INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
SÃO PAULO

DIFICULDADES NA APRENDIZAGEM DE FRAÇÕES E DUAS PROPOSTAS DE TAREFAS

PAMELLA SILVA NASCIMENTO

Trabalho de Conclusão do Curso Superior de Licenciatura em Matemática, orientado pelo Prof. Me. Lucas Casanova Silva

São Paulo

2022

PAMELLA SILVA NASCIMENTO

DIFICULDADES NA APRENDIZAGEM DE FRAÇÕES E DUAS PROPOSTAS DE TAREFAS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo – IFSP, câmpus São Paulo, em cumprimento ao requisito parcial para obtenção do grau acadêmico de licenciada em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Lucas Casanova Silva

São Paulo

2022

Catalogação na fonte
Biblioteca Francisco Montojos - IFSP Campus São Paulo
Dados fornecidos pelo(a) autor(a)

n244d Nascimento, Pamella Silva
Dificuldades na aprendizagem de frações e duas propostas de tarefas / Pamella Silva Nascimento. São Paulo: [s.n.], 2022.
73 f. il.

Orientador: Lucas Casanova Silva

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, IFSP, 2022.

1. Dificuldades. 2. Aprendizagem. 3. Frações. 4. Mentalidades Matemáticas. 5. Conversas Numéricas. I. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo II. Título.

CDD 510

Ministério da Educação
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo
Câmpus São Paulo
SUB AREA DE CIENCIAS E MATEMATICA 4

ATA N.º 2/2022 - SAM-SPO/DCM-SPO/DRG/SPO/IFSP

Ata de Defesa de Trabalho de Conclusão de Curso - Graduação

Na presente data realizou-se a sessão pública de defesa do Trabalho de Conclusão de Curso intitulado **Dificuldades na aprendizagem de frações e duas propostas de tarefas**, apresentada pela aluna **Pamella Silva Nascimento (SP3010546)** do curso superior em **Licenciatura em Matemática**, (Câmpus São Paulo). Os trabalhos foram iniciados às 9h00 pelo Professor presidente da banca examinadora, constituída pelos seguintes membros:

Membros	IES	Presença (Sim/Não)	Aprovação/Conceito (Quando Exigido)
Lucas Casanova Silva (Presidente/Orientador)	IFSP	Sim	10,0
Amanda Cristina Teagno Lopes Marques (Examinadora 1)	IFSP	Sim	10,0
Henrique Marins de Carvalho (Examinador 2)	IFSP	Sim	10,0

Observações:

A banca examinadora, tendo terminado a apresentação do conteúdo da monografia, passou à arguição da candidata. Em seguida, os examinadores reuniram-se para avaliação e deram o parecer final sobre o trabalho apresentado pela aluna, tendo sido atribuído o seguinte resultado:

[X] Aprovada [ ] Reprovada Nota (quando exigido): 10,0

Proclamados os resultados pelo presidente da banca examinadora, foram encerrados os trabalhos e, para constar, eu lavrei a presente ata que assino juntamente com os demais membros da banca examinadora.

Câmpus São Paulo, 13 de janeiro de 2022

Assinatura:

Documento assinado eletronicamente por:

- **Lucas Casanova Silva**, **PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO**, em 13/01/2022 11:58:28.
- **Amanda Cristina Teagno Lopes Marques**, **PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO**, em 13/01/2022 12:04:36.
- **Henrique Marins de Carvalho**, **PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO**, em 13/01/2022 15:16:51.

Este documento foi emitido pelo SUAP em 13/01/2022. Para comprovar sua autenticidade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse https://suap.ifsp.edu.br/autenticar-documento/ e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 283349
Código de Autenticação: 8d66095d13

Ensinar é um ato teatral. E esse é aspecto do nosso trabalho que proporciona espaço para as mudanças, a invenção e as alterações espontâneas que podem atuar como catalisadoras para evidenciar os aspectos únicos de cada turma.

(Bell Hooks)

À minha mãe Dulce

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pela vida, saúde e por todas as oportunidades cedidas.

Agradeço à pessoa mais importante da minha vida, minha mãe, Dulce.

Minha mãe sempre esteve ao meu lado, desde as alegrias da satisfação de um bom trabalho, até as lágrimas escorridas por alguma chateação.

Obrigada por tudo, pela ajuda emocional e financeira, por todos os direcionamentos.

Agradeço ao meu namorado, Palladino, por todas as conversas com milhões de conselhos, todas as saídas para eu esquecer um pouco do mundo da faculdade, cada ombro amigo para eu chorar, todas as vezes que leu um trabalho antes da entrega ou ouviu a minha apresentação repetidas vezes. Obrigada por tudo.

Agradeço a minha irmã, Karen e meu sobrinho de 4 anos, Vicente, por me ajudarem a me distrair com conversas, brincadeiras e pelo apoio em toda a faculdade.

Agradeço aos meus colegas de turma, em especial a Beatriz, uma grande amizade que a faculdade me deu. Ela e eu fizemos a maioria dos trabalhos juntas, passamos dias e dias pensando em um mesmo exercício, estudamos, reclamamos com os professores e comemoramos os bons trabalhos juntas também. Acompanhados a ela, quero agradecer o Henrique e o Iago. Nós quatro formamos o quarteto fantástico dos trabalhos. Os meninos sempre me auxiliaram nas disciplinas, inclusive, o Henrique e eu no começo do curso fizemos muitos trabalhos e cursos juntos. Obrigada.

Agradeço todo carinho e apoio que a Melina me deu em toda a faculdade e a ajuda nas disciplinas mais difíceis e parceria no Programa de Residência Pedagógica (PRP) do Rodrigo.

Agradeço a Débora, Érica e Kátia por me acolherem e auxiliarem com suas experiências.

Agradeço a todos os professores do IFSP que de algum modo me ajudaram em cada semestre, quero destacar o/a Armando, Daniel, Diogo, Elisabete, Flávia, Gileno, Larissa, Lauro, Leandro, Lucas Silva, Marice, Patricia, Silvio, Tais e Wellington.

Agradeço ao meu professor preceptor do Programa de Residência Pedagógica (PRP), Marcelo, a todo espaço dado para eu desenvolver atividades com as turmas dele, aos bons frutos que estas atividades forneceram e de me deixar ficar um pouco mais perto da atuação docente. Inclusive, agradeço os alunos do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID) e do PRP por me deixarem auxiliar na caminhada de aprendizagem deles.

Além destes, agradeço o meu orientador Lucas Casanova que esteve comigo nesta jornada destes 2 anos, fez com que eu me interessasse por um assunto incrível, me ensinou muito, me mostrou autoras incríveis e me apoiou nas minhas ideias. Quero agradecer a um membro da minha banca, o professor Henrique, que também me mostrou um universo de temas interessantes e que desde o primeiro semestre da faculdade me ajudou em minhas inseguranças. Por fim, quero agradecer a outra membra da minha banca, a professora Amanda, que mesmo que, apesar de ter ministrado apenas duas disciplinas para mim, me apresentou diversos autores que fez com que eu me encantasse pela área pedagógica.

Agradeço ao meu professor do Ensino Médio, Luciano, que foi determinante na minha escolha de fazer licenciatura em Matemática.

Por fim, agradeço aos meus amigos do Ensino Médio que sempre me apoiaram e me aceitaram do jeito que sou, destaco o/a Daniel, Isabelly, Julia e Kauany.

RESUMO

Este trabalho pretende analisar as principais dificuldades na aprendizagem do conteúdo de frações e apresentar duas propostas de tarefas de acordo com as dificuldades analisadas. Utilizamos como metodologia, a pesquisa bibliográfica e como fonte de pesquisa são considerados a dissertação de mestrado de Costa (2014) e o artigo acadêmico de Oliveira (2016). Além disso, é considerado o que os documentos oficiais como os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) apresentam sobre este conteúdo. Os trabalhos acadêmicos e os documentos mostraram que existem algumas dificuldades em comum que os alunos apresentam no aprendizado deste conteúdo, como entender o significado dos números fracionários, tendo como consequência, por exemplo, equívocos nas quatro operações básicas, problemas na transição entre as diferentes representações, dificuldade em questões contextuais, simplificação, mínimo múltiplo comum (mmc), frações equivalentes e problemas na localização de uma fração na reta numérica. Foi percebido que muitas dessas dificuldades perpassam os anos escolares e podem ter sido causadas pela ruptura de ideias na transição dos números naturais para os racionais, utilização dos algoritmos tradicionais, aversão à disciplina ou até mesmo pela metodologia empregada pelo professor. Ademais, nos PCNs são listados alguns obstáculos que os alunos podem ter na aprendizagem do conteúdo dos números racionais, enquanto na BNCC não é feita esta análise.

Palavras-chaves: Dificuldades. Aprendizagem. Frações. Mentalidades Matemáticas. Conversas Numéricas.

ABSTRACT

This work intends to analyze the main difficulties in learning the content of fractions and present two task proposals according to the analyzed difficulties. We used as methodology, the bibliographic research and as a source of research, Costa's master's dissertation (2014) and the academic article by Oliveira (2016) are considered. Furthermore, it is considered what official documents such as the National Curriculum Parameters (PCNs) and the Common National Curriculum Base (BNCC) present about this content. Academic works and documents showed that there are some common difficulties that students have in learning this content, such as understanding the meaning of fractional numbers, resulting, for example, in mistakes in the four basic operations, problems in the transition between the different representations, difficulty in contextual issues, simplification, least common multiple (mmc), equivalent fractions and problems in locating a fraction on the number line. It was noticed that many of these difficulties permeate the school years and may have been caused by the rupture of ideas in the transition from natural to rational numbers, use of traditional algorithms, aversion to discipline or even the methodology used by the teacher. Furthermore, in the PCNs some obstacles that students may have in learning the content of rational numbers are listed, while in the BNCC this analysis is not performed.

Keywords: Difficulties. Learning. Fractions. Mathematical Mindsets. Numerical Conversations.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

TCC	Trabalho de Conclusão de Curso
PRP	Programa de Residência Pedagógica
IFSP	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo
PCNs	Parâmetros Curriculares Nacionais
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
EJA	Educação de Jovens e Adultos

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Neste Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) falaremos sobre as principais dificuldades na aprendizagem das frações e apresentaremos duas propostas de tarefas sobre o tema.

Este tema foi escolhido a partir de um estudo que a autora desenvolveu pelo Programa de Residência Pedagógica (PRP) em Licenciatura em Matemática no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo (IFSP).

Em um dos trabalhos elaborados no PRP, era necessário escolher algum conteúdo matemático para que houvesse uma investigação sobre as dificuldades que os alunos têm diante dele. Assim, a autora, em conjunto com o colega Rodrigo Carvalho, analisou o trabalho acadêmico de Silva e Martinez (2017), que indica fração e decimal como os conteúdos que os alunos têm mais dificuldade na Matemática Básica, e que estes conteúdos são um empecilho para a assimilação de outros conteúdos durante Ensino Médio. Então, visando esta análise e delimitação do tema, para este TCC foi decidido estudar o conteúdo de frações.

Paralelamente aos estudos do PRP, em uma disciplina do 7º semestre denominada Prática de Ensino 3, a autora aprofundou suas pesquisas nas dificuldades de aprendizagem do conteúdo de frações com artigos acadêmicos, documentos que são parâmetros para a elaboração do currículo e na elaboração de uma tarefa que suprisse algumas destas dificuldades, o Bingo das Frações.

Além do mais, desde março de 2020, juntamente com o Professor Mestre Lucas Casanova Silva, estudamos, por meio de Boaler (2018), o tema de Mentalidades Matemáticas e, por meio de Humphreys e Parker (2019), o tema de Conversas Numéricas. Diante de diversos tópicos relevantes, decidimos abordar alguns tipos de tarefas matemáticas que as autoras trazem.

O objetivo geral deste TCC é analisar as dificuldades na aprendizagem do conteúdo de frações e a partir desta análise, apresentar duas propostas de tarefas.

Tendo como objetivos específicos:

- Analisar trabalhos acadêmicos que versam sobre as dificuldades na aprendizagem das frações;
- Analisar como é abordado o conteúdo de frações nos documentos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) e Base Nacional Comum Curricular (BNCC);
- Apresentar como é possível adaptar uma tarefa matemática já existente, de acordo com Jo Boaler (2018).

Para a investigação sobre as dificuldades na aprendizagem das frações, foi realizada uma pesquisa bibliográfica.

> A pesquisa bibliográfica é um apanhado geral sobre os principais trabalhos já realizados, revestidos de importância, por serem capazes de fornecer dados atuais e relevantes relacionados com o tema. (MARKONI; LAKATOS, 2003, p. 158)

Como fonte de pesquisa foram analisados textos que abordam as dificuldades na aprendizagem das frações. Para a escolha da dissertação de mestrado de Costa (2014), utilizamos o Catálogo de Teses e Dissertações com filtro “dificuldades” AND “fracoes” AND “ensino fundamental”. Com este filtro, encontramos 25 trabalhos, e após leituras, escolhemos o trabalho que trouxesse um questionário com uma análise aprofundada das dificuldades da aprendizagem no conteúdo de frações, para que assim pudéssemos alcançar o nosso objetivo de pesquisa. Já o artigo de Oliveira (2016) foi escolhido a partir de leituras sobre artigos que investigam as dificuldades na aprendizagem das frações, novamente, escolhemos o que mais se adequa ao nosso objetivo de pesquisa.

Ainda como fonte de pesquisa, foi analisado como o conteúdo de frações é apresentado nos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997, 1998) e Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018).

Já para as duas propostas de tarefas e para a adaptação de uma tarefa matemática, nos baseamos nas obras: “Mentalidades Matemáticas: estimulando o potencial dos estudantes por meio da matemática criativa, das mensagens inspiradoras e do ensino inovador” de Jo Boaler (2018), “Conversas Numéricas: Estratégias de Cálculo Mental para uma Compreensão Profunda da Matemática” de Cathy Humphreys e Ruth Parker (2019) e uma tarefa elaborada pela própria autora deste TCC.

O nosso trabalho está dividido em três capítulos:

No primeiro capítulo temos a análise das principais dificuldades na aprendizagem das frações, de acordo com a dissertação de mestrado de Costa (2014) e do artigo acadêmico de Oliveira (2016).

No segundo capítulo temos a análise de como é a abordagem do conteúdo de frações em dois documentos que são parâmetros para a elaboração do currículo, sendo eles os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997, 1998) e a Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018).

Para finalizar, no terceiro capítulo temos duas propostas de tarefas para o conteúdo de frações, as Conversas Numéricas (HUMPHREYS; PARKER, 2019) e o Bingo das Frações. Estas tarefas foram escolhidas a partir das análises e conclusões que obtivemos sobre a dissertação de mestrado, o artigo acadêmico e os dois documentos oficiais. Além disso, apresentaremos como o professor pode adaptar uma tarefa matemática já existente, de acordo com Boaler (2018).

O tema escolhido pode acrescentar aos alunos e professores outra perspectiva sobre a aprendizagem das frações, na qual tem-se como foco as dificuldades dos alunos neste conteúdo, que muitas vezes os prejudicam nos conteúdos futuros no Ensino Médio. Além do mais, com nossas propostas de tarefas e a apresentação de como adaptar uma tarefa matemática, alunos e professores podem se sentir motivados em utilizá-las ou até mesmo adaptar uma tarefa já existente, a fim de melhorar a aprendizagem.

1 PRINCIPAIS DIFICULDADES NA APRENDIZAGEM DAS FRAÇÕES

Neste capítulo veremos quais são as principais dificuldades dos alunos no aprendizado de frações. Para isso, vamos utilizar como apoio a dissertação de mestrado de Costa (2014), que analisou o conhecimento dos alunos do 1º e 3º anos do Ensino Médio sobre frações e o artigo de Oliveira (2016), que analisou as dificuldades de alunos do 9º ano do Ensino Fundamental e do 3º ano do Ensino Médio nesse mesmo conteúdo.

A seguir, observaremos a dificuldade que os alunos têm em relação ao conceito dos números fracionários, então, primeiramente, vamos apresentar a definição dos números racionais. De acordo com Asth [s.d.], “os números racionais são os números que podem ser escritos na forma de fração. Esses números podem também ter representação decimal finita ou decimal infinita e periódica.”.

> O conjunto dos números racionais pode ser representado por: $\mathbb{Q}=\left\{\frac{a}{b}\,|\,a\in\mathbb{Z}\ e\ b\in\mathbb{Z}^*\right\}$. A definição do conjunto $\mathbb{Q}$, pode ser lida como: um quociente entre um número a por um número b, tal que, a pertença ao conjunto dos números inteiros,e b permaneça ao conjunto dos números inteiros sem o zero. (ASTH, s.d)

Ainda por Asth [s.d.], “[...] o conjunto dos números racionais, representado por $\mathbb{Q}$, contém o conjunto dos números inteiros, que por sua vez contém o conjunto dos números naturais, ou seja, $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}$.”.

Mesmo que muitos alunos vejam o conteúdo de frações como sendo algo fácil, trabalhos (por exemplo o de SILVA; MARTINEZ, 2017) mostram que esse conteúdo é um dos que os alunos têm mais dificuldade na Matemática Básica, juntamente com números decimais. Além do mais, esses conteúdos viram empecilho para o aprendizado de conteúdos futuros no Ensino Médio.

> No âmbito educacional, o conteúdo de fração é um dos mais importantes da matemática no Ensino Fundamental, no entanto, é ainda um dos que mais apresenta dificuldades por toda a vida escolar do aluno, visto que muitos o entendem como sendo “fácil”, não dispõe de atenção para aprender

> realmente o conteúdo e assim se perpetuam as dificuldades (FONSECA; SANTOS, 2019, p. 51).

Na dissertação de mestrado de Costa (2014), o autor investigou as dificuldades dos alunos do 1º e 3º ano do Ensino Médio na aprendizagem de frações por meio de um questionário, analisou como esse conteúdo aparece em dois livros didáticos e deu a sugestão de uma sequência de aula para o 6º ano do Ensino Fundamental ou como revisão para o Ensino Médio. Para o nosso trabalho, focaremos no questionário.

De início, Costa (2014, p. 13), que é professor de Matemática há mais de 10 anos, diz que essa dissertação de mestrado surgiu da dificuldade que ele percebeu que os alunos têm na Matemática quando aparece o conteúdo de frações e que, consequentemente, os outros conteúdos não fluem bem. Ele afirma que as dificuldades perpassam por números e operações, especificamente nas frações. Dito isso, o autor apresenta uma hipótese em relação ao desgosto que os alunos têm em relação à disciplina.

> Partindo desta dificuldade, me arrisco a conjecturar que muitos alunos não gostam de matemática, pois não dominam o campo numérico com suas operações. E que se for feito um trabalho no sentido de facilitar essa aprendizagem os resultados vão aparecer na aprendizagem de outros assuntos com muito mais facilidade e consequente aumento do gosto pela disciplina (COSTA, 2014, p. 13).

Além do mais, o autor cita que os dados obtidos são de uma realidade particular de Macapá, e por isto será necessária uma análise criteriosa, porém, como veremos no artigo mais adiante, as dificuldades na aprendizagem das frações também são observadas em uma escola no Paraná, na qual o questionário foi aplicado. Então, é possível supor que essas dificuldades aparecem em várias localidades do Brasil.

O questionário continha 8 questões de múltipla escolha e foi realizado com 22 alunos do 1º ano do Ensino Médio e 16 alunos do 3º ano do Ensino Médio de uma escola estadual. Estes anos foram escolhidos, pois o autor queria verificar o conhecimento dos alunos na entrada e saída do Ensino Médio. Ademais, para este trabalho vamos abordar 5 dessas questões (terceira, quarta, sexta, sétima e oitava questões), pois são as que o autor analisou como sendo as mais preocupantes e fez análises mais aprofundadas.

A seguir, vamos explicitar quais eram as questões para conseguirmos entender o que cada uma requeria do aluno e quais as dificuldades encontradas por eles.

A terceira e oitava questões tinham como objetivos: “Identificar quantidade fracionária em seu contexto sociocultural e relacionar com a ideia do número fracionário correspondente; perceber os aspectos conceituais e compreensivos dos números fracionários.” (COSTA, 2014, p. 17). Essas duas questões demandam a mesma resposta, mas foram elaboradas de maneiras diferentes.

A terceira questão era um exercício contextualizado, “Suponha que você tenha duas pizzas do mesmo tamanho. Corta uma delas em seis pedaços de tamanhos iguais e a outra em oito pedaços de tamanhos iguais. Se você pega um pedaço de cada pizza, de qual pizza você pegou mais? Da primeira ou da segunda pizza?”. O autor concluiu que os alunos do primeiro ano tiveram um desempenho superior aos alunos do terceiro ano, sendo 63,64% (14) respostas corretas e 36,36% (8) respostas incorretas contra 50% (8) respostas corretas e 50% (8) respostas incorretas (COSTA, 2014, p. 18).

Já a oitava questão era um exercício com enunciado direto, “Que fração é maior, 1/6 ou 1/8?”. No primeiro ano foram 22,73% (5) respostas corretas, 54,54% (12) respostas incorretas e 22,73% (5) que não responderam, contra 25% (4) respostas corretas, 68,75% (11) respostas incorretas e 6,25% (1) que não responderam dos alunos do terceiro ano. O autor concluiu que, “Em ambos os casos os alunos tiveram um alto percentual de erro. O maior percentual de acertos do 3º ano em relação ao 1º ano é 2,27 pontos percentuais, mas mesmo assim o percentual de acerto do 3º ano é muito baixo.” (COSTA, 2014, p. 22).

Em relação à terceira e oitava questões, o autor concluiu alguns pontos.

> [...] Os resultados obtidos mostram que 57,89% dos alunos questionados souberam identificar o maior pedaço de pizza, mas não souberam relacionar com sua representação numérica em que somente 23,68% identificaram a fração maior. Entre os alunos do 1º ano, 63,64% acertaram a Terceira Questão, e destes somente 21,43% acertaram a Oitava Questão. Agora dentre os 50% dos alunos do 3º ano que acertaram a Terceira Questão, 50% também acertaram a Oitava Questão. Apresentando uma melhora significativa, mas preocupante. A maioria desses alunos não conseguiu relacionar a fração (objeto concreto) com sua representação numérica. (COSTA, 2014, p. 23).

A sexta e sétima questões também tinham o mesmo objetivo e ambas demandam a mesma resposta, entretanto foram elaboradas com diferentes tipos de representações de divisão entre frações: “Mostrar o procedimento usual de divisão de frações (primeira fração multiplicada pelo inverso da segunda); identificar formas diferentes de se representar a divisão.” (COSTA, 2014, p. 20).

A sexta questão era um exercício com enunciado direto, “O resultado da operação 1/2 / 1/3 é:” As opções de resposta eram: a) 2/3, b) 3/4, c) 3/2, d) 1/6 e e) 2/5. O autor concluiu (COSTA, 2014, p. 20), nesta questão, que a dificuldade é reduzida no terceiro ano, entretanto, ambos os anos obtiveram alto percentual de erro, sendo que as respostas dos alunos do primeiro ano se dividiram em:

a) 31,81% (7)

b) 13,64% (3)

c) 4,55% (1)

d) 9,09% (2)

e) 36,36% (8)

Não responderam 4,55% (1)

Já as respostas dos alunos do terceiro ano se dividiram em:

a) 25% (4)

b) 6,25% (1)

c) 56,25% (9)

d) 12,50% (2)

e) 0% (0)

Não responderam 0% (0)

A sétima questão também era um exercício com enunciado direto, “O valor de x = 1/2 : 1/3 é:”. As opções de resposta eram as mesmas da questão anterior. Novamente, segundo o autor (COSTA, 2014, p. 22), houve um alto percentual de erro, entretanto os alunos do terceiro obtiveram um percentual maior de acerto, sendo de 40,91 pontos percentuais. As respostas dos alunos do primeiro ano se dividiram em:

a) 18,18% (4)

b) 4,55% (1)

c) 9,09% (2)

d) 31,82% (7)

e) 36,36% (8)

Não responderam 0% (0)

Já as respostas dos alunos do terceiro ano se dividiram em:

a) 6,25% (1)

b) 12,50% (2)

c) 50% (8)

d) 31,25% (5)

e) 0% (0)

Não responderam 0% (0)

Em relação à sexta e sétima questões, o autor teve algumas conclusões interessantes.

> Dentre os alunos do primeiro ano, independente da resolução certa ou errada, somente 18,18% respondeu a mesma alternativa, porém ninguém respondeu a alternativa correta. O que mostra o baixo entendimento da forma de representação da divisão e o não conhecimento da forma de resolução da divisão entre frações. Agora entre os alunos do terceiro ano foi observada uma grande melhora, pois 62,50% foram coerentes na resolução das questões. E dentre esses, 60% escolheram a alternativa correta em ambas às questões. A divisão e a adição se mostram desta forma como operações críticas e preocupantes (COSTA, 2014, p. 23).

A quarta questão tinha como objetivo: “Estabelecer relações e atribuir significado as (sic) operações com números fracionários (não decimais); efetuar a adição entre frações usando procedimentos correto.” (COSTA, 2014, p. 18).

Esta também era uma questão com enunciado direto, “O resultado da operação 1/2 + 1/3 é:”. Sendo que as opções de resposta eram: a) 1/6, b) 2/5, c) 2/6 = 1/3, d) 5/6 e e) 6/5.

As respostas dos alunos do primeiro ano se dividiram em:

a) 4,55% (1)

b) 72,72% (16)

c) 9,09% (2)

d) 9,09% (2)

e) 4,55% (1)

Não responderam 0% (0)

Já as respostas dos alunos do terceiro ano se dividiram em:

a) 6,25% (1)

b) 81,25% (13)

c) 0% (0)

d) 12,50% (2)

e) 0% (0)

Não responderam 0% (0)

O autor concluiu (COSTA, 2014, p. 19) que mesmo que o terceiro ano tenha tido um percentual maior de acerto, sendo de 3,41 pontos percentuais, o percentual de erro foi grande em ambas as séries. É possível verificar que a maioria dos alunos somam os numeradores e depois somam os denominadores, sendo que 72,72% dos alunos do primeiro ano e 81,25% dos alunos do terceiro ano escolheram a alternativa que refere a este procedimento, 2/5.

Além disso, o autor destaca (COSTA, 2014, p. 23) que nessa questão, os alunos poderiam analisar que está sendo somada a metade com a terça parte, então o resultado seria uma fração que representa mais que a metade. Ou os alunos poderiam utilizar a resolução por frações equivalentes.

Os resultados obtidos na quarta questão são bem interessantes, pois podemos ver que além de faltar nos alunos a compreensão do significado do número fracionário para observar qual resposta faria sentido ou não, é possível notar que a grande maioria, provavelmente, aplicou um algoritmo ensinado, entretanto, eles aplicaram um algoritmo que poderia ser da multiplicação entre frações, em uma operação que não condiz, que é a adição, ou seja, na multiplicação realizando o produto entre numeradores e o produto entre denominadores, já na adição, erroneamente, realizando a soma entre numeradores e a soma entre denominadores quando se tem denominadores diferentes.

Com este erro observado na quarta questão e as análises sobre as dificuldades, podemos pensar se os professores estimulam nos alunos a compreensão das frações além dos algoritmos e se são feitas tarefas que desenvolvam o entendimento do significado das frações utilizando o raciocínio lógico. “[...] o algoritmo, mesmo feito corretamente, pouco contribui se os alunos também não tiverem uma noção do quanto suas respostas são razoáveis. Qual é a contribuição de um algoritmo se a resposta for sem sentido?” (HUMPHREYS; PARKER, 2019, p. 121)

Para finalizar, o autor destaca que “Em geral é preciso pensar um mecanismo pra (sic) corrigir a defasagem em relação ao conhecimento de frações com que nossos alunos chegam ao Ensino Médio.” (COSTA, 2014, p. 24).

Em suma, percebe-se que algumas dificuldades como passar a fração (objeto concreto) para a representação numérica, diferentes representações para a divisão de frações, somar numerador com numerador e denominador com denominador, ver significado nos números fracionários e as frações equivalentes apareceram nesta atividade.

Já no artigo de Oliveira (2016), a autora investiga as dificuldades dos alunos do 9º ano do Ensino Fundamental e do 3º ano do Ensino Médio no conteúdo de números racionais, especificamente nas representações de ponto racional e fração, por meio de uma sequência de atividades com 11 questões e nesse artigo são abordadas 2 dessas questões, “Tal sequência era composta por 11 questões, porém nesse artigo é abordado apenas duas pela limitação de páginas [...]” (OLIVEIRA, 2016, p. 4).

A sequência de atividades foi realizada com 72 alunos do 9º ano do Ensino Fundamental e 62 alunos do 3º ano do Ensino Médio em três escolas públicas. Esses anos foram escolhidos, pois a autora acredita que no 9º ano do Ensino Fundamental os alunos já estudaram esse conteúdo e gostaria de observar se as dificuldades permanecem até o 3º ano do Ensino Médio (OLIVEIRA, 2016, p. 4).

Ademais, a sequência de atividades foi elaborada tendo como base um quadro, elaborado pela autora, de uma síntese do que dizem os documentos oficiais, como os PCNs, e o que outros autores apresentam sobre as dificuldades do conteúdo analisado.

Novamente vamos explicitar quais eram as questões para conseguirmos entender o que cada uma requeria do aluno e quais as dificuldades encontradas.

A primeira questão explora a representação de ponto racional. Nesta é perguntado entre quais números inteiros o número 11/4 se localiza. Acompanhando o enunciado, tem-se uma reta numérica que vai de -4 a 4, com 1 unidade de distância entre os números.

A autora organizou em agrupamentos as dificuldades dos alunos. Em alguns tópicos, a autora fez algumas hipóteses em relação à resolução de algum(-ns) aluno(s) em particular. Sendo que tiveram erros como:

- Apontar a fração entre dois números inteiros quaisquer, sem realizar cálculos e marcar algo na reta numérica (OLIVEIRA, 2016, p. 5);
- Apontar que a fração está em um número inteiro da reta numérica dada, novamente sem realizar cálculos e marcar algo na reta numérica. Como hipótese para essa dificuldade, a autora aponta que “Há indícios que os mesmos não identificam fração como uma divisão e que concebem fração como dois números distintos [...]” (OLIVEIRA, 2016, p. 6). Um aluno respondeu “no 4 positivo” e outro respondeu “no número 0”;
- Efetuar a operação de 11 dividido por 4, obter o resultado correto, mas localizar erroneamente na reta numérica (OLIVEIRA, 2016, p. 6);
- Identificar a fração entre mais de dois números inteiros da reta numérica dada e não realizar cálculos. Novamente a hipótese do item 2 é mencionada pela autora, nessa dificuldade um dos alunos respondeu como, “11 está entre o 2 e 3; 4 está no número 1” (OLIVEIRA, 2016, p. 7);
- Localizar a fração entre dois números racionais. Como hipótese, a autora indica que “Há indícios que o mesmo não concebe fração como uma divisão e não sabe o conceito de números inteiros, já que aponta números racionais.” (OLIVEIRA, 2016, p. 7). Um aluno respondeu como sendo “3,5 e 2,5”.

A autora concluiu (OLIVEIRA, 2016, p. 8), sobre a primeira questão, que mesmo que a maioria dos alunos escolham dois pontos quaisquer da reta numérica, os alunos do 3º ano apresentam menos tipos de dificuldades, sendo que foram 37 respostas corretas, 22 incorretas e 3 em branco, contra 10 corretas, 43 incorretas e 19 em branco dos alunos do 9º ano do Ensino Fundamental. Entretanto, a autora ressalta que ainda existem muitas dificuldades em ambas as séries.

Já a segunda questão explora a representação fracionária. Nesta, temos uma questão contextualizada acompanhada de um quadro repartido em duas linhas e duas colunas, sendo que em uma coluna temos 1 torta e dois meninos embaixo e na outra coluna temos 1 torta e três meninas. A questão diz: “As meninas dividem uma torta e os meninos também dividem uma torta igual a das meninas, em partes iguais. a) Que fração da torta vai comer cada menino? E cada menina? b) Quem come mais, os meninos ou as meninas? Justifique sua resposta.”.

Novamente a autora organizou em agrupamentos as dificuldades dos alunos. Em alguns tópicos, a autora fez algumas hipóteses em relação à resolução de algum(-ns) aluno(s) em particular. Sendo que tiveram erros como:

- Indicar a fração que cada um vai comer incorretamente e responder que os meninos comem mais. Como hipótese, a autora diz que “Há indícios que o aluno apresenta dificuldades ao representar uma figura em fração, já que ao responder que come mais, indica que são os meninos.” (OLIVEIRA, 2016, p. 9);
- Representar as figuras por frações incorretas e responder que as meninas comem mais. Nesta dificuldade, um dos alunos respondeu como “1,5/3 para cada menino”, como hipótese, a autora diz que

> Há indícios que o aluno apresenta dificuldades em representar uma fração, já que o numerador e o denominador devem ser números inteiros, e não identifica o conceito de fração, não relacionando a parte com o todo. (OLIVEIRA, 2016, p. 9)

- Representar as figuras por frações incorretas e não responder quem come mais. Como hipótese, novamente, a autora diz que “Há indícios que o aluno apresenta dificuldades em representar uma figura por uma fração, em relacionar a parte com o todo [...]". (OLIVEIRA, 2016, p. 10) Um dos alunos inverteu o numerador com o denominador e consequentemente não respondeu a segunda pergunta;

- Representar as figuras por frações incorretas e responder que as meninas e meninos comem partes iguais. Novamente a hipótese do item 3 é citada pela autora (OLIVEIRA, 2016, p. 10).

Oliveira (2016, p. 10) concluiu, sobre a segunda questão, que as dificuldades atravessam os anos escolares e que os alunos do 3º ano do Ensino Médio ainda têm dificuldades em transformar uma representação pictórica em uma representação fracionária, sendo que foram 42 respostas corretas, 18 incorretas e 2 em branco, contra 42 corretas, 25 incorretas e 5 em branco dos alunos do 9º ano do Ensino Fundamental.

Em relação ao enunciado empregado na segunda questão, "As meninas dividem uma torta e os meninos também dividem uma torta igual a das meninas, em partes iguais.", vale salientar que na forma que o enunciado foi elaborado, pode haver uma confusão de interpretação, já que não diz que as tortas seriam divididas de acordo com o número de pessoas (de meninas e de meninos), apenas que seriam divididas em partes iguais. Visto isso, o aluno pode ter errado a questão não por falta de conhecimento matemático e sim pela confusão gerada pelo enunciado.

É possível verificar que dificuldades como leitura, interpretação, significado das frações, conceito dos números inteiros e principalmente a localização de uma fração na reta numérica e a passagem da representação pictórica para uma representação fracionária estão presentes nessa sequência de atividades. Essas dificuldades que percorrem os anos escolares são preocupantes, pois como veremos posteriormente nos PCNs, muitos desses tópicos são estudados nos anos iniciais do Ensino Fundamental e por meio desta pesquisa percebemos que a defasagem quanto ao conteúdo dos números racionais é uma realidade.

Esses problemas no aprendizado de frações indicam para o ensino de Matemática que os professores dos anos iniciais precisam dar um foco necessário a este conteúdo, já que as dificuldades perpassam muitas vezes até o Ensino Superior. Além do mais, os professores de todos os anos escolares devem estimular os alunos a raciocinar para além dos algoritmos tradicionais, buscando encontrar sentido e entendendo o conceito dos números fracionários. Eventualmente, será necessário que o professor altere sua própria metodologia, para que os alunos vejam a disciplina como algo interessante e prazeroso de ser aprendido.

2 ABORDAGEM DAS FRAÇÕES NOS DOCUMENTOS OFICIAIS

Neste capítulo veremos o que documentos que servem de base para a elaboração do currículo como os Parâmetros Curriculares Nacionais e a Base Nacional Comum Curricular apresentam sobre o conteúdo dos números racionais, especificamente os números fracionários.

2.1 Parâmetros Curriculares Nacionais

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) diferentemente da Base Nacional Comum Curricular, não é um documento obrigatório para a elaboração do currículo da escola, entretanto, por conta de estudos feitos pela autora no Ensino Superior, foi percebido tal importância do documento para reflexão como futura docente. Por conta disso, escolhemos os PCNs como forma de somar o debate acerca das dificuldades dos alunos na aprendizagem das frações.

De acordo com Menezes (2001), os PCNs são

> Conjunto de textos, cada um sobre uma área de ensino, que serve para nortear a elaboração dos currículos escolares em todo o país. Os PCNs não constituem uma imposição de conteúdos a serem ministrados nas escolas, mas são propostas nas quais as Secretarias e as unidades escolares poderão se basear para elaborar seus próprios planos de ensino. (MENEZES, 2001)

“O propósito dos Parâmetros é apontar metas de qualidade que ajudem o aluno a enfrentar o mundo atual como cidadão participativo, reflexivo e autônomo, conhecedor de seus direitos e deveres”, ressalta o antigo Ministro da Educação e do Desporto, Paulo Renato Souza (BRASIL, 1997, prefácio).

Os PCNs são divididos em quatro ciclos com dois anos letivos em cada. Primeiro ciclo é composto pelas 1ª e 2ª séries, segundo ciclo é composto pelas 3ª e 4ª séries, terceiro ciclo é composto pelas 5ª e 6ª séries e o quarto ciclo é composto pelas 7ª e 8ª séries (atuais 2º, 3º, 4º, 5º, 6º, 7º, 8º e 9º anos, respectivamente). Serão destacados alguns pontos sobre os números racionais, especificamente na representação fracionária que se encontram no segundo e terceiro ciclos.

No quadro 1 estão selecionados os tópicos dos PCNs que abordam os objetivos para o segundo ciclo e objetivos conceituais e procedimentais dos números racionais na representação fracionária.

Quadro 1 - Objetivos e conteúdos conceituais e procedimentais de números fracionários no segundo ciclo dos PCNs.

Objetivos para o segundo ciclo	Construir o significado do número racional e de suas representações (fracionária e decimal), a partir de seus diferentes usos no contexto social.
	Resolver problemas, consolidando alguns significados das operações fundamentais e construindo novos, em situações que envolvam números naturais e, em alguns casos, racionais.
Conteúdos conceituais e procedimentais	Reconhecimento de números naturais e racionais no contexto diário.
	Leitura, escrita, comparação e ordenação de representações fracionárias de uso frequente.
	Reconhecimento de que os números racionais admitem diferentes (infinitas) representações na forma fracionária.
	Identificação e produção de frações equivalentes, pela observação de representações gráficas e de regularidades nas escritas numéricas.
	Exploração dos diferentes significados das frações em situações-problema: parte todo, quociente e razão.
	Observação de que os números naturais podem ser expressos na forma fracionária.
	Relação entre representações fracionária e decimal de um mesmo número racional.
	Análise, interpretação, formulação e resolução de situações-problema, compreendendo diferentes significados das operações envolvendo números naturais e racionais.
	Reconhecimento de que diferentes situações-problema podem ser resolvidas por uma única operação e de que diferentes operações podem resolver um mesmo problema.
	Desenvolvimento de estratégias de verificação e controle de resultados pelo uso do cálculo mental e da calculadora.
	Decisão sobre a adequação do uso do cálculo mental — exato ou aproximado — ou da técnica operatória, em função do problema, dos números e das operações envolvidas.

Fonte: Adaptado de Brasil (1997, p. 55 - 59).

Segundo os PCNs (BRASIL, 1997, p. 67), o objetivo principal do segundo ciclo no ensino do conteúdo dos números racionais é fazer com que o aluno entenda que os números naturais já não são mais suficientes para determinados problemas, como a medida de uma grandeza e o resultado de uma divisão, por exemplo.

Neste ciclo ainda não são trabalhados os inteiros negativos, apenas os naturais, então os números racionais são tratados como quocientes dos números naturais. "[..] a aprendizagem dos números racionais supõe rupturas com idéias construídas pelos alunos acerca dos números naturais, e, portanto, demanda tempo e uma abordagem adequada." (BRASIL, 1997, p. 67).

Os PCNs listam alguns obstáculos que os alunos podem enfrentar em relação a transição dos números naturais para os racionais:

- Diferentes e infinitas representações de um mesmo número na forma fracionária: 1/4, 2/8, 3/12, 4/16 (BRASIL, 1997, p. 67);
- Comparação entre racionais: acostumados com 3 > 2, pode ser contraintuitivo pensar em 1/3 < 1/2 (BRASIL, 1997, p. 67);
- "Na multiplicação entre dois naturais diferentes de 0 e 1, a expectativa era de encontrar um número maior que ambos, por exemplo, 10x5 = 50. Já na operação 10x1/2 = 5, se surpreendem ao ver que o valor é menor que 10" (BRASIL, 1997, p. 67).

Ademais, os PCNs listam algumas formas de interpretações dos números fracionários:

- "Relação parte-todo: quando um todo se divide em partes, como exemplo, divisões de um chocolate" (BRASIL, 1997, p. 68);
- "Quociente: divisão de um natural pelo outro (a:b = a/b; b diferente de 0)" (BRASIL, 1997, p. 68);

- “Razão: índice comparativo entre duas quantidades de uma grandeza, como por exemplo, 2 de cada 3 habitantes de uma cidade são imigrantes” (BRASIL, 1997, p. 68).

De acordo com os PCNs (BRASIL, 1998, p. 100)

> Embora as representações fracionárias e decimais dos números racionais sejam conteúdos desenvolvidos nos ciclos iniciais, o que se constata é que os alunos chegam ao terceiro ciclo sem compreender os diferentes significados associados a esse tipo de número e tampouco os procedimentos de cálculo, em especial os que envolvem os racionais na forma decimal.

É descrito nos PCNs (BRASIL, 1998, p.101) que o objetivo principal, os obstáculos enfrentados e uma possível justificativa para essas dificuldades listadas anteriormente, persistem no terceiro ciclo.

Para finalizar, na abordagem de situações-problema que envolvem a medida de uma grandeza e o resultado de uma divisão, os PCNs sugerem os problemas históricos envolvendo medidas como sendo bons contextos para o ensino (BRASIL, 1998, p. 101).

Em suma, os PCNs explicitam a importância curricular dos números racionais na representação fracionária para os alunos, seja para estudos posteriores ou pela implementação de conceitos necessários que não estão incluídos no conjunto dos números naturais. Além do mais, nos próprios PCNs são descritos obstáculos que a aprendizagem desse conteúdo pode oferecer ao aluno e esta percepção pode auxiliar o docente na otimização de suas práticas pedagógicas, a fim de superar tais obstáculos.

Com a dissertação de mestrado, o artigo e os PCNs, foi possível observar que existem algumas dificuldades em comum que os alunos apresentam no aprendizado desse conteúdo, como entender o significado dos números fracionários, tendo como consequência, por exemplo, equívocos nas quatro operações básicas, problemas na transição entre as diferentes representações, dificuldade em questões contextuais, frações equivalentes, entre outros aspectos. Essas dificuldades podem ter sido causadas pelo mal entendimento ocorrido na transição entre conceitos e operações dos conjuntos numéricos, compreensão equivocada do número fracionário, aversão à disciplina ou até mesmo pela metodologia empregada pelo professor.

2.2 Base Nacional Comum Curricular

De acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018, p. 7)

> A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, de modo a que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento, em conformidade com o que preceitua o Plano Nacional de Educação (PNE).

A BNCC é dividida na etapa de Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio. Como estamos lidando com o conteúdo de frações, o nosso foco será na etapa de Ensino Fundamental, que é o momento da introdução desse conteúdo.

A BNCC apresenta equivalência, ordem, proporcionalidade, interdependência, representação, variação e aproximação, como ideias fundamentais que compõem diferentes campos da Matemática. “Essas ideias fundamentais são importantes para o desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos e devem se converter, na escola, em objetos de conhecimento.” (BRASIL, 2018, p. 268).

Também temos cinco unidades temáticas correlacionadas: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e medidas e Probabilidade e estatística. De acordo com a BNCC, as unidades temáticas “[...] orientam a formulação de habilidades a serem desenvolvidas ao longo do Ensino Fundamental. Cada uma delas pode receber ênfase diferente, a depender do ano de escolarização.” (BRASIL, 2018, p. 268).

O conteúdo de frações é apresentado na unidade temática de Números, a qual tem como finalidade desenvolver o pensamento numérico. É dito na BNCC (BRASIL, 2018, p. 268) que “No processo da construção da noção de número, os alunos precisam desenvolver, entre outras, as ideias de aproximação, proporcionalidade, equivalência e ordem, noções fundamentais da Matemática.”.

De acordo com a BNCC (BRASIL, 2018, p. 269)

> Na perspectiva de que os alunos aprofundem a noção de número, é importante colocá-los diante de tarefas, como as que envolvem medições, nas quais os números naturais não são suficientes para resolvê-las, indicando a necessidade dos números racionais tanto na representação decimal quanto na fracionária.

Nessa estratégia de abordagem dos números racionais citada pela BNCC, é possível fazer uma comparação com o objetivo principal do segundo e terceiro ciclos nos PCNs em relação a este conteúdo. Ambos apresentam que é preciso mostrar para os alunos que os números naturais já não são o bastante para determinados problemas da Matemática. O professor pode estimular, por meio de tarefas de medição e divisão, por exemplo, a necessidade deste novo conjunto, os racionais.

No quadro 2 estão apresentados objetos de conhecimento e habilidades referentes ao Ensino Fundamental que citam o conteúdo de números racionais, especificamente na representação fracionária.

O código alfanumérico das habilidades presentes no quadro 2 é composto por: par de letras EF referente ao Ensino Fundamental, o ano escolar, as letras MA referentes à Matemática e a posição da habilidade. Por exemplo, temos a habilidade EF04MA09 que faz referência à nona habilidade proposta em Matemática no quarto ano do Ensino Fundamental.

Vale destacar que a unidade temática que estamos tratando é a de Números, apenas na habilidade EF06MA30 que a unidade temática é a de Probabilidade e Estatística.

Quadro 2 - Objetos de conhecimento e habilidades de números fracionários do Ensino Fundamental na BNCC.

4º Ano	
Objetos de Conhecimento	**Habilidades**
Números racionais: frações unitárias mais usuais (1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/10 e 1/100)	**(EF04MA09)** Reconhecer as frações unitárias mais usuais (1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/10 e 1/100) como unidades de medida menores do que uma unidade, utilizando a reta numérica como recurso.
5º Ano	
Representação fracionária dos números racionais: reconhecimento, significados, leitura e representação na reta numérica	**(EF05MA03)** Identificar e representar frações (menores e maiores que a unidade), associando-as ao resultado de uma divisão ou à ideia de parte de um todo, utilizando a reta numérica como recurso.
Comparação e ordenação de números racionais na representação decimal e na fracionária utilizando a noção de equivalência	**(EF05MA04)** Identificar frações equivalentes. **(EF05MA05)** Comparar e ordenar números racionais positivos (representações fracionária e decimal), relacionando-os a pontos na reta numérica.
Cálculo de porcentagens e representação fracionária	**(EF05MA06)** Associar as representações 10%, 25%, 50%, 75% e 100% respectivamente à décima parte, quarta parte, metade, três quartos e um inteiro, para calcular porcentagens, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, em contextos de educação financeira, entre outros.
Problemas: adição e subtração de números naturais e números racionais cuja representação decimal é finita	**(EF05MA07)** Resolver e elaborar problemas de adição e subtração com números naturais e com números racionais, cuja representação decimal seja finita, utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos.

Problemas: multiplicação e divisão de números racionais cuja representação decimal é finita por números naturais	**(EF05MA08)** Resolver e elaborar problemas de multiplicação e divisão com números naturais e com números racionais cuja representação decimal é finita (com multiplicador natural e divisor natural e diferente de zero), utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos.
6º Ano	
Frações: significados (parte/todo, quociente), equivalência, comparação, adição e subtração; cálculo da fração de um número natural; adição e subtração de frações	**(EF06MA07)** Compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros e resultado de divisão, identificando frações equivalentes. **(EF06MA08)** Reconhecer que os números racionais positivos podem ser expressos nas formas fracionária e decimal, estabelecer relações entre essas representações, passando de uma representação para outra, e relacioná-los a pontos na reta numérica. **(EF06MA09)** Resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo da fração de uma quantidade e cujo resultado seja um número natural, com e sem uso de calculadora. **(EF06MA10)** Resolver e elaborar problemas que envolvam adição ou subtração com números racionais positivos na representação fracionária.
Probabilidade e estatística Cálculo de probabilidade como a razão entre o número de resultados favoráveis e o total de resultados possíveis em um espaço amostral equiprovável Cálculo de probabilidade por meio de muitas repetições de um experimento (frequências de ocorrências e probabilidade frequentista)	**(EF06MA30)** Calcular a probabilidade de um evento aleatório, expressando-a por número racional (forma fracionária, decimal e percentual) e comparar esse número com a probabilidade obtida por meio de experimentos sucessivos.
7º Ano	

Fração e seus significados: como parte de inteiros, resultado da divisão, razão e operador	**(EF07MA05)** Resolver um mesmo problema utilizando diferentes algoritmos. **(EF07MA06)** Reconhecer que as resoluções de um grupo de problemas que têm a mesma estrutura podem ser obtidas utilizando os mesmos procedimentos. **(EF07MA07)** Representar por meio de um fluxograma os passos utilizados para resolver um grupo de problemas. **(EF07MA08)** Comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros, resultado da divisão, razão e operador. **(EF07MA09)** Utilizar, na resolução de problemas, a associação entre razão e fração, como a fração 2/3 para expressar a razão de duas partes de uma grandeza para três partes da mesma ou três partes de outra grandeza.
Números racionais na representação fracionária e na decimal: usos, ordenação e associação com pontos da reta numérica e operações	**(EF07MA10)** Comparar e ordenar números racionais em diferentes contextos e associá-los a pontos da reta numérica. **(EF07MA11)** Compreender e utilizar a multiplicação e a divisão de números racionais, a relação entre elas e suas propriedades operatórias. **(EF07MA12)** Resolver e elaborar problemas que envolvam as operações com números racionais.
8º Ano	
Potenciação e radiciação	**(EF08MA02)** Resolver e elaborar problemas usando a relação entre potenciação e radiciação, para representar uma raiz como potência de expoente fracionário.
Dízimas periódicas: fração geratriz	**(EF08MA05)** Reconhecer e utilizar procedimentos para a obtenção de uma fração geratriz para uma dízima periódica.
9º Ano	
Potências com expoentes negativos e fracionários	**(EF09MA03)** Efetuar cálculos com números reais, inclusive potências com expoentes fracionários.

Fonte: Adaptado de Brasil (2018, p. 290 - 317)

A BNCC é um documento normativo para a educação que apresenta habilidades essenciais que os alunos devem desenvolver ao longo dos anos escolares. Neste documento não temos uma abordagem quanto aos obstáculos que os alunos podem ter na aprendizagem do conteúdo dos números racionais, como foi visto nos PCNs. Além do mais, nos PCNs é destacado que problemas como a falta de compreensão dos diferentes significados desse conteúdo permanecem até o ciclo seguinte, ao passo que tais análises não são feitas na BNCC.

Como dito na seção anterior, essas análises apresentadas pelo próprio documento oficial podem auxiliar as escolas e o docente no planejamento desse conteúdo, tendo a motivação de otimizar a aprendizagem de seu aluno.

Pela BNCC ser um documento obrigatório, a falta de informação quanto aos obstáculos que os alunos podem ter na aprendizagem das frações, dificulta a atuação tanto docente quanto dos alunos. Os professores não conseguem otimizar o planejamento de suas aulas, pois muitas vezes até mesmo desconhecem esses obstáculos, e consequentemente, as dificuldades dos alunos vistas neste trabalho continuarão sendo recorrentes.

No próximo capítulo vamos apresentar duas propostas de tarefas do conteúdo de frações, a partir das análises e conclusões que obtivemos na dissertação de mestrado, artigo acadêmico e nos dois documentos oficiais. Além de mostrar como é possível adaptar uma tarefa matemática já existente.

3 PROPOSTAS DE TAREFAS

Neste capítulo apresentaremos, como sugestão, duas propostas de tarefas de acordo com as conclusões obtidas pela análise das dificuldades no conteúdo de frações na dissertação de mestrado, no artigo e na análise da abordagem do conteúdo nos documentos oficiais PCNs e BNCC.

Para a definição de tarefa, utilizamos a concepção pedagógica de Ponte (2014)

> [...] a tarefa representa apenas o objetivo de cada uma das ações em que a atividade se desdobra e é exterior ao aluno (embora possa ser decidida por ele). Na verdade, as tarefas são usualmente (mas não necessariamente) propostas pelo professor, mas, uma vez propostas, têm de ser interpretadas pelo aluno e podem dar origem a atividades muito diversas (ou a nenhuma atividade). (PONTE, 2014, p. 15)

Vamos descrever as tarefas e explicar porque as escolhemos como auxiliares na aprendizagem das frações.

Além do mais, mostraremos seis perguntas que, de acordo com Jo Boaler (2018, p. 67), podem auxiliar professores no momento de adaptar uma tarefa matemática já existente.

3.1 Primeira tarefa: Conversas Numéricas

Na primeira tarefa, utilizaremos como base o livro Conversas Numéricas: Estratégias de Cálculo Mental para uma Compreensão Profunda da Matemática (2019) da Doutora em Ensino e Aprendizagem de Matemática pela Universidade de Stanford Cathy Humphreys e da cofundadora e ex-CEO[1] da Mathematics Education Collaborative, Ruth Parker.

[1] Mathematics Education Collaborative. **Ruth Parker**. Disponível em: https://www.mec-math.org/about-mec/ruth-parker/. Acesso em: 25 nov. 2021.

De acordo com Humphreys e Parker, as Conversas Numéricas são

> Uma breve prática diária na qual os estudantes resolvem mentalmente problemas de cálculos e falam sobre suas estratégias, como um modo de transformar de forma significativa o ensino e a aprendizagem em suas aulas de matemática. (HUMPHREYS; PARKER, 2019, p. 6)

Nas Conversas Numéricas, o professor irá escrever o problema matemático na lousa, “Geralmente escrevemos os problemas *horizontalmente* para desencorajar o uso do algoritmo” (HUMPHREYS; PARKER, 2019, p. 12). E os alunos vão pensar no problema mentalmente, no momento que acharem que encontraram uma solução, os alunos devem levantar o polegar a frente do corpo. As autoras destacam que

> Dar aos alunos o tempo que precisam é uma mensagem poderosa sobre matemática que desafia a ideia prevalente de que ser bom em matemática significa ser rápido. Além disso, a rapidez - ou não - com que os polegares são erguidos é uma boa indicação da dificuldade de um problema. Os alunos que têm um tempo extra podem ser encorajados a resolver o problema de uma segunda e mesmo de uma terceira maneira, e indicam quantas soluções eles têm erguendo esse número de dedos silenciosamente, de forma a não interferir no pensamento dos outros. (HUMPHREYS; PARKER, 2019, p. 12)

Quando todos ou a maioria dos polegares estiverem levantados, o professor deve anotar apenas as respostas dadas pelos alunos na lousa, e posteriormente o professor pergunta se alguém pode explicar a maneira que resolveu o problema. Neste momento, “descrever os passos de um procedimento não é suficiente; os alunos precisam ser capazes de explicar *por que seu processo faz sentido*.”, como dito pelas autoras (HUMPHREYS; PARKER, 2019, p. 13).

Durante o compartilhamento das estratégias, o aluno deve primeiramente dizer qual a resposta que está defendendo, e enquanto isso, o professor deve anotar as estratégias na lousa. A partir disto, a conversa pode fluir de diversas maneiras, as autoras destacam que não há um certo ou errado e que “o objetivo geral é ajudar o aluno a se comunicar de forma mais clara e/ou enfatizar elementos particulares da sua estratégia" (HUMPHREYS; PARKER, 2019, p. 13). As autoras dão algumas sugestões de perguntas que poderão ser feitas:

- *Alguém tem uma pergunta para _____?*
- *Você pode dizer mais sobre _____?*
- *Alguém pode explicar a estratégia de _____ com suas próprias palavras?*
- *Que conexões vocês percebem entre as estratégias que discutimos?* (HUMPHREYS; PARKER, 2019, p. 13)

O professor deve separar aproximadamente 15 minutos de sua aula para as Conversas Numéricas, entretanto, as autoras destacam que as conversas podem durar mais do que esse tempo e o professor deve se planejar pensando formas de como encerrar a tarefa. Caso algum aluno não consiga compartilhar sua estratégia, é possível que continue na aula seguinte (HUMPHREYS; PARKER, 2019, p. 14).

No capítulo "Encontrando sentido nas frações (nos decimais e nas porcentagens)" (HUMPHREYS; PARKER, 2019, p. 111), as autoras dão atenção às frações, decimais e porcentagens e descrevem algumas dificuldades que os alunos até o nível superior têm nesses conteúdos. Inclusive, elas mencionam que muitos alunos veem as frações como dois números não relacionados, dificuldade já descrita por nós neste trabalho.

Quanto a essa dificuldade, as autoras dizem que "essa lamentável tendência pode estar relacionada de forma direta com os algoritmos tradicionais para adição, subtração, multiplicação e divisão de frações que ensinam os alunos a usar os numeradores e os denominadores separadamente." (HUMPHREYS; PARKER, 2019, p. 112).

Vamos descrever algumas Conversas Numéricas que estão a serviço de auxiliar nas diferentes dificuldades dos alunos, como no raciocínio lógico, pensamento matemático, compreensão conceitual e procedimental, inserção das frações na reta numérica, comparação entre frações e fuga do uso dos algoritmos tradicionais. As autoras dizem que o objetivo dessas conversas é facilitar o desenvolvimento dos alunos no senso de quantidade das frações (HUMPHREYS; PARKER, 2019, p. 112).

1) Conversas Numéricas: “maior ou menor?”

Nestas conversas o intuito é obter estimativas como respostas. O parâmetro vai ser o número 1/2. Os alunos têm que pensar se determinado número é maior ou menor que 1/2. “[...] nosso foco está em facilitar os alunos a desenvolverem uma intuição sobre as frações”, como dito pelas autoras (HUMPHREYS; PARKER, 2019, p. 113).

Nessa tarefa, o professor pode utilizar frações próximas de 1/2 com denominadores pares e ímpares. As autoras ressaltam que descobriram “que numeradores e denominadores maiores (como 50/99) podem ajudar os alunos a focar nas quantidades - e deixá-los mais interessados!”. (HUMPHREYS; PARKER, 2019, p. 114)

As autoras dão algumas sugestões de perguntas que poderão ser feitas:

- Quem pode descrever um método que funcionaria para qualquer fração para dizermos se era maior ou menor que a metade?
- Quem imaginou uma maneira diferente?
- Em que aspectos esses métodos são semelhantes ou diferentes? (HUMPHREYS; PARKER, 2019, p. 114)

2) Conversas Numéricas: “mais próximo de 0, de 1/2 ou de 1?”

Essas conversas são baseadas na anterior. O aluno deve considerar o tamanho de determinada fração em relação a 0, 1/2 e 1. De acordo com as autoras, de início, “procuramos frações cujos denominadores são familiares para os alunos ou que estão próximos daqueles que são facilmente convertidos em decimais ou porcentagens.” (HUMPHREYS; PARKER, 2019, p. 115). Posteriormente, o professor pode alterar os parâmetros para 1/4 e 3/4 para aumentar o desafio.

Um dos benefícios dessas conversas, segundo as autoras, é o estímulo de algumas práticas matemáticas, como a comunicação clara e a apresentação de argumentos convincentes. É normal os alunos divergirem nas respostas, e nessa tarefa eles são estimulados a resolver o conflito sem recorrer ao professor. (HUMPHREYS; PARKER, 2019, p. 115)

3) Conversas Numéricas: “qual é maior?”

Nessa tarefa, as autoras indicam, para evitar que os alunos utilizem denominadores comuns, multiplicação cruzada ou transformação de fração para decimal.

> Todos os alunos conseguem comparar frações de maneiras que fazem sentido para eles, e possibilitar oportunidades para raciocinarem com esses recursos comparando problemas, contribui para que desenvolvam uma maior profundidade do seu conhecimento sobre frações. (HUMPHREYS; PARKER, 2019, p. 118)

É possível escolher frações que os denominadores não se convertem facilmente em decimais e porcentagens, a fim de desenvolver mais flexibilidade na comparação entre frações, como dito pelas autoras (HUMPHREYS; PARKER, 2019, p. 118). Alguns exemplos são: 1/7 e 1/5; 31/64 e 37/50; 3/16 e 4/21.

Pode-se começar essa conversa dessa forma: “Como vocês poderiam descobrir qual fração é maior *sem* fazer multiplicação cruzada ou encontrar um denominador comum?”. (HUMPHREYS; PARKER, 2019, p. 118)

4) Conversas Numéricas: “frações na reta numérica”[2]

Nessa tarefa, o professor deve desenhar uma reta numérica aberta com apenas os números 0, 1/2 e 1. A reta se prolonga antes do 0 e depois do 1. Previamente, o professor deve organizar algumas etiquetas com frações para que os alunos as insiram na reta. As autoras destacam que o intuito é obter uma localização

---

[2] Esta tarefa foi retirada do livro de Humphreys e Parker (2019) e as autoras adaptaram de BURNS (2007).

relativa e não exata (HUMPHREYS; PARKER, 2019, p. 119). Alguns exemplos são: 1/3, 2/5, 2/7, 3/4, 11/13 e 7/11.

5) Conversas Numéricas: “aproximando soma e diferenças”

Nessa tarefa, o objetivo é fazer com o que os alunos não utilizem o algoritmo tradicional de denominadores comuns.

> Para focar o pensamento dos estudantes nas quantidades que estão sendo somadas ou subtraídas - em vez de no que fazer com os numeradores e denominadores - procuramos pares de frações relativamente desfavoráveis que dificultam encontrar um denominador comum. (HUMPHREYS; PARKER, 2019, p. 122)

Um exemplo dado pelas autoras: 10/41 + 2/11 é aproximadamente 1/2, 1 ou 2? (HUMPHREYS; PARKER, 2019, p. 122)

6) Conversas Numéricas: “produtos e quocientes”

Nessas tarefas, os objetivos iniciais são “auxiliar os alunos a pensar sobre a relação entre a multiplicação e a divisão (p. ex., 1/4 de alguma coisa é o mesmo que alguma coisa dividido por 4) e a desenvolver uma noção de quantidade ao multiplicar frações”, como dito pelas autoras. (HUMPHREYS; PARKER, 2019, p. 123)

Aqui, diferentemente das conversas anteriores, queremos dos alunos respostas exatas.

Vamos ter algumas variações de Conversas Numéricas de produto entre frações:

6.1) Números inteiros vezes frações unitárias, como por exemplo, 1/3 de 12, 1/4 de 100, 1/5 de 20. Primeiramente, o professor pode começar com frações unitárias que os denominadores são fatores dos números inteiros, para posteriormente dificultar os problemas. Mesmo que muitos alunos vejam essas questões como simples, haverá alunos que têm dificuldades nessas questões, “a beleza das Conversas Numéricas é que os alunos que ainda não entendem podem aprender ouvindo os diferentes métodos daqueles que entendem.” (HUMPHREYS; PARKER, 2019, p. 123).

6.2) Frações “confusas” com números inteiros favoráveis, como por exemplo, 8/25 de 15, 10/99 de 60 e 51/61 de 600. Nessa tarefa, os alunos devem transformar frações confusas em favoráveis para aproximar o produto, podemos abordar o problema como sendo, 8/25 de 15 está próximo de determinado número. (HUMPHREYS; PARKER, 2019, p. 124)

6.3) Frações favoráveis com quantidades “confusas”, como por exemplo, 1/3 de 61 e 1/2 de 29,95. Nesta tarefa, tem-se números que são fáceis de serem aproximados e frações que os alunos são familiarizados, novamente podemos abordar o problema como sendo, 1/3 de 61 está próximo de determinado número. (HUMPHREYS; PARKER, 2019, p. 125)

Agora, teremos algumas variações de Conversas Numéricas de divisão entre frações. O intuito é que os alunos fujam do algoritmo de manter a primeira fração e inverter a segunda, pois como dito pelas autoras, muitas vezes os alunos não sabem qual fração devem inverter e nem sabem o sentido das respostas obtidas. (HUMPHREYS; PARKER, 2019, p. 126)

6.4) Maior que 1 ou menor que 1, como por exemplo, 1/2 ÷ 1/4. Novamente, temos frações que os alunos são familiarizados, para que eles entendam o que está sendo perguntado. Além do mais, nesta conversa, segundo as autoras, “Também oferece a oportunidade de detectar interpretações equivocadas dos símbolos da divisão que possam ter [..]” (HUMPHREYS; PARKER, 2019, p. 126).

Anteriormente, no artigo de Costa (2014), vimos que, principalmente os alunos do primeiro ano do Ensino Médio, tiveram uma grande dificuldade na sexta e sétima questões do questionário que estavam requisitando a mesma resposta, mas com representações diferentes de divisão, “1/2 / 1/3” e “1/2 : 1/3”. Apenas 18,18% dos alunos responderam a mesma alternativa em ambas as questões, entretanto, destes, nenhum escolheu a alternativa correta.

Essa tarefa pode auxiliar em uma dificuldade já observada anteriormente em nosso trabalho.

6.5) Raciocínio sobre divisão de frações, como por exemplo, 1 ÷ 2/3, 1/3 ÷ 3 e 2/5 ÷ 2/3. “Os alunos que já desenvolveram um forte senso de racionalidade com as atividades anteriores deste capítulo abordarão estes problemas com flexibilidade.”, como explicitado pelas as autoras (HUMPHREYS; PARKER, 2019, p. 127). Além do mais, nessa tarefa, buscam-se respostas exatas.

Escolhemos as Conversas Numéricas como uma estratégia que pode nos auxiliar quanto às dificuldades dos alunos nas frações, pois acreditamos que muitos dos obstáculos citados em capítulos anteriores podem ser bem explorados e o processo de aprendizagem pode ser otimizado.

Temos Conversas Numéricas que auxiliam na dificuldade de comparação de frações, na localização da fração na reta numérica, nas operações básicas, entre outras. O professor deve planejar qual a melhor tarefa para a dificuldade de seus alunos e pensar em outras, se necessário.

No momento que estimulamos os alunos a fugir dos algoritmos tradicionais, estes começam a pensar no significado das frações e em suas respectivas operações, começam a pensar de maneiras diferentes, já que é possível aprender escutando os métodos que estão sendo utilizados pelos outros colegas, a ter flexibilidade com os números e a raciocinar logicamente.

Nas Conversas Numéricas é importante que os alunos se comuniquem claramente para que o professor e os colegas entendam seu raciocínio, também é necessário a utilização de argumentos convincentes, “Quando os alunos oferecem razões para suas ideias e justificam seu pensamento, eles estão praticando matemática.” (BOALER, 2018, p. 176).

Para finalizar, é essencial citar que o professor que aplica as Conversas Numéricas deve criar um ambiente saudável com toda preparação estrutural na sala de aula para que os alunos se sintam à vontade para compartilhar suas estratégias, sem medo de serem coagidos por errar, “O esperado é que testem novas ideias, com os erros sendo apenas outra parte do processo. Precisam acreditar que suas respostas erradas podem ser oportunidades, em vez de manchas em sua autoestima matemática.” (HUMPHREYS; PARKER, 2019, p. 14).

3.2 Segunda tarefa: Bingo das Frações

A segunda tarefa foi elaborada pela própria autora deste trabalho e teve como influência o artigo de Trintin e Amorim (2016) que pesquisaram as contribuições que as atividades lúdicas podem trazer para a melhoria na aprendizagem das frações, decimais e porcentagens.

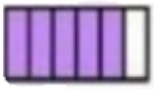
Essa tarefa foi formulada para o ensino remoto, ou seja, para as aulas no formato online, entretanto, os professores podem ficar à vontade para reformulá-la para o ensino presencial, se preferirem. O tempo estimado para a tarefa é de 30 minutos e foi utilizado o site “Bingo Baker[3]” para a elaboração do bingo.

Os objetivos que a autora pensou ao formular esta tarefa foram:

- Identificar a representação gráfica dos números fracionários;
- Relacionar a representação gráfica e a representação numérica dos números fracionários;
- Efetuar a operação de adição entre os números fracionários (denominadores iguais e diferentes);
- Utilizar ferramentas que auxiliam a operação de adição entre os números fracionários: mínimo múltiplo comum (mmc) e propriedades, frações equivalentes e simplificação de números fracionários;
- Apresentar de forma verbal, o procedimento utilizado para a resolução da operação de adição;

[3] **Bingo Baker**: Whip up a batch of bingo cards. Disponível em: https://bingobaker.com/. Acesso em: 30 jun. 2021.

- Apresentar de forma verbal, o procedimento utilizado para a identificação da representação gráfica dos números fracionários;
- Comparar e diferenciar o procedimento utilizado pelo colega com o seu próprio procedimento.

O Bingo das Frações consiste em uma cartela com representações gráficas dos números fracionários para cada aluno marcar os seus pontos. Temos um exemplo de uma cartela na Figura 1. A cada rodada, o professor vai sortear um papel, e nesse papel terá escrito uma operação de adição entre as frações, do tipo 1/2 + 1/3, será necessário que cada aluno faça a operação, no caso 5/6, e posteriormente procure na cartela a representação gráfica dessa fração, como por exemplo,  .

Vale ressaltar que as partes coloridas equivalem ao numerador e as partes divididas igualmente equivalem ao denominador, no caso do exemplo acima, o 5 e o 6, respectivamente. Caso haja dúvida entre os alunos, é um bom momento para a explicação da representação gráfica. Além disso, os alunos devem se basear nos padrões das outras figuras e perceber que as partes brancas correspondem ao “complementar” do todo.

A tarefa é finalizada quando um ou mais alunos completarem toda a cartela e gritarem BINGO! (se for sorteado um resultado de número fracionário que não se encontra na cartela, o aluno não pontuou na rodada). Posteriormente, o professor vai conferir se toda cartela do aluno foi preenchida corretamente.

No site Bingo Baker, é possível criar o seu próprio bingo, com uma cartela 2x2, 3x3 ou 4x4. O professor gera o bingo e disponibiliza o link para os seus alunos, e cada vez que um aluno clicar no link, uma nova cartela será gerada (imagens misturadas e as vezes repetidas). Ademais, na cartela, o aluno pode marcar as figuras que aparecerem e ao final da tarefa, é possível enviar o *link* para o professor conferir as marcações.

Figura 1 - Cartela do bingo (representação gráfica dos números fracionários).

Fonte: Elaborada pela autora.

Podem existir algumas variações desse jogo, nas cartelas pode ter a representação numérica das frações ou, em vez de fazer a operação de adição, os alunos podem fazer outra operação. Essas decisões ficam a critério do professor e do objetivo de cada aula.

O Bingo das Frações também teve influência das Conversas Numéricas, tarefa citada anteriormente. Vale ressaltar, a importância que a atuação do professor têm para o sucesso de uma tarefa. Caso o professor não incentive os alunos ao pensamento matemático com boas perguntas e intervenções, de pouco servirá qualquer tarefa.

Como forma de estimular o benefício do Bingo das Frações para os alunos, a autora formulou algumas perguntas para o momento do jogo e possíveis contextos, a fim de haver o diálogo entre professor e alunos.

1) Qual procedimento você utilizou para resolver essa operação?

O professor deve ficar atento para verificar se o procedimento utilizado é verdadeiro para todos os problemas, caso não, o professor pode passar outro exemplo para que o aluno perceba que seu procedimento só serve para problemas específicos. O professor pode estimular o aluno a buscar procedimentos genéricos.

2) Precisou de papel e lápis ou fez mentalmente?

Caso o aluno responda que fez utilizando papel e lápis, o professor pode desafiá-lo a resolver mentalmente, para que assim seja estimulado a encontrar flexibilidade nos números fracionários.

3) Alguém fez de uma maneira diferente?

Em caso positivo, o professor deve perguntar qual foi a maneira, se perceber que a resolução não serve para um problema genérico, pode fornecer outro exemplo para que o aluno perceba que seu método não serve para todos os problemas. Novamente, o professor deve estimular o aluno a pensar em um método genérico.

Em caso negativo, o professor pode mostrar um outro método dizendo que viu em outra sala (o professor deve evitar dizer que prefere algum método, porque isso fará com que os alunos utilizem a preferência do professor).

4) Como você relaciona a sua resposta numérica com a representação gráfica da cartela?

Caso o professor perceba que o aluno está relacionando as representações de forma equivocada, como por exemplo, invertendo numerador e denominador, o professor pode pedir para que outro colega o auxilie.

5) Você não conhecia algum dos procedimentos utilizados nesta aula? Achou algum procedimento mais fácil do que outro que você utiliza normalmente?

Em caso positivo, o professor pode perguntar o porquê o aluno achou tal procedimento mais fácil ou mais difícil. O professor deve fazer o aluno comparar os mais diversos procedimentos.

6) Vocês encontraram algum tipo de dificuldade? Quais?

Em caso positivo, o professor pode pedir para que outro colega auxilie este aluno verbalizando como resolveu tal etapa do jogo. Caso a dificuldade persista, o professor deve interferir.

Ao final do jogo, é indicado que haja uma sistematização sobre os conceitos matemáticos trabalhados para que assim seja sanada alguma dúvida que possa ter surgido.

A escolha do Bingo das Frações se deu a partir de que acreditamos que a utilização de jogos em sala de aula traz muitos benefícios aos alunos. De acordo com Grando (2007, s/p[4]): "É necessário ao professor, que utiliza os jogos em suas práticas escolarizadas, tomar consciência dos vários aspectos sociais, morais, corporais, afetivos, éticos e cognitivos, que estão trabalhando, mesmo quando sua intervenção é mínima."

Ainda segundo a mesma autora,

> Apenas jogar um jogo tem pouca contribuição para a aprendizagem em matemática. É todo o processo de mediação realizado pelo professor, de discussão matemática realizado no grupo de alunos, de registro e sistematização de conceitos que possibilitam um trabalho efetivo com a matemática a partir do jogo. (GRANDO, 2015, p. 403)

Além de levar aos alunos uma aula de matemática divertida, com um jogo que muitos já conhecem, pode desmistificar a crença de que a matemática é uma disciplina chata, difícil e monótona.

Com os objetivos propostos para a tarefa, o aluno terá que verbalizar o seu entendimento do que foi feito na operação de adição e na transformação das

---

[4] O artigo consultado não tem a numeração original da revista na qual foi publicado.

representações, e com isso o professor poderá perceber algum tipo de dificuldade que o aluno está tendo. Dificuldades que podem ser na transformação da representação numérica para a representação gráfica, significado das frações, nos numeradores e denominadores, entre outras.

Além do mais, teremos benefícios para os colegas, que assim como na tarefa anterior, poderão aprender métodos novos e mais simples.

Mesmo que um dos objetivos da tarefa seja a utilização de ferramentas como mmc e simplificação, o intuito da tarefa é que os alunos se sintam à vontade em utilizar outros métodos. Além do mais, para que o Bingo das Frações dê boas contribuições para a aprendizagem dos alunos, novamente, deve haver uma preparação estrutural em toda sala de aula, para que seja construído um ambiente saudável que acolha os erros de todos.

Para finalizar, pontuamos novamente que podem haver modificações nessa tarefa para que dificuldades específicas sejam exploradas.

3.3 Adaptação de tarefas matemáticas

A professora britânica de Educação Matemática na Universidade de *Stanford*, Jo Boaler, em seu livro Mentalidades Matemáticas: estimulando o potencial dos estudantes por meio da matemática criativa, das mensagens inspiradoras e do ensino inovador (2018), afirma que é possível adaptar uma tarefa matemática já existente, a fim de desenvolver melhores oportunidades de aprendizagem para os alunos. (BOALER, 2018, p. 67)

> Para fazer isso, pode ser que os professores precisem desenvolver suas próprias mentalidades como criadores, ou seja, como pessoas que podem apresentar uma nova ideia e criar novas experiências de aprimoramento da aprendizagem. (BOALER, 2018, p. 67).

De acordo com Boaler, existem seis perguntas que auxiliam nessa adaptação. Não é necessário que todas sejam atendidas, mas respeitá-las potencializará a intensidade da aprendizagem. (BOALER, 2018, p. 68)

A seguir, descreveremos as seis perguntas e alguns comentários.

1º É possível explorar a tarefa para encorajar vários métodos, rotas e representações?

Os professores podem abrir as tarefas pedindo uma exigência visual ou até mesmo pedindo para que os alunos encontrem sentido em suas soluções, como dito pela autora. (BOALER, 2018, p. 68). “Quando abrimos uma tarefa, transformamos seu potencial de aprendizagem.” (BOALER, 2018, p. 68).

2º É possível transformá-la em uma tarefa de investigação?

“O mesmo conteúdo matemático pode ser ensinado como questões que pedem um procedimento ou como questões que pedem aos estudantes que pensem sobre ideias e usem um procedimento.” (BOALER, 2018, p. 68). Além do mais, os professores podem pedir que os alunos escrevam algum tipo de trabalho, jornal ou artigo, sobre determinado conteúdo para que assim o investiguem, como indicado pela Boaler (2018, p. 70).

3º É possível propor o problema antes de ensinar o método?

No momento que o problema é proposto antes de ensinar um método, é dado ao aluno a possibilidade de pensar em ideias e nos seus próprios métodos, como explicitado pela autora. (BOALER, 2018, p. 71) O papel do professor é fazer a sistematização verificando se o método é verdadeiro para todos os casos ou apenas casos específicos. Posteriormente, o professor pode passar o método tradicional e fica a critério do aluno utilizar o que faz mais sentido a ele.

4º É possível acrescentar um componente visual?

A compreensão do aluno pode aumentar se utilizar um componente visual, seja esse um diagrama ou um material dourado.

> Desenhar é uma ferramenta poderosa para matemáticos e para aqueles que resolvem problemas de matemática, a maioria dos quais desenha qualquer problema que recebe. Quando os alunos empacam em uma aula de matemática, frequentemente peço que desenhem o problema. (BOALER, 2018, p. 72)

5º É possível torná-la de “piso baixo e teto alto”?

As tarefas de “piso baixo e teto alto” consistem em tarefas que são acessíveis para todos os estudantes de uma determinada turma e simultaneamente proporcionam aprofundamento aos alunos mais avançados no aprendizado. De acordo com Boaler (2018, p. 73)

> Uma maneira de “rebaixar o piso” é sempre perguntar aos alunos como eles veem o problema. [...] Uma grande estratégia para “elevar o teto” de uma tarefa é pedir aos alunos que terminaram uma questão que formulem uma nova questão semelhante, porém mais difícil.

6º É possível acrescentar a exigência de convencer e argumentar?

De acordo com Boaler (2018, p. 75), nas conversas matemáticas quando se pede que o aluno explique o porquê um método faz sentido a ele, rotas matemáticas se abrem e há mais aprendizado.

> Argumentar também garante aos estudantes acesso à compreensão. Em nossos quatros anos estudando diferentes escolas, constatamos que a argumentação tinha um papel particular na promoção da equidade, pois ele ajudava a reduzir a distância entre alunos que compreendiam e aqueles que estavam com dificuldades. (BOALER, 2018, p. 74)

Vale destacar que mesmo que o professor elabore tarefas que respeitem algumas dessas questões, ou até mesmo, que utilize nossas propostas, o papel dele é essencial para um aprendizado de qualidade em um ambiente saudável a todos.

> Os professores são o recurso mais importante dos estudantes. São eles que podem criar ambientes matemáticos estimulantes, passar aos estudantes as mensagens positivas de que eles precisam e fazer qualquer tarefa

> matemática despertar a curiosidade e o interesse dos alunos. (BOALER, 2018, p. 51)

Vale ressaltar que a autora utilizou essas seis perguntas como guia para adaptar uma tarefa matemática já existente, resultando assim no Bingo das Frações. Para atender a primeira pergunta, por exemplo, no momento que o professor pergunta se alguém fez de uma maneira diferente, é encorajado a exploração de vários métodos, estimulando cada aluno a encontrar sentido em sua solução.

Além do mais, as Conversas Numéricas e o Bingo das Frações se relacionam com elementos da Mentalidades Matemáticas da Boaler (2018), como a importância das mensagens inspiradoras dos professores, o poder dos erros e das dificuldade e a importância da flexibilidade com os números.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O conteúdo de frações tem seu destaque em documentos que servem de base para fazer os currículos, como PCNs e BNCC. São descritos os objetivos que devem ser alcançados, os conteúdos conceituais e procedimentais e habilidades que o professor deve trabalhar em suas aulas. Vimos a importância curricular de tais conteúdos desde o 4º ano do Ensino Fundamental até o Ensino Médio, e que muitas vezes é visto também no Ensino Superior.

Entretanto, é perceptível que devemos dar atenção a esse conteúdo não só pela sua importância curricular, mas também pela dificuldade que os alunos expressam ter. Dificuldades essas que aparecem nos PCNs, mas não aparecem na BNCC.

No PRP, a autora deste trabalho pôde perceber algumas dificuldades que os alunos do 1º ano do Ensino Médio, 4º ano do Ensino Médio e da Educação de Jovens e Adultos (EJA) têm referente ao conteúdo de frações. Mesmo que esse tópico não tenha sido abordado exclusivamente, quando é visto em logaritmos ou probabilidade, por exemplo, há um receio de como resolver determinada etapa da questão.

Neste trabalho conseguimos compilar as principais dificuldades na aprendizagem desse conteúdo: compreensão do significado, entendimento equivocado das frações como dois números distintos, nas quatro operações básicas, frações equivalentes, simplificação, mmc, transformação entre as diferentes representações do número fracionário, inserção de uma fração na reta numérica, entre outras.

Também tivemos algumas hipóteses do porquê dessas dificuldades existirem: ruptura nas ideias dos números naturais para os racionais, conjuntos numéricos e operações, aversão quanto à disciplina de Matemática, utilização do algoritmo tradicional e metodologia empregada pelo professor.

Inclusive, quanto esta última hipótese citada, não podemos exigir que os alunos tenham flexibilidade quanto às frações, raciocinem se o resultado obtido faz sentido, pensem logicamente, se o próprio professor não estimula o aluno a pensar sem o algoritmo tradicional, a pensar no método que mais faz sentido a ele.

Tendo isso em vista, ao final do trabalho, propomos duas tarefas e apresentamos como adaptar uma tarefa já existente, que podem auxiliar o professor no objetivo de estimular seu aluno a escolher um método verdadeiro que mais faz sentido a ele, verbalizar e argumentar sobre suas ideias, ter flexibilidade com as frações e pensar logicamente. Para esses objetivos serem alcançados, é essencial que seja criado um ambiente de aprendizagem saudável, no qual o erro faça parte e seja bem-vindo.

Para estudos posteriores, existe a possibilidade de investigar essas dificuldades em sala de aula e posteriormente aplicar as tarefas propostas ou até mesmo adaptar alguma tarefa já existente, a fim de verificar se elas auxiliam na aprendizagem dos alunos, no momento que o foco será na reflexão das dificuldades, além do currículo empregado.

REFERÊNCIAS

ASTH, Rafael. Números Racionais. **Toda Matéria**. Disponível em: https://www.todamateria.com.br/numeros-racionais/. Acesso em: 24 jan. 2022.

Bingo Baker: Whip up a batch of bingo cards. Disponível em: https://bingobaker.com/. Acesso em: 30 jun. 2021.

BOALER, Jo. **Mentalidades Matemáticas**: estimulando o potencial dos estudantes por meio da Matemática criativa, das mensagens inspiradoras e do ensino inovador. Porto Alegre: Penso, 2018.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997, 142 p.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998, 148 p.

COSTA, Sandro Henrique Barbosa da. **O ensino das Frações no Ensino Fundamental e seu reflexo no Ensino Médio**. 2014. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal do Amapá, Amapá, 2014.

FONSECA, Simone Silva da; SANTOS, Renata dos. Dificuldades dos alunos do 7º ano do Ensino Fundamental em Aprender Fração. **Revista Insignare Scientia - RIS**, v. 2, n. 1, p. 50-66, 20 maio 2019.

GRANDO, Regina Célia. Concepções quanto ao uso de jogos no ensino da Matemática. **Revista de Educação Matemática**, v. 10, 2007.

GRANDO, Regina Célia. Recursos didáticos na Educação Matemática: jogos e materiais manipulativos. **Revista Eletrônica Debates em Educação Científica e Tecnológica**, v. 05, p. 393-416, 2015.

HOOKS, Bell. **Ensinando a transgredir**: a educação como prática de liberdade. Tradução de Marcelo Brandão Cipolla - São Paulo. 2013. Editora Martins Fontes, 2013.

HUMPHREYS, Cathy; PARKER, Ruth. **Conversas Numéricas**: estratégias de Cálculo Mental para uma Compreensão Profunda da Matemática. Porto Alegre: Penso, 2019.

MARCONI, Marina de Andrade; LAKATOS, Eva Maria. **Fundamentos de metodologia científica**. - 5. ed. - São Paulo: Atlas 2003.

Mathematics Education Collaborative. **Ruth Parker**. Disponível em: https://www.mec-math.org/about-mec/ruth-parker/. Acesso em: 25 nov. 2021.

MENEZES, Ebenezer Takuno de. **Verbete PCNs (Parâmetros Curriculares Nacionais)**. Dicionário Interativo da Educação Brasileira - EducaBrasil. São Paulo: Midiamix Editora, 2001. Disponível em: https://www.educabrasil.com.br/pcns-parametros-curriculares-nacionais/. Acesso em: 27 set. 2021.

OLIVEIRA, Jéssika Naves de. Dificuldades na aprendizagem dos números racionais: confrontando dois níveis de escolaridade, 2016. **Encontro Nacional de Educação Matemática**. Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Cornélio Procópio, 2016. p. 1-12.

PONTE, João Pedro da. Tarefas no ensino e na aprendizagem da Matemática. **Práticas Profissionais dos Professores de Matemática**. Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, 2014. p. 13-27.

SILVA, Raquel Silveira da; MARTINEZ, Marcia Lorena Saurin. Dificuldades na Matemática Básica: o processo de ensino-aprendizagem para a vida. In: XIII **Congresso Nacional de Educação - EDUCERE**, 2017, Curitiba/ PR. p. 11839 - 11850.

TRINTIN, Tatiane Buckôr.; AMORIM, Tales Emilio Costa. A Matemática e o lúdico: ensinando frações através de jogos. **REMAT: Revista Eletrônica da Matemática**, Bento Gonçalves, RS, v. 2, n. 1, p. 113–127, 2016.