



INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
DE SÃO PAULO  
Campus São Paulo

# **COVID-19 NO ESTADO DE SÃO PAULO: UM ESTUDO ATRAVÉS DE UM MODELO P-FUZZY**

BEATRIZ OLIVEIRA SILVA

Trabalho de Conclusão de Curso Superior de Licenciatura em  
Matemática, sob a orientação da Profa. Dra. Mônica Helena Ribeiro  
Luiz e do Prof. Dr. Marco Aurélio Granero Santos

IFSP  
São Paulo  
2021



BEATRIZ OLIVEIRA SILVA

**COVID-19 NO ESTADO DE SÃO PAULO: UM ESTUDO  
ATRAVÉS DE UM MODELO P-FUZZY**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo – IFSP, em cumprimento ao requisito parcial para obtenção do grau acadêmico de Licenciada em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Mônica Helena Ribeiro Luiz  
Coorientador: Prof. Dr. Marco Aurélio Granero Santos

São Paulo  
2021

Catálogo na fonte  
Biblioteca Francisco Montojos - IFSP Campus São Paulo  
Dados fornecidos pelo(a) autor(a)

s586c	Silva, Beatriz Oliveira COVID-19 NO ESTADO DE SÃO PAULO: UM ESTUDO ATRAVÉS DE UM MODELO P-FUZZY / Beatriz Oliveira Silva. São Paulo: [s.n.], 2021. 57 f. il.  Orientadora: Mônica Helena Ribeiro Luiz Co-orientadora: Marco Aurélio Granero Santos  Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, IFSP, 2021.  1. Teoria de Conjuntos Fuzzy. 2. Modelagem Matemática. 3. Covid-19. 4. Sistemas P-fuzzy. 5. Modelo Logístico. I. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo II. Título.
-------	--

CDD 510

ATA N.º 1/2021 - SAM-SPO/DCM-SPO/DRG/SPO/IFSP

Ata de Defesa de Trabalho de Conclusão de Curso - Graduação

Na presente data realizou-se a sessão pública de defesa do Trabalho de Conclusão de Curso intitulado **COVID-19 no Estado de São Paulo: Um estudo através de um modelo p-fuzzy** apresentado(a) pelo(a) aluno(a) **Beatriz Oliveira Silva (SP300757X)** do Curso **SUPERIOR EM LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**, (Câmpus São Paulo). Os trabalhos foram iniciados às 14:00 pelo(a) Professor(a) presidente da banca examinadora, constituída pelos seguintes membros:

Membros	IES	Presença (Sim/Não)	Aprovação/Conceito (Quando Exigido)
Monica Helena Ribeiro Luiz (Orientadora)	IFSP	Sim	10,0
Marco Aurelio Granero Santos (Coorientador Interno)	IFSP	Sim	10,0
Rogério Ferreira da Fonseca (Examinador Interno)	IFSP	Sim	10,0
Flavia Milo dos Santos (Examinadora Interna)	IFSP	Sim	10,0
Henrique Marins de Carvalho (Suplente Interno)	IFSP	Não	---

Observações:

A banca examinadora, tendo terminado a apresentação do conteúdo da monografia, passou à arguição do(a) candidato(a). Em seguida, os examinadores reuniram-se para avaliação e deram o parecer final sobre o trabalho apresentado pelo(a) aluno(a), tendo sido atribuído o seguinte resultado:

Aprovado(a)                       Reprovado(a)                      Nota (quando exigido): 10,0

Proclamados os resultados pelo presidente da banca examinadora, foram encerrados os trabalhos e, para constar, eu lavrei a presente ata que assino juntamente com os demais membros da banca examinadora.

Câmpus São Paulo, 24 de novembro de 2021

Avaliador externo:  Sim  Não

Documento assinado eletronicamente por:

- **Monica Helena Ribeiro Luiz, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO**, em 24/11/2021 15:46:46.
- **Flavia Milo dos Santos, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO**, em 24/11/2021 15:49:38.
- **Rogério Ferreira da Fonseca, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO**, em 24/11/2021 15:58:05.
- **Marco Aurelio Granero Santos, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO**, em 24/11/2021 16:04:01.

Este documento foi emitido pelo SUAP em 24/11/2021. Para comprovar sua autenticidade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse <https://suap.ifsp.edu.br/autenticar-documento/> e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 261935  
Código de Autenticação: 6acdcc68b5





À minha família



## **Agradecimentos**

Agradeço primeiramente, e acima de tudo, ao meu Deus eterno e todo poderoso por saber que sem Ele nada nunca seria possível. À minha mãe celeste, Maria, por me abençoar e me manter sob seu manto protetor.

Agradeço aos meus pais, Adelia e Antônio, por me apoiarem sempre e em qualquer ocasião, me dando todo o suporte que poderiam dar. E ao meu irmão, Bruno, por aguentar meus momentos de fala intermináveis.

Agradeço à toda minha família que sempre acreditaram em mim, em especial: Glaucia, Nair, Ivan e Genes. Vocês me inspiram.

Agradeço imensamente aos meus orientadores Mônica Ribeiro e Marco Grano por toda ajuda e paciência nesses tempos de pandemia e reuniões virtuais. Eu os admiro muito, são fonte de inspiração e sem vocês esse trabalho não seria possível. Vocês são incríveis.

Agradeço a todos os professores do IFSP que contribuíram com minha formação, por sempre estarem a disposição para sanar minhas dúvidas e serem pacientes.

Agradeço a todos os meus amigos do IFSP, por toda a ajuda, sem vocês certamente não seria possível concluir o curso. Quando ingressei, ouvia sempre que sozinho não seria possível e toda a trajetória me mostrou como isso é verdade. Em especial, um grande obrigado à Pamella, pela grande amizade e parceria que desenvolvemos, por sempre ser a pessoa a quem eu pedia socorro, pelas nossas parcerias que sempre rendiam bons frutos, pelos conselhos, pelas conversas e por me entender como ninguém durante a formação. Ao Henrique e ao Iago, que também me acompanharam e me ajudaram sempre que possível, junto à Pamella fizemos o melhor quarteto que poderíamos formar. Ao Rodrigo, que foi um grande amigo, muito paciente e prestativo em me ajudar com as dúvidas, você será um professor incrível. De modo geral, um obrigado a todos que em algum momento me ajudaram: Pamella, Iago, Henrique, Letícia, Rodrigo, Melina, Kátia, Débora.

Por fim, não poderia deixar de agradecer à minha gêmea de consideração, Beatriz de Souza, que esteve comigo desde o ensino fundamental, passando por muitas etapas e transformações da minha vida. Apesar de ser de curso diferente, sempre estive de ouvidos abertos para minhas lamúrias e me dar os melhores conselhos. E às minhas amigas que estiveram presentes em alguns momentos muito valiosos da minha vida: Camilla, Larissa, Ariane e Ketillyn.



## Resumo

Este trabalho tem como objetivo utilizar a Teoria de Conjuntos Fuzzy para desenvolver um modelo matemático capaz de descrever o comportamento do número de casos de COVID-19 no Estado de São Paulo em função do tempo. Para isso, é utilizado um Sistema Baseado em Regras Fuzzy para desenvolver um modelo logístico p-fuzzy. São apresentados alguns conceitos de Modelagem Matemática, bem como o conceito de modelo matemático e o método empregado no processo de modelagem. São exibidas as principais definições sobre a Teoria de Conjuntos Fuzzy, como conjuntos fuzzy, níveis de um conjunto, número fuzzy, lógica fuzzy, Sistema Baseado em Regras Fuzzy e sistemas p-fuzzy. Também são apresentadas informações sobre a COVID-19, as quais auxiliaram na formulação do modelo. Por fim, é exibida a curva solução do modelo construído e são feitas considerações a seu respeito.

**Palavras-chaves:** Teoria de Conjuntos Fuzzy, Modelo Logístico, Modelagem Matemática, Sistemas P-Fuzzy, COVID-19.



## Abstract

This work has the purpose use Fuzzy Set Theory to develop a mathematical model capable to describing the behaviorof the number of COVID-19 cases in the State of São Paulo as a function of time. For this a Fuzzy Rules Based System is used to develop a p-fuzzy logistic model. Some concepts of Mathematical Modeling are presented, as well as the concept of mathematical model and the method used in the modeling process. The main definitions about Fuzzy Set Theory are shown, such as fuzzy sets, levels of a set, fuzzy number, fuzzy logic, Fuzzy Rules Based System and p-fuzzy systems. Information about COVID-19 is also presented, which helped in formulating the model. Finally, the solution curve of the built model is displayed and considerations are made about it.

**Key Words:** Fuzzy Set Theory, Logistic Model, Mathematical Modeling, P-Fuzzy System, COVID-19.



## Lista de ilustrações

Figura 1 – Esquema de um processo de modelagem. . . . .	22
Figura 2 – Gráfico da função $\varphi_F(x)$ do exemplo 1.2.1. . . . .	26
Figura 3 – Gráfico da função $x_A(x)$ do exemplo 1.2.1. . . . .	26
Figura 4 – Gráfico da função $\varphi_A(x)$ do exemplo 1.2.2 com representação do $\alpha$ -nível. . . . .	27
Figura 5 – Gráfico da função $\varphi_A(x)$ do exemplo 1.2.3. . . . .	29
Figura 6 – Gráfico da função $\varphi_A(x)$ do exemplo 1.2.4. . . . .	30
Figura 7 – Esquema de um SBRF. . . . .	32
Figura 8 – Defuzzificador centro de gravidade $G(B)$ . . . . .	34
Figura 9 – Estrutura de um sistema p-fuzzy. . . . .	36
Figura 10 – Gráfico de dispersão dos dados. . . . .	39
Figura 11 – Campo de variações: ( $\rightarrow$ ) variação positiva; ( $\leftarrow$ ) variação negativa. . . . .	40
Figura 12 – Funções de pertinência de entrada. . . . .	41
Figura 13 – Funções de pertinência de saída. . . . .	41
Figura 14 – Ajuste do modelo logístico p-fuzzy. . . . .	42
Figura 15 – Informações sobre o modelo logístico. . . . .	53
Figura 16 – Curva solução do modelo logístico (A.2). . . . .	53



## Sumário

<b>Introdução</b> . . . . .	<b>17</b>
<b>1 Conceitos Preliminares</b> . . . . .	<b>21</b>
1.1 Modelagem Matemática . . . . .	21
1.2 Conceitos de Conjuntos Fuzzy . . . . .	24
1.2.1 Níveis de um Conjunto Fuzzy . . . . .	26
1.2.2 Número Fuzzy . . . . .	27
1.2.3 Lógica Fuzzy . . . . .	30
1.2.4 Sistemas Baseados em Regras Fuzzy . . . . .	31
<b>2 Sistemas p-fuzzy</b> . . . . .	<b>35</b>
2.1 Sistemas Dinâmicos P-fuzzy . . . . .	35
<b>3 Problema</b> . . . . .	<b>37</b>
3.1 COVID-19 . . . . .	37
3.2 Dados . . . . .	38
3.3 Modelo . . . . .	40
<b>Considerações Finais</b> . . . . .	<b>45</b>
<b>Referências</b> . . . . .	<b>47</b>
<b>APÊNDICE A Modelo Logístico</b> . . . . .	<b>49</b>
A.1 Análise qualitativa . . . . .	51
<b>ANEXO A Código do modelo p-fuzzy</b> . . . . .	<b>55</b>



## Introdução

A modelagem é uma ferramenta muito utilizada na Matemática e possibilita o desenvolvimento de modelos matemáticos comumente utilizados para a compreensão e projeção futura de fenômenos. De forma mais específica, pode-se dizer que ela é “[...]um processo que alia teoria e prática, motiva seu usuário na procura do entendimento da realidade que o cerca e na busca de meios para agir sobre ela e transformá-la” (BASSANEZI, 2006, p. 17).

Segundo Jafelice, Barros e Bassanezi (2012) a característica essencial da modelagem matemática, utilizando sistemas de equações determinísticas (ou seja, equações específicas com um conjunto de entrada conhecido e que resultará em uma única saída), é a precisão obtida nas previsões do fenômeno. Contudo, essas previsões estão sempre dependentes de informações precisas, diferentemente dos modelos estocásticos, que não possuem solução única, a qual está associada a certa probabilidade.

O exemplo utilizado por Jafelice, Barros e Bassanezi (2012) explana melhor essa situação.

[...] se temos uma população de ‘fumantes’ num instante  $t_0$ , sujeita a alguma taxa de mortalidade, podemos querer saber como estará composta esta população no futuro. Se considerarmos que cada indivíduo desta população é simplesmente fumante ou não fumante o problema pode ser resolvido com um modelo determinístico, tomando separadamente ambas as populações. Por outro lado, se temos inicialmente uma distribuição de probabilidades dos fumantes desta população, podemos usar um modelo estocástico para estudar a evolução desta distribuição inicial. Agora, se a característica de ser fumante depender da quantidade de cigarros que se fuma diariamente, qualidade dos cigarros fumados, intermitência do ato de fumar etc, devemos caracterizar também o grau de ser fumante [...]. (JAFELICE; BARROS; BASSANEZI, 2012, p. 12)

Dessa forma, é possível perceber como, em algumas situações, as variáveis utilizadas – principalmente as presentes no cotidiano – permanecem fora do tratamento matemático tradicional, em que são simplesmente classificadas como “pertence” ou “não pertence” ou respondidas com um simples “sim” ou “não” (BARROS; BASSANEZI, 2010).

Para descrever certos fenômenos relacionados ao mundo sensível, temos utilizado graus que representam qualidades ou verdades parciais ou padrões do melhor [...] é precisamente nesse tipo de incerteza que a Lógica Fuzzy<sup>1</sup> tem dado suas principais contribuições. (BARROS; BASSANEZI, 2010, p. 11)

Em 1965, Lofti Asker Zadeh apresentou a Teoria dos Conjuntos Fuzzy “com o objetivo de fornecer um método de obtenção e manuseio de informações imprecisas que são típicas do raciocínio humano” (FERREIRA, 2011, p. 1), ou seja, traduzir matematicamente termos linguísticos incertos na Matemática, como “aproximadamente”, “em torno de”, dentre outros.

Com isso, esse também “seria um primeiro passo no sentido de se programar e armazenar conceitos vagos em computadores, tornando possível a produção de cálculos com informações imprecisas, a exemplo do que faz o ser humano” (BASSANEZI, 2006, p. 12).

Segundo Jafelice, Barros e Bassanezi (2012) a Teoria de Conjuntos Fuzzy pode ser utilizada para modelar fenômenos incertos, com variáveis que são frequentes em fenômenos biológicos e difíceis de serem avaliadas como médias de dados experimentais. Nesta obra, é possível observar diversas aplicações utilizando subconjuntos fuzzy, dentre elas, a utilização de um Sistema Baseado em Regras Fuzzy (SBRF) para construir um modelo de evolução da AIDS.

No artigo de Melo e Moraes (2018) é feita a aplicação da Teoria de Conjuntos Fuzzy em um sistema espacial de suporte à decisão para gestão do combate à dengue, onde novamente é utilizado um SBRF para detectar áreas de prioridade de combate ao agravo da dengue, utilizando dados obtidos por meio de uma parceria com a Secretaria de Saúde do Estado da Paraíba.

O modelo obtido considera diferentes fatores que envolvem o problema em questão, utilizando-os na tomada de decisão, que tem por objetivo identificar locais prioritários para o modelo nos municípios da Paraíba, e contribuindo para o desenvolvimento de políticas públicas.

Em Leite e Bassanezi (2010) foi feita uma aplicação de sistemas p-fuzzy – em que as variáveis de entrada são descritas por uma série de regras – para modelar equações diferenciais parciais utilizando o método de Inferência de Mamdani, como proposto neste trabalho.

“Apesar da forte resistência à teoria dos conjuntos fuzzy, muitos pesquisadores vislumbraram as possibilidades que esta teoria oferecia” (FERREIRA, 2012, p. 1) e com aplicações práticas cada vez mais bem sucedidas, tem-se explorado bastante seu

<sup>1</sup> Área de estudo que envolve Conjuntos Fuzzy e suas operações.

potencial na modelagem de fenômenos biológicos (BARROS; BASSANEZI, 2010).

Esta nova maneira de modelar problemas ligados à realidade biológica, onde tanto as variáveis de estado como os parâmetros são impregnados de subjetividade, vem ganhando terreno na área de Biomatemática com resultados significativos e animadores. (JAFELICE; BARROS; BASSANEZI, 2012, p. 13)

Algumas das aplicações da Biomatemática são típicas de dinâmica de população, como, por exemplo, o número de casos de COVID-19, doença que vem sendo muito estudada e debatida desde que foi caracterizada como pandemia pela Organização Mundial da Saúde (OMS) em março de 2020.

Estudar o comportamento dessas populações, através da modelagem, permite que medidas de prevenção sejam adotadas para evitar o agravamento da doença.

Assim, o objetivo principal deste trabalho é modelar, por meio da Teoria de Conjuntos Fuzzy, uma curva que descreva o comportamento do número de infectados por COVID-19 no Estado de São Paulo em função do tempo e, para isso, serão utilizados conceitos da modelagem matemática e da Teoria de Conjuntos Fuzzy.

Com a modelagem matemática, será possível avaliar qual modelo melhor se ajusta aos dados coletados. Com a Teoria de Conjuntos Fuzzy, será possível considerar incertezas e imprecisões que o fenômeno apresenta, uma vez que esta teoria permite a manipulação de informações subjetivas.

De forma mais específica, será elaborado um modelo p-fuzzy dos casos de COVID-19 no Estado de São Paulo considerando incertezas.

No Capítulo 1 são feitas considerações a respeito da Modelagem Matemática, bem como conceitos fundamentais sobre a Teoria de Conjuntos Fuzzy, com exemplos e suas principais definições.

No Capítulo 2 são apresentados conceitos sobre sistemas p-fuzzy, seu funcionamento e sua estrutura.

No Capítulo 3 é elaborado o problema a ser modelado, trazendo mais detalhes referentes à pandemia de COVID-19 no Estado de São Paulo, apresentação dos dados utilizados e a construção do modelo.

Por fim, são feitas as considerações finais sobre o modelo, bem como sugestões para trabalhos futuros.



## 1 Conceitos Preliminares

Neste capítulo serão apresentados conceitos e exemplos sobre Modelagem Matemática e Teoria de Conjuntos Fuzzy que serão utilizados ao longo do trabalho. As definições e exemplos utilizados são baseados nos livros Tópicos de Lógica Fuzzy e Biomatemática (BARROS; BASSANEZI, 2010), Teoria dos Conjuntos Fuzzy com Aplicações (JAFELICE; BARROS; BASSANEZI, 2012), Ensino-Aprendizagem com Modelagem Matemática (BASSANEZI, 2006), e nas dissertações de mestrado de Gayer (2017) e de Ferreira (2012).

### 1.1 Modelagem Matemática

A grande motivação do desenvolvimento da Matemática ao longo da história veio da preocupação em solucionar problemas práticos de determinada época. O ser humano sempre buscou entender e explicar o mundo e seus fenômenos, logo, a busca por modelos que explicassem, ou pelo menos descrevessem esses fatos, manifestasse desde os tempos mais antigos.

De fato, a Matemática foi, e permanece sendo desenvolvida a partir das necessidades de uma sociedade a resolver problemas.

O objetivo fundamental do “uso” de matemática é de fato extrair a parte essencial da situação-problema e formalizá-la em um contexto abstrato onde o pensamento possa ser absorvido com uma extraordinária economia de linguagem. Desta forma, a matemática pode ser vista como um instrumento intelectual capaz de sintetizar idéias concebidas em situações empíricas que estão quase sempre camufladas num emaranhado de variáveis de menor importância. (BASSANEZI, 2006, p. 18)

Em geral, a matemática estuda a simulação de sistemas reais, criando modelos, a fim de prever o seu comportamento, sendo empregada em diversos campos de estudo como a Química, Biologia, Física, Economia e Engenharias. Com isso, Bassanezi (2006) cita que a matemática tem servido de base para modelar mecanismos que controlam a dinâmica de populações, a epidemiologia, a ecologia, a neurologia, a genética e os processos fisiológicos.

Ainda segundo Bassanezi (2006), um modelo matemático é um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado, e que podem ser formulados de acordo com a natureza dos fenômenos ou situações analisadas e classificados conforme o tipo de matemática utilizada.

O intuito de se criar modelos é porque eles permitem entender o comportamento de fenômenos de forma mais simples, ou então descrevê-lo de forma mais

completa, de forma que seja tão precisa quanto o fenômeno real. No entanto, é impossível criar modelos que representem com fidelidade o problema real, dessa forma, são utilizadas hipóteses simplificadoras.

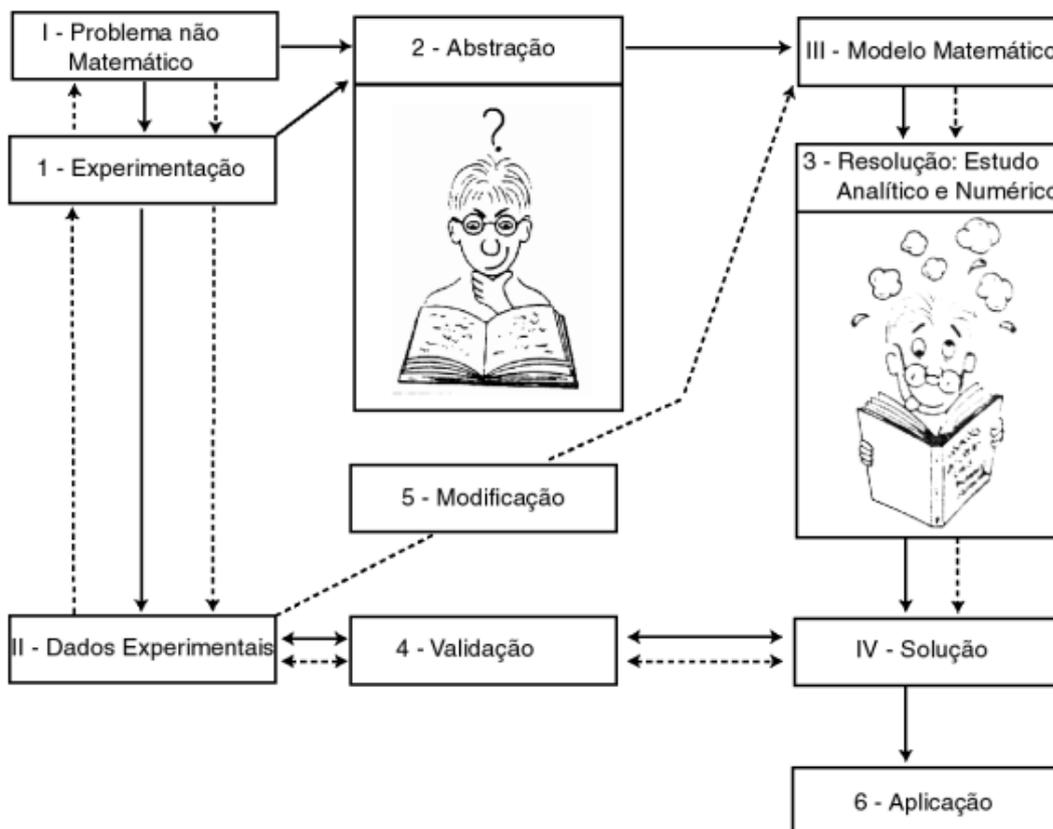
Nesse sentido, a Modelagem Matemática visa descrever um problema real, modelando o problema por meio de um modelo aproximado, e desse problema aproximado, obter soluções reais.

Desse modo, a Modelagem Matemática “é um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos [...]” e ela “[...] consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual” (BASSANEZI, 2006, p. 24).

Segundo Bassanezi (2006), a modelagem não deve ser utilizada como um recurso que pode ser adaptado a qualquer tipo de realidade, pois isso pode ser mais destrutivo do que esclarecedor, visto que seu uso é adequado somente se auxiliar no desenvolvimento e compreensão do fenômeno analisado.

A Modelagem Matemática de um problema real deve seguir uma sequência de etapas, que podem ser vistas na Figura 1.

Figura 1 – Esquema de um processo de modelagem.



Fonte: Bassanezi (2006).

Segundo Bassanezi (2006), cada etapa pode ser entendida da seguinte forma:

1. *Experimentação*: Essa etapa ocorre em laboratório, com o objetivo de processar os dados obtidos. É a natureza do fenômeno e o objetivo da pesquisa que vão ditar o método experimental que deve ser adotado.
2. *Abstração*: É a fase que deve levar à formulação do Modelo Matemático, e possui algumas subetapas:
  - a) *Seleção das variáveis*: As variáveis devem ser bem definidas, distinguindo entre as variáveis de estado (que descrevem a evolução do sistema) e as variáveis de controle (que agem sobre o sistema).
  - b) *Problematização ou formulação aos problemas teóricos numa linguagem própria da área em que se está trabalhando*: Formular o problema de forma específica, indicando exatamente o que se pretende fazer. O enunciado do problema deve ser definido de forma clara, compreensível e operacional.
  - c) *Formulação de hipóteses*: Formular as hipóteses, ou seja, as partes da teoria que podem ser testadas. Pode-se dizer que as hipóteses se referem à frequência da interrelação entre as variáveis observadas experimentalmente. Elas podem ser formuladas de vários modos: observação dos fatos, comparação com outros estudos, dedução lógica, experiência pessoal do modelador, observação de casos singulares da própria teoria, analogia de sistemas etc.
  - d) *Simplificação*: Muitos fenômenos estudados podem ser complexos e difíceis de compreender, por isso, pode ser necessário uma simplificação selecionando somente as informações necessárias. Contudo, é importante não simplificar demais e perder informações necessárias.
3. *Resolução*: Quando é possível substituir a linguagem natural das hipóteses por uma linguagem matemática coerente, é que se tem o modelo matemático. Sua resolução está diretamente relacionada com a complexidade empregada em sua formulação, podendo ser necessário a utilização de meios computacionais para conseguir soluções aproximadas.
4. *Validação*: Nessa etapa são feitos testes para saber se o modelo, juntamente com as hipóteses anteriormente elaboradas, vão ser aceitos ou não. Esse processo é feito comparando os dados reais com os dados obtidos pelo modelo, que deve, no mínimo, prever os fatos que o originaram. De maneira geral, um bom modelo é aquele que o especialista que executou a modelagem o considera como tal. Gráficos das soluções podem ser utilizados para facilitar a interpretação das previsões.

5. *Modificação*: Fatores como hipóteses falsas, pressupostos incorretos, dados obtidos de maneira incorreta, hipóteses e dados insuficientes, variáveis na situação real que não foram utilizadas e erros no desenvolvimento matemático, podem causar uma rejeição do modelo matemático. Dessa forma, seria fundamental realizar ajustes necessários.

A Modelagem Matemática pode ser utilizada, tanto como método científico de pesquisa, quanto estratégia de ensino e aprendizagem, como forma de incentivo a alunos e professores. No primeiro caso, quando utilizada como instrumento de pesquisa, segundo Bassanezi (2006), pode estimular novas ideias e técnicas experimentais, fornecer informações diferentes das inicialmente previstas, ser utilizada como um método para fazer interpolações, extrapolações e previsões, pode ajudar na tomada de decisões, preencher lacunas onde existir falta de dados, servir de linguagem universal para pesquisadores compreenderem determinado fenômeno e, principalmente, servir como recurso para melhor entendimento da realidade.

## 1.2 Conceitos de Conjuntos Fuzzy

É possível descrever variáveis do dia a dia usando a linguagem de conjuntos, reunindo características e elementos comuns em determinados grupos através da Teoria Clássica de Conjuntos, definida pela função característica a seguir.

**Definição 1.2.1.** *Seja  $U$  um conjunto e  $A$  um subconjunto de  $U$ . A função característica de  $A$  é dada por*

$$x_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A \\ 0, & \text{se } x \notin A \end{cases} . \quad (1.1)$$

Assim,  $x_A$  é uma função com domínio  $U$  e imagem no conjunto  $\{0, 1\}$ . A função indica quais elementos de  $U$  pertencem e quais não pertencem a  $A$ . No entanto, em alguns casos pode não ser possível determinar se algum elemento pertence ou não a um conjunto com a mesma facilidade, como por exemplo, ao tentar determinar o conjunto de pessoas de “meia idade”. Uma pessoa com 29 anos pertence a esse conjunto? E uma com 56 anos? É incerto dizer qual a idade necessária para fazer parte desse conjunto, contudo, parece razoável dizer que uma pessoa de 56 anos pertence mais a esse conjunto do que uma pessoa de 29 anos.

Dessa forma, na Teoria de Conjuntos Fuzzy existe um grau de pertinência de cada elemento a um determinado conjunto.

**Definição 1.2.2.** *Seja  $U$  um conjunto clássico. Um subconjunto fuzzy  $F$  de  $U$  é caracterizado por uma função:*

$$\varphi_F : U \rightarrow [0, 1],$$

chamada de função de pertinência do subconjunto fuzzy  $F$ .

O valor de  $\varphi_F$  indica o grau de pertencimento com que o elemento  $x$  de  $U$  está no conjunto  $F$ . Quando  $\varphi_F(x) = 0$  pode-se dizer que  $x$  não pertence ao conjunto  $F$ , e quando  $\varphi_F(x) = 1$ ,  $x$  pertence completamente ao conjunto  $F$ . Assim, um elemento pode pertencer a mais de um conjunto fuzzy, com diferentes graus de pertinência.

Para o exemplo citado anteriormente, do conjunto de pessoas de “meia idade”, pode-se, então, considerar que uma pessoa de 56 anos possui um grau de pertinência mais próximo de 1 do que uma pessoa de 29 anos.

Um subconjunto fuzzy  $F$  é formado por elementos de um conjunto clássico  $U$ , esses elementos possuem um valor de pertinência a  $F$ , então pode-se dizer que um subconjunto fuzzy  $F$  de  $U$  é formado por pares ordenados:

$$F = \{(x, \varphi_F(x)), \text{ com } x \in U\}.$$

**Exemplo 1.2.1.** Considere o subconjunto fuzzy  $F$  dos números inteiros próximos a 4:

$$\varphi_F(x) = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ é próximo de } 4\}.$$

Definindo o conjunto solução como os elementos pertencentes ao conjunto  $[3, 5]$ , tem-se a função  $\varphi_F(x) : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ , que associa a cada  $x$  real o valor de proximidade ao ponto 4, dada por:

$$\varphi_F(x) = \begin{cases} 1 - |x - 4|, & \text{se } x \in [3, 5] \\ 0, & \text{se } x \notin [3, 5] \end{cases},$$

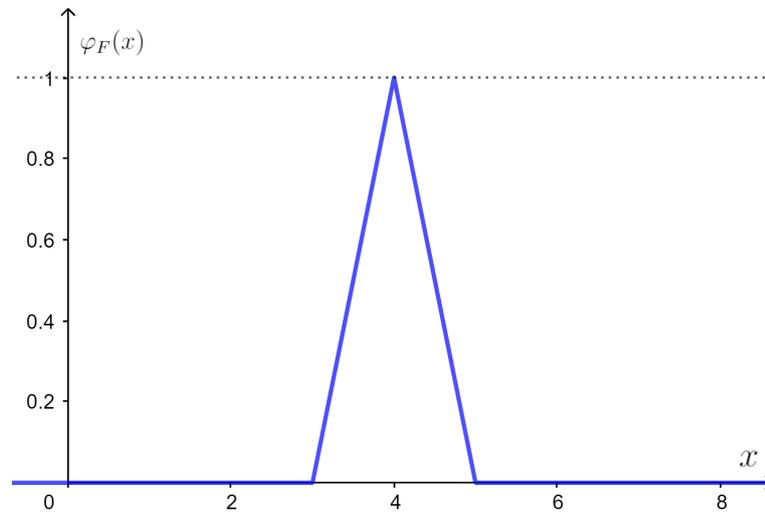
cuja representação pode ser vista na Figura 2.

É possível perceber que, quanto mais se aproxima, tanto pela direita quanto pela esquerda, do número 4, o grau de pertinência é maior, atingindo  $\varphi_F(x) = 1$  no próprio 4. No entanto, a proximidade é relativa e depende da função de pertinência determinada pelo que se considera “próximo”.

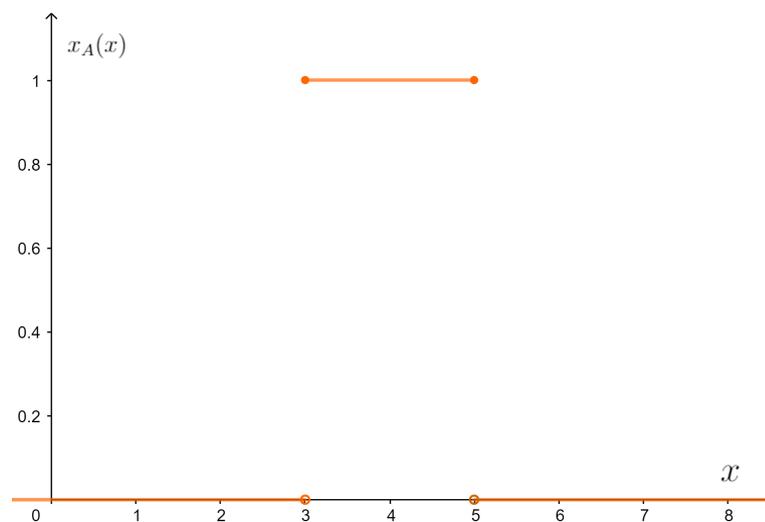
Na Teoria Clássica de Conjuntos, também chamada crisp, a representação analítica poderia ser dada da seguinte forma:

$$x_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in [3, 5] \\ 0, & \text{se } x \notin [3, 5] \end{cases},$$

cuja representação pode ser vista na Figura 3.

Figura 2 – Gráfico da função  $\varphi_F(x)$  do exemplo 1.2.1.

Fonte: Autoria própria.

Figura 3 – Gráfico da função  $x_A(x)$  do exemplo 1.2.1.

Fonte: Autoria própria.

### 1.2.1 Níveis de um Conjunto Fuzzy

Nesta subseção são apresentados os conceitos de suporte de um conjunto fuzzy e  $\alpha$ -nível, necessários para definir um número fuzzy.

**Definição 1.2.3.** Suporte de um conjunto fuzzy  $A$  são todos os elementos de  $U$  que têm grau de pertinência diferente de zero em  $A$  e denotado por  $Supp(A)$ :

$$Supp(A) = \{x \in A : \varphi_A(x) > 0\}. \quad (1.2)$$

**Definição 1.2.4.** *Seja  $A$  um subconjunto fuzzy de  $U$  e  $\alpha \in [0, 1]$ . O  $\alpha$ -nível de  $A$  é o subconjunto clássico de  $U$  definido por:*

$$[A]^\alpha = \{x \in U : \varphi_A(x) \geq \alpha\}, \text{ para todo } 0 < \alpha \leq 1. \quad (1.3)$$

Assim, um elemento  $x$  de  $[A]^\alpha$  pertence ao conjunto fuzzy  $A$  com, no mínimo, grau  $\alpha$ . Quando  $\alpha = 0$ , tem-se que  $[A]^0 = \overline{\text{Supp } A}$ .

**Exemplo 1.2.2.** *Seja  $U = \mathbb{R}$  o conjunto dos números reais, e  $A$  um subconjunto fuzzy de  $\mathbb{R}$  com a seguinte função de pertinência*

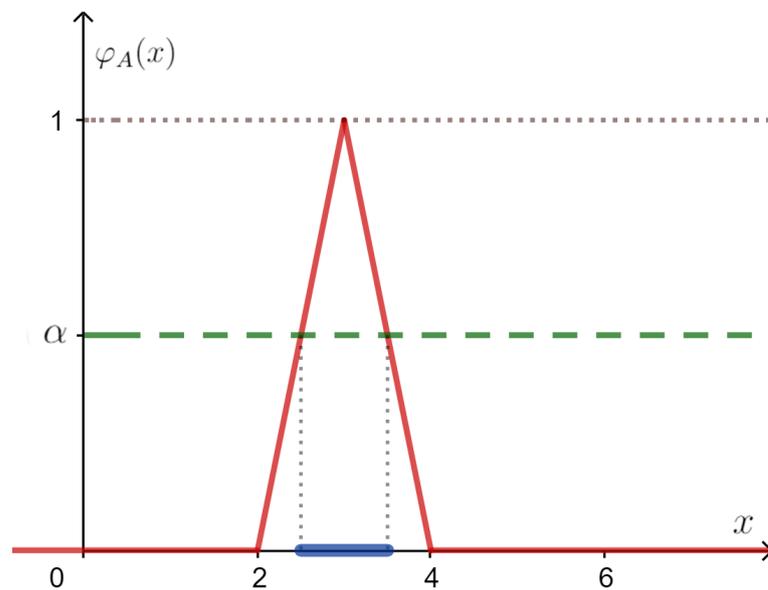
$$\varphi_A(x) = \begin{cases} x - 2, & \text{se } 2 \leq x < 3 \\ 4 - x, & \text{se } 3 \leq x < 4 \\ 0, & \text{se } x \notin [2, 4] \end{cases} .$$

*Pela definição 1.2.3 tem-se  $\text{Supp } A = ]2, 4[$ .*

*Determinando o conjunto  $\alpha$ -nível, com  $0 < \alpha \leq 1$ , considerando  $x - 2 \geq \alpha$  e  $4 - x \geq \alpha$ , então  $[A]^\alpha = [2 + \alpha, 4 - \alpha]$ .*

*Na Figura 4 é apresentada uma representação gráfica de  $[A]^\alpha$ , no eixo  $x$ , para um valor de  $\alpha \in [0, 1]$ .*

Figura 4 – Gráfico da função  $\varphi_A(x)$  do exemplo 1.2.2 com representação do  $\alpha$ -nível.



Fonte: Autoria própria.

### 1.2.2 Número Fuzzy

Quando um objeto é medido com a utilização de uma régua, em alguns casos, pode ser difícil dizer com exatidão o tamanho obtido através da medição e é comum

ouvir que o tamanho ficou “em torno de” algum valor. Essa expressão linguística pode ser indicada por um subconjunto fuzzy  $A$  cujo domínio da função de pertinência de  $A$ , dada por  $\varphi_A$ , é o conjunto dos números reais que representa os possíveis valores para o tamanho do objeto medido.

**Definição 1.2.5.** *Um subconjunto fuzzy  $A$  é chamado de número fuzzy quando o conjunto universo no qual  $\varphi_A$  está definida é o conjunto dos números reais  $\mathbb{R}$  e satisfaz às condições:*

- I. *todos os  $\alpha$ -níveis de  $A$  são não vazios, com  $0 \leq \alpha \leq 1$ ;*
- II. *todos os  $\alpha$ -níveis de  $A$  são intervalos fechados de  $\mathbb{R}$ ;*
- III.  *$Supp(A) = \{x \in \mathbb{R} : \varphi_A(x) > 0\}$  é limitado.*

Podemos observar que todo número real é um número fuzzy particular cuja função de pertinência é sua função característica. Os números fuzzy mais comuns são os triangulares e trapezoidais.

**Definição 1.2.6.** *Um número fuzzy  $A$  é dito triangular se sua função de pertinência é da forma*

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq a \\ \frac{x-a}{u-a}, & \text{se } a < x \leq u \\ \frac{x-b}{u-b}, & \text{se } u < x < b \\ 0, & \text{se } x \geq b \end{cases}.$$

O número triangular possui esse nome pois o gráfico da função de pertinência tem o formato de um triângulo, de forma que a base é o intervalo  $[a, b]$  e o ponto  $(u, 1)$ , o vértice. Um número fuzzy triangular pode ser denotado por  $(a; u; b)$  ou por  $a/u/b$  e não necessariamente é simétrico, pois o valor de  $b - u$  pode não ser igual ao valor de  $u - a$ .

Os  $\alpha$ -níveis dos números triangulares têm a forma:

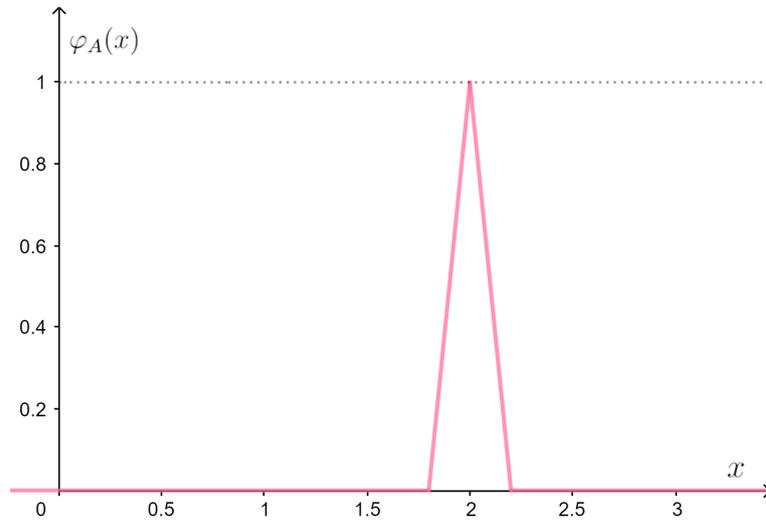
$$[A]^\alpha = [(u - a)\alpha + a, (u - b)\alpha + b], \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

**Exemplo 1.2.3.** *A expressão “em torno das duas horas” pode ser modelada matematicamente pelo número fuzzy triangular, cuja função de pertinência é dada por:*

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 1,8 \\ \frac{x-1,8}{0,2} & \text{se } 1,8 < x \leq 2 \\ \frac{x-2,2}{-0,2} & \text{se } 2 < x \leq 2,2 \\ 0 & \text{se } x \geq 2,2 \end{cases},$$

cuja representação gráfica pode ser vista na Figura 5.

Figura 5 – Gráfico da função  $\varphi_A(x)$  do exemplo 1.2.3.



Fonte: Autoria própria.

Os  $\alpha$ -níveis do exemplo 1.2.3 são dados por  $[A]^\alpha = [0, 2\alpha + 1, 8; -0, 2\alpha + 2, 2]$ . Por exemplo, para  $\alpha = 0,5$  tem-se  $[A]^{0,5} = [1, 9; 2, 1]$ .

**Definição 1.2.7.** Um número fuzzy  $A$  é dito trapezoidal se sua função de pertinência tem a forma de um trapézio e é dada por

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a}, & \text{se } a \leq x < b \\ 1, & \text{se } b \leq x \leq c \\ \frac{d-x}{d-c}, & \text{se } c < x \leq d \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

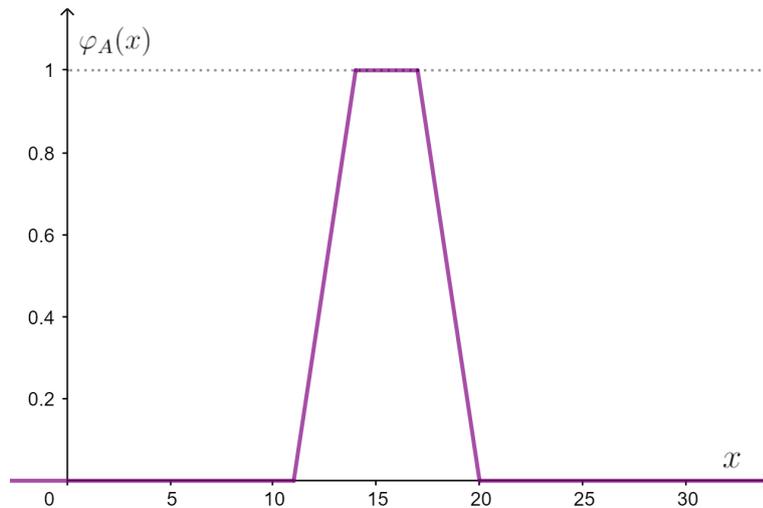
Os  $\alpha$ -níveis dos números trapezoidais têm a forma:

$$[A]^\alpha = [\alpha(b-a) + a, \alpha(c-d) + d], \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

**Exemplo 1.2.4.** O conjunto fuzzy dos adolescentes pode ser representado pelo número fuzzy trapezoidal, dado pela função de pertinência a seguir

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} \frac{x-11}{3}, & \text{se } 11 \leq x < 14 \\ 1, & \text{se } 14 \leq x \leq 17 \\ \frac{20-x}{3}, & \text{se } 17 < x \leq 20 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases},$$

cuja representação gráfica pode ser vista na Figura 6.

Figura 6 – Gráfico da função  $\varphi_A(x)$  do exemplo 1.2.4.

Fonte: Autoria própria.

Os  $\alpha$ -níveis do exemplo 1.2.4 são dados por  $[A]^\alpha = [3\alpha + 11, -3\alpha + 20]$ . Por exemplo, para  $\alpha = 0,7$  tem-se  $[A]^{0,7} = [13, 1; 17, 9]$ .

### 1.2.3 Lógica Fuzzy

Na lógica clássica as proposições são consideradas verdadeiras ou falsas, baseadas na Teoria Clássica de Conjuntos. A lógica fuzzy tem como base a Teoria de Conjunto Fuzzy e uma proposição fuzzy é do tipo “Se  $x$  é  $A$  e  $y$  é  $B$ , então  $z$  é  $C$ ”, sendo verdadeira ou falsa com um certo grau (SILVA, 2005).

### Variáveis Linguísticas

As variáveis linguísticas são variáveis cujos valores são palavras, ao invés de números. Cada termo linguístico corresponde a um conjunto fuzzy. Por exemplo, “altura” é uma variável linguística que pode assumir valores: Baixa, Média, Alta.

### Operações t-norma e t-conorma

**Definição 1.2.8.** (*t-norma*). O operador  $\Delta : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ ,  $\Delta(x, y) = x \Delta y$ , é uma *t-norma*, se satisfizer as seguintes condições:

$$a_1) \text{ elemento neutro: } \Delta(1, x) = 1 \Delta x = x;$$

$$a_2) \text{ comutativa: } \Delta(x, y) = x \Delta y = y \Delta x = \Delta(y, x);$$

$$a_3) \text{ associativa: } x \Delta (y \Delta z) = (x \Delta y) \Delta z;$$

$a_4$ ) *monotonicidade*: se  $x \leq u$  e  $y \leq v$ , então  $x \Delta y \leq u \Delta v$ ;

A operação *t-norma* estende o operador  $\wedge$  que modela o conectivo “e”.

**Definição 1.2.9.** (*t-conorma*). O operador  $\nabla : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ ,  $\nabla(x, y) = x \nabla y$ , é uma *t-conorma*, se satisfazer as seguintes condições:

$b_1$ ) *elemento neutro*:  $\nabla(0, x) = 0 \nabla x = x$ ;

$b_2$ ) *comutativa*:  $\nabla(x, y) = x \nabla y = y \nabla x = \nabla(y, x)$ ;

$b_3$ ) *associativa*:  $x \nabla (y \nabla z) = (x \nabla y) \nabla z$ ;

$b_4$ ) *monotonicidade*: se  $x \leq u$  e  $y \leq v$ , então  $x \nabla y \leq u \nabla v$ ;

A operação *t-conorma* estende o operador  $\vee$  que modela o conectivo “ou”.

#### 1.2.4 Sistemas Baseados em Regras Fuzzy

O Sistema Baseado em Regras Fuzzy (SBRF) é um sistema que utiliza a lógica fuzzy para gerar saídas para cada entrada fuzzy, ou seja, ele utiliza conceitos da Teoria de Conjuntos Fuzzy.

Uma base de regras fuzzy é da seguinte forma:

**Se “estado” Então “resposta”,**

assim, cada regra é uma proposição fuzzy que retorna uma classificação.

#### Controlador Fuzzy

Quando cada entrada fuzzy corresponde a uma saída fuzzy, ou seja, quando cada “condição” resulta em uma “ação”, o sistema de base de regras é chamado de controlador fuzzy. A estrutura de um controlador fuzzy possibilita a transformação do domínio do fenômeno, normalmente os números reais, para o domínio dos conjuntos fuzzy. Depois disso, é utilizado um método de inferência nas regras pré-estabelecidas para que seja tomada uma decisão. Para concluir, é possível fazer a transformação inversa, do conjunto fuzzy para o escolhido. O processo para a construção do sistema fuzzy é feito pelos seguintes módulos:

- (i) *Módulo de fuzzificação*: Neste módulo as entradas são modeladas matematicamente por conjuntos fuzzy. As funções de pertinência devem ser formuladas com o auxílio de algum especialista e, mesmo se o conjunto for clássico, eles devem ser fuzzificados por meio de sua função característica.

(ii) *Módulo de base de regras*: O módulo de base de regras é constituído pelas proposições fuzzy e podem ser dadas da seguinte forma:

Se  $X$  é  $A_j$  então  $Y$  é  $B_j$ .

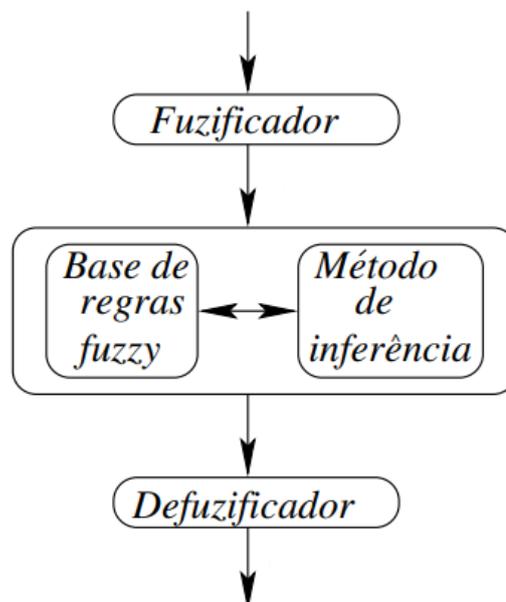
Essas proposições são construídas fazendo as combinações adequadas entre as variáveis de entrada e as variáveis de saída.

(iii) *Módulo de inferência fuzzy*: Neste módulo cada proposição é traduzida matematicamente através dos conceitos da Teoria de Conjuntos Fuzzy, definindo os conectivos lógicos (t-normas, t-conormas e regras de inferência) mais adequados para obter a relação fuzzy que irá modelar a base de regras criada. Nesse trabalho, será utilizado o método da inferência de Mamdani.

(iv) *Módulo de defuzzificação*: No módulo de defuzzificação é possível transformar a variável de saída fuzzy em um valor numérico. Existem vários métodos de defuzzificação, os mais comuns são: centro de gravidade, centro dos máximos e média dos máximos. Nesse trabalho, será utilizado o centro de gravidade.

Na Figura 7 é possível ver um esquema simplificador dos módulos de um SBRF.

Figura 7 – Esquema de um SBRF.



Fonte: Silva (2005).

### Inferência de Mamdani

Um método de inferência fuzzy utilizado para se concluir a respeito das regras fuzzy é a Inferência de Mamdani. Esse método é baseado na regra de composição de

inferência *max-min*, apresentando uma relação fuzzy binária para modelar as regras fuzzy, que pode ser exemplificado da seguinte forma:

- Para cada regra  $R$ , a condicional “se  $x$  é  $A_j$  então  $u$  é  $B_j$ ” é modelada por  $\wedge$  (mínimo);
- Adota-se a t-norma  $\wedge$  (mínimo) para o conectivo lógico “e”;
- Adota-se a t-conorma  $\vee$  (máximo) para o conectivo lógico “ou”.

Com base em Barros e Bassanezi (2010), a relação fuzzy  $M$  é o subconjunto fuzzy de  $X \times U$  cuja função de pertinência é dada por:

$$\varphi_M(x, u) = \max_{1 \leq j \leq r} (\varphi_{R_j}(x, u)) = \max_{1 \leq j \leq r} (\varphi_{A_j}(x) \wedge \varphi_{B_j}(u)),$$

onde  $r$  é o número de regras da base e  $A_j$  e  $B_j$  são subconjuntos fuzzy da regra  $j$ . Os valores  $\varphi_{A_j}(x)$  e  $\varphi_{B_j}(u)$  são os graus com que  $x$  e  $y$  estão nos subconjuntos fuzzy de entrada  $A_j$  e saída  $B_j$ , respectivamente.

### Centro de Gravidade

O método de defuzzificação centro de gravidade é similar à média aritmética para uma distribuição de dados, porém os pesos são os valores  $\varphi_B(u_i)$ , que indicam o grau de compatibilidade do valor  $u_i$  com o conceito modelado pelo conjunto fuzzy  $B$ . Assim, o centro de gravidade fornece a média das áreas de todas as figuras que representam os graus de pertinência de um subconjunto fuzzy. Ele é o mais utilizado dentre os métodos de defuzzificação (BARROS; BASSANEZI, 2010).

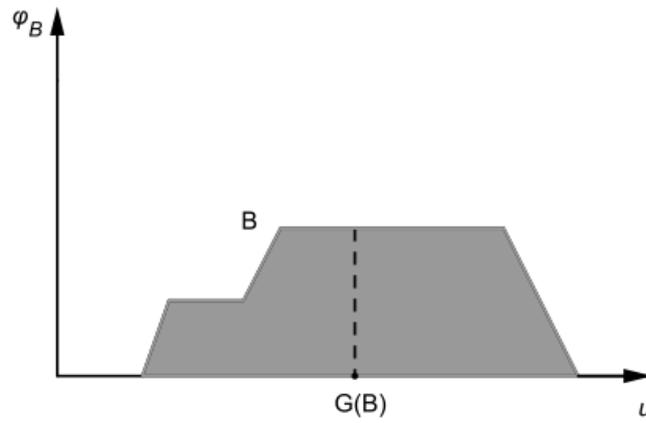
A equação do centro de gravidade para um domínio discreto é

$$G(B) = \frac{\sum_{i=0}^n u_i \varphi_B(u_i)}{\sum_{i=0}^n \varphi_B(u_i)}. \quad (1.4)$$

A equação do centro de gravidade para um domínio contínuo é

$$G(B) = \frac{\int_{\mathbb{R}} u \varphi_B(u) du}{\int_{\mathbb{R}} \varphi_B(u) du}. \quad (1.5)$$

A Figura 8 mostra o gráfico do defuzzificador  $G(B)$ .

Figura 8 – Defuzzificador centro de gravidade  $G(B)$ .

Fonte: Villar (2008).

## 2 Sistemas p-fuzzy

Equações diferenciais e equações de diferenças determinísticas são comumente utilizadas para criar modelos matemáticos de fenômenos em que as variáveis de estado estão sujeitas à variação ao longo do tempo. No entanto, existem relações nas quais as variáveis e suas variações não são conhecidas, além de possuírem parâmetros difíceis de mensurar. Em alguns casos, as relações também podem ser parcialmente conhecidas (VILLAR, 2008).

Nesse sentido, nos sistemas parcialmente fuzzy (p-fuzzy) a relação que descreve as variações com as suas respectivas variáveis de estado é descrita por uma base de regras fuzzy no lugar de equações explícitas, permitindo a incorporação de informações imprecisas.

Elas recebem esse nome porque são parcialmente fuzzy, ou seja, o Problema de Valor Inicial (PVI) em questão é parcialmente conhecido. Porém, sua solução é real e, em cada instante de tempo, um valor é obtido depois de um processo de defuzzificação (FERREIRA, 2012).

Nesse trabalho, o modelo do número de infectados por COVID-19 no Estado de São Paulo em função do tempo é elaborado a partir de um sistema p-fuzzy. A base de regras e os parâmetros das funções de pertinência do SBRF são construídos a partir dos dados de COVID-19 obtidos pela Fundação Sistema Estadual de Análise de Dados (SEADE).

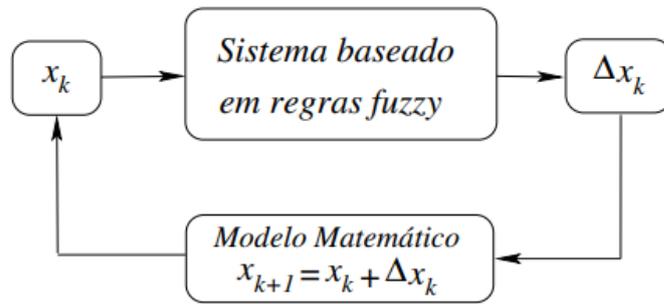
### 2.1 Sistemas Dinâmicos P-fuzzy

Um sistema dinâmico p-fuzzy é um sistema iterativo. Neste trabalho, será abordado apenas o caso unidimensional, aqueles com equações de diferenças em uma dimensão real, dados por:

$$\begin{cases} x_{k+1} = F(x_k) \\ x_0 \in \mathbb{R} \end{cases}, \quad (2.1)$$

onde  $F$  é dado por  $F(x_k) = x_k + \Delta(x_k)$ , a condição inicial  $x_0$  é conhecida e a variação  $\Delta(x_k) \in \mathbb{R}$  é obtida por meio da saída defuzzificada de um SBRF, ilustrado na Figura 9.

Figura 9 – Estrutura de um sistema p-fuzzy.



Fonte: Silva (2005).

### 3 Problema

Neste capítulo é elaborado um sistema p-fuzzy para modelar matematicamente o comportamento da COVID-19 no Estado de São Paulo, mais especificamente, modelar o número de indivíduos infectados ao longo do tempo.

Para isso, são apresentados brevemente alguns aspectos da COVID-19, bem como os dados para a construção do modelo fuzzy, obtidos juntos à SEADE, que são fornecidos a partir de dados oficiais da Secretaria de Estado da Saúde de São Paulo (SES).

#### 3.1 COVID-19

“A COVID-19 é uma infecção respiratória aguda causada pelo coronavírus SARS-CoV-2, potencialmente grave, de elevada transmissibilidade e de distribuição global” (BRASIL, Ministério da Saúde, 2021).

O SARS-CoV-2 é um betacoronavírus encontrado em amostras de lavado broncoalveolar obtidas de pacientes com pneumonia de causa desconhecida na cidade de Wuhan, província de Hubei, China, em dezembro de 2019. Pertence ao subgênero *Sarbecovirus* da família *Coronaviridae* e é o sétimo coronavírus conhecido a infectar seres humanos (BRASIL, Ministério da Saúde, 2021).

Os coronavírus são uma grande família de vírus comuns em muitas espécies diferentes de animais, incluindo o homem, camelos, gado, gatos e morcegos. Raramente os coronavírus de animais podem infectar pessoas e depois se espalhar entre seres humanos como já ocorreu com o MERS-CoV e o SARS-CoV-2. (BRASIL, Ministério da Saúde, 2021)

No Brasil, o Ministério da Saúde declarou a COVID-19 como uma emergência de saúde pública de importância nacional no dia 03 de fevereiro de 2020. O primeiro caso no país foi identificado no dia 26 do mesmo mês, na cidade de São Paulo, em um cidadão que havia viajado para a Itália (BRASIL, Agência Brasil, 2021).

No dia 17 de março ocorreu a primeira morte de COVID-19 no Brasil, e no dia 20, o Ministério da Saúde publicou uma portaria confirmando a transmissão comunitária em todo o país (BRASIL, Agência Brasil, 2021). Segundo o Ministério da Saúde (2021), a COVID-19 pode ser transmitida de três modos: por contato, gotículas ou por aerossol.

A transmissão por contato ocorre pela relação direta com a pessoa contaminada; a transmissão por gotículas acontece pelo contato com as gotículas respiratórias

expelidas pela pessoa contaminada quando ela tosse ou espirra; já a transmissão por aerossol ocorre pelo contato com as gotículas respiratórias menores que permanecem suspensas no ar e podem ser levadas a distâncias maiores que um metro.

O período de incubação varia de 1 a 14 dias, com média geral de 5 a 6 dias. Já o período de transmissibilidade do vírus ainda é bastante incerto, mas é de conhecimento que muitos pacientes o transmitem durante o período de incubação (BRASIL, Ministério da Saúde, 2021).

Dentre os sintomas, a infecção por SARS-CoV-2 pode variar de casos assintomáticos e manifestações clínicas leves, até quadros moderados, graves e críticos.

No caso assintomático, não há a presença de qualquer sintoma. Para os demais, os sintomas podem variar entre tosse, dor de gargante, diarreia, dor abdominal, febre, calafrios, mialgia, fadiga, cefaleia, adinamia, prostração e hiporexia; até o desenvolvimento de pneumonia, Síndrome Respiratória Aguda Grave, alteração da consciência, desidratação, dificuldade para se alimentar, lesão miocárdica, elevação de enzimas hepáticas, disfunção da coagulação, rabdomiólise, cianose central, letargia, convulsões e dificuldade de alimentação (BRASIL, Ministério da Saúde, 2021).

Para os casos críticos, os principais sintomas são sepse, síndrome do desconforto respiratório agudo, insuficiência respiratória grave, disfunção de múltiplos órgãos, pneumonia grave, necessidade de suporte respiratório e internações em unidades de terapia intensiva (BRASIL, Ministério da Saúde, 2021).

Dentre as medidas indicadas pelo Ministério da Saúde para a resposta ao enfrentamento da COVID-19, estão as não farmacológicas, como distanciamento social, etiqueta respiratória e de higienização das mãos, uso de máscaras, limpeza e desinfecção de ambientes, isolamento de casos suspeitos e confirmados, e quarentena dos contatos dos casos de COVID-19, conforme orientações médicas.

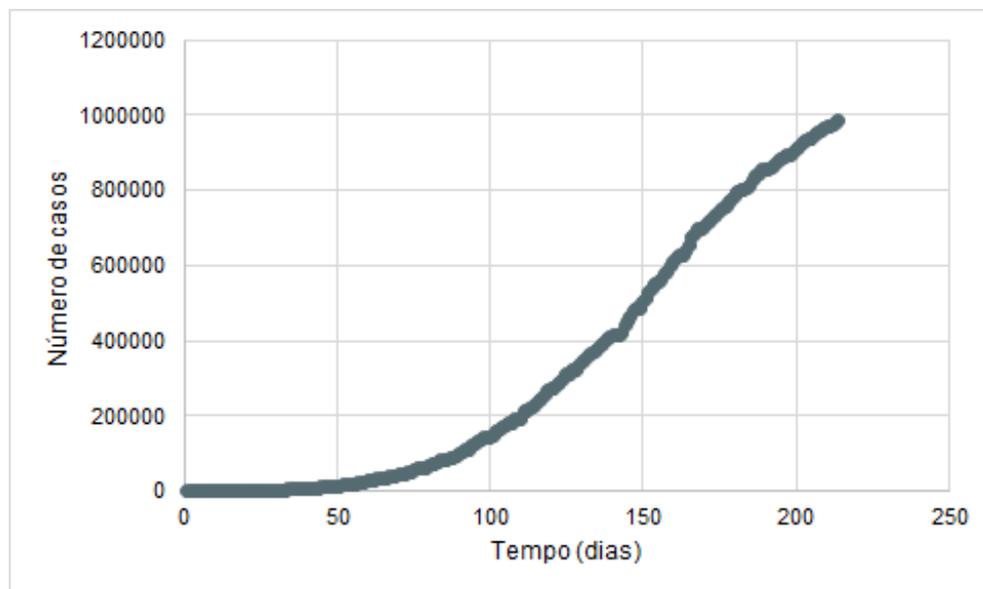
## 3.2 Dados

Os dados apresentados foram obtidos pela SEADE e correspondem ao número total de infectados por COVID-19 no Estado de São Paulo, em dias, no período de 01 de agosto à 30 de setembro de 2020. Para este trabalho, foi escolhido modelar somente a primeira onda<sup>2</sup>, pois após o período selecionado haveria o início de uma nova onda e o processo de modelagem seria diferente.

<sup>2</sup> Segundo a CNN Brasil (2021), não há uma definição exata de início ou término de cada onda, porém o surgimento de uma nova onda pode ser caracterizado quando uma localidade apresenta um ritmo de aumento progressivo de casos, que pode ser causado pelo surgimento de novas variantes, pelo ritmo lento de vacinação e/ou pela flexibilização das medidas de restrição.

A Figura 10 apresenta o gráfico de dispersão com os dados dos casos acumulados de COVID-19.

Figura 10 – Gráfico de dispersão dos dados.



Fonte: Autoria própria.

É possível observar que a curva apresenta um comportamento logístico, ou seja, considerando o caso crescente, a taxa de crescimento se torna menor à medida que o número de casos se aproxima de uma capacidade máxima.

O modelo logístico foi proposto inicialmente por Pierre François Verhulst, em 1838, e é da forma:

$$\begin{cases} \dot{P}(t) = \frac{dP}{dt} = rP \left(1 - \frac{P}{k}\right), \\ P(0) = P_0, \end{cases}$$

sendo

- $P(t)$  a população no instante de tempo  $t$ ;
- $\dot{P}$  a taxa de variação da população  $P(t)$  em relação ao tempo  $t$ ;
- $r$  a taxa intrínseca de crescimento, com  $r > 0$ ;
- $k$  a capacidade de carga, ou seja, a capacidade suporte no meio, com  $k > 0$ ;
- $P_0$  a população inicial.

Neste modelo são considerados fatores que limitam o crescimento exponencial da população, tendo assim uma capacidade suporte  $k$  para a qual a população tende

a se estabilizar. Dessa forma, quando a população está acima da capacidade suporte  $k$ , o número de indivíduos da espécie diminui ( $\dot{P}(t) < 0$ ). Por outro lado, quando o número de indivíduos está abaixo dessa capacidade  $k$ , o número de indivíduos aumenta ( $\dot{P}(t) > 0$ ), ou seja,

Se  $P_0 > k$  então  $\dot{P}(t) < 0$ .

Se  $P_0 < k$  então  $\dot{P}(t) > 0$ .

Esse processo é ilustrado na Figura 11. Mais detalhes acerca deste modelo são apresentados no Apêndice A.

Figura 11 – Campo de variações: ( $\rightarrow$ ) variação positiva; ( $\leftarrow$ ) variação negativa.



Fonte: (VILLAR, 2008).

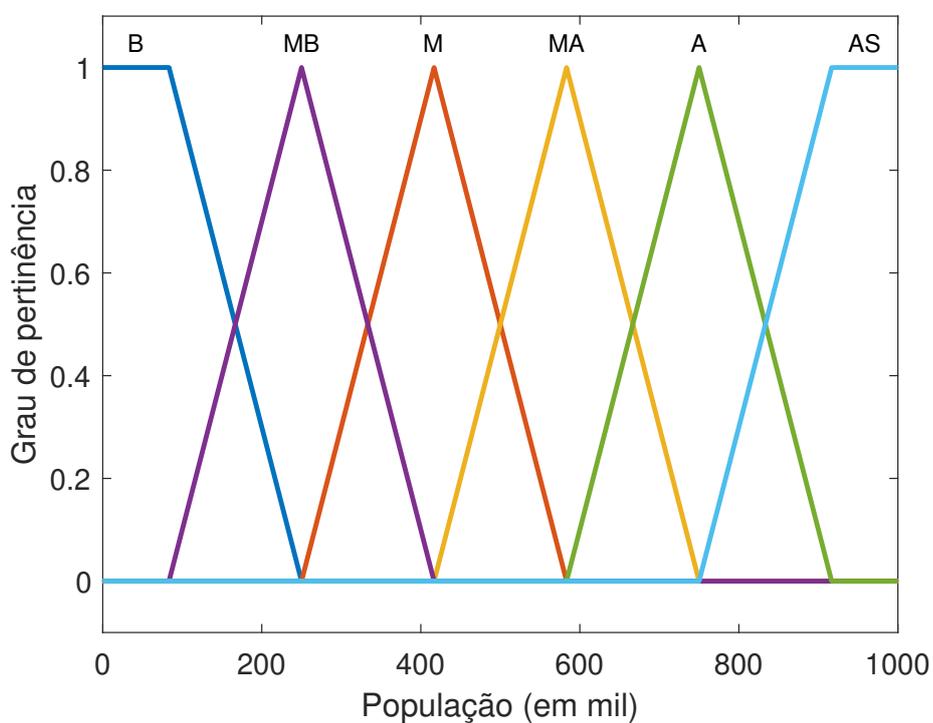
### 3.3 Modelo

Determinar a população  $P(t)$  para a curva de casos de COVID-19 não é uma tarefa simples, principalmente no caso do número de infectados, em que a dinâmica populacional é parcialmente conhecida. Como consequência, a capacidade suporte  $k$  também será parcialmente conhecida. Portanto, não é possível determinar com precisão quando  $\dot{P}(t)$  mudará de sinal. Porém, é possível saber, “através do processo de modelagem, que quando o número de indivíduos de uma população é altíssimo a população decresce” (VILLAR, 2008, p. 28).

Para construir o modelo p-fuzzy, será considerado uma entrada e uma saída: a população  $P(t)$  e a variação  $\Delta P(t)$ , respectivamente. A população assumirá os estados determinados pelas variáveis linguísticas: *Baixa (B)*, *Média Baixa (MB)*, *Média (M)*, *Média Alta (MA)*, *Alta (A)* e *Altíssima (AS)*. Já a saída, será definida pelas variáveis linguísticas: *Baixa Negativa (Bn)*, *Baixa Positiva (Bp)*, *Média Positiva (Mp)* e *Alta Positiva (Ap)*. As funções de pertinência de entrada e saída podem ser vistas nas Figuras 12 e 13, respectivamente.

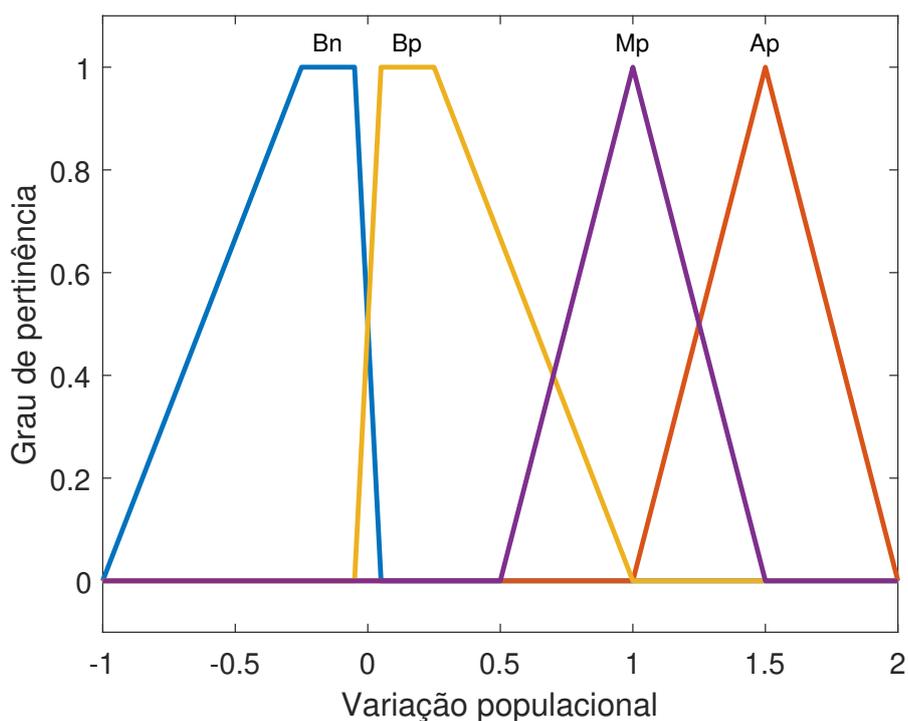
No modelo logístico, quando a população é baixa, o comportamento crescente é o mesmo do modelo exponencial, positivo. Quando a população é média, o crescimento ainda é positivo, porém com menor intensidade. Quando a população se torna alta ou muito alta é que o processo de limitação começa a operar, fazendo o crescimento populacional passar de positivo para negativo (VILLAR, 2008).

Figura 12 – Funções de pertinência de entrada.



Fonte: Autoria própria.

Figura 13 – Funções de pertinência de saída.



Fonte: Autoria própria.

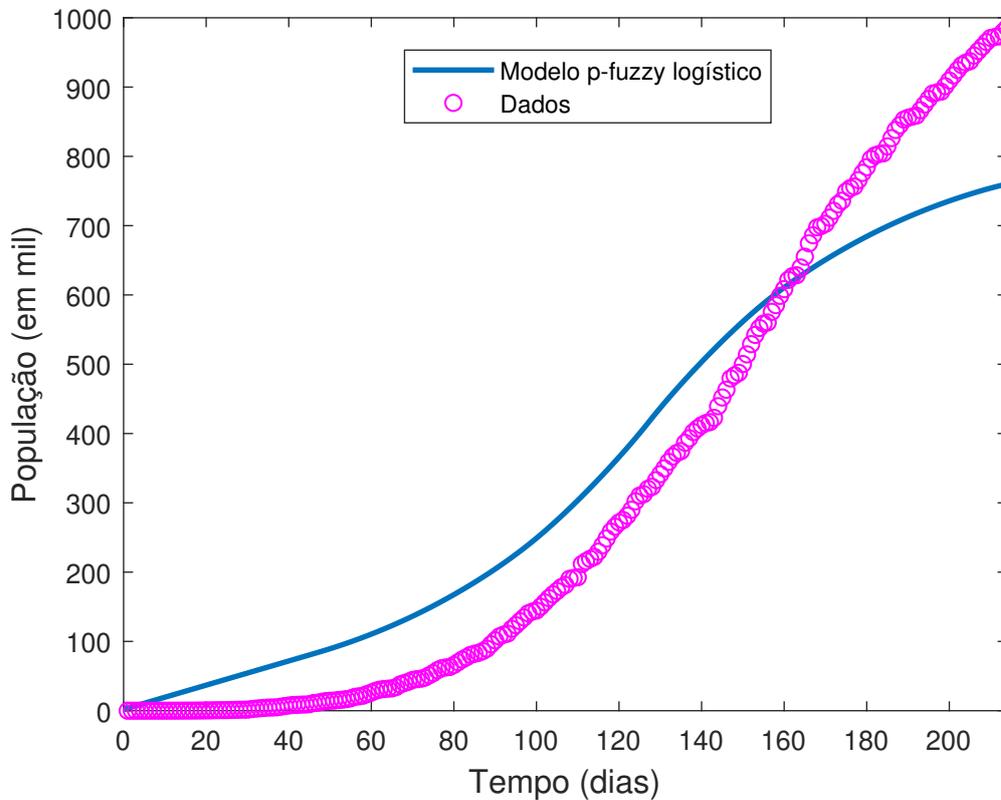
Essas hipóteses podem ser descritas por regras fuzzy. A base de regras fuzzy utilizadas para modelar o fenômeno proposto pode ser vista na Tabela 1.

<b>Regra 1</b>	Se a população é <i>Baixa</i> então a variação é <i>Baixa Positiva</i>
<b>Regra 2</b>	Se a população é <i>Média Baixa</i> então a variação é <i>Média Positiva</i>
<b>Regra 3</b>	Se a população é <i>Média</i> então a variação é <i>Alta Positiva</i>
<b>Regra 4</b>	Se a população é <i>Média Alta</i> então a variação é <i>Média Positiva</i>
<b>Regra 5</b>	Se a população é <i>Alta</i> então a variação é <i>Baixa Positiva</i>
<b>Regra 6</b>	Se a população é <i>Altíssima</i> então a variação é <i>Baixa Negativa</i>

Tabela 1 – Base de regras para o modelo logístico p-fuzzy.

Na Figura 14 são apresentados os dados de dispersão coletados (em rosa) e a curva solução do modelo logístico p-fuzzy (em azul) elaborado a partir da base de regras proposta.

Figura 14 – Ajuste do modelo logístico p-fuzzy.



É possível observar que o comportamento do modelo se assemelha ao comportamento dos dados obtidos da SEADE. Vale ressaltar que o objetivo do trabalho não é criar um modelo com valores exatos aos reais, mas fazer uma modelagem baseada em incertezas, e o sistema de base de regras contempla essas imprecisões.

Segundo Bassanezi (2006, p. 30) “um bom modelo é aquele que tem capacidade de previsão de novos fatos [...]” e o modelo apresentado na Figura 14 permite compreender e avaliar o comportamento dos casos de COVID-19 no Estado de São Paulo, possibilitando a providência de medidas de controle, apesar da diferença entre as duas curvas.

Os números triangulares e trapezoidais utilizados nas funções de pertinência contemplam os possíveis valores para cada variável linguística, ou seja, para cada classificação do número de casos de COVID-19: baixa, média baixa, média, média alta, alta e altíssima; e para a variação da população: baixa positiva, média positiva, alta positiva e baixa negativa.

O SBRF faz a ligação entre essas variáveis de entrada e saída, ou seja, entre o número de casos e a variação desses números em cada instante  $t$ . Por fim, o sistema p-fuzzy utiliza a saída para construir o modelo. Foi implementado um programa para a construção do modelo no *software* Octave, cujo código pode ser visto no Anexo A.

Na curva do modelo da Figura 14, é possível observar como o número de casos de COVID-19 no Estado de São Paulo possui um crescimento acelerado que tende a diminuir com o tempo até se estabilizar. Essa estabilidade pode ser comprometida por um grande aumento no número de casos resultante do não cumprimento das medidas de prevenção indicadas pelo Ministério da Saúde, surgindo assim, uma nova onda de casos. A diferença entre as curvas do modelo e dos dados reais pode ser explicada por esse fenômeno, visto que o modelo construído nesse trabalho não considera o cumprimento ou descumprimento das medidas de controle.

Em suma, incorporar a Teoria de Conjuntos Fuzzy possibilitou como resultado um bom modelo, que, mesmo sem equações explícitas, permite o desenvolvimento de estudos referentes à COVID-19.



## Considerações Finais

Apesar de recente, a Teoria de Conjuntos Fuzzy vem sendo cada vez mais utilizada em pesquisas e trabalhos científicos e acadêmicos de diversas áreas, principalmente pelo fato de permitir considerar incertezas em modelos matemáticos. Ao estudá-la, foi possível observar como ela se faz útil em situações nas quais não se dispõe de informações precisas, mas, ainda assim, é possível contemplar características importantes do fenômeno a ser modelado.

Neste trabalho, foi utilizada a Teoria de Conjuntos Fuzzy para a elaboração de um sistema p-fuzzy, em que não são utilizadas explicitamente equações, mas uma base de regras fuzzy, possibilitando incorporar incertezas na construção do modelo referente ao número de casos de COVID-19 no Estado de São Paulo.

A COVID-19 é uma doença que, no momento da realização deste trabalho, ainda é bastante recente e, embora diversos estudos estejam sendo feitos constantemente, ainda possui um grande número de informações subjetivas e dados imprecisos. Assim, utilizando uma base de regras e funções de pertinência obtidas a partir das características do fenômeno, que possui um comportamento semelhante ao modelo logístico, foi possível realizar a construção do modelo com resultados esperados.

O modelo obtido mostrou como é possível realizar a modelagem com informações subjetivas, bem como entender o comportamento do fenômeno. Além disso, também possibilitou ter uma melhor compreensão do processo de modelagem estudado no trabalho, reforçando a ideia da sua grande contribuição para a evolução de pesquisas em diversos ramos.

Dessa forma, conclui-se que o objetivo de construir um modelo para o número de casos de COVID-19 no Estado de São Paulo a partir dos estudos da Teoria de Conjuntos Fuzzy foi alcançado.

Como continuação do trabalho, em futuras pesquisas, sugere-se a construção de um modelo p-fuzzy considerando novas ondas de contágio, visto que no modelo proposto foi considerado somente a primeira onda. Também pode ser proposto um modelo que considere medidas de controle, como o uso de máscaras, isolamento social e vacinação.



## Referências

- BARROS, L. C. D.; BASSANEZI, R. C. Tópicos de Lógica fuzzy e Biomatemática. 2. ed. Campinas - SP: IMECC/Unicamp, 2010. Citado 5 vezes nas páginas 17, 18, 19, 21 e 33.
- BASSANEZI, R. C. Ensino-aprendizagem com modelagem matemática. 3. ed. São Paulo: Contexto, 2006. Citado 8 vezes nas páginas 17, 18, 21, 22, 23, 24, 43 e 49.
- BRASIL, Agência Brasil. Primeiro caso de covid-19 no Brasil completa um ano. 2021. Disponível em: <https://agenciabrasil.ebc.com.br/saude/noticia/2021-02/primeiro-caso-de-covid-19-no-brasil-completa-um-ano>. Acesso em: Julho de 2021. Citado na página 37.
- BRASIL, Ministério da Saúde. Coronavírus. Brasília, 2021. Disponível em: <https://www.gov.br/saude/pt-br/coronavirus/>. Acesso em: Outubro de 2021. Citado 2 vezes nas páginas 37 e 38.
- CNN Brasil. O que são ondas da COVID-19 e porque o Brasil pode estar diante da terceira. 2021. Disponível em: <https://www.cnnbrasil.com.br/saude/o-que-sao-ondas-da-covid-19-e-por-que-o-brasil-pode-estar-diante-da-3/>. Acesso em: Outubro de 2021. Citado na página 38.
- FERREIRA, D. P. L. Sistema p-Fuzzy Aplicado às Equações Diferenciais Parciais. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia - MG, 2011. Citado na página 18.
- FERREIRA, T. F. Sistemas p-Fuzzy Modificados para Dinâmicas Populacionais: modelagens e simulações. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia - MG, 2012. Citado 3 vezes nas páginas 18, 21 e 35.
- Fundação Sistema Estadual de Análise de Dados (SEADE). Boletim COVID-19. 2021. Disponível em: <https://www.seade.gov.br/coronavirus/>. Acesso em: Agosto de 2021. Nenhuma citação no texto.
- GAYER, F. A. M. A Matemática está em tudo: modelagem fuzzy para um problema da indústria e uma proposta de aplicação no Ensino Médio. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro - SP, 2017. Citado na página 21.
- JAFELICE, R. S. D. M.; BARROS, L. C.; BASSANEZI, R. C. Teoria dos Conjuntos Fuzzy com Aplicações. 2. ed. São Carlos - SP: SBMAC, 2012. Citado 4 vezes nas páginas 17, 18, 19 e 21.
- LEITE, J.; BASSANEZI, R. C. Sistemas dinâmicos fuzzy aplicados a processos difusos. Biomatemática IMECC - Unicamp, n. 20, p. 157–166, 2010. Citado na página 18.
- MELO, J. C. S.; MORAES, R. M. Sistema espacial de suporte à decisão para gestão do combate ao dengue usando lógica fuzzy. Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional, n. 3, p. 405–421, 2018. Citado na página 18.

SANTOS, W. M. dos. Um modelo fuzzy para o processo de fermentação de pães artesanais via princípio da extensão de Zadeh. São Paulo - SP: [s.n.], 2020. Citado 3 vezes nas páginas 51, 52 e 53.

SILVA, J. D. M. da. Análise de Estabilidade de Sistemas Dinâmicos P-fuzzy com Aplicações em Biomatemática. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual de Campinas, Campinas - SP, 2005. Citado 3 vezes nas páginas 30, 32 e 36.

STEWART, J. Cálculo 1. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013. Citado na página 51.

VILLAR, R. P. Estratégias para Controle de Pragas: Sistemas P-fuzzy com Controle Híbrido. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Campinas, Campinas - SP, 2008. Citado 3 vezes nas páginas 34, 35 e 40.

## APÊNDICE A – Modelo Logístico

O modelo logístico proposto por Pierre F. Verhulst consiste de uma modificação do modelo para crescimento populacional anteriormente apresentado por Thomas R. Malthus (BASSANEZI, 2006). Neste modelo, considera-se que a população tende a uma estabilidade, à medida que surge um inibidor que impede o crescimento sem limites, como a disputa por espaço e alimento, por exemplo. Dessa forma, Verhulst assume que a população vive em um determinado ambiente até um limite máximo sustentável.

Nesse modelo, a taxa de crescimento populacional não é constante independente da população, como considerado por Malthus, mas possui uma taxa de crescimento variável e dependente da população.

Neste apêndice será apresentada uma análise do modelo determinístico proposto por Verhulst – o modelo logístico – que pode ser apresentado da seguinte forma:

$$\frac{dP}{dt} = rP \left( 1 - \frac{P}{k} \right), \quad (\text{A.1})$$

sendo

- $P(t)$  a população no instante de tempo  $t$ ;
- $r$  a taxa intrínseca de crescimento, com  $r > 0$ ;
- $k$  a capacidade de carga, ou seja, a capacidade suporte do meio, com  $k > 0$ .

Considerando que a população inicial seja conhecida, ou seja,  $P(0) = P_0$ , é possível resolver o seguinte Problema de Valor Inicial (PVI):

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = rP \left( 1 - \frac{P}{k} \right) \\ P(0) = P_0 \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

A solução do sistema (A.2) pode ser obtida utilizando o método de separação de variáveis, como segue:

$$\frac{dP}{P \left( 1 - \frac{P}{k} \right)} = r dt \quad \Leftrightarrow \quad \frac{k}{P(k - P)} dP = r dt. \quad (\text{A.3})$$

Utilizando o método de frações parciais no primeiro membro da equação (A.3), ou seja,

$$\frac{k}{P(k-P)} = \frac{A}{P} + \frac{B}{(k-P)} \Leftrightarrow \frac{k}{P(k-P)} = \frac{(B-A)P + Ak}{P(k-P)},$$

é possível verificar que é verdadeiro se, e somente se,

$$\begin{cases} A = 1, \\ B - A = 0. \end{cases}$$

Dessa forma, tem-se que  $A = 1$  e  $B = 1$ . Assim, substituindo esses valores na equação (A.3) é possível obter a equivalência:

$$\frac{1}{P} + \frac{1}{(k-P)} dP = r dt. \quad (\text{A.4})$$

Integrando em ambos os lados em relação a  $t$  e solucionando através de técnicas de integração, segue:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{P} + \frac{1}{(k-P)} dP &= \int r dt \Leftrightarrow \int \frac{1}{P} + \int \frac{1}{(k-P)} dP = \int r dt \\ \Leftrightarrow \ln |p| - \ln |k-P| &= rt + c_1 \Leftrightarrow -\ln |p| + \ln |k-P| = -rt - c_1 \\ \Leftrightarrow \ln \left| \frac{k-P}{P} \right| &= -rt - c_1. \end{aligned}$$

Por se tratar de um modelo de crescimento populacional, os módulos podem ser retirados, isto é,

$$\frac{k-P}{P} = e^{-rt-c_1} \Leftrightarrow \frac{k-P}{P} = e^{-rt} e^{-c_1} \Leftrightarrow \frac{k-P}{P} = e^{-rt} c. \quad (\text{A.5})$$

sendo  $c = e^{-c_1}$  a constante de integração.

Como condição inicial tem-se que  $P(0) = P_0$ , portanto:

$$\frac{k-P_0}{P_0} = e^{-r \cdot 0} c \Leftrightarrow \frac{k-P_0}{P_0} = c.$$

Substituindo a constante  $c$  obtida na equação (A.5) e reorganizando, segue que:

$$\frac{k-P}{P} = e^{-rt} \frac{k-P_0}{P_0} \Leftrightarrow k = \left( e^{-rt} \frac{k-P_0}{P_0} \right) P + P$$

$$k = P \left( e^{-rt} \frac{k - P_0}{P_0} + 1 \right) \Leftrightarrow P(t) = \frac{k}{\left( e^{-rt} \frac{k - P_0}{P_0} + 1 \right)}. \quad (\text{A.6})$$

que é a solução do PVI (A.2).

Pode-se, ainda, escrever a solução (A.6) da seguinte forma:

$$P(t) = \frac{P_0 k}{(k - P_0)e^{-rt} + P_0}. \quad (\text{A.7})$$

### A.1 Análise qualitativa

Serão apresentadas algumas análises da função (A.6) com o objetivo de construir o gráfico da curva logística, utilizando como referência o livro Cálculo de Stewart (2013) e, principalmente, a análise feita na monografia de Santos (2020).

#### Assíntotas Horizontais e Verticais

As assíntotas horizontais, caso existam, podem ser determinadas calculando o limite da equação (A.6) quando o tempo  $t$  tende para mais infinito ou menos infinito. Isso significa que a função aproxima-se de uma reta horizontalmente. Verifica-se que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{k}{\left( e^{-rt} \frac{k - P_0}{P_0} + 1 \right)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{k}{\left( \frac{1}{e^{-rt}} \frac{k - P_0}{P_0} + 1 \right)} = \frac{k}{1} = k.$$

Assim, à medida que  $t$  cresce, os valores de  $N(t)$  ficam maiores e se aproximam de  $k$ , ou seja, se aproximam da capacidade do meio independente da população inicial  $P_0$ . Observe que, como  $t$  é unidade de tempo, não será considerado  $t$  tendendo a menos infinito. Portanto, o modelo logístico possui somente uma assíntota horizontal:  $P = k$ .

Já as assíntotas verticais existem quando o limite da função tende a mais ou menos infinito num certo ponto do domínio, ou seja, quando a função possui algum valor para o qual seu denominador tende a zero. Isso significa que a função se aproxima de uma reta verticalmente. Para que a equação (A.6) possua uma assíntota vertical, deve-se ter:

$$e^{-rt} \frac{k - P_0}{P_0} + 1 = 0 \Leftrightarrow e^{-rt} \frac{k - P_0}{P_0} = -1 \Leftrightarrow e^{-rt} = -\frac{k - P_0}{P_0} \quad (\text{A.8})$$

No entanto,  $e^{rt} > 0$ ,  $P_0 > 0$  e  $k - P_0 > 0$ , o que torna a equação (A.8) impossível. Assim, pode-se afirmar que o modelo logístico não possui assíntotas verticais.

### Pontos críticos

Os pontos críticos são pontos no domínio da função em que a primeira derivada em relação a  $t$  é nula ou não definida. Para determiná-los, basta igualar a derivada (A.1) a zero. Em Santos (2020) é possível verificar que, para que isso ocorra,  $P = 0$  ou  $P = k$ , porém, não há  $t^*$  no domínio de  $P(t)$  tais que  $P(t^*) = 0$  ou  $P(t^*) = k$ . Assim, é possível concluir que  $P(t)$  não possui pontos críticos.

### Pontos de inflexão

Os pontos de inflexão são aqueles em que a curva muda sua concavidade e, para calculá-los, basta igualar a segunda derivada em relação a  $t$  a zero. Nesse caso, é possível determinar derivando a equação (A.1) em relação a  $t$  e igualando a zero. Ainda em Santos (2020) é possível verificar que o ponto de inflexão da solução (A.6) tem coordenadas:

$$\left( \frac{1}{r} \ln \left( \frac{k - P_0}{P_0} \right), \frac{k}{2} \right).$$

A Figura 15 reúne todas as informações a respeito do modelo logístico analisado.

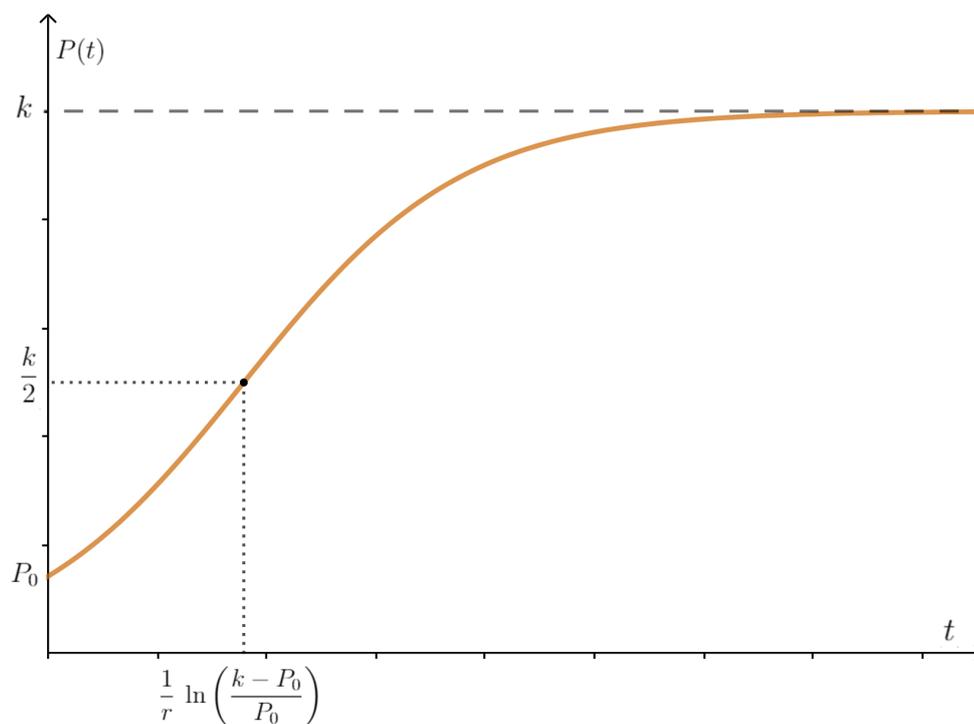
Na Figura 16 é apresentada a curva solução do modelo logístico (A.2).

Figura 15 – Informações sobre o modelo logístico.

Nome	Modelo logístico de Verhulst
Forma diferencial	$\frac{dP}{dt} = rP \left(1 - \frac{P}{k}\right)$
Função	$P(t) = \frac{P_0 k}{(k - P_0)e^{-rt} + P_0}$
Restrições nos parâmetros	$k > P_0, r > 0$
Assíntota horizontal	$P = k$
Assíntota vertical	Não possui
Pontos críticos	Não possui
Ponto de inflexão	$\left(\frac{1}{r} \ln \left(\frac{k - P_0}{P_0}\right), \frac{k}{2}\right)$
Pontos de estabilidade	$P = 0$ e $P = k$

Fonte: Santos (2020).

Figura 16 – Curva solução do modelo logístico (A.2).



Fonte: Autoria própria.



**ANEXO A – Código do modelo p-fuzzy**

```
modelo = readfis('BiaRegras')
p(1) = 2;
n = 1070;
for i=1:n
    var(i) = evalfis(p(i),modelo);
    p(i+1) = p(i) + var(i);
end
figure
t = 0:n;
tnovo = t./5;
plot(tnovo,p,'LineWidth',2)
xlabel('Tempo (dias)','fontsize',12);
ylabel('População (em mil)','fontsize',12);
axis([0 214 0 1000])
Dados = xlsread('DadosExcelSP.xlsx',1,'B2:C215');
hold on
plot(Dados(:,1),Dados(:,2),'om')
```