalmente utilizada para representar a extensão de Zadeh. No primeiro quadrante do plano cartesiano, tem-se o gráfico da função $f: U \rightarrow V$ dada por $f(x) = 5x^2 - 4x + 1$ (destacada em verde). No segundo quadrante do plano cartesiano, tem-se a representação do gráfico da extensão de Zadeh (curva em vermelho). E, no quarto quadrante do plano cartesiano, é representada a função de pertinência do conjunto fuzzy A do enunciado (curva em azul).

Figura 2.8: Extensão de Zadeh do Exemplo 2.13



Fonte: Autoria própria.

A seguir, a solução algébrica do exemplo é realizada.

Observe que se $U = \mathbb{R}$ então A seria o número fuzzy triangular

$$A = (0,2; 0,5; 0,8).$$

Sem perda de generalidade, considere que A é esse número fuzzy triangular⁴.

Sendo assim, os seus α -níveis são dados por:

$$[A]^\alpha = [0,3\alpha + 0,2; -0,3\alpha + 0,8] = \left[\frac{3}{10}\alpha + \frac{2}{10}; -\frac{3}{10}\alpha + \frac{8}{10} \right].$$

⁴ Destaca-se que a definição de número fuzzy triangular e o cálculo de seus α -níveis serão realizados na sequência do texto.

Observe que, $\forall \alpha \in [0, 1]$, tem-se $[A]^\alpha \in U = [0, \frac{3}{2}]$. Sendo assim, pode-se considerar que os α -níveis do número fuzzy triangular são os mesmos do conjunto fuzzy do enunciado.

Como f é contínua pode-se aplicar o Teorema 2.1. Dessa forma, tem-se:

$$\begin{aligned} [\hat{f}(A)]^\alpha &= f([A]^\alpha) = f\left(\left[\frac{3}{10}\alpha + \frac{2}{10}; -\frac{3}{10}\alpha + \frac{8}{10}\right]\right) = \left[f\left(\frac{3}{10}\alpha + \frac{2}{10}\right); f\left(-\frac{3}{10}\alpha + \frac{8}{10}\right)\right] \\ &= \left[5\left(\frac{3}{10}\alpha + \frac{2}{10}\right)^2 - 4\left(\frac{3}{10}\alpha + \frac{2}{10}\right) + 1; 5\left(-\frac{3}{10}\alpha + \frac{8}{10}\right)^2 - 4\left(-\frac{3}{10}\alpha + \frac{8}{10}\right) + 1\right] \\ &= \left[\frac{9\alpha^2}{20} - \frac{12\alpha}{20} + \frac{8}{20}; \frac{9\alpha^2}{20} - \frac{24\alpha}{20} + \frac{20}{20}\right] = \frac{1}{20}[9\alpha^2 - 12\alpha + 8; 9\alpha^2 - 24\alpha + 20] \end{aligned}$$

A seguir, a partir de $[\hat{f}(A)]^\alpha$, função de pertinência do conjunto fuzzy $\hat{f}(A)$, pode-se construir V . Para isso, considere primeiramente que $z = \frac{1}{20}(9\alpha^2 - 12\alpha + 8)$, isto é, $z \in V$ é o extremo esquerdo do intervalo dos α -níveis de $\hat{f}(A)$. Lembre-se que, nesse caso, α representa o valor da imagem da função de pertinência do conjunto fuzzy $\hat{f}(A)$, isto é, os graus de pertinência de $z \in V$ a $\hat{f}(A)$:

$$20z = 9\alpha^2 - 12\alpha + 8 \Leftrightarrow 9\alpha^2 - 12\alpha + 8 - 20z = 0. \quad (2.1)$$

A equação (2.1) é uma equação de segundo grau na variável α e suas raízes são tais que:

$$\Delta = 12 * 12 - 4 * 9 * (8 - 20z) = 12^2(1 - 2 + 5z) = 12^2(-1 + 5z)$$

$$\alpha = \frac{12 \pm 12\sqrt{-1 + 5z}}{2 * 9} = \frac{2 \pm 2\sqrt{-1 + 5z}}{3} = \frac{2}{3}(1 \pm \sqrt{-1 + 5z})$$

$$S = \left\{ \alpha \in [0,1]; \alpha = \frac{2}{3}(1 + \sqrt{-1 + 5z}) \text{ ou } \alpha = \frac{2}{3}(1 - \sqrt{-1 + 5z}) \right\}$$

Procedendo de modo análogo e considerando agora que $z = \frac{1}{20}(9\alpha^2 - 24\alpha + 20)$, isto é, $z \in V$ é o extremo direito do intervalo dos α -níveis de $\hat{f}(A)$, os valores de α são dados por:

$$\alpha = \frac{2}{3}(2 \pm \sqrt{-1 + 5z}).$$

$$S = \left\{ \alpha \in [0,1]; \frac{2}{3}(2 - \sqrt{-1 + 5z}) \text{ ou } \frac{2}{3}(2 + \sqrt{-1 + 5z}) \right\}.$$

Observe que $\frac{2}{3}(2 + \sqrt{-1 + 5z})$ é maior que 1 para todo z em V , logo, das quatro funções em z para representar α , apenas três delas pertencem ao intervalo $[0, 1]$.

Para a função 1: $\alpha = \frac{2}{3}(1 + \sqrt{-1 + 5z})$, obtém-se:

$$0 \leq \frac{2}{3}(1 + \sqrt{-1 + 5z}) \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq 1 + \sqrt{-1 + 5z} \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow -1 \leq \sqrt{-1 + 5z} \leq \frac{1}{2} .$$

Adicionando a condição de existência de α tem-se:

$$0 \leq \sqrt{-1 + 5z} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 \leq |-1 + 5z| \leq \frac{1}{4} \Rightarrow 0 \leq -1 + 5z \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{5} \leq z \leq \frac{1}{4} .$$

Portanto, tem-se:

$$\alpha = \frac{2}{3}(1 + \sqrt{-1 + 5z}), \text{ quando } z \in \left[\frac{1}{5}, \frac{1}{4}\right] .$$

Com a função 2: $\alpha = \frac{2}{3}(1 - \sqrt{-1 + 5z})$, obtém-se:

$$0 \leq \frac{2}{3}(1 - \sqrt{-1 + 5z}) \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq 1 - \sqrt{-1 + 5z} \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq \sqrt{-1 + 5z} \leq 1 .$$

Adicionando a condição de existência de α tem-se:

$$0 \leq \sqrt{-1 + 5z} \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq |-1 + 5z| \leq 1 \Rightarrow 0 \leq -1 + 5z \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{5} \leq z \leq \frac{2}{5} .$$

Portanto, tem-se:

$$\alpha = \frac{2}{3}(1 - \sqrt{-1 + 5z}), \text{ quando } z \in \left[\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right] .$$

Para a função 3: $\alpha = \frac{2}{3}(2 - \sqrt{-1 + 5z})$, obtém-se:

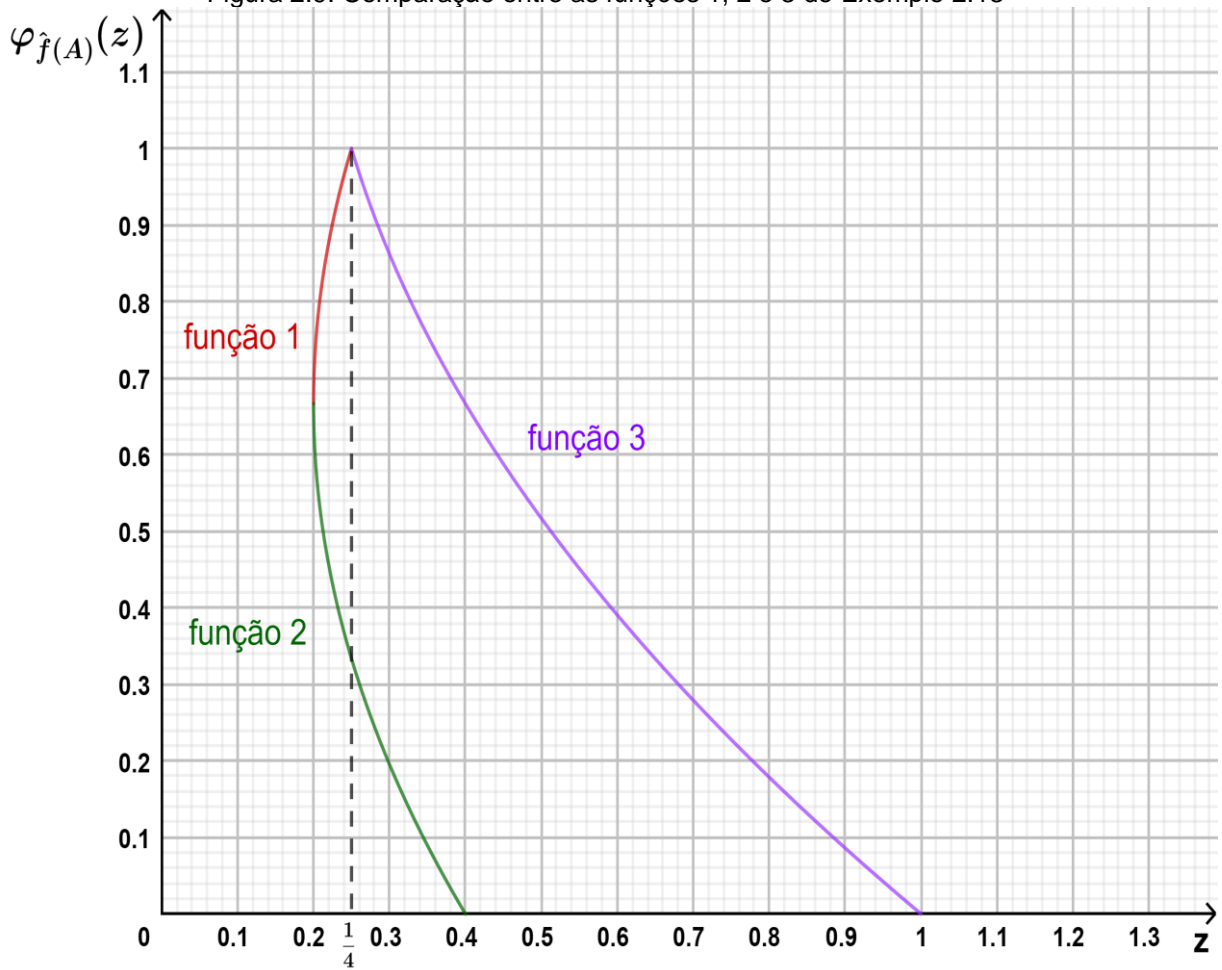
$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{2}{3}(2 - \sqrt{-1 + 5z}) \leq 1 &\Leftrightarrow 0 \leq 2 - \sqrt{-1 + 5z} \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \sqrt{-1 + 5z} \leq 2 \\ \Rightarrow \frac{1}{4} \leq |-1 + 5z| \leq 4 &\Rightarrow \frac{1}{4} \leq -1 + 5z \leq 4 \Leftrightarrow \frac{5}{4} \leq 5z \leq 5 \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq z \leq 1 \end{aligned}$$

Portanto, tem-se:

$$\alpha = \frac{2}{3}(2 - \sqrt{-1 + 5z}), \text{ quando } z \in \left[\frac{1}{4}, 1\right] .$$

Observe que, em alguns intervalos, há mais de uma função que o representa. Para resolver esse problema, considere a Figura 2.9 que exprime o gráfico de cada uma dessas funções, em seus respectivos intervalos.

Figura 2.9: Comparação entre as funções 1, 2 e 3 do Exemplo 2.13



Fonte: Autoria própria.

Note que, no intervalo $\left[\frac{1}{5}, \frac{1}{4}\right]$, função 1 \geq função 2. Sendo assim, a função 1 será escolhida para representar esse intervalo, pois a extensão de Zadeh utiliza o supremo. No intervalo $\left[\frac{1}{4}, \frac{2}{5}\right]$, função 3 \geq função 2. Portanto, a função 3 será escolhida.

Sendo assim, tem-se que a extensão de Zadeh solicitada no enunciado do exemplo é:

$$\varphi_{\hat{f}(A)}(z) = \begin{cases} \frac{2}{3}(1 + \sqrt{-1 + 5z}) & \text{se } \frac{1}{5} < z \leq \frac{1}{4} \\ \alpha = \frac{2}{3}(2 - \sqrt{-1 + 5z}) & \text{se } \frac{1}{4} < z \leq 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

em que $z \in V$.

Um conceito amplamente utilizado dentro da Teoria dos Conjuntos Fuzzy é o de número fuzzy, que corresponde a subconjuntos fuzzy com algumas características específicas.

Definição 2.6: Um subconjunto fuzzy F de U é chamado de número fuzzy quando o conjunto universo no qual φ_F está definida é o conjunto dos números reais \mathbb{R} e satisfaz às condições:

- I. Todos os α -níveis de F são não vazios;
- II. Todos os α -níveis de F são intervalos fechados de \mathbb{R} ;
- III. $\text{supp } F = \{x \in \mathbb{R} : \varphi_F(x) > 0\}$ é limitado.

Os α -níveis de um número fuzzy F podem ser representados da seguinte maneira:

$$[F]^\alpha = [a_1^\alpha, a_2^\alpha],$$

em que a_1^α e a_2^α representam, respectivamente, os extremos inferior e superior do intervalo.

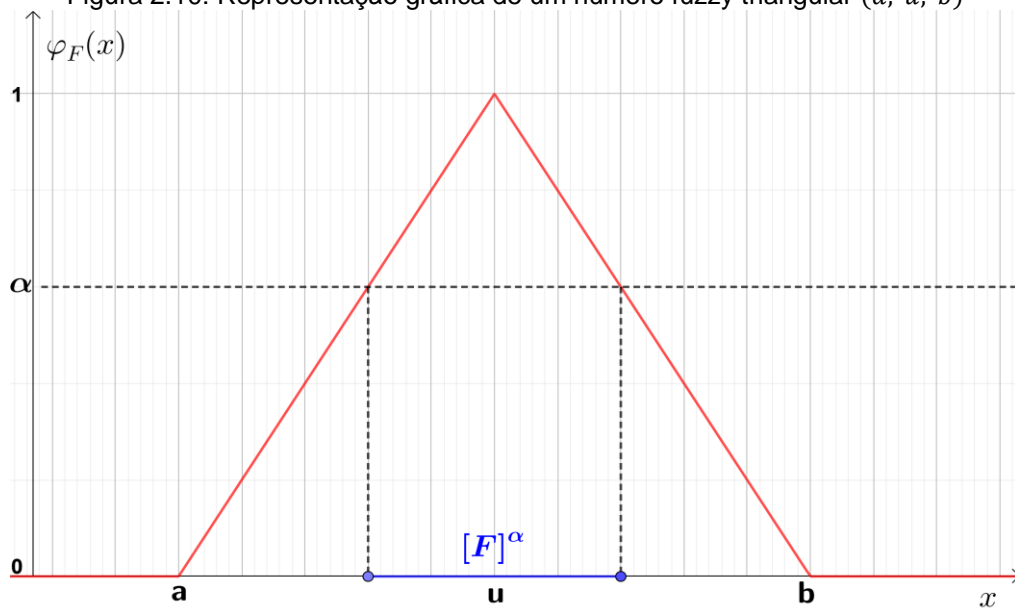
Os números fuzzy mais comuns são os triangulares e trapezoidais, definidos a seguir.

Definição 2.7: Um número fuzzy F é dito triangular se sua função de pertinência é da forma

$$\varphi_F(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{u-a}, & \text{se } a < x \leq u \\ \frac{x-b}{u-b}, & \text{se } u < x \leq b \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

O número leva esse nome, pois a representação gráfica de sua função de pertinência se assemelha à forma de um triângulo, cuja base tem, como vértices, os pontos $(a,0)$ e $(b,0)$ e o vértice fora da base tem coordenadas $(u,1)$, sendo frequentemente representado pela terna ordenada $(a;u;b)$ ou por $(a/u/b)$. Sua representação gráfica pode ser vista na Figura 2.10.

Figura 2.10: Representação gráfica de um número fuzzy triangular $(a; u; b)$



Fonte: Autoria própria.

Da Definição 2.7, os α -níveis do subconjunto F podem ser interpretados como a projeção, no eixo horizontal, das imagens em φ_F maiores ou iguais a um α estabelecido.

Graficamente, para se calcular os α -níveis, traça-se para cada $\alpha \in]0,1]$ uma reta ($\varphi_F(x) = \alpha$) paralela ao eixo horizontal (reta pontilhada da Figura 2.10), e verifica-se quais elementos do domínio possuem graus de pertinência maiores ou iguais a essa reta, isto é, para quais elementos do domínio a função de pertinência está sobre ou acima da reta horizontal traçada. Esses elementos do domínio formarão cada um dos α -níveis.

Essa verificação dos elementos pode ser feita por meio da projeção ortogonal das imagens maiores ou iguais a reta $\varphi_F = \alpha$ sobre o eixo horizontal ($[F]^\alpha$ na Figura 2.10) que determina os α -níveis ($\alpha \in]0,1]$) de F .

Aplicando a definição de α -níveis à expressão analítica que representa o segmento de reta crescente do número triangular, obtém-se:

$$\frac{x - a}{u - a} \geq \alpha \Leftrightarrow x - a \geq \alpha * (u - a),$$

pois, por construção, $(u - a) > 0$, logo:

$$x \geq \alpha * (u - a) + a.$$

Analogamente, para a expressão analítica do segmento de reta decrescente tem-se:

$$\frac{x - b}{u - b} \geq \alpha \Leftrightarrow x - b \leq \alpha * (u - b),$$

pois, por construção, $(u - b) < 0$, logo:

$$x \leq \alpha * (u - b) + b.$$

Sendo assim,

$$[F]^\alpha = [\alpha * (u - a) + a, \alpha * (u - b) + b], \forall \alpha \in]0,1[.$$

Como destacado na Definição 2.4, $[F]^0 = \overline{\text{supp}}(F)$, logo para calcular $[F]^0$, deve-se calcular o suporte do conjunto F . Com base no que foi feito para encontrar os α -níveis diferentes de zero, tem-se que $\text{supp}(F) =]a, b[$. Logo, $[F]^0 = \overline{\text{supp}}(F) = [a, b]$.

Dessa forma, o α -nível de um número fuzzy triangular F é:

$$[F]^\alpha = [\alpha * (u - a) + a, \alpha * (u - b) + b], \forall \alpha \in [0,1]. \quad (2.1)$$

Exemplo 2.14: Considere o número fuzzy triangular dado por $(3; 4; 5)$.

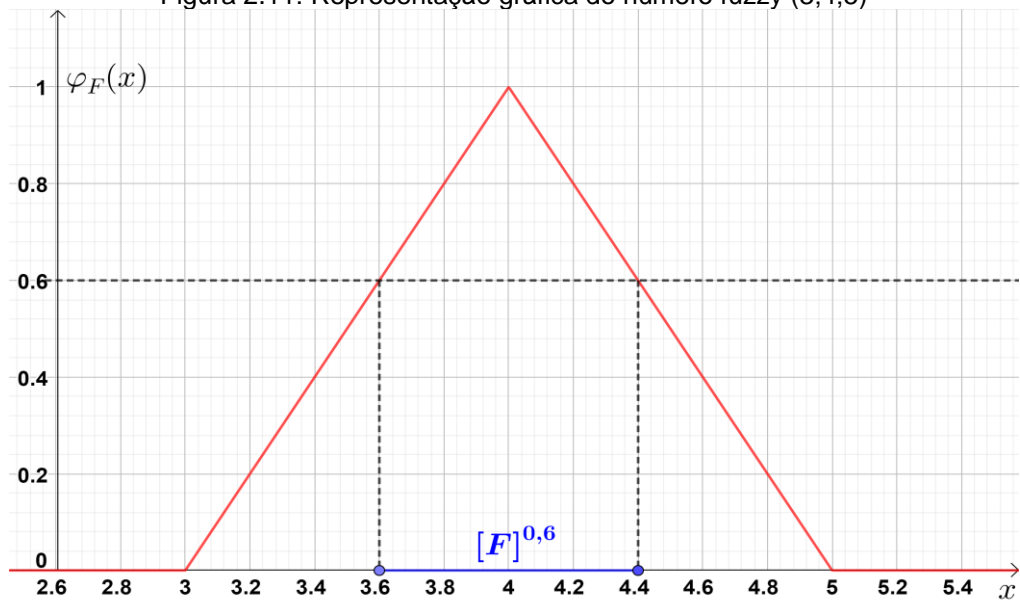
Neste caso, substituindo $a = 3$, $u = 4$ e $b = 5$ na Definição 2.7 e na equação (2.1) tem-se o número triangular fuzzy definido analiticamente por:

$$\varphi_F(x) = \begin{cases} x - 3, & \text{se } 3 < x \leq 4 \\ -x + 5, & \text{se } 4 < x \leq 5 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e seus α -níveis dados por:

$$[F]^\alpha = [\alpha + 3, -\alpha + 5], \forall \alpha \in [0,1].$$

Figura 2.11: Representação gráfica do número fuzzy (3;4;5)



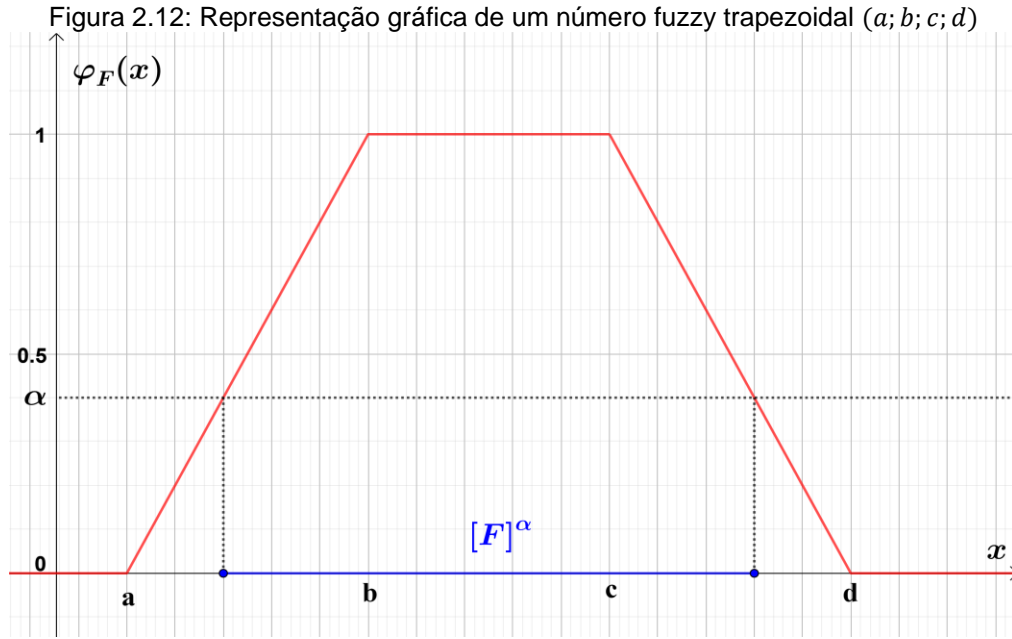
Fonte: Autoria própria.

Por exemplo, 0,6-nível de F é dado por $[F]^{0,6} = [0,6 + 3; -0,6 + 5] = [3,6; 4,4]$ e está destacado na Figura 2.11 em azul.

Definição 2.8: Um número fuzzy F é dito trapezoidal se sua função de pertinência é da forma

$$\varphi_F(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a}, & \text{se } a \leq x < b \\ 1, & \text{se } b \leq x \leq c \\ \frac{d-x}{d-c}, & \text{se } c < x \leq d \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

O número leva esse nome, pois a representação gráfica de sua função de pertinência se assemelha à forma de um trapézio, cuja base maior tem como vértices os pontos $(a, 0)$ e $(d, 0)$ e base menor tem como vértices os pontos $(b, 1)$ e $(c, 1)$, sendo frequentemente representado pela quádrupla ordenada $(a; b; c; d)$ ou por $(a/b/c/d)$. Sua representação gráfica pode ser vista na Figura 2.12.



Um tratamento análogo ao que foi feito para o número fuzzy triangular permite obter os α -níveis de um número fuzzy trapezoidal que, de modo generalizado pela expressão analítica da Definição 2.8, é dado por:

$$[F]^\alpha = [\alpha * (b - a) + a, \alpha * (c - d) + d], \forall \alpha \in [0,1]. \quad (2.2)$$

Exemplo 2.15: Substituindo, na Definição 2.8, $a = 7$, $b = 8$, $c = 9$ e $d = 10$, obtém-se a forma analítica do número fuzzy trapezoidal:

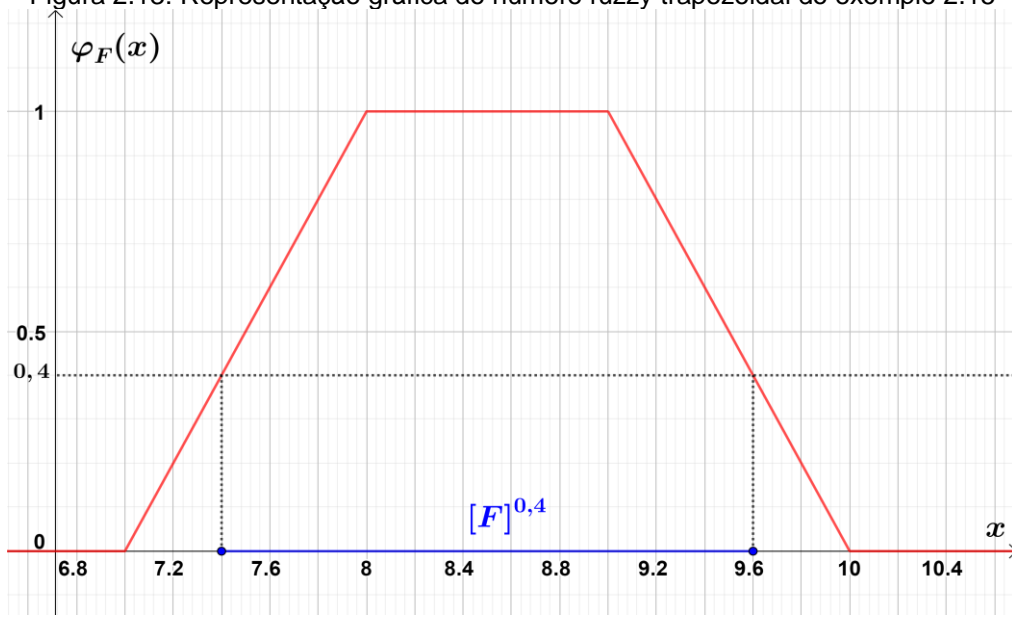
$$\varphi_F(x) = \begin{cases} x - 7, & \text{se } 7 \leq x < 8 \\ 1, & \text{se } 8 \leq x \leq 9, \\ -x + 10, & \text{se } 9 < x \leq 10 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Ao aplicar a equação (2.2) tem-se que os α -níveis para este número fuzzy trapezoidal F são:

$$[F]^\alpha = [\alpha + 7, -\alpha + 10], \forall \alpha \in [0,1].$$

Por exemplo, 0,4-nível de F é dado por $[F]^{0,4} = [0,4 + 7; -0,4 + 10] = [7,4; 9,6]$ e está destacado na Figura 2.13 em azul.

Figura 2.13: Representação gráfica do número fuzzy trapezoidal do exemplo 2.15



Fonte: Autoria própria.

3 DADOS EXPERIMENTAIS E MODELO

Os dados experimentais para este trabalho foram obtidos por Boeno (2018) em seu trabalho sobre a modelagem do processo de fermentação de pães artesanais. Deste trabalho, será fuzzificada a condição inicial do modelo por meio do Princípio da Extensão de Zadeh, apresentado no capítulo anterior.

Para tanto, inicialmente, será apresentado o modelo logístico determinístico de Verhulst e suas principais características. Depois, baseado em Boeno (2018), os dados da fermentação de pães e a justificativa da escolha do modelo logístico de Verhulst serão discutidos. Por fim, na última seção do capítulo, a solução fuzzy do modelo será obtida.

O modelo logístico contínuo de Verhulst será tratado exclusivamente para populações crescentes, pois, neste trabalho, só será utilizada essa face do modelo, já que o fenômeno a ser analisado apresenta crescimento de população. Uma análise mais detalhada sobre esse modelo pode ser encontrada no livro Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática (Bassanezi, 2006).

3.1 MODELO DETERMINÍSTICO DE VERHULST

Segundo Bassanezi (2006), o primeiro modelo a pressupor uma variação na taxa de crescimento relativo foi proposto em 1837 pelo matemático belga Pierre François Verhulst.

Esse modelo tem como característica o inibidor de crescimento populacional, isto é, considera que haverá um momento no qual a população não crescerá mais e desenvolverá uma tendência de estabilização. Isso acontece por pressupor que o ambiente possui um limite máximo sustentável que ocorre por falta de alimento, espaço, presença de pragas, doenças, entre outros fatores. Ou seja, existe uma capacidade suporte para a população que impede o crescimento indefinido da mesma.

De acordo com Cecconello, Silva e Bassanezi (2010), no modelo logístico de Verhulst a função de crescimento relativo é linear e decrescente com relação a população.

A formulação diferencial desse modelo considera que a taxa de crescimento $\beta(P)$ é proporcional à população P , em cada instante de tempo t , e sua formulação matemática é dada pela equação diferencial ordinária (EDO):

$$\frac{dP}{dt} = \beta(P)P, \quad (3.1)$$

com $\beta(P) = \frac{r(k-P)}{k} = r\left(1 - \frac{P}{k}\right)$, em que $r > 0$ e $K > 0$ são, respectivamente, o índice intrínseco de crescimento, que indica a capacidade do indivíduo se reproduzir sem a interferência do meio e a capacidade suporte, também chamada de valor limite da população.

Ao explicitar $\beta(P)$ na equação (3.1), obtém-se:

$$\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{k}\right) = rP - \frac{rP^2}{k}. \quad (3.2)$$

Essa segunda formulação pode ser interpretada como a variação da população, em função do tempo, sendo proporcional à própria população em cada instante, mas também limitada, em seu crescimento, pela interação da população.

Supondo que $P(0) = P_0$, pode-se associar a este modelo, o seguinte problema de valor inicial (PVI):

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{k}\right) \\ P(0) = P_0, k, r > 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

Para resolver a EDO do PVI (3.3), será usado o método da separação de variáveis, isto é:

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= \frac{r}{k}P(k - P) \\ \frac{dP}{P(k - P)} &= \frac{r}{k}dt \\ \int \frac{dP}{P(k - P)} &= \frac{r}{k} \int dt \end{aligned} \quad (3.4)$$

Inicialmente, o primeiro membro da equação (3.4) será reescrito utilizando a técnica de frações parciais.

$$\frac{1}{P(k - P)} = \frac{A}{P} + \frac{B}{k - P} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned}
 1 &= A(k - P) + BP \\
 0P + 1 &= (-A + B)P + Ak
 \end{aligned}
 \tag{3.6}$$

Ao realizar a igualdade de polinômios em (3.6), tem-se:

$$\begin{aligned}
 Ak = 1 &\Leftrightarrow A = \frac{1}{k} \\
 -A + B = 0 &\Leftrightarrow B = A = \frac{1}{k}
 \end{aligned}
 \tag{3.7}$$

Ao substituir os valores de A e B , presentes em (3.7), na equação (3.5), obtém-se:

$$\frac{1}{P(k - P)} = \frac{1}{kP} + \frac{1}{k(k - P)} = \frac{1}{k} \left(\frac{1}{P} + \frac{1}{k - P} \right)
 \tag{3.8}$$

Substituindo (3.8) em (3.4), obtém-se:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{k} \left(\int \frac{dP}{P} + \int \frac{dP}{k - P} \right) &= \frac{r}{k} \int dt \\
 \int \frac{dP}{P} + \int \frac{dP}{k - P} &= r \int dt
 \end{aligned}$$

Resolvendo a integral, tem-se:

$$\ln|P| - \ln|k - P| = rt + c_1,$$

sendo $c_1 \in \mathbb{R}$ uma constante de integração.

Reorganizando e aplicando propriedades de logaritmos e de exponenciais:

$$\begin{aligned}
 -\ln|P| + \ln|k - P| &= -rt + c_2 \\
 \ln\left(\frac{|k - P|}{|P|}\right) &= -rt + c_2 \\
 \frac{|k - P|}{|P|} &= e^{-rt+c_2} \\
 \frac{|k - P|}{|P|} &= ce^{-rt}
 \end{aligned}
 \tag{3.9}$$

sendo $c = e^{c_2} = e^{-c_1}$.

Como hipótese inicial, o modelo representa um crescimento populacional tal que $k - P_0 > 0$ e $P_0 > 0$, então é possível retirar os módulos em (3.9).

$$\frac{k - P}{P} = ce^{-rt}
 \tag{3.10}$$

Utilizando a condição inicial $P(0) = P_0$, pode-se encontrar o valor da constante de integração c :

$$\frac{k - P_0}{P_0} = c \quad (3.11)$$

Substituindo (3.11) em (3.10) e explicitando P , obtém-se a solução do PVI proposto em (3.3):

$$\frac{k - P}{P} = \frac{k - P_0}{P_0} e^{-rt}$$

$$P(t) = \frac{k}{\left(\frac{k - P_0}{P_0}\right) e^{-rt} + 1} \quad (3.12)$$

Pode-se ainda reescrever (3.12), de forma equivalente, da seguinte maneira:

$$P(t) = \frac{k}{\left(\frac{k - P_0}{P_0}\right) e^{-rt} + \frac{P_0}{P_0}} = \frac{\left(\frac{k}{(k - P_0)e^{-rt} + P_0}\right)}{\frac{P_0}{P_0}} = \frac{P_0 k}{(k - P_0)e^{-rt} + P_0} \quad (3.13)$$

A seguir, é realizado o estudo do PVI (3.3) tanto sob o ponto de vista do Cálculo Diferencial e Integral, quanto com uma análise qualitativa de equações diferenciais. Serviram como base as referências “Cálculo” (Stewart, 2016) volume 1, “Equações Diferenciais com aplicações” (Bassanezi e Ferreira Jr., 1988), e “Lições de equações diferenciais ordinárias (Projeto Euclides)” (Sotomayor, 1979).

Assíntotas Horizontais

Para verificar a existência desse tipo de assíntota, calcula-se o limite da equação (3.12), quando t tende para mais infinito ou para menos infinito. O segundo caso não será realizado, pois, no fenômeno estudado, a variável t de (3.12) denota unidade de tempo, logo não pode ser negativa.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{k}{\left(\frac{k - P_0}{P_0}\right) e^{-rt} + 1} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{k}{\left(\frac{k - P_0}{P_0}\right) \left(\frac{1}{e^{rt}}\right) + 1} = \frac{k}{1} = k$$

Dessa forma, tem-se que o modelo logístico de Verhulst possui uma assíntota horizontal em $P = k$. Isso significa que os valores de $P(t)$ ficam mais próximos de k à medida que os valores de t ficam maiores. Observe que, apesar de ocorrer essa

aproximação entre $P(t)$ e k , teoricamente, $P(t)$ não será igual a k mesmo que t seja tão grande quanto o leitor queira.

Assíntotas Verticais

Nesse caso, verifica-se a existência de pontos no domínio ou fora dele que, quando tomados os limites laterais em torno destes pontos, tem-se que pelo menos um deles é igual a $\pm\infty$. Este problema é equivalente à existência de algum valor de t , pertencente ou não ao domínio de (3.12), que anule seu denominador. Matematicamente, tem-se:

$$\left(\frac{k - P_0}{P_0}\right)e^{-rt} + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{k - P_0}{P_0}\right)e^{-rt} = -1 \Leftrightarrow e^{-rt} = -\frac{P_0}{k - P_0} \quad (3.14)$$

Porém, $e^{-rt} > 0, \forall t \in \mathbb{R}, P_0 > 0$ e $k - P_0 > 0$, o que faz com que a igualdade (3.14) seja impossível. Portanto, não há assíntota vertical.

Pontos críticos

No Cálculo Diferencial e Integral, os pontos críticos são os pares ordenados em que os valores do domínio da função são raízes da primeira derivada ou que a primeira derivada não existe. Esses valores do domínio são chamados de números críticos. Sendo assim, deve-se procurar os valores t do domínio tais que $P'(t) = 0$ ou que $P'(t)$ não existe. Para isso, vamos utilizar a expressão (3.2).

$$\frac{dP}{dt} = rP \left(1 - \frac{P}{k}\right) = 0 \Leftrightarrow P = 0 \text{ ou } P = k \quad (3.15)$$

Para $P = 0$, como está sendo considerado apenas a face crescente do modelo e foi suposto $P > 0$, então não há qualquer valor t^* no domínio de $P(t)$ tal que $P(t^*) = 0$.

Para $P = k$, como $P = k$ é uma assíntota horizontal e $P(t)$ é crescente, tem-se que não há qualquer valor t^* no domínio de $P(t)$ que faz a função ter como imagem k .

Além disso, não há qualquer ponto do domínio em que a função $P(t)$ está definida e $P'(t)$ não está (isso fica claro ao reler o tópico “assíntotas horizontais”, já que é mostrado que não há nenhum valor $t \in \mathbb{R}$ tal que o numerador de (3.12) seja

igual a zero). Dessa forma, pode-se afirmar que $P(t)$ (equação (3.12)) não possui pontos críticos sob o ponto de vista do Cálculo Diferencial e Integral.

Pontos de inflexão

Os pontos de inflexão são os pontos presentes na curva $P(t)$ tais que ela apresenta uma mudança de concavidade. Para calculá-los, deve-se encontrar os pontos nos quais a segunda derivada da função é zero e verificar o sinal de $P''(t)$ na vizinhança dos pontos.

Para verificar a existência desses pontos, primeiro deve-se calcular a segunda derivada da equação (3.12). Como a própria EDO presente em (3.2) é a primeira derivada, basta derivá-la mais uma vez, como segue:

$$P''(t) = r \frac{dP}{dt} - \frac{r}{k} * 2P * \frac{dP}{dt} = \frac{dP}{dt} r \left(1 - \frac{2P}{k}\right) = r^2 P \left(1 - \frac{P}{k}\right) \left(1 - \frac{2P}{k}\right) \quad (3.16)$$

Para encontrar os candidatos a ordenada do ponto de inflexão, basta calcular as raízes de $P''(t)$.

$$\begin{aligned} r^2 P \left(1 - \frac{P}{k}\right) \left(1 - \frac{2P}{k}\right) = 0 &\Leftrightarrow P \left(1 - \frac{P}{k}\right) = 0 \text{ ou } \left(1 - \frac{2P}{k}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow P = 0 \text{ ou } P = k \text{ ou } P = \frac{k}{2} \end{aligned}$$

Como já foi visto no tópico anterior, não existem valores t^* no domínio de $P(t)$ tais que $P(t^*) = 0$ ou $P(t^*) = k$, então esses valores não podem ser pontos de inflexão, já que não estão sobre a curva $P(t)$. Resta avaliar se o ponto cuja ordenada é $\frac{k}{2}$ é um ponto de inflexão.

Para isso, deve-se estudar o sinal da segunda derivada. Note que $P''(t)$ (equação (3.16)) é maior que zero em $]0, \frac{k}{2}[$ e menor que zero em $] \frac{k}{2}, k[$. Dessa forma, $P = \frac{k}{2}$ é ordenada do ponto inflexão e também é o ponto onde a taxa de variação da função $P(t)$ é máxima, pois é ponto crítico de $P'(t)$ (é raiz da primeira derivada de $P'(t)$ e possui um valor de t no domínio de $P'(t)$ tal que $P'(t) = \frac{k}{2}$) e o sinal de $P''(t)$ (primeira derivada de $P'(t)$) muda de positivo para negativo em $\frac{k}{2}$.

Sendo assim, basta encontrar a abscissa desse ponto. Para isso, deve-se igualar (3.12) a $\frac{k}{2}$ e encontrar o valor t^* correspondente.

$$\frac{k}{2} = \frac{k}{\left(\frac{k-P_0}{P_0}\right)e^{-rt^*} + 1} \Leftrightarrow \left(\frac{k-P_0}{P_0}\right)e^{-rt^*} + 1 = 2 \Leftrightarrow e^{-rt^*} = \frac{P_0}{k-P_0}$$

$$\Leftrightarrow -rt^* = \ln\left(\frac{P_0}{k-P_0}\right) \Leftrightarrow t^* = -\frac{1}{r}\ln\left(\frac{P_0}{k-P_0}\right) = \frac{1}{r}\ln\left(\frac{k-P_0}{P_0}\right)$$

Portanto, o ponto de inflexão de (3.12) tem coordenadas:

$$\left(\frac{1}{r}\ln\left(\frac{k-P_0}{P_0}\right), \frac{k}{2}\right)$$

Observe que a ordenada do ponto de inflexão do modelo logístico de Verhulst é a metade da capacidade suporte.

Pontos de estabilidade

Na análise qualitativa de equações diferenciais ordinárias, pontos de estabilidade de uma EDO de 1ª ordem autônoma (não envolve explicitamente a variável independente) são soluções constantes que anulam, isto é, são as raízes da EDO. Note que, diferente dos pontos críticos, os pontos de estabilidade não precisam estar relacionados com algum ponto do domínio da função⁵. Sendo assim, para calculá-los, basta encontrar as raízes de (3.3).

$$\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{k}\right) = 0 \Leftrightarrow P = 0 \text{ ou } P = k$$

Logo, os pontos de equilíbrio da EDO (3.3) são $P = 0$ e $P = k$.

A Tabela 3.1 apresenta algumas das características do modelo logístico de Verhulst abordadas nessa seção. Lembre-se que foi abordado apenas o modelo determinístico contínuo na face que representa o crescimento populacional.

⁵ Alguns autores referem-se a ponto de estabilidade como ponto estacionário ou, ainda, ponto crítico. Neste texto, decidiu-se por considerar ponto crítico e ponto de estabilidade como conceitos distintos.

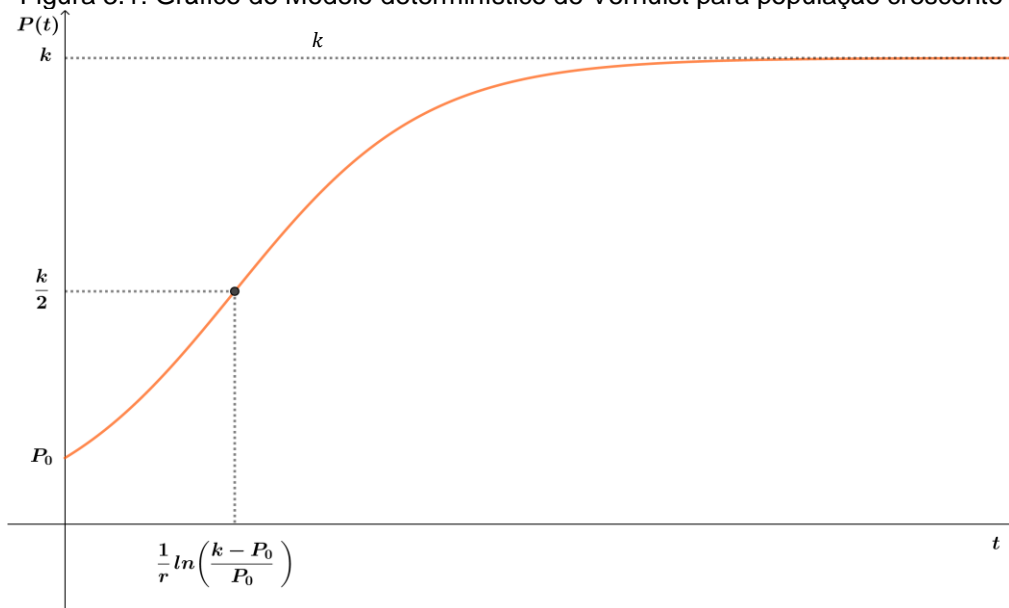
Tabela 3.1: Informações sobre o Modelo determinístico de Verhulst

Nome	Modelo logístico de Verhulst
Forma diferencial	$\frac{dP}{dt} = rP \left(1 - \frac{P}{k}\right)$
Função	$P(t) = \frac{P_0 k}{(k - P_0)e^{-rt} + P_0}$
Restrições nos parâmetros	$k > P_0, r > 0$
Assíntota horizontal	$P = k$
Assíntota vertical	Não possui
Pontos críticos	Não possui
Ponto de inflexão	$\left(\frac{1}{r} \ln\left(\frac{k - P_0}{P_0}\right), \frac{k}{2}\right)$
Pontos de estabilidade	$P = 0$ e $P = k$

Fonte: Autoria própria.

A Figura 3.1 apresenta um gráfico genérico do modelo logístico de Verhulst, segundo as hipóteses discutidas nessa seção.

Figura 3.1: Gráfico do Modelo determinístico de Verhulst para população crescente



Fonte: Autoria própria

Na próxima seção, com base no trabalho “Modelagem Matemática e a arte da fabricação de pães artesanais” de Boeno (2018), será apresentada e justificada a escolha dos parâmetros para o modelo.

3.2 JUSTIFICATIVA E ESCOLHA DOS PARÂMETROS

Os dados experimentais utilizados neste trabalho foram obtidos da monografia “Modelagem Matemática e a arte da fabricação de pães artesanais” de Boeno (2018), e corresponde à área de seção transversal de fotografias binarizadas tiradas durante o processo de fermentação de pães artesanais, em intervalos de tempo regulares.

O objetivo do trabalho de Boeno (2018) consistia em avaliar, entre os modelos logístico e exponencial assintótico, qual representava melhor o processo de fermentação de pães artesanais. Para isso, a autora desenvolveu os modelos matemáticos para a fermentação de quatro pães artesanais, preparados, seguindo a receita presente no Anexo A.

Boeno concluiu que: “[...] o modelo que pode ser utilizado para descrever a fermentação de pães artesanais é o **modelo logístico**” (BOENO, 2018, p. 51). Essa afirmação foi feita, pois, em todos os casos, o modelo logístico foi o que melhor representou os dados experimentais.

Dentre os quatro modelos elaborados por Boeno, serão utilizados apenas os parâmetros referentes ao Pão 1 (P1), cuja equação de crescimento obtida pelo processo de modelagem é dada por (3.17), e os parâmetros estão explicitados na Tabela 3.2.

$$P(t) = \frac{3.477.738}{11,8355e^{-0,0018t} + 1} \quad (3.17)$$

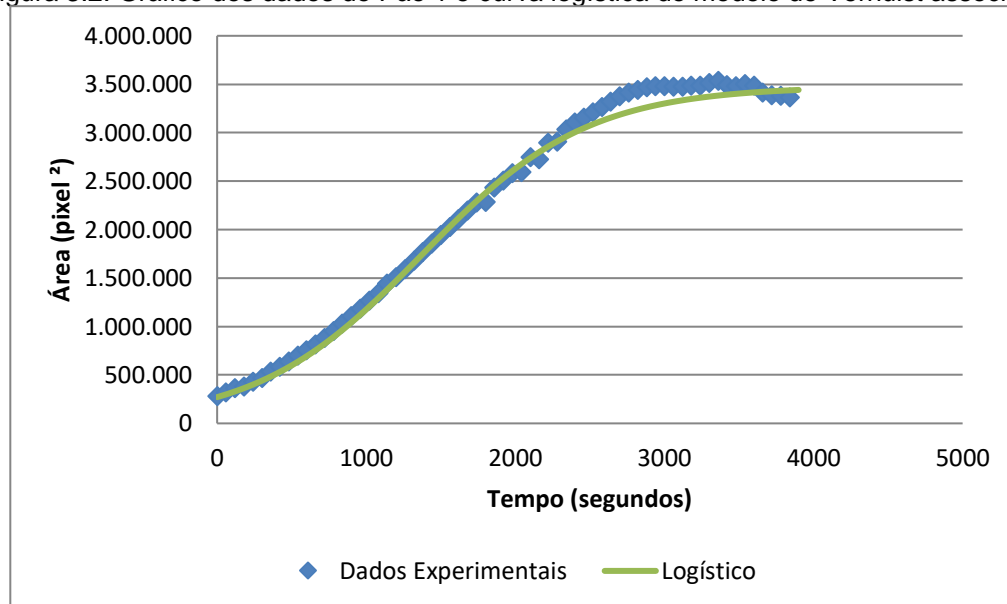
Tabela 3.2: Parâmetros do modelo logístico determinístico

Parâmetro	Valor
k	3.477.738
r	0,0018
P_0	270.946,8272

Fonte: Adaptado de Boeno (2018, p. 42).

A Figura 3.2 apresenta o gráfico de dispersão dos dados experimentais do Pão 1 e a curva logística do modelo de Verhulst a ele associado.

Figura 3.2: Gráfico dos dados do Pão 1 e curva logística do modelo de Verhulst associado



Fonte: Adaptado de Boeno (2018, p. 43)

O eixo vertical da Figura 3.2, representa a área (pixel²) das fotografias binarizadas tiradas durante o processo de fermentação do Pão 1, isto é, representa a área do pão, que aumenta, na forma, conforme cresce a população de bactérias que atuam na fermentação de pães. Enquanto o eixo horizontal, representa o instante (segundos) em que cada uma dessas fotografias foi tirada, depois da primeira delas.

Caso haja interesse em uma explicação mais detalhada sobre a obtenção dos dados e a construção de cada um desses modelos determinísticos para a fermentação de pães, sugere-se a leitura da monografia de Boeno (2018).

Nesta pesquisa, o parâmetro escolhido para ser fuzzificado, isto é, descrito a partir da Teoria dos Conjuntos Fuzzy, é a população inicial P_0 . A justificativa para tal escolha se dá pela forma em que a receita para a produção de pães artesanais é apresentada (Anexo A). Observe que:

- No modo de preparo, a orientação é que se modele a massa na forma, no entanto nem sempre será possível modelar exatamente no mesmo formato;
- Segundo Boeno (2018), o fermento biológico seco utilizado no preparo do pão artesanal é influenciado pela temperatura do local, de modo que quanto maior for

a temperatura do ambiente, mais rápido será o processo de fermentação, logo, o tempo de espera de 20 minutos entre a primeira e segunda sova pode não resultar sempre no mesmo tamanho de pão;

- No modo de preparo, a orientação é aguardar até que a massa dobre de volume, medição que, em geral, é feita a olho nu, isto é, a pessoa que observa se a massa dobrou de volume não o faz com um instrumento preciso de medição.

Essas observações indicam que a primeira fotografia binarizada do pão não terá sempre a mesma área, o que justifica a escolha da condição inicial como parâmetro a ser fuzzificado.

Para adaptar o valor da condição inicial para um número fuzzy, serão consideradas as condições iniciais obtidas por Boeno (2018) para cada um dos quatro pães considerados em seu trabalho. Os valores, em pixels ao quadrado, são apresentados na Tabela 3.3, em que P1, P2, P3 e P4 são, respectivamente, os dados dos pães 1, 2, 3 e 4.

Tabela 3.3: Populações iniciais

P1	P2	P3	P4
284.780	150.721	257.784	317.381

Fonte: Adaptado de Boeno (2018, p. 59)

Note que os valores são diferentes, o que reforça as observações apresentadas anteriormente.

O valor de P2 será desconsiderado por ser o mais discrepante em relação aos outros, ademais, como o modelo a ser fuzzificado considera os parâmetros obtidos através dos dados de P1, é justo que a condição inicial deste modelo tenha grau de pertinência máximo (um), e os outros valores, P3 e P4, terão grau de pertinência mínimo (zero). Portanto, a condição inicial será o número triangular fuzzy:

$$\hat{P}_0 = (257.784/284.780/317.381), \quad (3.18)$$

cujos α -níveis são obtidos aplicando a equação (2.1), dados por:

$$[\hat{P}_0]^\alpha = [26.996\alpha + 257.784, -32.601 + 317.381], \quad (3.19)$$

para todo $\alpha \in [0,1]$.

Sendo assim, os parâmetros para o modelo logístico fuzzy deste trabalho são apresentados na Tabela 3.4.

Tabela 3.4: Parâmetros do modelo logístico fuzzy.

Parâmetro	Tipo	Valor
k	Crisp	3.477.738
r		0,0018
\hat{P}_0	Fuzzy	(257.784/284.780/317.381)

Fonte: Autoria própria.

3.3 MODELO LOGÍSTICO DE VERHULST COM CONDIÇÃO INICIAL FUZZY

Considere o PVI (3.3) dado por:

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = rP \left(1 - \frac{P}{k}\right), \\ P(0) = P_0, \end{cases}$$

sendo $P: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, e $P_0 \in \mathbb{R}$.

Note que sua solução, dada pela equação (3.13), depende somente de t e da condição inicial P_0 . Assim, pode-se reescrever (3.13) com a seguinte notação:

$$\begin{aligned} P_t(P_0) = P(t, P): \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (t, P_0) \rightarrow P_t(P_0) &= \frac{P_0 k}{(k - P_0)e^{-rt} + P_0} \end{aligned} \quad (3.20)$$

Agora, considerando a condição inicial o número triangular fuzzy \hat{P}_0 , apresentado na Seção 3.2, enuncia-se o problema de valor inicial fuzzy (PVIF) para o modelo logístico de Verhulst com condição inicial fuzzy:

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = rP \left(1 - \frac{P}{k}\right), \\ \hat{P}(0) = \hat{P}_0, \end{cases} \quad (3.21)$$

com $P: \mathcal{F}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R})$, e $P_0 \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$.

A solução, neste caso, é obtida aplicando o Princípio da Extensão de Zadeh à solução determinística (3.20), ou seja:

$$\begin{aligned} \hat{P}_t(P_0) = \hat{P}(t, P): \mathbb{R}_+ \times \mathcal{F}(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}) \\ (t, \hat{P}_0) \rightarrow \hat{P}_t(\hat{P}_0) &= \frac{\hat{P}_0 k}{(k - \hat{P}_0)e^{-rt} + \hat{P}_0} \end{aligned} \quad (3.22)$$

E, pelo Teorema 2.1, tem-se que os α -níveis da solução fuzzy (3.22) são:

$$[\hat{P}_t(\hat{P}_0)]^\alpha = P_t([\hat{P}_0]^\alpha) \quad (3.23)$$

Logo, substituindo (3.19) em (3.23), o modelo logístico fuzzy para o fenômeno tratado neste trabalho é:

$$[\hat{P}_t(\hat{P}_0)]^\alpha = \frac{k[27\alpha + 257,8; -32,6\alpha + 317,4]}{(k - [27\alpha + 257,8; -32,6\alpha + 317,4])e^{-rt} + [27\alpha + 257,8; -32,6\alpha + 317,4]} \quad (3.24)$$

Deste modo, a solução (3.22) é determinada por uma família de soluções determinísticas dadas por (3.20), sendo que, para cada P de (3.20), o grau de pertinência da solução $P_t(P)$ em $\hat{P}_t(\hat{P}_0)$ é o mesmo grau de pertinência de P em \hat{P}_0 .

Para um estudo mais detalhado sobre equações diferenciais fuzzy consulte as obras: “Modelagem alternativa para dinâmica populacional: Sistemas Dinâmicos fuzzy” (Ceconello, 2006), “Estabilidade de sistemas dinâmicos fuzzy” (Mizukoshi, 2004) e “Introdução às equações diferenciais fuzzy: inclusões diferenciais versus extensão de Zadeh” (Mizukoshi, 2014).

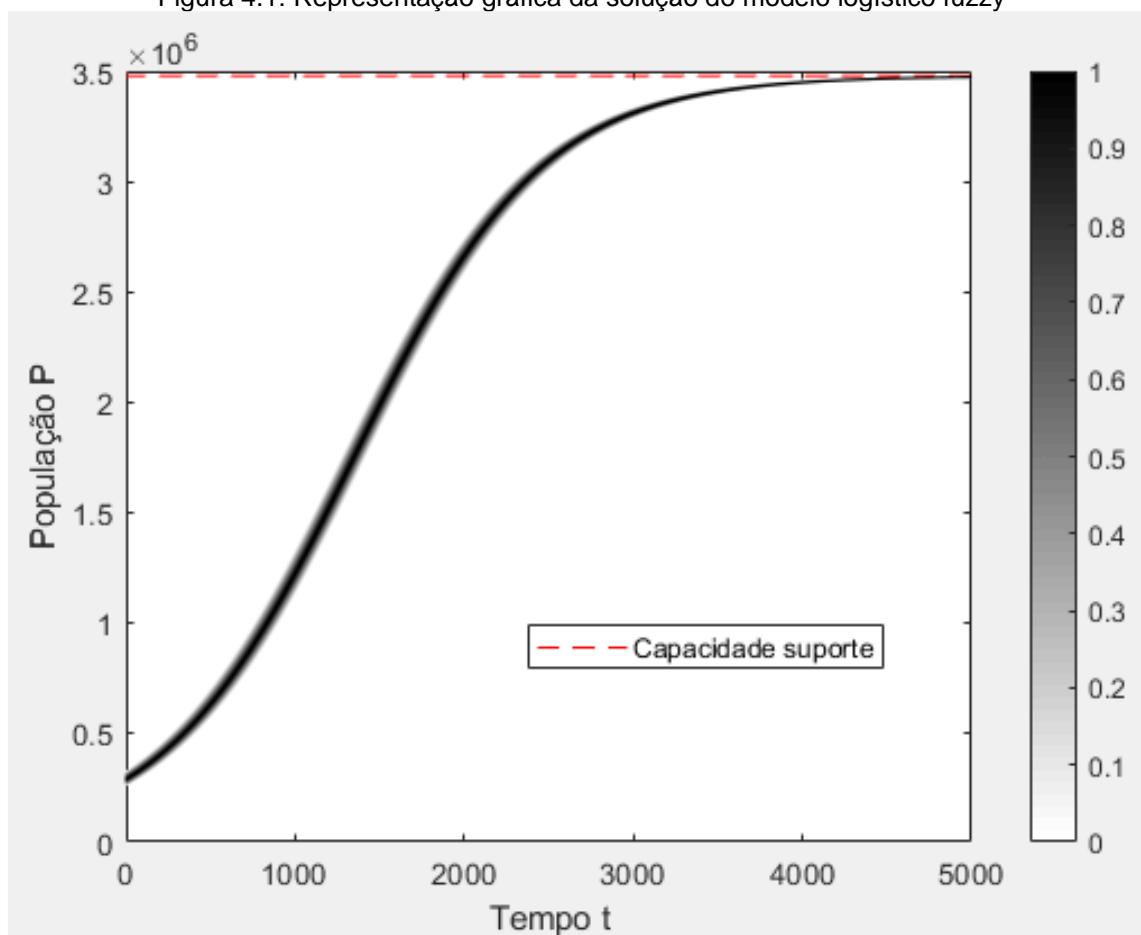
No próximo capítulo, serão apresentados os resultados do modelo fuzzy construído no capítulo 3, bem como os comentários e discussões sobre eles.

4 DISCUSSÃO E RESULTADOS

Neste capítulo, é apresentada a representação gráfica da solução do modelo logístico fuzzy construído no capítulo anterior. Também é feita uma comparação gráfica entre o modelo fuzzy e o modelo determinístico desenvolvidos para o processo de fermentação de pães artesanais.

A Figura 4.1 representa a solução fuzzy do modelo logístico de Verhulst para fermentação de pães artesanais, indicada na equação (3.24).

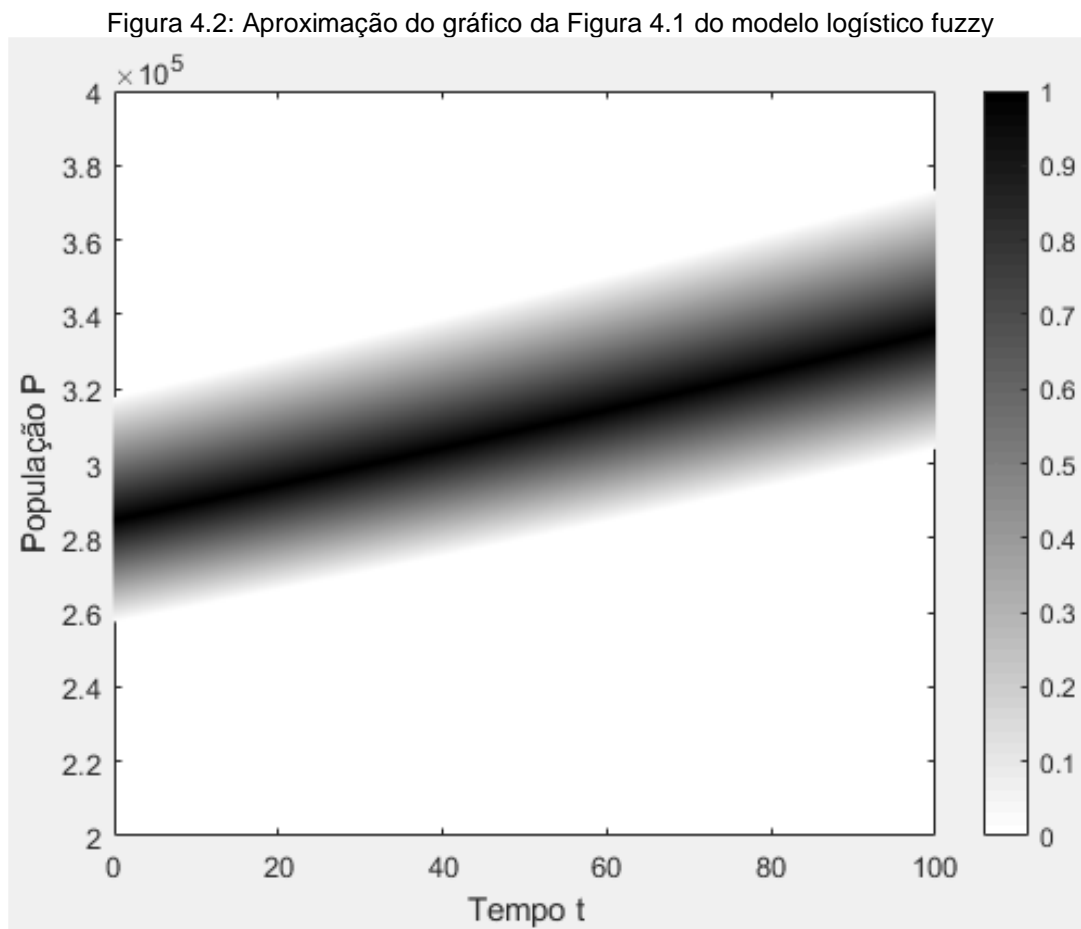
Figura 4.1: Representação gráfica da solução do modelo logístico fuzzy



Fonte: Autoria própria.

Observe, na Figura 4.1, que há diversas curvas determinísticas com uma graduação de cor na escala de cinza. Essas cores representam os diferentes graus de pertinência das curvas ao conjunto fuzzy $\hat{P}_t(\hat{P}_0)$, determinadas a partir do grau de pertinência dos P_0 ao número fuzzy triangular \hat{P}_0 determinado em (3.22), utilizando a extensão de Zadeh.

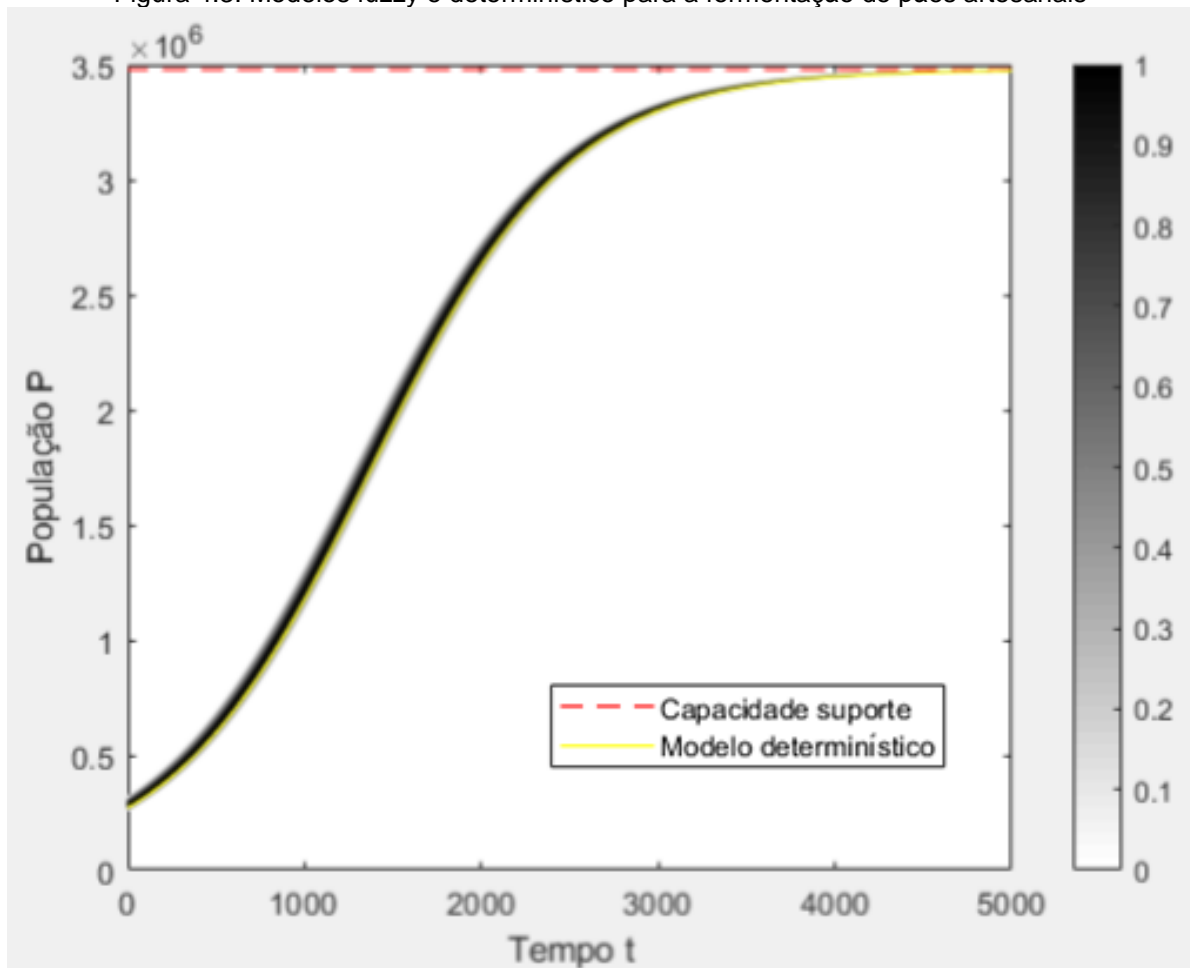
Para notar essa sutileza, observe a Figura 4.2, na qual é exibida a região do gráfico da Figura 4.1 no intervalo $t \in [0, 100]$.



Note que há uma diferença na tonalidade de preto da curva. Como já foi dito, isso é feito para representar os diferentes graus de pertinência das curvas ao conjunto fuzzy $\hat{P}_t(\hat{P}_0)$. Quanto mais escura (mais próxima do preto) for a região em que o ponto está, maior é o grau de pertinência do elemento ao conjunto e quanto menos escura (mais próxima do branco) a região for, menor é o grau de pertinência do elemento ao conjunto.

A Figura 4.4, apresenta as curvas do modelo logístico fuzzy (3.24) e modelo logístico determinístico (3.17) para a fermentação de pães artesanais.

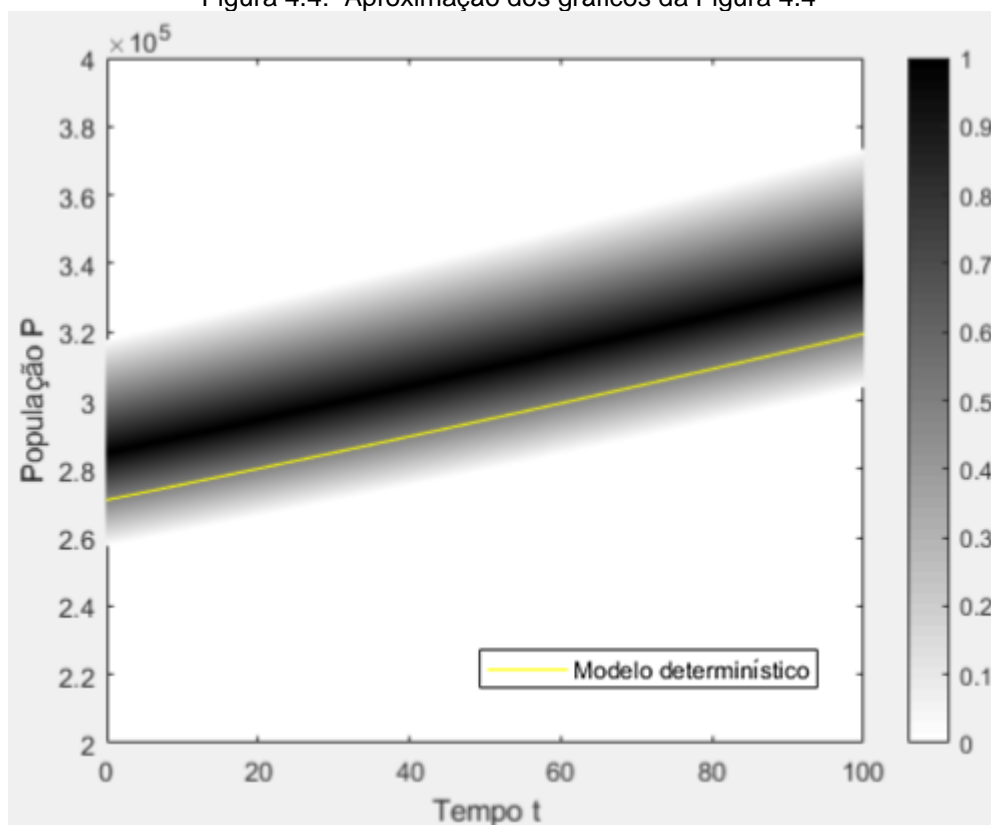
Figura 4.3: Modelos fuzzy e determinístico para a fermentação de pães artesanais



Fonte: Autoria própria

Observe que o modelo logístico fuzzy abrange o modelo determinístico, ou seja, a solução determinística faz parte da solução fuzzy do modelo. A Figura 4.5 apresenta, em detalhes, essa observação.

Figura 4.4: Aproximação dos gráficos da Figura 4.4



Fonte: Autoria própria

A curva determinística não está na faixa mais escura do gráfico fuzzy, pois o seu grau de pertinência não é alto o suficiente para isso acontecer, já que a escolha que foi feita para o número fuzzy \hat{P}_0 leva em consideração os dados experimentais que estão presentes na Tabela 3.3. Comparando o valor de P_0 do modelo determinístico (Tabela 3.2) e o número fuzzy definido em (3.18) pode-se chegar a essa mesma conclusão.

Mesmo com as observações feitas no parágrafo anterior é evidente que o modelo determinístico desenvolvido por Boeno (2018) faz parte da solução fuzzy (vide Figura 4.5).

Para a construção dos modelos fuzzy presentes nesse capítulo foi necessário o desenvolvimento de um código de programação. O código utilizado para a construção da Figura 4.1 está presente no Anexo B. A construção das demais figuras é feita a partir de algumas adaptações do código disponibilizado.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, foi aplicada a Teoria dos Conjuntos Fuzzy ao processo de fermentação de pães artesanais. Para isso, foi considerada uma condição inicial fuzzy (descrita utilizando a Teoria dos Conjuntos Fuzzy) para o modelo logístico de Verhulst relativo ao conjunto de dados experimentais do Pão 1 apresentado por Boeno (2018).

A abordagem utilizada na construção do modelo fuzzy foi o Princípio da Extensão de Zadeh, uma vez que a solução analítica é conhecida e, no caso deste trabalho, obtida de um modelo logístico determinístico de Verhulst construído por Boeno (2018).

Nesse âmbito, a vantagem de se utilizar a extensão de Zadeh foi a de poder primeiro resolver o problema na forma determinística e depois transformá-lo em fuzzy, ou seja, a solução do problema é encontrada na forma determinística (usando a lógica clássica) e depois é fuzzificada. Isso é uma vantagem visto que em algumas das outras abordagens primeiramente o problema seria fuzzificado e, em seguida, seria resolvido. Do modo como foi feito, o processo de modelagem fuzzy pode ser simplificado.

Com a apresentação gráfica da solução do modelo fuzzy foi possível ver que o modelo determinístico encontrado por Boeno (2018) faz parte da solução fuzzy descrita na atual pesquisa. Dessa forma, pode-se concluir que o objetivo da pesquisa foi alcançado, pois foi possível construir o modelo fuzzy para a fermentação de pães artesanais. Ressalta-se, no entanto, que, por ser um modelo, é uma aproximação da realidade, isto é, há variáveis que não foram consideradas.

A utilização da Teoria dos Conjuntos Fuzzy no processo de fermentação de pães artesanais conseguiu, portanto, cumprir seu papel de incluir parte das incertezas presentes na receita (Anexo A).

Como trabalhos futuros, propõe-se fuzzificar outros parâmetros do modelo logístico como a capacidade suporte, k , e o índice intrínseco de crescimento, r . Além disso, a população inicial (P_0) pode ser fuzzificada escolhendo outro conjunto fuzzy para representá-la. Outras abordagens para a utilização da lógica fuzzy podem ser utilizadas, tais como o Sistema Baseado em Regras Fuzzy e/ou a Inclusão de Equações Diferenciais fuzzy, as quais podem ser encontradas nas referências deste trabalho.

REFERÊNCIAS

- BARROS, L. C. D.; BASSANEZI, R. C. **Tópicos de lógica fuzzy e biomatemática**. 2. ed. Campinas: UNICAMP/ IMECC, 2010.
- BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**. 3. ed. São Paulo: Contexto, 2006.
- BASSANEZI, R. C. **Modelagem Matemática**. Santo André: UFABC, 2013. Disponível em: <http://posmat.ufabc.edu.br/inverno/wp-content/uploads/2013/04/minicurso-ufabc1.pdf>. Acesso em: 10 abr. 2020.
- BASSANEZI, R. C.; FERREIRA JR., W. C. **Equações Diferenciais com Aplicações**. 1. ed. São Paulo: HABRA Ltda, 1998.
- BOENO, M. C. F. **Modelagem Matemática e a arte da fabricação de pães**. Trabalho de conclusão de curso, IFSP, São Paulo, 2018.
- CECCONELLO, M. D. S. **Modelagem Alternativa para Dinâmica Populacional: Sistemas Dinâmicos Fuzzy**. Dissertação (Mestrado) , IMECC- UNICAMP, Campinas, 2006.
- CECCONELLO, M. D. S.; SILVA, J. D. D. M. D.; BASSANEZI, R. C. **Sistemas Dinâmicos Fuzzy: Modelagens Alternativas Para Sistemas Biológicos**. São Carlos: SBMAC, 2010.
- GOMES, L. T. **Um estudo sobre o espalhamento da dengue usando equações diferenciais parciais e lógica fuzzy**. Dissertação (Mestrado) , IMECC- UNICAMP, Campinas, 2009.
- JAFELICE, R. S. D. M.; BARROS, L. C. D.; BASSANEZI, R. C. **Teoria dos Conjuntos fuzzy com Aplicações**. 2. ed. São Carlos - SP: SBMAC, 2012.
- MIZUKOSHI, M. T. **Estabilidade de Sistemas Fuzzy**. Tese (Doutorado), IMECC- UNICAMP, Campinas, 2004.
- MIZUKOSHI, M. T. **Introdução às equações diferenciais fuzzy: Inclusões diferenciais versus extensão de Zadeh**. [S.l.]: [s.n.], 2014. Disponível em: http://www.de.ufpb.br/~cbsf2014/Minicurso_Profa.Marina_CBSF2014.pdf. Acesso em: 12 jul. 2020.

MORTARI, C. A. **Introdução à lógica**. São Paulo: UNESP, 2001. p. 349-353.

SOTOMAYOR, J. M. **Lições de equações diferenciais ordinárias (Projeto Euclides)**. 1. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 1979.

STEWART, J. **Cálculo**. Tradução de Helena Maria Ávila de Castro. 8. ed. São Paulo: Cengage Learning, v. 1, 2016. p. 245-260.

ANEXO A – RECEITA PARA A FABRICAÇÃO DE PÃES CASEIROS

Ingredientes:

- 480g de farinha
- 50g de açúcar
- 200 ml de leite morno
- 50g de manteiga ou nata em temperatura ambiente
- 1 pitada de sal
- 1 ovo
- 10g de fermento biológico seco
- 1 gema

Preparo:

Coloque o leite morno em uma bacia, adicione o fermento biológico seco e mexa para “hidratar” o fermento, então acrescente o ovo e a manteiga e misture bem até ficar quase homogêneo, em seguida pode colocar os secos junto à mistura e sove bem por 10 minutos, pois a massa precisa incorporar todos os ingredientes até soltar das mãos.

Após a primeira sova, coloque a massa num recipiente e cubra, deixando descansar por 20 minutos ou até dobrar de tamanho, em um local que não seja frio (ex: forno micro-ondas, forno convencional, sem ligá-los).

Feito isso, sove novamente para ativar o fermento, modele o pão, coloque numa forma para pão, deixe crescer por 40 minutos, pincele a gema em cima do pão, mas com cuidado para não apertar a massa, leve para assar em forno pré-aquecido a 180 °C por aproximadamente 30 minutos.

Fonte: Modelagem Matemática e a arte da fabricação de pães artesanais (Boeno, 2018, p. 57)

ANEXO B – CÓDIGO DO MODELO FUZZY

```
clc
clear all
n=1000;
t = linspace(0,5000,n);

%definição dos parâmetros
r = 0.0018;
K = 3477738;

%Pontos auxiliares para construir a reta da capacidade suporte
Pinf = linspace(K,K,n);

%definindo o número fuzzy triangular
a = 257784; b = 284780; c = 317381;
P01 = linspace(a,b,n);
P02 = linspace (b,c,n);

%Criando uma variável para alterar a cor das curvas
cor = linspace(1,0,n);

%criando os gráficos dos modelos
figure
for i=1:n
    hold on
    P = K./(1+(K./P01(i)-1).*exp(-r.*t));
    S = K./(1+(K./P02(n+1-i)-1).*exp(-r.*t));
    f = fill([t, fliplr(t)], [P, fliplr(S)], cor(i)*[1 1 1]);
    set(f, 'EdgeColor', cor(i)*[1 1 1]);
end

%criando o gráfico da capacidade suporte
plot(t,Pinf, 'r--');
xlabel('Tempo t')
ylabel('População P')
hold off
```