ENSINO DE GEOMETRIA UTILIZANDO MATERIAIS CONCRETOS PARA ESTUDANTES CEGOS OU COM BAIXA VISÃO

DARA FUCKNER FERNANDES

Trabalho de Conclusão do Curso Superior de Licenciatura em Matemática, orientada pela Profa. Dra. Elisabete Teresinha Guerato

IFSP
São Paulo
2021

DARA FUCKNER FERNANDES

ENSINO DE GEOMETRIA UTILIZANDO MATERIAIS CONCRETOS PARA ESTUDANTES CEGOS OU COM BAIXA VISÃO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo – IFSP, em cumprimento ao requisito parcial para obtenção do grau acadêmica de Licenciada em Matemática.

São Paulo
2021

Sobrenome, Prenome(s) Completos do(s) Autor(es).
Manual de Elaboração de Trabalho de Conclusão do Curso (TCC) do Curso de Licenciatura em Matemática / Nome Completo do Autor(es). - São Paulo: IFSP, 2012.
70f

Trabalho de Conclusão do Curso Superior de Licenciatura em Matemática - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo
Orientador(es): Nome completo do orientador(es).

1. Palavra-chave. 2. Palavra-chave. 3. Palavra-chave. 4. Palavra-chave. 5. Palavra-chave I. Título do trabalho.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Dara Fuckner Fernandes

ENSINO DE GEOMETRIA UTILIZANDO MATERIAIS CONCRETOS PARA ESTUDANTES CEGOS OU COM BAIXA VISÃO

Conceito: ______________

____
Orientador

____
Membro da Banca

____
Membro da Banca

Dara Fuckner Fernandes
Aluna

AGRADECIMENTOS

Agradeço:

A Deus por me dar a vida e me dar forças para ultrapassar todos os obstáculos encontrados ao longo do curso.

Aos meus pais, Keila e Ricardo e minha irmã amada Gabriela que sempre me incentivaram nos momentos difíceis e compreenderam a minha ausência enquanto eu mudava de estado para me dedicar aos meus estudos.

A minha tia Cris, segunda mãe e amiga que acreditou em mim quando eu achava que não conseguiria .

Aos meus amigos Ana e Marcelo que durante quatro anos foram meu ombro direito, com quem convivi intensamente, dividi alegrias e frustrações e me permitiram crescer não só como pessoa, mas também como futura profissional.

Ao meu parceiro Thiago que foi meu maior incentivador ao ingresso do curso e a realização desse trabalho, acreditando sempre no meu potencial e aguentando meus momentos de insegurança.

Ao meu amigo Caio que inúmeras vezes me auxiliou na elaboração deste trabalho e foi como um braço direito.

A minha orientadora e professora de curso, Elisabete Guerato, professora dedicada com quem aprendi muito.

Ao Instituto de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo essencial no meu processo de formação, pela dedicação, e por tudo que aprendi ao longo dos anos do curso.

RESUMO

O estudo da Geometria é considerado essencialmente visual. Assim, o uso adaptado e adequado de materiais manipuláveis torna-se indispensável para o ensino de conceitos da Geometria plana e espacial para alunos cegos ou com baixa visão. Os materiais concretos que aqui serão apresentados buscarão auxiliar pais e responsáveis, gestão pedagógica, professores e alunos a compreenderem conceitos que proporcionarão aos discentes cegos ou com baixa visão a visualização de perímetro e da área por meio do tato das figuras e sólidos estudados no decorrer dos anos finais do Ensino Fundamental e Médio. A análise apresentada neste trabalho está pautada em identificar os conhecimentos necessários para o estudante alcançar cada nível de desenvolvimento da teoria de Van Hiele. Os materiais, a metodologia e as tarefas que foram apresentados aqui, a título de evidência científica, foram criados e desenvolvidos pela Professora Doutora Solange Hassan Ahmad Ali Fernandes em sua pesquisa de doutorado, apresentada e defendida em 2008, na Pontofícia Universidade Católico de São Paulo (PUC/SP). A análise elucida que a inclusão de alunos cegos é possível, principalmente no que concerne ao ensino de Geometria que, da perspectiva simplista, é tratado como essencialmente visual. Com a mobilização da equipe gestora, professores, pais e comunidade escolar, pode-se promover uma educação inclusiva no Brasil, criando materiais manipuláveis, espaços pedagógicos facilitadores e discursos promotores da inclusão de alunos cegos.

Palavras-chave: Geometria, Cegos, Van Hiele, Materiais manipuláveis

ABSTRACT

The study of geometry is considered essentially visual. Thus, the adapted and adequate use of manipulative materials becomes indispensable for teaching plane and spatial geometry concepts to blind or low vision students. The concrete materials that will be presented here will seek to help parents and guardians, pedagogical management, teachers and students to understand concepts that will provide blind or low vision students to visualize the perimeter and area through the touch of the studied figures and solids during the final years of elementary school. The analysis presented in this work is based on identifying the knowledge necessary for the student to reach each level of development of Van Hiele's theory. The materials, methodology and tasks that will be presented here, as scientific evidence, were created and developed by Professor Solange Hassan Ahmad Ali Fernandes in her doctoral research, presented and defended in 2008 at PUC/SP. The analysis elucidates that the inclusion of blind students is possible, especially with regard to the teaching of Geometry, which, from a simplistic perspective, is treated as essentially visual. With the mobilization of the management team, teachers, parents and the school community, it is possible to promote inclusive education in Brazil, creating manipulative materials, pedagogical spaces that facilitate and speeches that promote the inclusion of blind students.

Keywords: Geometry, Blind, Van Hiele, Manipulable materials

LISTA DE FIGURAS

Pág.

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

No começo de 2017 ingressei no Instituto Federal Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo (IFSP) para cursar Licenciatura em Matemática. Sempre gostei muito dessa disciplina na escola, e resolvi aprofundar meus estudos no Ensino Superior.

No primeiro ano de curso, tivemos disciplinas de geometria ministradas pela professora Elisabete que, sempre muito dedicada, despertava ainda mais nosso interesse pela Matemática. O curso continuou e fui me familiarizando com muitas outras áreas da Matemática, mas mantendo a maior afeição pela Geometria.

Trabalhei com outros temas antes de decidir qual seria o assunto que abordaria no TCC. Incialmente estudei Os impactos das avaliações externas nas práticas pedagógicas dos professores de matemática e Uma proposta de estudo de probabilidade envolvendo jogos de aposta na educação financeira; entretanto, nenhum deles me despertava satisfação em continuar abordando a temática.

Então, comecei delinear em uma proposta com educação inclusiva que abordasse uma das áreas que mais gosto na Matemática: a Geometria. Pensando justamente que esse é um campo muito visual da matemática, mas que também poderia ser ensinado e aprendido por aqueles que são cegos ou tem baixa visão. Isso me levou a pesquisar mais profundamente sobre o tema e a perceber a relevância de tal abordagem para o ensino regular.

A minha trajetória acadêmica resultou neste trabalho de conclusão de curso (TCC) que apresenta a teoria de Van Hiele, na qual me baseei para abordar os níveis de aprendizagem em Geometria, os marcos legais a favor da educação inclusiva no Brasil e alguns materiais manipuláveis que auxiliam no processo de aprendizagem de perímetro e área na Educação Básica.

1. INTRODUÇÃO

Segundo Silva (2021), a Geometria Euclidiana é uma extensa área de estudo da Matemática. Ela divide-se de modo geral em Geometria analítica, Geometria plana e Geometria espacial.

Para Vieira e Silva (2008), entende-se que, para compreender questões de Geometria, o estudante precisa ter noções de Geometria plana e espacial, o que permite a interpretação de figuras. No entanto, alunos cegos ou com baixa visão encontram dificuldade para ter tal percepção já que estes precisam de materiais adequados às suas necessidades e tais materiais dificilmente são encontrados nos ambientes escolares comuns.

Sabe-se que o direito à educação deve ser garantido a pessoas com deficiência em todos os níveis de aprendizagem. De acordo com o Estatuto da Pessoa com Deficiência (2015):

> “É dever do Estado, da família, da comunidade escolar e da sociedade assegurar educação de qualidade à pessoa com deficiência, colocando-a a salvo de toda forma de violência, negligência e discriminação”. (BRASIL, 2015, Parágrafo único)

Entretanto, o estudo da Geometria é, do ponto de vista tradicional, considerado como muito visual. A visualização tem sido tema de muitas discussões, debates, divisões de opiniões e de muito estudo acadêmico e científico na área da Educação Matemática. Segundo Leivas (2009), a visualização é:

> “Um processo de formar imagens mentais, com a finalidade de construir e comunicar determinado conceito matemático, com vistas a auxiliar na resolução de problemas analíticos ou geométricos” (Leivas, 2009, p. 111).

Isso quer dizer que o uso adaptado e adequado de materiais manipuláveis torna-se indispensável para o ensino de conceitos da Geometria plana e espacial para alunos cegos ou com baixa visão.

Os materiais concretos que aqui serão apresentados buscarão auxiliar pais e responsáveis, gestão pedagógica, professores e alunos a compreenderem conceitos que proporcionarão aos discentes cegos ou com baixa visão a visualização do perímetro e da área por meio do tato das figuras e sólidos estudados no decorrer dos Anos Finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio.

Desse modo o objetivo geral deste trabalho é compreender as dificuldades do ensino e da aprendizagem da Geometria para alunos cegos ou com baixa visão e apresentar materiais concretos e facilitadores desse processo, tanto para alunos com deficiência visual, quanto para alunos cegos, professores e comunidade escolar em geral.

De modo específico, pretende-se aqui, verificar quais são as propostas de ensino inclusivo no Brasil. Também, identificar as dificuldades encontradas pelos professores de matemática durante o processo de inclusão escolar de alunos com deficiência visual, analisando atividades que usem materiais concretos no ensino de perímetro e área. Assim, visa-se evidenciar quais as vantagens na aprendizagem de pessoas cegas ou de baixa visão ao utilizar tais materiais e metodologias.

Toda a análise deste trabalho está pautada em reconhecer os conhecimentos necessários para que o estudante alcance cada nível de desenvolvimento da teoria de Van Hiele, que de acordo com Nasser e Sant’anna (2010), consiste em cinco níveis de desenvolvimento do pensamento Geométrico: visualização, análise, dedução informal, dedução formal e rigor. Além disso é possível afirmar que alguns recursos didáticos são facilitadores para o desenvolvimento desses níveis, e tais recursos são, primordialmente, os chamados materiais concretos manipuláveis, portanto este trabalho foi desenvolvido da seguinte maneira:

Na primeira parte, aprofundamos nas questões que envolvem o ensino inclusivo, evidenciando os marcos legais e as leis que amparam pessoas com deficiências e apontam os seus direitos, apresentamos também a história da educação inclusiva no Brasil. O foco da pesquisa é alunos cegos ou com baixa visão no ensino da Matemática. Por isso foi abordado mais especificamente a inclusão na Educação Matemática, por meio da tese de doutorado de Fernandes (2008).

A segunda parte deste trabalho apresentamos como o desenvolvimento do pensamento geométrico acontece nos estudantes e quais os requisitos básicos para estes se encaixarem em cada nível de Van Hiele. Esta segunda parte foi baseada na teoria de Dina e Peter Van Hiele, mostrando como o pensamento geométrico evolui de forma lenta e gradativa, conforme as experiências dos alunos.

Já na terceira parte deste trabalho, foram apresentados os materiais para o ensino de geometria para cegos, a metodologia aplicada a alunos de uma escola pública de São Paulo, bem como todo o desenvolvimento de tarefas realizadas pelos alunos. Os materiais, a metodologia e as tarefas que serão apresentados aqui, a título de evidência científica, foram criados e desenvolvidos pela Professora Doutora Solange Hassan Ahmad Ali Fernandes em sua pesquisa de doutorado, apresentada e defendida em 2008, na PUC/SP.

A cada atividade apresentada aqui será feita uma análise com base nos resultados de Fernandes (2008), sendo complementada com análises que apontam qual nível do desenvolvimento geométrico o aluno se encontra. Esta complementação analítica é o diferencial que faz deste um trabalho original, inédito e relevante para comunidade acadêmica, professoras e professores de Matemática e demais partícipes da comunidade escolar.

E, por fim, uma análise geral a partir da análise da Tese de Fernandes (2008), as análises e constatações referentes aos níveis de desenvolvimento geométrico; encerrando com as considerações finais.

2. MARCOS LEGAIS EM FAVOR DA EDUCAÇÃO INCLUSIVA NO BRASIL

A Constituição Federal de 1988 é conhecida como a Constituição cidadã. Depois de anos de ditadura militar, com muitas restrições civis e poucos espaços de discussão, o Brasil clamava por uma revisão nas leis que regiam o país. Em razão disso, foi pensada, elaborada e promulgada na Constituição de 1988. Nesse cenário de esperança e luz, muitas pautas esquecidas ou ocultadas voltaram à tona.

Uma dessas pautas é a indígena, que conseguiu ter o direito de ter suas terras demarcadas por serem considerados cidadãos originais do Brasil. Outra pauta significativa foi a dos negros, que conquistaram o direito à demarcação de terras quilombolas e, posteriormente, a lei 10.639/2003 que determina que escolas abordem a história do povo negro e suas conquistas.

Outra conquista que é importante e que dá escopo a este trabalho é o espaço dado na Constituição às pessoas com deficiência. Como se vê no capítulo II: "Da igualdade e da não discriminação", Art 4° da Constituição diz "*Toda pessoa com deficiência tem direito à igualdade de oportunidades com as demais pessoas e não sofrerá nenhuma espécie de discriminação*." (BRASIL, 2015).

Dessa forma, as pessoas com necessidades especiais conquistaram protagonismo na cena legal brasileira. De acordo com a Constituição de 1988, a elas devem ser dadas as mesmas oportunidades dos demais cidadão. Entretanto, sabe-se que, embora esteja escrito isso na nossa Carta Magna, a realidade nos apresenta um cenário bem diferente do esperado pela Constituição. Andando pelas ruas vemos poucas calçadas rebaixadas para os cadeirantes. Piso tátil só se vê em estações de metrôs. Faróis com áudio e pessoas conscientes e dispostas a ajudar o deficiente visual são raridade. A consciência de que as pessoas com necessidades especiais devem ter, por direito, seu espaço na sociedade ainda está no plano do ideal, bem longe do mundo real, no Brasil, principalmente dentro dos muros da escola. No que tange à Educação, a Constituição faz referência no artigo 8. A ver:

> Art. 8º É dever do Estado, da sociedade e da família assegurar à pessoa com deficiência, com prioridade, a efetivação dos direitos referentes à vida, à saúde, à sexualidade, à paternidade e à maternidade, à alimentação, à habitação, à educação, à profissionalização, ao trabalho, à previdência social, à habilitação e à reabilitação, ao transporte, à acessibilidade, à cultura, ao

> desporto, ao turismo, ao lazer, à informação, à comunicação, aos avanços científicos e tecnológicos, à dignidade, ao respeito, à liberdade, à convivência familiar e comunitária, entre outros decorrentes da Constituição Federal, da Convenção sobre os Direitos das Pessoas com Deficiência e seu Protocolo Facultativo e das leis e de outras normas que garantam seu bem-estar pessoal, social e econômico. (BRASIL, 2015)

Sabe-se que as políticas públicas no Brasil são influenciadas por diretrizes internacionais. No caso da Educação têm-se a Organização das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e Cultura - UNESCO - que é uma agência das Nações Unidas que direciona os rumos da educação no mundo, resultou no Brasil no marco legal da Constituição de 1988. Também, a Declaração mundial de Educação para todos propõe transformações nos sistemas de Ensino por perceber que havia um alto índice de crianças, principalmente deficientes, fora da escola, sem escolarização (UNESCO, 1990). Em seguida, também em 1990, é criado o Estatuto da Criança e do Adolescente - *ECA*, em que no Capítulo IV - Do Direito à Educação, à Cultura, ao Esporte e ao Lazer, no *Art. 54.* prescreve que *"É dever do Estado assegurar à criança e ao adolescente: (...) III - atendimento educacional especializado aos portadores de deficiência, preferencialmente na rede regular de ensino."* (BRASIL, 2015).

Em 1994, foram discutidas questões pontuais a respeito dos direitos dos deficientes no mundo na *Declaração de Salamanca*, realizada em Salamanca, na Espanha. A partir da Declaração de Salamanca o mundo começa a voltar suas atenções para a educação inclusiva no que diz respeito às pessoas com necessidades especiais. A Declaração de Salamanca foi a ignição para o estabelecimento das questões da Educação Especial nas políticas públicas brasileiras que surgiram posteriormente, como a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (*LDB*,1996).

Sendo resultado de todo esse movimento a favor da inclusão no mundo, a Educação brasileira por meio das LDB (1996) número 9.394/96 apresenta-se totalmente imersa nesses ideais ao abordar a gratuidade do atendimento especializado nas redes públicas. A LDB, no Capítulo III, art. 4º, inciso III, discorre que é dever do Estado garantir *"atendimento educacional especializado gratuito aos educandos com necessidades especiais, preferencialmente na rede regular de ensino".* Ainda que o termo "preferencialmente" tenha deixado margem para diversificadas interpretações sobre o dever da escola pública em atender o deficiente, o que fica marcado é que esse público tem direito a um espaço na escola pública regular e que todos os sistemas de ensino têm que se adequar para recebê-los, bem como recebe os demais, facilitando os acessos, tanto no que diz respeito às práticas pedagógicas, quanto à arquitetura do prédio escolar.

Posteriormente, em 1999, ocorreu a *Convenção de Guatemala,* que determinava a eliminação de todas as formas de discriminação contra pessoas com deficiência no que tange ao universo discursivo, físico, espacial e moral. Essa Convenção se tornou o decreto 3956/2001. Para assegurar a acessibilidade de pessoas com mobilidade reduzida ou deficiência física foram estabelecidas normas gerais e regras promotoras com a Lei 10.098 de 2000.

Os anos 2000 foram significativos na efetivação dos direitos de muitas minorias. A Educação Inclusiva foi tema de discussão em muitos espaços de decisão, inclusive na ONU. Em 2006, a ONU promoveu a Convenção sobre os direitos das pessoas com deficiência que estabeleceu que os pais participantes devem assegurar um sistema de educação inclusiva em todos os níveis de ensino. Isso significou um grande avanço, uma vez que desde as escolas dos anos iniciais até as de pós-graduação deveriam proporcionar o acesso desse perfil de cidadão. Esse movimento culminou no Brasil como signatário da Convenção da ONU em 2007, o que resultou no Decreto 6949/200, bem como na nota técnica nº 4 de 2009, que reforça a não exigência de laudo para matrícula em AEE (Atendimento Educacional Especializado) e Resolução CNB/CBE nº 4/2009, que instituiu as diretrizes operacionais para o AEE na Educação especial.

Em meio a isso, em 2008, foi publicada a *Política da educação especial na perspectiva inclusiva*. A educação inclusiva tem como perspectiva uma educação especial integrante da proposta pedagógica da escola regular, promovendo o atendimento aos estudantes com necessidades especiais, transtornos globais do desenvolvimento e altas habilidades/superdotação.

Por fim, os últimos três marcos da Educação Inclusiva no Brasil. Em 2011, instituiu-se o *Plano nacional dos direitos da pessoa com deficiência - viver sem limite*. Em 2013, foi implementado o *Programa Escola Acessível* e, em 2015, a Lei de Inclusão. Ambos os marcos objetivam assegurar a promoção da efetivação do exercício dos direitos e liberdades fundamentais por pessoa com deficiência que projetam a inclusão social, digital e à cidadania da pessoa com necessidades especiais, o que implica o acesso à escola regular também.

No que diz respeito à Base Nacional Comum Curricular (BNCC), outro marco importante na Educação, um planejamento com foco na equidade também exige um claro compromisso de reverter a situação de exclusão histórica que marginaliza grupos – como os povos indígenas originários e as populações das comunidades remanescentes de quilombos e demais afrodescendentes – e as pessoas que não puderam estudar ou completar sua escolaridade na idade própria. Igualmente, requer o compromisso com os alunos com deficiência, reconhecendo a necessidade de práticas pedagógicas inclusivas e de diferenciação curricular, conforme estabelecido na Lei Brasileira de Inclusão da Pessoa com Deficiência (Lei nº 13.146/2015).

Desse modo, ao analisar o que foi apresentado em termos legais até então, pode-se conjeturar que um ensino defasado e equivocado de Geometria a alunos cegos ou com baixa visão os impede de desenvolver habilidades de compreensão e representação do espaço que os cercam (FERNANDES 2008)

Todos esses marcos legais servem como suporte para efetivação da educação inclusiva, mas não a efetiva de fato. É comum docentes terem como premissa que somente a escola especializada pode desenvolver com eficácia as habilidades intelectuais dos alunos cegos ou com baixa visão, por exemplo. Ainda paira na atmosfera da Educação que Educação especial é a paralela/substitutiva, resquício de um olhar equivocado e não amadurecido, fruto de um recorte na historicidade da educação especial. A visão atual de Educação inclusiva/transversal pautada inclusive nas leis está muito além dos muros das escolas (SANTROCK, 2009).

Segundo dados do censo demográfico do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) de 2010, 18,6% da população brasileira possui algum tipo de deficiência visual, tornando-se tão importantes as propostas de educação inclusiva visto que esse é um importante fator para a socialização dessas pessoas. Entretanto, segundo Fernandes (2010), percebe-se que a Educação Matemática caminha a passos curtos quanto à inclusão no ensino.

Segundo Santrock (2009), os profissionais da educação não recebem nenhum tipo de preparo para lidar com alunos com deficiência visual e as escolas regulares raramente têm recursos didáticos que atendam às necessidades destes alunos. Por isso, a necessidade de se discutir e de se apresentar técnicas, recursos didáticos, metodologias ativas e inclusivas, proposta de materiais e atividades que podem ser usadas em sequências didáticas voltadas ao ensino de Geometria com alunos cegos ou com baixa visão na Educação Básica, conforme se propõe neste trabalho.

Santrock (2009) diz ainda que, fazendo uma retrospectiva histórica, observando o surgimento de novas leis, nas últimas três décadas e vivenciando o dia a dia de uma escola, é possível afirmar que as propostas de educação voltadas a alunos com algum tipo de deficiência evoluíram bastante, em razão das mudanças na legislação brasileira que passou a ter um olhar e um discurso inclusivo em relação aos estudantes, a exemplo de países de primeiro mundo

É possível, assim, fazer essas conclusões comparando a legislação de 30 anos atrás com a atual, que levou todos os envolvidos no processo educacional a repensar posturas, espaços e técnicas para garantir a acolhida, a convivência e o aprendizado de alunos com deficiência nas escolas. Basta ir a uma escola regular e constatar tudo isso questionando o corpo docente, por exemplo. Essa retrospectiva histórica será feita no próximo capítulo, que fará uma abordagem breve da história da educação inclusiva no Brasil.

2.1 **Breve história da educação inclusiva no brasil**

Segundo Santrock (2009), o primeiro fato que marca a história da educação inclusiva no Brasil foi em 1854 com a fundação do Imperial Instituto dos Meninos Cegos, no Rio de Janeiro. A proposta era dar um atendimento especial a essas pessoas que transitavam no cenário brasileiro, demonstrando muitos entraves de acessibilidade. Anos mais tarde, em 1891, este instituto recebeu o nome de Instituto Benjamin Constant.

Sandrock (2009) afirma que, nesse meio tempo, até chegar aos dias atuais, algumas coisas mudaram significativamente em relação ao tratamento dado aos cegos e a outras crianças com deficiência, inseridas no universo educacional. Até a década de 2000 viam-se muitas escolas que preferiam não aceitar a matrícula de alunos cegos ou com outro tipo de deficiência. A postura excludente e higienista foi muito forte no Brasil contra alunos com necessidades especiais.

Segundo Pletsch; Mendes (2015), depois principalmente da Constituição de 1988, do ECA (1990), da Declaração de Salamanca (1994) e da LDB (1996), a perspectiva em relação ao público cego e deficientes começa a mudar sua dinâmica. Os atores da educação passam a entender que a escola é um espaço que deve incluir todos e, sendo assim, é ela que deve adaptar seus espaços para promover o acolhimento de todos os perfis de alunos, em um movimento de inclusão, em que todos possam conviver e ter o direito de aprender.

Cem anos após a primeira escola de cegos no Brasil, o país passou a aderir à ideia de uma educação inclusiva, em que alunos com necessidades educacionais especiais passaram a frequentar escolas e classes comuns com os demais alunos.

A proposta convida os partícipes da educação, gestores, professores, funcionários, pais e sociedade civil a repensarem com as escolas as suas metodologias, espaços e práticas pedagógicas de modo a permitir que a educação aconteça em um ambiente que preze o respeito às diversidades.

Como esta pesquisa foi voltada para o ensino de geometria para alunos cegos ou com baixa visão, foi escolhida como referencial teórico a Teoria de Van Hiele, que considera cinco níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico e os requisitos para localizar o nível em cada estudante, como será abordado a seguir.

3. REFERENCIAL TEÓRICO: TEORIA DE VAN HIELE

De acordo com De Villiers (2010), a Teoria de Van Hiele teve como ignição as teses de doutorado de Pierre Van Hiele e de sua cônjuge, Dina Van Hiele-Geldof. As teses foram desenvolvidas na Universidade de Utrech, na Holanda, em meados de 1957. A teoria foi finalizada somente por Pierre, pois Dina faleceu tempos depois de defender a tese.

Ainda segundo De Villiers (2010), Pierre e Dina, embora com o mesmo objetivo sobre o ensino de Geometria, percorreram caminhos e perspectivas diferentes. Dina teve um olhar mais prescritivo no que diz respeito ao experimento educacional e à ordenação do conteúdo pedagógico de Geometria. Ela tinha um tom mais teórico e recomendatório. Já Pierre, em sua tese, tinha um tom mais explicativo e descritivo. Ele apontava as razões e circunstâncias provenientes das dificuldades de aprender geometria por parte dos estudantes.

> Enquanto a tese de Pierre tentava, principalmente, explicar o porquê os alunos tinham problemas ao aprender geometria (sob tal aspecto, ela era **explicativa** e **descritiva**), a tese de Dina versava sobre um experimento educacional e, sob tal aspecto, é mais **prescriptiva** com relação à ordenação do conteúdo de geometria e atividades de aprendizado dos alunos. (De Villiers, 2010)

Segundo De Villiers (*apud* Usiskin, 1982:4, p.2), há quatro características da teoria resumidas da seguinte maneira por Usiskin (1982:4):

> • Ordem fixa: A ordem na qual os alunos progridem por meio dos níveis de pensamento não varia. Em outras palavras, um aluno não pode estar no nível *n* sem ter passado pelo nível *n-1*.
>
> • Adjacência: Em cada nível de pensamento que era intrínseco no nível anterior se torna extrínseco no nível atual.
>
> • Distinção: Cada nível possui seus próprios símbolos linguísticos e sua própria rede de relacionamentos que conecta tais símbolos.
>
> • Separação: Duas pessoas com raciocínio em níveis diferentes não podem entender uma à outra. (DE VILLIERS, 2010)

Segundo De Villiers (2010), a Teoria de Van Hiele tem como base teórico-metodológica a distinção de cinco níveis de desenvolvimento do pensamento Geométrico. Van Hiele acreditava que o problema estava centrado no currículo que exigia um nível de inteligibilidade inalcançável aos estudantes. O Docente não consegue desenvolver seus estudantes porque está preso a metodologias estanques, padronizadas e de linguagem, muitas vezes, inacessível. O resultado dessa análise foi que, para ocorrer o desenvolvimento do pensamento geométrico, é necessário considerar os níveis *visualização/reconhecimento*, *análise*, *dedução informal*, *dedução formal* e *rigor*.

A Teoria de Van Hiele começou a ter grande notoriedade no mundo após a apresentação do artigo *O Pensamento da criança e a Geometria* em que Pierre Van Hiele desperta a atenção de estudiosos, pesquisadores e professores soviéticos e americanos.

> Em 1957, Pierre Van Hiele apresentou o artigo: "O Pensamento da criança e a Geometria" em um congresso de Educação Matemática na França. De acordo com Guimarães (*ibidem*), esse artigo atraiu a atenção de pesquisadores soviéticos e americanos, foi quando a teoria se tornou conhecida no mundo. (Santos e Santos, 2016)

Em primeiro lugar, faz-se necessário considerar o *nível 1*, **reconhecimento** - Os alunos reconhecem as figuras visualmente por sua aparência global. Reconhecem triângulos, quadrados, paralelogramos, entre outros, por sua forma, mas não identificam as propriedades de tais figuras explicitamente.

No *Nível 2*, **análise,** os alunos começam a analisar as propriedades das figuras e aprendem a terminologia técnica adequada para descrevê-las, mas não correlacionam figuras ou propriedades das mesmas. Também, será considerado o *Nível 3*, **ordenação**, onde os alunos realizam a ordenação lógica das propriedades de figuras por meio de curtas sequências de dedução e compreendem as correlações entre as figuras (por exemplo, inclusões de classe).

Por fim, não se pode deixar de abstrair o *Nível 4*, **dedução**, os alunos começam a desenvolver sequências mais longas de enunciados e a entender a significância da dedução, o papel dos axiomas, teoremas e provas (De Villiers, 2010). O quadro adaptado aqui do artigo de Santos (2016) apresenta, de modo didático, os Níveis de compreensão do Modelo de Van Hiele. Também, foi feito um recorte, em que o nível 5 não é apresentado, por não ser considerado para didáticas voltadas à Educação Básica, apenas para nível Superior de ensino. A ver:

QUADRO 1. Níveis de Compreensão do Modelo de Van Hiele.

Níveis de Compreensão	Características
NÍVEL 1 - Visualização ou Reconhecimento	Reconhece visualmente uma figura geométrica; - Tem condições de aprender o vocabulário geométrico; - Não reconhece ainda as propriedades de identificação de uma determinada figura
NÍVEL 2 – Análise	Identifica as propriedades de uma determinada figura; - Não faz inclusão de classes.
NÍVEL 3 - Dedução Informal ou Ordenação	Já é capaz de fazer a inclusão de classes; - Acompanha uma prova formal, mas não é capaz de construir outra.
NÍVEL 4 - Dedução Formal	É capaz de fazer provas formais; - Raciocina num contexto de um sistema matemático completo.

Fonte: Santos, 2016.

No nível 1, a aparência das figuras geométricas é o que leva o estudante a compreender e a entender a dimensão, as igualdades e os pares que envolvem determinada figura. Este momento do desenvolvimento do pensamento geométrico é chamado de nível de visualização. Assim, nesta etapa, o conhecimento é adquirido somente pelo que é visualizado (ou tateado). Aqui o termo “visualização”, por se tratar de alunos cegos, é entendido de modo amplo e se estende a todos os cinco sentidos, que especificamente com alunos cegos é centralizado no *sentido tato*.

> No primeiro nível as figuras geométricas são entendidas e compreendidas pelos alunos conforme sua aparência, seus pares, suas igualdades, ou seja, é chamado de nível de visualização, que não ocorre em função de nenhum outro conhecimento, mas apenas do que é visualizado. (Santos; Santos, 2016)

Já no que se refere ao nível 2, segundo Santos e Santos (2016), é considerado o nível da análise, da interpretação e da compreensão. É uma resultante do nível 1, em que o aluno visualiza ou tateia a figura geométrica, e como consequência ele observa e abstrai as propriedades a partir do desenho da determinada figura. Isso resulta na ocorrência de um elo entre a representação imagética e a apresentação de suas propriedades. As informações dessas abstrações são armazenadas a ponto de criar imagens mentais da figura, tanto em alunos cegos ou não cegos. Tudo que se sente, cria uma memória, que nada mais é que uma representação mental imagética do real. Se se pensar na imagem mental da palavra *amor*, *frio*, *medo*, pode-se compreender o processo de armazenamento imagético mental das figuras geométricas, inclusive por alunos cegos.

Segundo De Villiers (2010), neste nível 2, o estudante faz comparação explícita de figuras, não faz inclusões de classe entre as diferentes classes de figuras, quando são disjuntos, por exemplo. Também, faz classificação com base em uma propriedade somente, exibindo uma utilização não econômica dessa propriedade, rejeitando explicitamente definições fornecidas por terceiros. A verdade de uma declaração é, por este estudante, constatada pela verificação de anotações pessoais, marginálias, rascunhos.

Segundo Santos, Santos (2016), no nível da ordenação lógica, nível 3, as propriedades das figuras são o foco. A aparência, as propriedades e as representações de aplicação são relacionadas pelo estudante, possibilitando, assim, a organização das informações geométricas percebidas na figura. De Villiers (2010) diz que, depois de perceber pelo tato, o aluno cego poderá associar todas as percepções, formulando definições econômicas e corretas acerca da determinada figura; transformando definições incompletas por definições completas. Também, nesta etapa, o aluno faz a aceitação de diferentes definições equivalentes para o mesmo conceito, bem como faz classificação hierárquica de figuras, formulando hipóteses, por exemplo, ainda que haja incertezas com relação às funções axiomáticas, definições e provas.

A compreensão de que a geometria é um sistema dedutivo é o que estabelece o quarto nível da Teoria de Van Hiele, o Nível de dedução. O estudante já entende, neste momento do desenvolvimento do pensamento geométrico, de modo formal as propriedades, percebendo suas relações e constatando que muitas delas são obtidas por meio de outras propriedades.

> No quarto nível, a geometria é entendida como um sistema dedutivo, por isso é chamado de nível de dedução. Nesse momento o estudante já apresenta uma compreensão formal das propriedades e consegue perceber que elas se relacionam, e que algumas delas são obtidas a partir de outras propriedades. (Santos; Santos, 2016)

Segundo Santos e Santos (2019), o último nível, o Nível de Rigor, embora não esteja dentro das atenções das análises apresentadas neste trabalho, é importante ser explicado de modo geral. Esta é a fase considerada por Van Hiele como o momento em que o estudante já é capaz de apresentar, demonstrar e até explicar os fenômenos que envolvem a utilização dos sistemas axiomáticos da geometria. Os aspectos mais abstratos já são inteligíveis ao estudante, o qual situa-se unicamente nesses aspectos das figuras geométricas. Segundo Nasser e Sant'Anna (2010), é importante destacar que o desenvolvimento e ascensão nos níveis dependem mais da abordagem didática do docente do que idade ou maturidade do estudante. Isso quer dizer que o professor e a gestão escolar devem apropriar as didáticas que proporcionem o ensino e a aprendizagem da geometria nas salas de aula (principalmente quando esse aluno tem necessidades especiais de baixa visão ou é cego. Nesse caso, a atenção é ainda mais especial e requer materiais didáticos adaptados e exclusivos, como poderá se observar a seguir, nas próximas seções deste trabalho.

4. METODOLOGIA

4.1. Dados

Neste trabalho realizamos a revisão bibliográfica que consiste em análise de literaturas de ensaios, artigos, dissertações e teses que abordam os temas *Ensino da geometria*, *desenvolvimento do pensamento geométrico*, *educação para a inclusão* e *materiais manipuláveis de geometria para a Educação Básica de alunos cegos*. Deste modo, especialmente neste trabalho de conclusão de curso, o *corpus* utilizado foi proveniente de leituras e revisões do trabalho realizado por Solange Hassan Ahmad Ali Fernandes (2008).

Trata-se, assim, da tese de doutorado em Educação Matemática, defendida pela autora em 2008, intitulada "Das Experiências Sensoriais aos conhecimentos Matemáticos: uma análise das práticas associadas ao ensino e aprendizagem de alunos cegos e com baixa visão subnormal numa escola inclusiva".

A pesquisa que fundamenta a tese foi realizada por 27 meses, de agosto de 2005 a outubro de 2007, na Escola Estadual Caetano de Campos. Contou com a participação de professores, que na tese estão registrados como *pesquisadores 2,* e alunos cegos ou com baixa visão, sendo 12 alunos matriculados no Ensino Médio, por ser na época da pesquisa o segmento com mais alunos cegos e/ou com baixa visão.

Os dados da tese foram elaborados com base na *Dupla Estimulação* de Vigotsky (1988) e no conceito criado a partir daquele que é o da *Entrevista baseada em tarefas* de Goldin (2000).

> Goldin (2000) sugere que a coleta de dados feita a partir das entrevistas baseadas em tarefas oferece um caminho para analisar os conceitos ou estruturas conceituais, cognição ou estruturas cognitivas, competências, atitudes, estágios de desenvolvimento, sistemas de representação interna e estratégias que os sujeitos têm ou utilizam ao executar tarefas. (Fernandes, 2008, p. 72)

Os dados utilizados por Fernandes (2008) são tarefas realizadas pelos alunos cegos, especialmente do Ensino Médio, da EE Caetano de Campos que respondem às perguntas de pesquisa da Tese. Estes dados estão baseados na ideia de análise que vai além dos resultados, observando principalmente o processo que levou o aluno a chegar naquele resultado com base nos níveis de desenvolvimento geométrico de Van Hiele. E esse processo deve ser mediado pelo professor que orienta, instrui e não constrói ou transmite uma ideia formada para o estudante, mas faz o estudante construir os próprios conceitos, chegando aos resultados cabíveis. Os resultados são sempre considerados, estejam eles, do ponto de vista formal, certos ou errados.

A autora realizou um trabalho de orientação dos professores para implementar esse Projeto na Escola. A interação sujeito-aluno e sujeito-professor foi um foco de observação na construção dos dados. As tarefas são de matemática, adequadas às capacidades dos alunos e ao contexto do aluno cego, que é o sujeito da pesquisa. O pesquisador, por sua vez, precisa ter a flexibilidade de retornar, modificar ou aperfeiçoar os métodos aplicados nas questões das tarefas. Essa flexibilidade deve estar na estrutura das entrevistas.

> Para Goldin (2000) a estrutura das entrevistas deve deixar espaço para que o pesquisador possa fazer adaptações para o novo ou para possibilidades não previstas, a exemplo do método da dupla estimulação, proposto por Vygotsky, em que o controle máximo do pesquisador; sobre o que acontece no experimento, não é uma regra modal (VEER e VALSINER, 1996, p. 429). As questões devem ser estruturadas de tal forma que o sujeito tenha a oportunidade de se corrigir, voltar atrás ou até mesmo comprovar suas hipóteses. Deste modo, a estrutura das entrevistas permite que o sujeito possa interagir com a diversidade de representações e com o ambiente externo de aprendizagem. (Fernandes, 2008, p.74)

4.2 **Procedimentos da análise**

Foram apresentadas as tarefas dos alunos retiradas da tese de doutorado de Fernandes, cujos dados foram analisados e observados de modo a apontar a utilidade de seus materiais didáticos no cotidiano da sala de aula com alunos cegos, no que concerne à Geometria plana e espacial com foco em *área e perímetro*.

A cada tarefa apresentada foi feita uma análise com base nos resultados de Fernandes (2008) complementada com análises que apontam qual nível do desenvolvimento geométrico o aluno se encontra segundo a teoria de Van Hiele, configurando este trabalho de conclusão de curso uma extensão da tese de

Fernandes (2008). Esta complementação analítica faz deste um trabalho atualizado, original, inédito e relevante para comunidade acadêmica, professoras e professores de Matemática e demais partícipes da comunidade escolar.

Depois, foram apresentados os materiais para o ensino de geometria para cegos, a metodologia aplicada a alunos de uma escola pública de São Paulo, bem como o processo de realização de tarefas realizadas pelos alunos que foram desenvolvidos pela Professora Doutora Solange Hassan Ahmad Ali Fernandes em sua pesquisa de doutorado, apresentada e defendida em 2008, na PUC/SP.

Por fim, uma análise geral dos resultados a partir das considerações analíticas da Tese apresentada, bem como as considerações finais a respeito dos temas discutidos neste trabalho de conclusão de curso. Assim, a seguir, será apresentada a análise e discussão dos resultados obtidos a partir da simbiose da tese e deste trabalho.

5. ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

5.1 **Atividades com materiais manipuláveis no ensino de área e perímetro apresentadas na tese de Fernandes (2008)**

A construção dos materiais didáticos foi pensada com foco nos estímulos hápticos (que se refere ao tato; tátil), uma vez que esse é o principal meio de aquisição da aprendizagem para este perfil de aluno. Embora sejam materiais especiais e criteriosamente pensados para o público cego, eles são de baixo custo. A pesquisadora pensou cuidadosamente nos fatores que envolviam custo para que fosse viável a qualquer docente e escola a aquisição dos materiais.

> A ferramenta material representada destinou-se ao estudo inicial da área e do perímetro de quadriláteros. Estruturada sobre uma prancha de madeira quadrada, recoberta por uma placa de E.V.A., na qual foram recortados dois quadrados cujas medidas dos lados são 4 cm e 8 cm respectivamente; e dois retângulos cujas dimensões são 8 cm por 3 cm e 5 cm por 12 cm. Nas atividades que envolveram medições, essas foram realizadas com cubos de madeira com arestas de medidas 1 cm. A percepção tátil da depressão oferecida pela placa de E.V.A. é familiar para os cegos e favorece os procedimentos de medições com os cubos de madeira. (Fernandes, 2008)

A ferramenta abaixo (Figura 1) foi desenvolvida, segundo a Fernandes (2008), especialmente para o estudo de área e perímetro, tratando-se de uma prancha de madeira 25 cm x 25 cm sob placa de E.V.A. 25 cm x 25 cm.

Figura 1 – Prancha para o estudo de área e perímetro apresentada na tese Fernandes (2008)

5.2. **Ideias iniciais a respeito de área e perímetro**

Considerando os objetos matemáticos abordados nas atividades desenvolvidas nos Ensinos Fundamental e Médio, Fernandes (2008) investigou as concepções dos aprendizes a respeito de perímetro e área. A seguir as concepções dos alunos analisados no *Trecho 5.1: Concepções iniciais* da Tese. A ver:

> Aluno Fábio: Perímetro é toda a extensão da figura. Área é o espaço interno.
> Aluno Leandro: Perímetro é todos os lados. É o contorno da figura. Área é o espaço interno.
> Aluno Caio: Perímetro seria o comprimento da figura. Área seria toda a extensão da figura.
> Aluno Marcos: Área é o tamanho e perímetro é à volta. (Fernandes, 2008)

De acordo com a descrição de Fernandes (2008), as transcrições anteriores dos trechos das concepções dos alunos indicam que os termos área e perímetro não são novos para esses aprendizes. Todavia, nem todos explicaram de modo consistente esses conceitos matemáticos. Considerações como *área é o espaço interno* e *perímetro todos os lados*, proferidas pelos dois primeiros aprendizes, ou mesmo *área é o tamanho e perímetro à volta*, remetem a certa apropriação dos conceitos de área e perímetro de figuras planas, indicando a reprodução do que é falado pelos professores ao trabalhar o conteúdo nas aulas regulares. Esta reprodução indica que há ao menos um pseudoconceito que estabelece possibilidade dialógica entre estes alunos e a pesquisadora.

5.3 **A primeira tarefa: representação concreta da área**

A cada dupla de aprendizes foi oferecida uma prancha de madeira 25 cm x 25 cm, em Placa de E.V.A. 25 cm x 25 cm (Figura 5) para exploração tátil. Em seguida, pediu-se a cada aprendiz que escolhesse livremente uma das formas menores que se apresentavam preenchidas por pequenos cubos. Deste modo, o quadrado e retângulo menores foram compostos por 16 e 24 cubos respectivamente. A tarefa foi proposta pela pesquisadora assim:

A ideia deste exercício é calcular a área e o perímetro dessas figuras. Essas duas (quadrado e retângulo menores) já estão preenchidas. Vamos ver se vocês conseguem calcular o perímetro e a área delas.

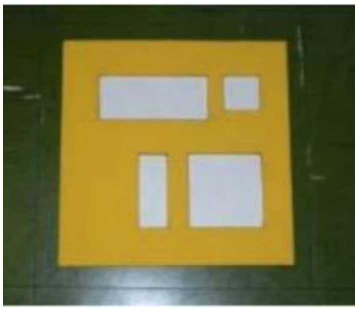

Figura 5 – Ferramenta para o estudo da área do quadrado e do retângulo, sendo o quadrado menor o cubo usado para as medições.

5.3.1 O trabalho de Marcos

De acordo com Fernandes (2008), o aluno Marcos escolheu o retângulo pequeno para iniciar a atividade. Na sequência da exploração tátil da forma preenchida pelos pequenos cubos, começa o seguinte diálogo do *Trecho 5.2: A área e o perímetro do retângulo por Marcos*:

> Marcos: A área é 24 centímetros.
>
> Pesquisadora: Como você calculou?
>
> Marcos: Aqui (indicando o comprimento) tem 8, cada um tem um centímetro e na altura tem 3. Eu multipliquei 8 por 3 deu 24.
>
> Pesquisadora: Então você contou uma linha e multiplicou por 3.
>
> Marcos: É eu fiz 8 vezes 3.
>
> Pesquisadora: E o perímetro?
>
> Marcos: Perímetro?
>
> Pesquisadora: Perímetro é o contorno. Você tem que medir cada um dos lados e somar.
>
> Marcos: Aqui dá 3 (indicando as duas alturas da figura com as mãos). 3 com 3 dá 6. Aqui tem 8 (indicando o comprimento) com 8 dá 16. O perímetro é 22. (Fernandes, 2008)

5.3.2 O trabalho de Caio

De acordo com Fernandes (2008), a figura que restou para Caio foi o quadrado pequeno preenchido pelos cubos. A Pesquisadora 1 aguarda a exploração tátil e começa o seguinte debate no *Trecho 5.3: A área e o perímetro do quadrado por Caio:*

> Caio: De área tem 12 e de perímetro tem o mesmo.
>
> Pesquisadora: Como você calculou?
>
> Caio: Como cada cubo tem um centímetro, aqui temos 4, aqui mais 4 e mais 4 (indicando sucessivamente cada um dos três lados). Seriam 12 certo? Ah não! São 16 (indicando o quarto lado do quadrado). 16 de área, porque cada cubinho tem um centímetro. E o perímetro também seria 16. (Fernandes, 2008)

Segundo Fernandes (2008), no caso de Marcos e Caio o cálculo da área foi mais simples que a determinação do perímetro. Obtiveram resultados positivos e o emprego de uma unidade de área não ofereceu obstáculos para a realização da atividade. Marcos e Caio atribuíram a medida de 1 centímetro para as arestas dos pequenos cubos, talvez por essa unidade de medida lhes ser mais familiar.

O questionamento de Marcos sobre perímetro mostra que sua fala no início da entrevista foi uma espécie de paráfrase das palavras do seu professor. Sua dúvida sobre esse conceito só foi superada pela introdução da voz matemática feita durante a intervenção da pesquisadora. Neste ponto da entrevista não é possível afirmar se Caio, seu parceiro, de fato realizou a tarefa aplicando seus conhecimentos, ou se ventriculou as palavras de Marcos ou ainda apropriou-se da voz matemática da pesquisadora quando conversava com Marcos. A fim de obter respostas para essa questão foi proposta pela Pesquisadora 1 a seguinte tarefa: *Vamos ver se vocês concordam um com a resposta do outro?*

Assim que a pesquisadora vira a prancha os sujeitos iniciam a exploração tátil, e passam a oferecer suas respostas:

> Marcos: (explorando o quadrado pequeno) O perímetro é 16 e a área é 16.
>
> Caio: (explorando o retângulo pequeno) Eu acho que a área e o perímetro

> é 24.
>
> Pesquisadora: Como você fez?
>
> Caio: Bom, temos 3 linhas com 8 (indicando uma a uma as três linhas preenchidas com oito cubos de madeira). Fazendo a soma 8 + 8 + 8 temos 24, e fazendo a soma das linhas também temos 24.
>
> Pesquisadora: Sua segunda resposta é que não tenho certeza.
>
> Caio: Um minutinho só (vira a ferramenta posicionando o retângulo com o lado maior paralelo ao seu corpo e o explora com as mãos) A área deu 24, então está certo. O perímetro tem que somar todos os lados. Aqui tem 8, com 8, 16. Aqui tem 3 com 3, 6, então é 22. Eu fiz o cálculo errado. Eu fiz me baseando no quadrado que tem quatro lados iguais. Eu esqueci que são dois lados iguais e dois diferentes. O dele está certo (referindo-se ao cálculo do seu parceiro). (Fernandes, 2008)

Para Fernandes (2008), a troca de figuras trouxe novos apontamentos. Marcos parece ter algum domínio dos conceitos de área e perímetro de figuras planas. Já Caio realizou esta atividade do mesmo modo que a anterior, ou seja, ele aplicou a igualdade entre a área e o perímetro do quadrado da tarefa anterior no trabalho com o retângulo.

Depois do cálculo da área do retângulo, Caio ofereceu a mesma resposta para o perímetro. Caio só teve êxito na realização da tarefa após ventricular as palavras da pesquisadora oferecidas a Marcos na tarefa anterior, o que o conduziu aos cálculos adequados. É de se supor que o objetivo de Caio virando a ferramenta para posicionar o lado maior do retângulo paralelamente ao seu corpo seja indicador de configuração geométrica, que descreve como uma representação que ilustra um conceito ou uma propriedade (FERNANDES, 2008).

5.3.3. O trabalho de Fábio

Fábio, que fez dupla com Leandro nesta atividade, escolheu o quadrado pequeno. A seguir o *Trecho 5.5: A área e o perímetro do quadrado por Fábio* da tese de Fernandes (2008).

> Fábio: Contando os quadradinhos é 4 por 4. O perímetro é 16.
>
> Pesquisadora: E a área? Como você calcularia a área?
>
> Fábio: Eu não sei.

> Pesquisadora: Você me disse que a área é todo espaço. E todo espaço ai está preenchido por esses quadradinhos. Como você pode saber a área composta por todos esses quadradinhos?
> Fábio: Só se for contando (indicando sucessivamente alguns cubos que preenchiam o quadrado). Ai, no caso, teria 16.
> Pesquisadora: 16 seria a área, e o perímetro?
> Fábio: Eu achei que era 16.
> Pesquisadora: Mas é a mesma coisa o perímetro e a área?
> Fábio: O perímetro é o contorno da área. (Fernandes, 2008)

Pelo que se vê no trecho acima, Fábio ofereceu a resposta correta para o perímetro da figura. Em relação à área, mais uma vez a definição apresentada no início da atividade foi a voz do seu professor sobre os conceitos. As dúvidas de Fábio em relação à área foram sanadas quando a pesquisadora ventricula sua voz e a complementava associando área a preenchimento da figura.

O fato de Fábio usar da unidade de área foi decisivo, uma vez que seu sucesso na atividade se deu após a intervenção da pesquisadora que sugeriu que a área poderia ser determinada se ele percebesse que a figura era composta por áreas menores. A última fala de Fábio aponta que a intervenção da pesquisadora com a estratégia da ferramenta material facilitou a aproximação entre os significados atribuídos à área e ao perímetro por Fábio e pela pesquisadora (FERNANDES, 2008). Isso fica evidente na troca de figuras entre Leandro e Fábio, como se vê no trecho transcrito a seguir quando Fábio explorava o retângulo pequeno: *O perímetro é 22 e a área é 24. O perímetro 8+8+3+3 e a área 8 vezes 3 igual a 24.*

5.3.4. O trabalho de Leandro

Vejamos o *Trecho 5.6: A área e o perímetro do retângulo por Leandro:*

> Leandro: (explorando o retângulo menor) O perímetro da minha figura é 22.
> Pesquisadora: E a área?
> Leandro: Não sei.
> Pesquisadora: O que vocês disseram que era a área?
> Leandro: O espaço interno.
> Pesquisadora: Nesta figura que está cheia de quadradinhos qual seria a área?

> Leandro: Eu acho que é 6.
>
> Pesquisadora: E como você calculou?
>
> Leandro: Eu deixei o contorno de lado e contei só os quadradinhos de dentro.
>
> Pesquisadora: Mas se eu tirar o contorno ficam espaços vazios (tira alguns cubos que compõem o retângulo).
>
> Leandro: Então eu acho que tem 22. Porque tem que ser todos.
>
> Pesquisadora: Você percebe que se você tirar um desses quadradinhos fica um buraco, então cada quadradinho desses está compondo a área da figura.
>
> Leandro: Então tem 24.
>
> Pesquisadora: E como você fez?
>
> Leandro: 8, 8, 8 (traçando sobre a mesa com os dedos três linhas imaginárias) deu 24.
>
> Pesquisadora: Você fez 8 vezes o 3?
>
> Leandro: É e deu 24. (Fernandes, 2008)

Leandro respondeu adequadamente sobre o perímetro nesta tentativa. No que diz respeito à área, como se vê, ele apresentou a mesma incerteza de Fábio. Leandro presenciou a conversa da pesquisadora com Fábio e não se apropriou dela. A pesquisadora tentou estabelecer com Leandro um diálogo igual como fez com Fábio. No entanto, a resposta para a área apontou ser a escolha da unidade de área, o que revela um impedimento para a resolução do problema (FERNANDES, 2008).

Leandro destacou o contorno da figura por focar no espaço interno dela, sem perceber que a esse se agregava parte da superfície da figura, o que foi resolvido quando a pesquisadora o fez perceber, retirando alguns cubos do contorno, que ao desconsiderar o contorno da figura, na verdade ele estava descartando parte de sua área. Justificando sua resposta final, Leandro mostra, por meio de seus gestos, que está contando as filas para determinar a área da figura (FERNANDES, 2008).

No começo da atividade os alunos tinham a oportunidade de fazer a exploração tátil das figuras para escolherem uma e realizarem a atividade. Nessa primeira tarefa já é possível identificar características no nível 1 da teoria de Van Hiele, compreendendo que eram figuras geométricas; no Nível 2 os estudantes já identificavam qual figura iriam trabalhar por sua propriedade (quadrado ou retângulo).

Esperava-se que os alunos soubessem calcular a área e perímetro das figuras, mas como se observou eles tiveram dificuldade. Muito se diz por que os alunos ainda encontravam-se no nível 3: Ordenação da teoria de Van Hiele, eles tinham a ideia do que representava a área, mas não tinha conhecimentos necessários para realizar os cálculos de forma dedutiva. Por exemplo, o Leandro usou a lógica para calcular a área de um retângulo de lados três e oito fazendo 8 + 8 + 8, mas não compreendiam ainda que a fórmula da área dos retângulos é base vezes altura, o que no Nível 4: Dedução se é observado.

5.4 **A segunda tarefa: primeiro momento de abstração**

A segunda tarefa apresentada na tese consistia em calcular o perímetro e a área das formas maiores, apresentadas na prancha: um quadrado com lados medindo 8 centímetros e um retângulo com dimensões 12 centímetros por 5 centímetros, com os cubos disponíveis em cada figura menor como instrumento de medida. Os cubos das duas figuras menores totalizavam quarenta, número insuficiente para preencher completamente as duas outras formas (FERNANDES, 2008).

Os aprendizes desenvolveram essa tarefa em duplas com a mesma prancha. Desta forma, os cubos deveriam ser partilhados entre eles. A pesquisadora abriu a atividade com a seguinte fala: *É possível calcular o perímetro e a área das figuras maiores sem preencher toda a figura?* (FERNANDES, 2008).

5.4.1 O Trabalho de Marcos

Segundo Fernandes (2008), Marcos escolhe o retângulo maior e faz a exploração tátil. Depois, completa com os pequenos cubos o comprimento e a altura.

> Marcos: Eu acredito que essa figura tenha 60 de área e perímetro 34.
> Pesquisadora: Então vamos discutir por quê?
> Marcos: Cada linha dessas (indicando uma sequência de linhas imaginárias no comprimento) tem 12 quadradinhos desses (cubos). São 5 linhas para preencher a figura toda (indicando um a um os cubos que compõem a altura), então são 60. E de perímetro são 12 (indicando o comprimento) mais 5 aqui (indicando a altura), 17 mais 5 aqui, 22 e mais 12, 34. (Fernandes, 2008)

5.4.2 O Trabalho de Caio

De acordo com Fernandes (2008), a falta de cubos para preencher toda a superfície da figura com a qual estavam trabalhando gerou instabilidade inicial. Caio que na primeira atividade havia trabalhado com o quadrado menor, ao perceber não tinha cubos suficientes para preencher o quadrado maior, passou a pegar os cubos do retângulo menor que estavam sendo usados por Marcos nessa atividade. A pesquisadora, assim, reviu sua abordagem: *Agora, Caio, você tem um problema porque não tem cubos suficientes para preencher toda a figura. É possível calcular o perímetro e a área sem preencher toda figura?* Caio, que tinha duas linhas do quadrado preenchidas, começou a rearranjar seus cubos para que pudesse determinar a altura do quadrado. A exploração tátil não foi suficiente para que Caio percebesse que a figura era um quadrado, Fernandes (2008). A ver o *Trecho 5.8: Caio e o quadrado maior* da Tese de Fernandes (2008):

> Caio: (explorando o quadrado maior) A área da minha figura é 64 e o perímetro 32.
> Pesquisadora: E como você calculou?
> Caio: A área eu preenchi uma linha (indicando o comprimento) e deu 8. Depois eu preenchi aqui (indicando a altura) deu 8, então a área é 64. Perímetro, imaginando que todas estivessem com 8, 8 aqui (indicando o comprimento), mais 8 aqui (indicando a altura) 16, 16 mais 16 é 32. (Fernandes, 2008)

Marcos e Caio usam o mesmo caminho para a determinação da área e do perímetro. O comprimento e altura da figura são complementados por eles com cubos, imaginando um número de linhas igual à altura, totalmente preenchidas para concluírem seus cálculos. A resposta e os motivos de Caio apontam uma estratégia que transcende uma imitação do procedimento de Marcos, já que ele detalha os procedimentos para chegar à resposta. A estratégia empregada por Marcos para o cálculo do perímetro mostrou que a introdução da voz matemática realizada pela pesquisadora contribuiu para a formulação de um conceito formal. Em relação à área, a estratégia de decompor a figura em linhas e colunas, adotadas pelo aluno, fortaleceu-se, aparentemente (FERNANDES, 2008).

5.4.3 O Trabalho de Fábio

No início, Fábio trabalhou com o quadrado maior e efetuou a tarefa facilmente. Para medir os lados da figura, completou dois lados perpendiculares do quadrado com os pequenos cubos. Como se vê a seguir no *Trecho 5.9: Fábio e o quadrado maior* da tese de Fernandes (2008):

> Fábio: O perímetro dele é 32.
>
> Pesquisadora: Como você achou 32?
>
> Fábio: Eu contei as bordas. Todas teriam 8 (indicando os quatro lados do quadrado).
>
> Pesquisadora: E a área?
>
> Fábio: 64. Eu multipliquei 8 vezes 8 (indicando dois lados perpendiculares do
> quadrado). (Fernandes, 2008)

Fernandes (2008) mostra em sua tese que, em uma segunda etapa, Fábio e Leandro trocaram de figura. As transcrições abaixo são do trabalho de Fábio com o retângulo que completa dois lados perpendiculares com os cubos para determinar suas medidas, como se vê no *Trecho 5.10: Fábio e o retângulo maior*:

.

> Fábio: (explorando o retângulo maior) O perímetro é 34.
>
> Pesquisadora 2: Como você achou 34?
>
> Fábio: Eu somei 12 com 12 (indica os dois lados paralelos de maior medida), 24, mais 5 mais 5 (indica os dois lados paralelos de menor medida) dá 34.
>
> Pesquisadora 2: E a área?
>
> Fábio: A área dá 60. Eu multipliquei 12 (indica o comprimento da figura) por 5 (indica cada uma das linhas imaginárias que compõe a figura). Eu tô ficando bom de Geometria! (Fernandes, 2008)

Fábio fez os mesmos procedimentos de Marcos e Caio para determinar da área e o perímetro, completando o comprimento e a altura da figura, e imaginando a figura completamente preenchida para concluir os cálculos. Marcos e Caio explicitaram verbalmente tal procedimento. Fábio, por sua vez, deixa o procedimento utilizado explícito por meio dos gestos que fez durante sua justificativa à pesquisadora. A ferramenta material associada ou instrumento de medida motivaram a medição e os cálculos da área e do perímetro da figura, o que proporcionou a Fábio a satisfação do sucesso.

5.4.4 O trabalho de Leandro

Segundo Fernandes (2008), antes de iniciar a segunda atividade, Leandro analisa por meio do tato o quadrado menor ainda preenchido pelos cubos. Quando trocou de figura com Fábio na primeira atividade, ele oferecia como resposta para o quadrado pequeno 12 para o perímetro e 16 para a área. No cálculo do perímetro Leandro volta a deixar de lado parte dos cubos e mesmo tendo recebido orientações para iniciar o trabalho com as formas maiores faz uma declaração: *A área é 16, porque colocando todos os quadradinhos aqui (batendo três vezes com a mão espalmada sobre o quadrado) ele formaria 16. O perímetro eu deixei de contar os do canto, porque eu já tinha contado ele aqui (indicando um dos lados paralelos ao seu corpo). Não contei quando contei aqui (indicando a altura), então tem área e perímetro 16.*

A dificuldade do instrumento de medida para o cálculo da área fora superada por Leandro aparentemente. Isso significa que o mesmo instrumento de medida que favoreceu, a princípio, uma estratégia não adequada para o cálculo do perímetro, colaborou para que Leandro superasse tal impasse ao associar os cubos que compunham a área aos cubos que compunham o perímetro, ou seja, a percepção de que as faces que compõem a área também são limitadas por lados que não podem ser desconsiderados quando esses compõem a superfície do quadrado, fato comprovado em seu trabalho com o quadrado maior.

> Pesquisadora: E a figura maior?
> Leandro: O perímetro é 32 (Leandro tinha dois lados perpendiculares do quadrado preenchidos por cubos)
> Pesquisadora: E a área?
> Leandro: Eu estou fazendo (reposiciona os cubos que completavam a altura
> preenchendo mais uma “linha” da figura). É 64. (Fernandes, 2008)

O sucesso nesta tarefa, segundo Fernandes (2008), foi a superação do impasse apresentado na atividade anterior em relação à área por Leandro. Ele confunde-se no cálculo de seu perímetro ao explorar o quadrado menos preenchido pelos cubos. Estranhou contar duas vezes o mesmo cubo, mesmo que considerando dimensões distintas. Leandro só percebeu que na verdade contaria arestas distintas do cubo ao fazer as medições no quadrado menor, o que o fez retificar sua primeira assertiva a respeito da área do quadrado menor. As respostas corretas do aluno para a segunda atividade apontam resultados do seu trabalho com o quadrado menor.

É possível analisar que essa segunda atividade tinha o propósito de elevar os estudantes a outro nível de compreensão da Geometria, instigando o cálculo de perímetro e área com figuras que não estavam totalmente preenchidas. Isso requereu que os cálculos não mais fossem feitos apenas de forma lógica, mas que um padrão dedutivo fosse percebido para se descobrir o perímetro e áreas das figuras apresentadas.

Os resultados dessa atividade foram muito mais satisfatórios. Os estudantes conseguiram através do toque identificar o valor das arestas e compreender que existe um processo dedutivo para calcular o perímetro e a área. Principalmente porque houve o processo da visualização mental do todo da figura, mesmo que possuíssem a informação da medida de duas arestas da mesma. Observava-se então que os alunos progridem para o Nível 4 da Teoria de Van Hiele.

5.5 **Terceira tarefa – Um método geral**

Uma das intenções de Fernandes (2008) consistiam em verificar se os pseudoconceitos apresentados pelos aprendizes estavam condizentes com os significados culturais e subjetivos dos objetos matemáticos, o que levaria a um método geral para o cálculo da área e do perímetro de quadriláteros indicando a objetificação desses objetos conceituais. Para tanto, Fernandes (2008) fez aos sujeitos a seguinte questão: *Se tivéssemos um retângulo com lados 5 e 8, qual seria sua área e seu perímetro?*

Primeiro, os aprendizes demonstraram dificuldades para realizar a tarefa. Desta vez, os alunos não tiveram a representação tátil de um retângulo preenchido por cubos ou uma representação pictórica com as respectivas medidas dos lados. Dispunham somente de acesso aos cubos e as réguas convencionais. A pesquisadora sugeriu o uso dos cubos para simular as figuras. Isso tudo colaborou para que as dificuldades fossem superadas e deixou evidente a estratégia empregada, Fernandes (2008).

Marcos e Caio usam a prancha para simular a figura, usando as figuras maiores da prancha com o número de cubos adequado para compor o comprimento e a altura do retângulo proposto. Ambos contam o número de “linhas” que compõe a altura da figura para a determinação da área. No que diz respeito ao perímetro, o imagético foi prejudicado pelo espaço vazio deixado pelos cubos sobre as formas apresentadas na prancha, e seu valor correto só é apresentado depois das intervenções da pesquisadora e da discussão que os parceiros estabelecem entre si. Observe o *Trecho 5.8 - Marcos e o retângulo maior* da tese de Fernandes (2008), a seguir:

> Caio: 5 por 8. A área seria 40 e o perímetro... é um retângulo. (aproximadamente 2 minutos de pausa)
> Marcos: 5 por 8. O perímetro é 22.
> Pesquisadora: Como você está pensando?
> Marcos: Porque 5 por 8 a área seria 40.
> Pesquisadora: Você está imaginando 5 linhas de 8. (Pausa)
> Marcos: É eu imaginei... mas está errado (Passa a usar a ferramenta para mostrar sua estratégia onde ainda está a representação do quadrado usada na atividade anterior) ... que seriam só 3 linhas assim e 3 assim (indicando uma altura do quadrado formada por cubos e outra imaginária) (Figura 5.5a). Está errado.
> Pesquisadora: Então faz usando os quadradinhos agora. (posiciona na ferramenta uma fila com 8 cubos e uma coluna com 5, formando um L). Eu teria aqui 8 e aqui 5 (Faz Marcos reconhecer cada uma das medidas dos lados posicionando sua mão sobre a representação) (Figura 6b).
> Marcos: Todas essas linhas estariam preenchidas, não é? (Figura 6c)
> Pesquisadora: Sim.
> Marcos: O perímetro é 26.
> Caio: É, duas linhas com 8, 16, mais duas com 5, 10, dá 26. (Fernandes, 2008)

Figura 6a Figura 6b Figura 6c

Figuras 6 – O retângulo 5 por 8

No que concerne ao trabalho de Leandro e de Fábio destacam-se ações que dão suporte às análises. Leandro posiciona sobre a mesa uma figura com a forma de um L (Figura 7), em que os lados são compostos por 8 e 5 cubos respectivamente e que permite tornar aparente, inicialmente para ele mesmo, o pensamento que tentava estruturar (FERNANDES, 2008).

Figura 7 – Tornando aparentes impressões subjetivas

Após avisar que já estava pronto para apresentar sua resposta, segundo vê-se na tese de Fernandes (2008), Leandro desfaz a representação já feita sobre a mesa e diz: *Eu fiz uma carreirinha com 8 e uma com 5 (desenha sobre a mesa duas linhas perpendiculares entre si imaginárias), então o perímetro é 26. Para a área falta completar. Eu fiz como se estivesse completando. Eu fiz 8 vezes 5 carreiras (desenha sobre a mesa linhas imaginárias que completariam a figura) que dá 40 (referindo-se a área).*

Leandro criou um signo (Figura 8) para si, que ajudaria a superar os impasses vivenciados nas atividades passadas e permitiu que ele calculasse a área de figuras planas. Ele decompôs as figuras em filas, e destas considerou sua área, e bastou somar as áreas das filas que compõem a figura para obter sua área total.

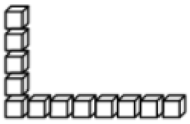

Figura 8 – O signo de Leandro

O único participante ao não se apoiar nos cubos ou na prancha a fim de fazer uma simulação da figura foi Fábio. Ao dar sua resposta para o perímetro foi indicando com as mãos os lados de uma figura imaginária sobre a mesa enquanto faz a soma das medidas dos seus lados, ações empregadas também para o cálculo da área (FERNANDES, 2008).

Assim como Leandro, Fábio estruturou um signo que não precisou ser representado concretamente. Só que poderia proporcionar a ele maior flexibilidade nas tarefas que envolvam área e perímetro de figuras planas. Assim Fábio verbaliza seu percurso: Perímetro 26. 8 e 8, 16. 16 mais 10, 26. Área 40, porque 5 vezes 8 é 40 (FERNANDES, 2008).

A pesquisadora Solange foi mais além com essa terceira tarefa, desta vez, os estudantes não tiveram acesso a nenhum material concreto, a princípio, para a realização da atividade proposta. Ou seja, os alunos teriam que ter passado por todos os requisitos dos níveis 1 a 3 da Teoria de Van Hiele para conseguirem, visualizar a figura, identificar seu formato, suas propriedades e por um sistema dedutivo calcular a área e perímetro do retângulo de lados cinco e oito.

Entretanto a conclusão da tarefa só foi satisfatória para Leandro, por exemplo, quando usou a informação recebida, lados da figura, mais o material manipulável para chegar a uma conclusão. Com as medidas e os cubos, o signo que Leandro construiu do imaginário da figura se tornou concreto o que o despertou para conseguir efetuar o cálculo correto do perímetro e área da figura proposta.

Por outro lado, bastou a informação da medida arestas para que Fábio fizesse mentalmente o cálculo do perímetro e área do retângulo, um forte indício de que o estudante está no Nível Dedução, pois domina bem os níveis anteriores da Teoria de van Hiele seguindo assim a característica da *ordem fixa*.

5.6 **Quarta tarefa - A área do triângulo**

Segundo Fernandes (2008), a pesquisador ocultou metade da área de cada figura maior. Assim, elas solicitam aos aprendizes que determinem a área do triângulo representado na prancha (Figura 9). Exemplificaram os procedimentos empregados pelos aprendizes transcrevendo o diálogo do *Trecho 5.13: Fábio e a área do triângulo* estabelecido entre Fábio e a pesquisadora conforme Fernandes (2008).

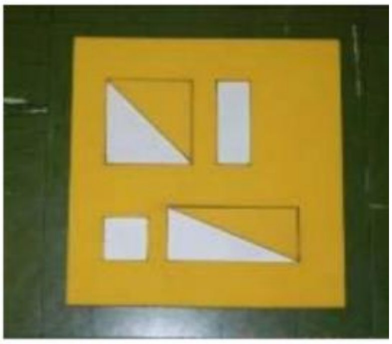

Figura 9 – Ferramenta para o estudo da área do triângulo

> Fábio: (explorando o triângulo retângulo representado sobre o quadrado maior) Para descobrir a área eu fui usando uma coisa lógica. Aqui tem 8 (mostrando o lado do triângulo paralelo a seu corpo), aí depois teria que ter 7, 6, 5, 4, 3, 2 e 1. Daí eu achei 28. Mesmo assim eu acho que está errado, porque eu tenho dúvidas se ficaria no 7 ou se contaria mais um pontinho aqui (indicando o cateto perpendicular ao seu corpo) (Figura 9).
> Pesquisadora: Quando colocamos esse triângulo no quadrado (posiciona a mão de Fábio sobre o triângulo retângulo na prancha) o que aconteceu com o quadrado?
> Fábio: Ficou dividido em dois triângulos.
> Pesquisadora: (entregando a Fábio o outro triângulo retângulo que completa o quadrado) E como são esses dois triângulos comparando um com o outro?
> Fábio: São iguais (sobrepondo os dois triângulos). Então a área tem que ser 32.
> Pesquisadora: Como você achou?
> Fábio: Lado vezes lado dividido por dois. (Fernandes, 2008)

Figura 10 – Completando o triângulo

Fábio tenta completar as figuras com os pequenos cubos como fez nas atividades iniciais da pesquisa (Figura 8). Contudo, os vértices dos ângulos agudos do triângulo impediram Fábio de concluir algo concreto a respeito do número dos cubos necessários para completar a figura. A pesquisadora interveio com o objetivo de fazê-lo estabelecer relações entre a área do quadrado e dos dois triângulos que o compõe (FERNANDES, 2008).

O aluno percebe a divisão do quadrado e a igualdade dos triângulos retângulos, destacando que a ferramenta material foi fundamental. Para se certificar de que Fábio utilizou um método para o cálculo da área de um triângulo, a pesquisadora propôs uma nova feitura da atividade usando o retângulo maior. A ver o *Trecho 5.14: A fórmula para a área do triângulo,* retirado da tese de Fernandes (2008), a seguir*:*

> Fábio: A área é 30.
> Pesquisadora 2: Como você fez?
> Fábio: Bom, agora eu aprendi um truque básico.
> Pesquisadora 2: Qual?
> Fábio: Se fosse quadrado seria lado vezes lado dividido por dois. Como aqui é retângulo eu fiz largura vezes altura (indicando essas duas dimensões) que dá 60 (12 vezes 5) e dividi por dois que deu 30. Foi o que eu fiz aqui. (Fernandes, 2008)

Bem como Fábio, os outros três participantes desse processo empírico chegaram à resolução que a área do triângulo representado na prancha era lado vezes lado dividido por dois. Eles, assim, deduziram a fórmula para determinar a área de um triângulo, Fernandes (2008). Ainda que estes alunos tenham ingressado nessa atividade com conhecimentos prévios sobre a área de triângulos, evidenciou-se que durante a exploração tátil da figura sobre a prancha e nos diálogos estabelecidos, que tal conhecimento não foi mobilizado durante a tarefa (FERNANDES, 2008). A fórmula usada pelos alunos tem um significado geométrico para cada um deles. Isso foi detectado ao se observarem os gestos dos aprendizes sobre a ferramenta, de acordo com (FERNANDES, 2008).

Por fim, a quarta tarefa não contava com a ajuda dos cubos para o preenchimento das figuras, dessa vez a proposta era saber a área do triângulo representado pela metade do cubo e do retângulo. Através do tato, os estudantes conseguiram identificar que um triângulo era formado, Nível 2 de conhecimento, porém algumas características do nível 3 faltaram para a conclusão da atividade proposta de forma autônoma.

Os alunos não conseguiram, no primeiro momento, transformar informações incompletas em informações completas. Eles apresentaram certa dificuldade para compreenderem que diferentes caminhos podem levar ao mesmo conceito. Por exemplo, os estudantes possuíam conhecimentos prévios da área do triângulo, mas encontraram dificuldade de reconhecer que a área do triângulo também poderia ser obtida a partir da área do retângulo ou quadrado divididos por dois.

Entretanto esse obstáculo, entretanto, foi superado quando um segundo triângulo igual completou a figura formando o retângulo e quadrado completo. São atividades como essas que fazem a construção do pensamento geométrico se desenvolver e o aluno adquirir conhecimento suficiente para aumentar seu domínio sobre conceitos geométricos, e com isso, passar para um nível superior segundo a Teoria de Van Hiele.

5.7 **Discussão geral dos resultados**

Como foi observado na pesquisa empírica aqui apresentada, a pesquisadora levou ao cenário instrucional ferramentas materiais e semióticas. A transição da percepção tátil à percepção semiótica relaciona-se com o modo como os aprendizes transformam as informações táteis oferecidas pelos materiais concretos. Isso significa que para que sejam elevados ao nível de objetos conceituais, os conceitos de perímetro e área precisam passar por uma transformação realizada pelos estudantes. Eles precisam, assim, transformar em objetos conceituais as informações táteis atribuindo significado a elas (FERNANDES, 2008).

Há apontamentos que indicam mudanças entre as concepções iniciais e após a primeira atividade para perímetro e área, embora estivessem, até aquele momento, estritamente ligadas à ferramenta material e a uma tarefa específica. Ao concluírem a primeira tarefa, segundo Fernandes (2008), a administração realizada pelos aprendizes entre as ferramentas materiais e as palavras da pesquisadora incentivou o engajamento dos alunos em uma dinâmica interativa e interpretativa que deu início ao processo de objetificação dos conceitos matemáticos em estudo.

Nas tarefas, a ação de imaginar a forma geométrica completamente preenchida pelos pequenos cubos, motivada pela percepção tátil por meio de ferramenta material e pelo instrumento de medida, promoveu a reflexão por parte dos alunos. Os objetos conceituais – perímetro e área – passam a ter uma forma corpórea e tangível para os aprendizes cegos. Esses objetos externos percebidos pelo tato, com cubos de madeira preenchendo as formas geométricas, por exemplo, passam a ter caráter de objetos de reflexão (FERNANDES, 2008).

Este processo empírico leva a se conjeturar que os recursos materiais associados aos semióticos, colocados em cena pela pesquisadora, promoveram o direcionamento das ações motoras dos aprendizes para a ativação de diferentes áreas de cognição, o que impulsiona a atividade percepto-motora. Este fato confirma a tese de que os sujeitos estão envolvidos em um processo de objetificação dos objetos matemáticos, o que pode ser evidenciado nas declarações realizadas por eles quando justificaram suas respostas no momento em que linhas e colunas que completam a figura são desenhadas por meio de gestos. Isso inclui considerar a articulação dos termos área e perímetro, que segundo Fernandes (2008), assumiu uma abordagem mais significativa nas vozes dos alunos.

Na intenção de promover mais autonomia aos alunos cegos para o cálculo da área e do perímetro de quadriláteros foi dada sequência às tarefas buscando estabelecer um método geral para esses cálculos. Mesmo que de forma não proposital, a pesquisa feita com os alunos cegos seguiu uma ordenação que proporcionava aos discentes conhecimentos que enriquecessem seus conhecimentos dando a eles os requisitos necessários para a evolução dos níveis de conhecimento em geometria segundo a Teoria de Van Hiele.

A visualização ocorreu da mesma forma, os estudantes conseguiram fazer uma análise do conjunto a que pertencia as figuras apresentadas, análise de suas propriedades e logicamente foi sendo deduzida a fórmula de se calcular perímetro e área dos quadriláteros sem necessariamente ter um material manipulável que as representassem.

Portanto, as tarefas abordadas na tese apresentada aqui levam a concluir que a inclusão é algo viável. Entretanto, ainda há um longo caminho a ser percorrido, que começa com a mudança de pensamento das sociedades, passando pela formação dos professores e adequação do espaço escolar, chegando à elaboração de metodologias com materiais adequados ao público cego na sala de aula seguindo um rigor e métodos que levem aos alunos ao progresso.

CONCLUSÃO

A função da educação diante de todas as legislações e diretrizes a favor da inclusão dos alunos com necessidades especiais é incluir. E incluir de modo a fazer todos os partícipes da Escola se engajarem nessa missão, com o intuito de normalizar ações e discursos que favorecem o envolvimento dos estudantes com necessidades especiais com os demais alunos, sem diferenciá-los.

Este trabalho mostra que a escola, bem como a sociedade, deve adequar os espaços, pensando que todos têm uma deficiência em algum aspecto, que às vezes não é uma necessidade aparente ou física e que nem por isso somos desiguais. A escola deve trabalhar com formações a respeito do assunto, porque o professor precisa de formação continuada e contínua para aperfeiçoar suas práticas. Os governos e as políticas educacionais devem contribuir com a inclusão proporcionando materiais adequados e necessários para que o aluno cego e com outras necessidades especiais seja incluído.

Receber um aluno cego causa muito desconforto ao professor da sala regular. As graduações não focam seus currículos na inclusão de alunos com necessidades especiais de modo aprofundado. A primeira coisa que um professor deve fazer ao receber uma tarefa que não sabe executar é buscar informações, pesquisar, estudar e se qualificar. De acordo com a Constituição, com a LDB, e com o Conselho nacional de pessoas com deficiência, o processo adequado é incluir o sujeito deficiente nos mais variados espaços sociais, principalmente no espaço escolar no que diz respeito ao ensino regular, bem como em outras modalidades de ensino como o EJA.

As tarefas realizadas na pesquisa empírica apresentada por Fernandes (2008) juntamente com a análise da Teoria de Van Hiele evidenciam que o trabalho com Geometria para alunos cegos é possível e não precisa dispor de grandes recursos financeiros para criação de materiais adequados. Muitas vezes com os materiais já existentes na escola é possível desenvolver um bom trabalho com a Geometria Plana. É importante ressaltar que a percepção tátil facilita a aprendizagem de alunos cegos, mas também de alunos não cegos porque é um modo diferenciado de perceber as formas, o pode ajudar o aluno a abstrair os conceitos matemáticos geométricos.

Entretanto, a disposição para desenvolver aulas diferenciadas para alunos diferenciados é um tabu. Ainda há professores e instituições que não aceitam esse perfil de aluno ou aceitam sem incluir adequadamente. Sem condições adequadas, os estudantes cegos ou com baixa visão não conseguem acompanhar os demais alunos, o que a Teoria de Van Hiele explica como *separação*, segundo De Villiers (apud Usiskin, 1982:4, p.2). Não há inclusão quando os alunos estão em níveis diferentes de conhecimento. O aluno com necessidades está no espaço escolar, mas não é tratado adequadamente, tanto no ponto vista didático-pedagógico, quanto no ponto de vista discursivo-espacial. Não há compreensão por parte do aluno incluído no ambiente escolar comum se entre os estudantes e docentes com os estudantes não estiverem no mesmo nível de conhecimento.

As modificações necessárias nas escolas brasileiras são diversas. Dentre elas, romper o paradigma do século passado que via alunos com necessidades especiais como os "outros", "excepcionais", "anormais". Isso só pode acontecer com políticas de formação continuada aplicadas à educação especial, em que o professor terá orientações e atualizações formativas a respeito de metodologias inclusivas, de leis que protegem e garantem a permanência desse perfil de aluno; e da função da escola não formal que é de complementar o ensino formal. Deste modo, o professor precisa entender que uma modalidade não anula a outra, mas, sim, uma sustenta a outra. Depois disso, é irrefutável a importância de se adequar o espaço físico das escolas. Banheiros adequados, rampas, pisos táteis, carteiras e mesas adaptadas são raridades nas escolas, ou até mesmo são recursos inexistentes. Também, seriam necessárias políticas públicas, além do PDE, para fornecimento de materiais didáticos adaptados, ainda que seja possível elaborar, conforme observou-se nas seções anteriores deste trabalho.

Materiais manipuláveis para cegos, por exemplo, além de serem escassos e disponibilizados somente em salas de recursos, têm no trâmite burocrático do PDDE um fator que posterga o acesso de professores e alunos. A resistência de parte da categoria em atender aos alunos com necessidades especiais, além da falta de recursos, é fruto da falta de conhecimento de como lidar com as diferenças no ambiente escolar, o que ocorre com aluno negro, com o aluno obeso, com o aluno estrangeiro, com o aluno indígena, com aluno morador de comunidade e inclusive com alunos cegos ou com demais necessidades especiais. Com a adoção de prática educadora inclusiva para as crianças com necessidades educacionais especiais, um olhar atento para essa significativa faixa da população se estende também às escolas, aos docentes e às famílias. Assim a Educação deve promover uma pedagogia centrada na criança, atendendo as necessidades de cada estudante.

Ainda pensando em materiais adequados aos alunos com necessidades especiais, inclusive cegos, não se pode deixar de citar que as novas tecnologias têm contribuído significativamente nas abordagens didáticas com esse perfil de aluno. Nos tempos atuais, os computadores estão presentes em muitas escolas, inclusive públicas, e em casa, talvez na palma das mãos. Uma expansão da capacidade dos computadores estrondosa ocorre a partir do fim dos anos de 1990, bem como uma redução substancial dos preços, o que facilita o acesso à tecnologia disponível para todos os alunos em muitos ambientes escolares.

Segundo Santrcok (2009), os benefícios para os alunos com deficiência são diversos. As possibilidades criadas pela tecnologia continuam a ser descobertas, o que faz muitos educadores sugerirem que a tecnologia seja considerada como uma “prótese cognitiva” para alunos com necessidades especiais, principalmente de aprendizagem. Um bom exemplo é computadores, celulares, *tablets*, fones de ouvido e televisores acionados por voz, por piscada de um olho, por estalo da boca, por sopro de respiração, por um único dedo (o polegar), por parte da cabeça ou por outro método criativo ajustado às habilidades do indivíduo. Também, há teclados especiais que estão disponíveis para pessoas com limitação nos movimentos da mão, enquanto outros equipamentos não possuem fios, logo, podem ser usados a distância do computador. Auxílios compensadores de visão e audição: lente, braile, lupa, síntese de voz, teclados adaptados em telefones, alerta táctil-visual. Enfim, há uma gama de possibilidades na atualidade que podem melhorar o desempenho e a qualidade de vida de uma pessoa com deficiência fora e dentro dos muros da escola.

Atualmente no Brasil, existe uma profusão de discursos e movimentos em torno da inclusão de todos, dentro de um discurso de equidade, de igualdade de direitos e de justiça social. Esses discursos habitam principalmente nas políticas públicas educacionais, visando a inclusão de todos nos processos da educação formal, nas escolas. A inclusão de alunos com necessidades especiais nos espaços e contextos escolares é um ganho para todos os envolvidos no processo educacional. O estímulo dos alunos com necessidades especiais é potencializado não apenas academicamente, mas no que diz respeito ao convívio social (ROSSELLI, 1996). Quanto aos demais alunos, funcionários da escola e gestores têm a oportunidade de romper as barreiras do preconceito e da intolerância. E, assim, com o passar dos tempos, podemos futuramente nos deparar com a constituição de uma sociedade menos injusta, mais democrática e significativamente inclusiva.

REFERÊNCIAS

BRASIL, 2001, decreto nº 3.956, de 08 de out. de 2001. **Promulgação, acordo internacional, convenção internacional, eliminação, discriminação, pessoa deficiente.**Disponível em: https://legislacao.presidencia.gov.br/atos/?tipo=DEC&numero=3956&ano=2001&ato=2ddc3aU90MNpWT27d. Acesso em: 24 de jan. de 2021

BRASIL. 2015, Lei n. 13.146, de 6 de jul. de 2015. **Lei Brasileira de Inclusão da Pessoa com Deficiência**. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_Ato20152018/2015/Lei/L13146.htm; acesso em: 24 de jan. de 2021.

BRASIL. **Base Nacional Comum curricular**. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 30 de jun. de 2021. NASSER, L.; SANT'ANNA, N. F. P. **Geometria Segundo a Teoria de Van Hiele**. 2. ed. Rio de Janeiro: IM/UFRJ, 2010.

BRASIL. Lei nº. 9.394, de 20 de dezembro de 1996. **Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional**. 1996. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/Ccivil_03/leis/L9394.htm>. Acesso em: 7 jul. 2021.

BRASIL. Instituto Brasileiro de geografia e estatística. **Documentação do Censo 2010**. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/component/tags/tag/deficiencia-visual. Acesso em 25 de janeiro de 2021.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL. Decreto nº. 6.571, de 17 de setembro de 2008. **Dispõe sobre o Atendimento Educacional Especializado, regulamenta o parágrafo único do artigo 60 da lei n. 9.394, de 20 de dezembro de 1996, e acrescenta**

dispositivo ao decreto n. 6.253, de 13 de novembro de 2007. 2008a. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/Leis/L8069Compilado.htm. Acesso em: 7 de maio. 2021.

BRASIL. **Lei nº 10.098 de 19 de dezembro de 2000 estabelece normas gerais e critérios básicos para a promoção da acessibilidade das pessoas portadoras de deficiência ou com mobilidade reduzida, e dá outras providências.** Disponível.em: https://legislacao.presidencia.gov.br/atos/?tipo=LEI&numero=10098&ano=2000&ato=f76MzYU1EMNpWTb22**.** Acesso em: 21 de jun. 2021.

BRASIL. **Decreto nº 6.949 de 25 de agosto de 2009 promulga a convenção internacional sobre os direitos das pessoas com deficiência e seu protocolo facultativo, assinados em Nova York, em 30 de março de 2007.** Disponível em: https://legislacao.presidencia.gov.br/atos/?tipo=DEC&numero=6949&ano=2009&ato=8dec3Y61UeVpWT233. Acesso em: 21 de jun. 2021.

BRASIL. **Documento orientador programa escola acessível.** Disponível em: http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=13290-doc-orient2013&category_slug=junho-2013-pdf&Itemid=30192. Acesso em: 23 de jun. 2021.

BRASIL. **Lei n° 10.639 altera a lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996, que estabelece as diretrizes e bases da educação nacional, para incluir no currículo oficial da rede de ensino a obrigatoriedade da temática "história e cultura afro-brasileira" e dá outras providências.** Disponível em: https://legislacao.presidencia.gov.br/atos/?tipo=LEI&numero=10639&ano=2003&ato=431MTTq10dRpWTbf4. Acesso em: 21 de jun. 2021.

BRASIL. **Lei nº 13.146, de 06 de julho de 2015. Institui a Lei Brasileira de Inclusão da Pessoa com Deficiência** (**Estatuto da Pessoa com Deficiência**). Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_Ato20152018/2015/Lei/L13146.htm. Acesso em: 27 de jun. 2021.

BRASIL. **A Resolução CNE/CEB nº 4/2009, institui Diretrizes Operacionais para o Atendimento Educacional Especializado na Educação Básica, dispondo, no art. 3º, que a educação especial se realiza em todos os níveis, etapas e modalidades, tendo esse atendimento como parte integrante do processo educacional**. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=5294-notatecnica-n112010&Itemid=30192#:~:text=%2D%20A%20Resolu%C3%A7%C3%A3o%20CNE%2FCEB%20n%C2%BA,parte%20integrante%20do%20processo%20educacional.. Acesso em: 21 de jun. de 2021.

DECLARAÇÃO DE SALAMANCA: **sobre princípios, políticas e práticas na área das necessidades educativas especiais**. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seesp/arquivos/pdf/salamanca.pdf . Acesso em: 9 mai. 2021.

DE VILLIERS, M. **Algumas reflexões sobre a Teoria de Van Hiele**. Educ. Matem. Pesq., São Paulo, v.12, n.3, pp. 400-431, 2010.

FERNANDES, S. H. A. **Das experiências sensoriais aos conhecimentos matemáticos Uma análise das práticas associadas ao ensino e aprendizagem de alunos cegos e com visão subnormal numa escola inclusiva**. Doutorado em Educação Matemática – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo. P. 70-93. 2008.

FERNANDES, S. H. A.; HEALY S. Lulu. **A Inclusão de Alunos Cegos nas Aulas de Matemática: explorando Área, Perímetro e Volume através do Tato Boletim de Educação Matemática**, vol. 23, núm. 37, pp. 1111-1135. Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho. Rio Claro, Brasil, 2010.

GOLDIN, G. A. **A Scientific Perspective on Structured, Task-Based Interviews in Mathematics Education Research.** In: KELLY, A. E.; LESH, R. A (Eds.). Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education. Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, pp. 517-546, 2000.

LEIVAS, J. C. P. **Imaginação, Intuição e Visualização: a riqueza de possibilidades da abordagem geométrica no currículo de cursos de Licenciatura em Matemática**. Tese (Doutorado em Educação, UFPR), Curitiba, p. 294, 2009.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. **Política nacional de educação especial na perspectiva da educação inclusiva**. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/arquivos/pdf/politicaeducespecial.pdf. Acesso em: 21 de jun de 2021.

PAIS, L C. **Uma análise do significado da utilização de recursos didáticos no ensino da geometria**. Anais da 23a reunião anual da ANPED,
Caxambu, 2000.

PLETSCH, M. D.; MENDES, G. M. L**. Entre políticas e práticas: os desafios da educação inclusiva no Brasil.** Arquivos Analíticos de Políticas Educativas, v. 23, n. 27, 16 mar. 2015.Disponível em: <http://www.redalyc.org/html/2750/275041389056/>. Acesso em: 12 jun. 2018. Acesso em: 21 jun. 2021.

ROSSELLI, H. C. **Gifted students. National Association for Secondary School Principals,** p. 12-17, fev./mar. 1996.

SANTOS, Fernando T. M.; SANTOS, Marcelo C.. **Os Níveis de Pensamento Geométrico De Van Hiele: um estudo com os alunos dos Anos Finais do Ensino Fundamental.** Revista: Tecnologia e Educação, Era do conhecimento. Brasil **|** Recife **|** Setembro de 2016.

SECRETARIA DOS DIREITOS HUMANOS. **Plano Nacional dos Direitos da Pessoa com Deficiência - viver sem limite.** Disponível em: https://www.prattein.com.br/home/images/stories/230813/Direitos_Pessoa_com_Deficincia/Plano_nacional_viver_sem_limites.pdf. Acesso em: 22 de jun. de 2021.

SILVA, Luiz Paulo Moreira. "**O que é geometria?**"; *Brasil Escola*. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/o-que-e/matematica/o-que-e-geometria.htm. Acesso em 27 de janeiro de 2021.

SMITH, Deborah Deutsch. **Introdução à educação especial [recurso eletrônico]: ensinar em tempos de inclusão**. tradução Sandra Moreira de Carvalho. – 5. ed. – Dados eletrônicos. – Porto Alegre: Artmed, 2008.

SOUZA, S. F.; OLIVEIRA, M. A. M. **Políticas para a inclusão: ênfase na formação de docentes. In: 32a Semana Anual da Anped**, 2009, Caxambu-MG. Sociedade, cultura e educação: novas regulações? Anais... Rio de Janeiro: Associação Nacional de Pós-graduação e Pesquisa em Educação, 2009.

VIEIRA, S. S.; SILVA F. H. S. **A Matemática e a Geometria na Educação Inclusiva dos Deficientes Visuais**, (2008): *Sobre a Deficiência Visual*. Disponível em: http://www.deficienciavisual.pt/txt-matematica-geometria.htm. Acesso em 23 de janeiro de 2021.

SÁ, P. R. B. X. **A Inclusão de alunos com altas habilidades/superdotação na educação básica: um desafio à prática pedagógica.** Id on Line Revista Multidisciplinar e de Psicologia, Jaboatão dos Guararapes, v. 11, n. 38, p. 480-492, 2017. Disponível em: https://idonline.emnuvens.com.br/id/article/view/914/1393. Acesso em: 12 jun. 2021.

SANTROCK, J. **Psicologia educacional**. Porto Alegre: AMGH, 2009.

UNESCO. **Declaração mundial sobre educação para todos e plano de ação para satisfazer as necessidades básicas de aprendizagem**. Jomtien, Tailândia: UNESCO, 1990.