IFSP - EAD - ÁLGEBRA

FUNÇÕES

INTRODUÇÃO :

Para podermos nos dedicar ao assunto Funções, há necessidade de abordarmos alguns temas iniciais, sem os quais, nosso trabalho se complicaria bastante. Vamos a eles :

Conjunto : Esta é uma ideia tão inicial, tão básica, que não é possível defini-la. Supomos que todos os seres humanos, e até alguns animais, saibam o que seja um conjunto, embora não consigam colocar em palavras. O mesmo ocorre com a ideia de elemento e a de pertinência, que significa o fato de um elemento pertencer ou não a um certo conjunto. Você já percebeu que uma criança com menos de 2 anos de idade se reconhece como elemento de um conjunto muito especial para ela que é a sua família ? Já percebeu também que ela sabe que um amiguinho de escola não pertence à sua família ?

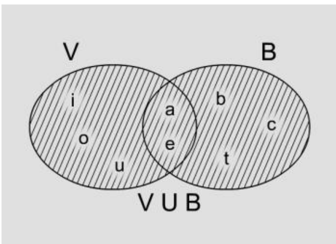
Isto mostra que a criança já tem ideia do significado dos termos Elemento, Conjunto, Pertence e Não pertence, embora não consiga explicá-los.

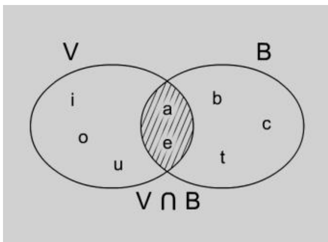
Normalmente utilizamos letras maiúsculas para representar conjuntos e minúsculas para elementos. O símbolo $\in$ significa pertence, e $\notin$ é a sua negação. Se um conjunto for identificado pelos seus elementos, devemos escrevê-los entre chaves.

Exemplo : Seja o conjunto V das vogais do nosso alfabeto. Então, V = $\{a, e, i, o, u\}$, e vemos que, por exemplo, a$\in V$ e b$\notin V$. Seja agora o conjunto B formado pelas letras da palavra "abacate". Então, B =$\{a, b, c, t, e\}$.

Se efetuarmos a operação de União entre o conjunto V e o conjunto B,. que simbolizaremos por B U V, teremos o conjunto B U V = $\{a, b, c, e, i, o, t, u\}$, pois aí estarão os elementos que pertencem a B **ou** a V.

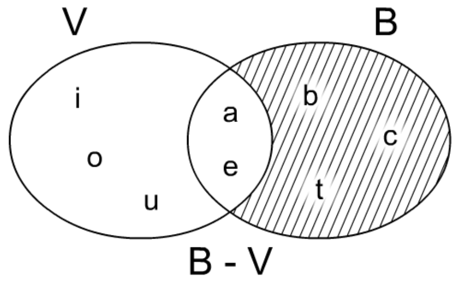
Os elementos que são comuns a B e a V formam o conjunto Interseção entre V e B, formada pelos elementos que pertencem a B **e a V,** e usaremos a simbologia : B $\cap$ V = $\{a, e\}$. A figura mostra os diagramas de Venn que podem representar o que acabamos de mostrar.
.

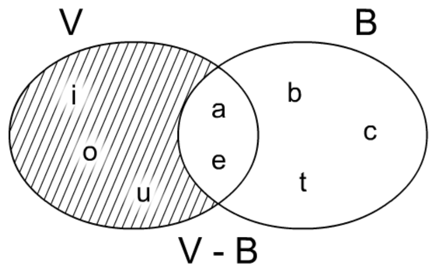




Propositadamente, estamos escrevendo , ora BUV e $B \cap V$, ora VUB e $V \cap B$, para mostrar sua comutatividade.

Definimos ainda o conjunto B-V como sendo formado pelos elementos que pertencem a B e que não pertencem a V. Então, B-V = $\{b, c, t\}$ e V – B = $\{i, o, u\}$. Agora, a comutatividade não está vigorando.





Se todos os elementos de um certo conjunto A pertencem a um conjunto B, dizemos que A está contido em B , $A \subset B$, ou que B contém A, $B \supset A$, ou que A é subconjunto de B.

Dois conjuntos muito importantes, sem os quais a Teoria dos Conjuntos não teria a validade que possui, são o Conjunto Vazio e o Conjunto Universo : O Vazio, cujo símbolo é $\{ \}$ ou ϕ é aquele que não possui elementos, e o Universo U é aquele ao qual todos os elementos pertencem.

Assim, são verdadeiras as sentenças : (Obs : $\forall$ =qualquer)

a) $\forall x, x \in U$; b) $\forall x, x \notin \phi$; c) $\forall A, A \supset \phi$; d) $\forall A, A \subset U$

<u>EXERCÍCIOS :</u>

1) A gerência de uma loja verificou que no mês passado, 230 consumidores compraram creme dental de uma certa marca , 190 compraram iogurte em embalagens de um litro, 50 compraram aquela marca de creme dental e o iogurte de 1 litro, e as demais 80 pessoas não consumiram nem o creme dental nem o iogurte de l litro. Calcular :
   a) Número de pessoas consultadas. (Resp.: 450)
   b) Número dos que consomem apenas o creme dental (Resp.: 180)
   c) Número dos que não consomem o iogurte de 1 litro (Resp.: 260)

2) Quinhentas pessoas aceitaram responder a uma pesquisa a respeito de suas preferências sobre as marcas A e B de um certo produto, e chegou-se a estes valores percentuais : 10% declararam consumir o produto independentemente da marca, 38% preferem a marca A, 28% preferem a marca B , e o restante não se interessa pelo consumo do produto. Calcular :

a) Porcentagem daqueles que não se interessam pelo produto. (Resp.: 24%)
b) Número de pessoas que não se interessam pelo produto. (Resp.: 120)
c) Quantidade de pessoas que se interessam só por A. (Resp.: 190)

<u>CONCEITO :</u>

<u>Produto Cartesiano :</u> Se tivermos dois conjuntos A e B não vazios, o Produto Cartesiano de A em B é o conjunto de duplas ordenadas, ou pares ordenados (x,y), tais que x está em A e y em B.

Se utilizarmos uma simbologia mais apropriada, teremos : AxB = $\{(x,y)\,|x \in A \text{ e } y \in B\}$.

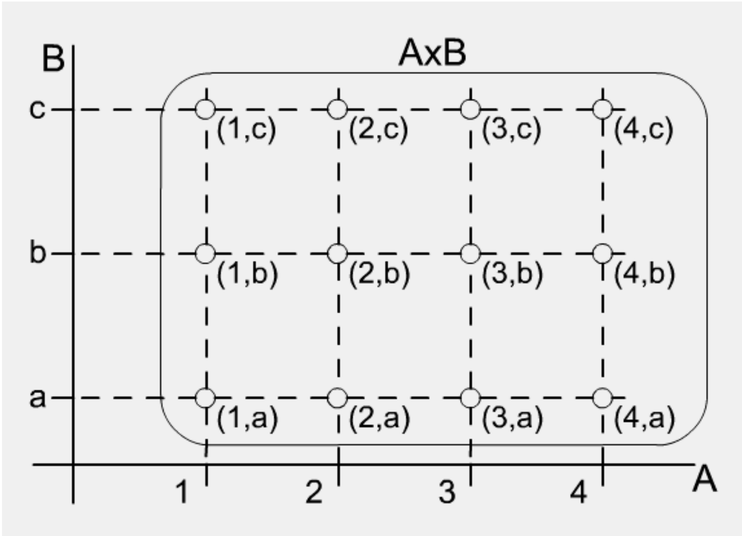
<u>CONCEITO :</u>

<u>Relação :</u> Todo subconjunto não vazio de Ax B é chamado de Relação de A em B. Ou seja :

$$\text{R é relação de A em B} \Rightarrow \text{R} \subset AxB \text{ e } \text{R} \neq \phi .$$

<u>Exemplo :</u> Sejam os conjuntos A = {1,2,3,4} e B = {a,b,c}. O conjunto AxB, conforme a definição, será AxB = {(1,a); (1,b); (1,c); (2,a); (2.b); (2,c); (3,a); (3,b); (3,c); (4,a); (4,b); (4,c)} que possui 3x4 =12 elementos que são pares ordenados. Podemos também escrever o produto BxA: BxA {(a,1); (a,2); (a,3); (a,4); (b,1); (b.2); (b,3); (b,4); (c,1); (c,2); (c,3); (c,4)} que também tem 12 elementos.

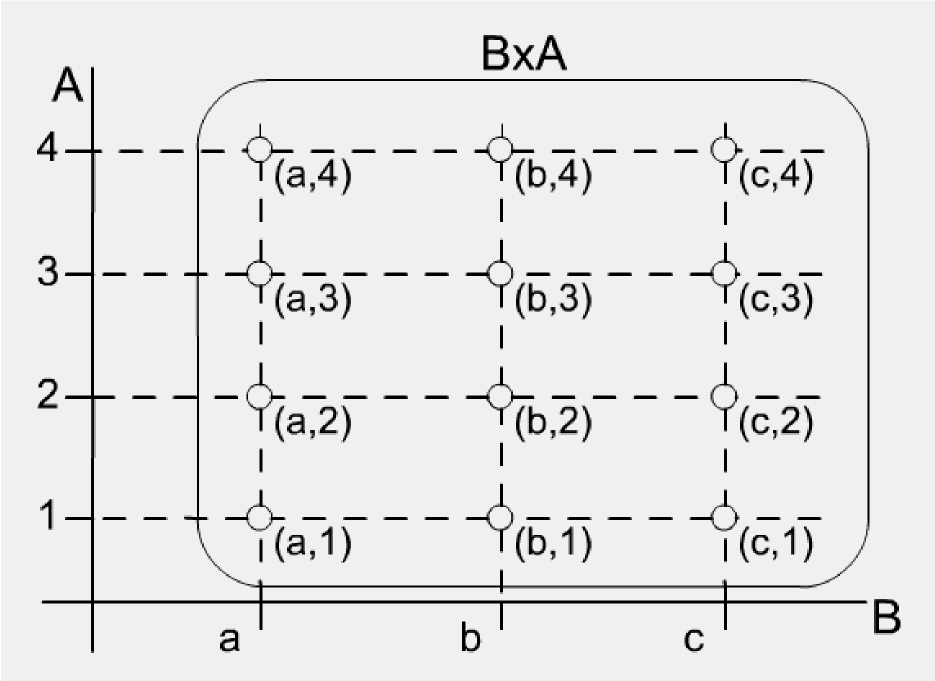
O produto cartesiano pode também ser construído graficamente (desenho) conforme o exemplo a seguir, onde há a vantagem de não corrermos o perigo de repetir pares ordenados ou de esquecermos algum deles :



Vemos que a cada ponto deste plano há em correspondência um só par ordenado, e a tal par voltamos ao mesmo ponto. A isto damos o nome de Correspondência Biunívoca entre pontos e Pares Ordenados. È possível pensarmos que o par ordenado (x,y) é o endereço algébrico do ponto do plano.

Se ainda pensarmos no produto AxB já abordado, podemos afirmar que o conjunto R ={(2,b); (3,a); (4,a)} é um exemplo de subconjunto não vazio de Ax B, e portanto é uma Relação de A em B. Se utilizarmos a nossa simbologia algébrica , $\phi \neq R \subset AxB \Rightarrow R$ é relação de A em B.

<u>Exercício :</u> Sejam os conjuntos A={1,2,3,4} e B= {a,b,c}. Represente graficamente o conjunto BxA com seus pares ordenados e escreva uma relação S como exemplo.

Resp.: 

<u>CONCEITO :</u>

<u>FUNÇÃO : </u> Função de A em B é toda relação de A em B que a cada elemento de A faz corresponder um só elemento de B.

Para entendermos melhor esta delicada definição, voltemos aos conjuntos A= {1,2,3,4} e B= {a,b,c}, cujo produto cartesiano montamos. O subconjunto F ={ (1,b); (2,b); (3.c); (4,b)} é uma relação de A em B pois é um subconjunto não vazio de Ax B. Além disso, ao elemento 1, de A, F faz corresponder só b de B, a 2 de A, só b de B, a 3 de A, só c de B e a 4 de A, só b de B. Ou seja : a cada elemento de A F faz corresponder só um elemento de B. Logo F é função de A em B, e representamos este fato por F : A $\rightarrow$B.

Vejamos uma outra relação de A em B : S ={ (1,b); (2,c); (4,a); (4,b)}. Podemos constatar que ao elemento 1 de A, S faz corresponder só b de B, ao 2 de A, só c de B, ao 3 de A, S não faz corresponder nenhum elemento de B. Logo, S não é uma função de A em B. Além disso, ao elemento 4 de A, S faz corresponder dois elementos diferentes de B, e, por mais um motivo, S não é função de A em B.

<u>EXERCÍCIO : </u>Sejam os conjuntos A = {1,2,3,4} e B = {2,4,.7,9.13) . Responda :

a) Quantos elementos tem AxB ? (Resp.: 20)

b) Verifique qual das relações a seguir é ou não uma função de A em B. Justifique :

1) R = {(1,2); (2,2); (3,13); (4,9)} (Resp.: sim, pois a cada elemento de A , R faz corresponder um único elemento de B.)

2) R’ = {(4,4); ((3,2); (1,2); (2,1)} (Resp.: não, pois ao elemento 2 de A, R’ faz corresponder o elemento 1 , que não é de B.)

3) R’’= {(1,7); (2,7); (3,7); (4,7)} (Resp.: sim, pois a cada elemento de A, R’’ faz corresponder um só de B.)

4) R* = {(1,4); (2,7); (2,9); (3,4); (4,4)] (Resp.: não, pois ao elemento 2 de A, R* faz corresponder mais de um elemento de B.)

5) R# = {(1,4); (2,7); (2,10); (3,4); (4,7)} (Resp.: sim , pois a cada elemento de A, R# faz corresponder um único de B.)

<u>CONCEITO :</u>

<u>DOMÍNIO, CONTRADOMÍNIO E IMAGEM :</u> Dada uma função f de A em B, chamamos de Domínio de f, cujo símbolo é Dom(f), ao conjunto A, e de Contradomínio de f, de símbolo CDom(f), ao conjunto B. O conjunto formado pelos segundos elementos dos pares ordenados que pertencem a f é chamado de Imagem de f, e seu símbolo é Im(f).

<u>EXEMPLOS:</u> Sejam as funções R’’ e R# do exercício anterior. Podemos ver que Dom(R’’) = = Dom(R#) = A ={1,2,3,4} e CDom(R#) = CDom(R’’) = B = {2,4,7,9,13}. Porém, as suas imagens não coincidem, pois Im(R’’) = {7} e Im(R#) ={4,7,10}.

INTRODUÇÃO : A seguir trataremos dos conjuntos numéricos, naturalmente de importância fundamental em qualquer estudo que envolva nossa disciplina. A ideia de número é tão básica quanto as de elemento e conjunto. Isto é tão verdade que até os animais a possuem. Basta observar as reações de seu cão ou gato ao perceber que algo que ele possuía não está mais no seu campo visual. Os animais não são capazes de contar e efetuar operações, mas eles sabem , por exemplo, que um conjunto com 3 pedaços de carne tem "algo" diferente de um conjunto com 2 pedaços. E o que caracteriza tal diferença ? Como você já percebeu, é a quantidade de elementos, e número nada mais é do que uma ideia de quantidade. Tal ideia para ser falada, escrita, ou, de alguma forma, comunicada a alguém, necessita de símbolos que são chamados algarismos.

CONCEITOS :

Os números naturais N : Este conjunto numérico é definido como N = {0,1,2,3,4,...}. Vemos que o primeiro natural é o zero e não há último natural. Logo N é um conjunto infinito. Este conjunto recebeu o nome que tem pelo fato de ter surgido da necessidade de o homem, desde priscas eras, necessitar controlar a quantidade de seus bens, como ovelhas e animais em geral, e até esposas , quem diria ! Podemos até pensar que o zero não é tão natural assim, pois quando nada tinha, não havia a necessidade imediata de o interessado registrar nada. Porém, para os matemáticos o zero é importante por ser o elemento neutro da adição. Logo, ele foi incorporado ao conjunto N.

Os números inteiros Z : Este conjunto é Z = { ...-3,-2.-1.0.1.2.3.4,...}. Aqui já não há primeiro nem último elemento. A necessidade deste conjunto numérico surgiu como forma de registrar quantias que representavam dívidas, pois -2 era perfeito para representar que, em uma negociação, restara uma dívida de 2 ovelhas, ou 2 frutas, ou até 2... esposas !

É importante notar que todo número natural é inteiro, então $N \subset Z$.

Os números racionais Q : Em um determinado momento da história da humanidade, bem posterior ao do surgimento do conjunto Z, surgiu a necessidade de um símbolo que representasse pedaços de um número inteiro, como por exemplo a metade de um animal, ou de uma fruta (de uma esposa ?...). Para isso surgiram as frações do tipo $\frac{p}{q}$, como $\frac{3}{4}$ ou $\frac{2}{7}$, e então foram definidos os números racionais Q do seguinte modo :

$$Q = \{ \frac{p}{q}, \text{ tal que p e q } \in Z \text{ e } q \neq 0 \}$$

O símbolo Q vem da palavra Quociente, que é o resultado da divisão de p por q. Como é impossível dividir por zero, temos que ter q não nulo. Podemos ainda acrescentar que todo número racional, quociente entre dois números inteiros, sendo o segundo diferente de zero, é sempre igual a uma dízima periódica. Assim, temos : $\frac{2}{3} = 0{,}666..., \frac{3}{4} = o{,}750000..., \frac{8}{2} = 4{,}000..., \text{etc.}$

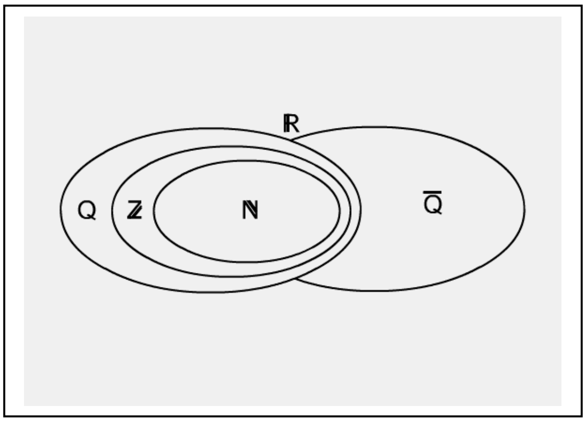
Podemos ver que os números inteiros também são racionais, o último exemplo mostra isso. Logo, Z $\subset$ Q.

<u>Os números Irracionais $\bar{Q}$:</u> Este conjunto surgiu muito depois dos racionais, e seu nome mostra que eles não são racionais. Seu símbolo é $\bar{Q}$, onde o traço sobre a letra Q significa não Q, e podemos definir este conjunto como sendo formado pelas frações que não são dízimas periódicas, como por exemplo $\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt[3]{7}, \pi, \text{etc.}$

<u>Os números reais R :</u> Se unirmos o conjunto dos números racionais ao conjunto dos irracionais obteremos um novo conjunto que será chamado Conjunto dos Números Reais, cujo símbolo é R.

Então, o conjunto R contém todos os conjuntos anteriores, e podemos desenhar o diagrama ao lado. No diagrama podemos verificar que: N$\subset Z \subset Q \subset R$

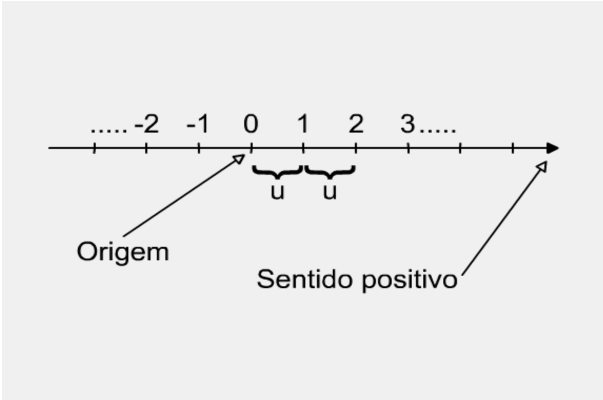
e que $\bar{Q} \subset R$ e ainda Q$\cap \bar{Q} = \phi$.



Nesta figura fica nítido que não existe número que seja simultaneamente racional e irracional.

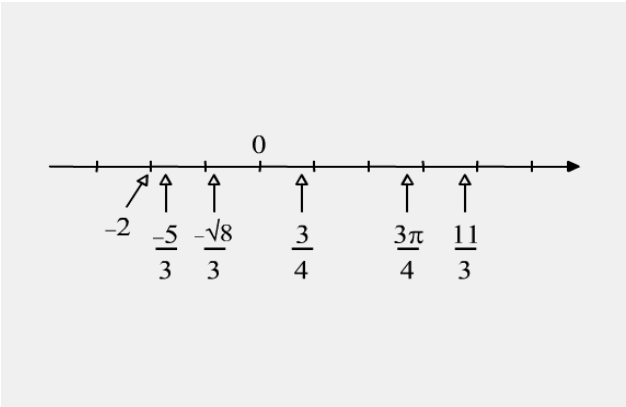
<u>REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA :</u> O conjunto R dos números reais pode ser representado geometricamente (por um desenho) pela reta numérica Esta é uma reta que possui sentido positivo de percurso, ponto Origem e segmento unitário, conforme a figura. À origem

atribuímos o número zero, e, obedecendo o sentido positivo de percurso (normalmente da esquerda para a direita), a cada marcação do segmento unitário, atribuímos o próximo número inteiro. Os números racionais e irracionais são representados pelos pontos entre os dos números inteiros. Os números negativos estão nos pontos à esquerda da Origem. Quanto mais à direita estiver, maior será o número representado pelo ponto. Outros nomes que as retas numéricas recebem são o de "eixo" e "reta real".



EXERCÍCIOS :

1) Localize em um eixo os números -2, $-\frac{5}{3}, \frac{3}{4}, \frac{11}{3}, -\frac{\sqrt{8}}{3}, \frac{3\pi}{4}$.

(Resp.: )

2) Escreva os conjuntos a seguir mostrando seus elementos :

a) A = {x $\in R$ | 2x+1=6} (Resp.: A ={$\frac{5}{2}$})

b) B = {x$\in R$ | $x^2 - 7x = -12$} (Resp.: B={3.4})

c) C = {x$\in$ N | $x^2 + 10x + 16 = 0$} (Resp.: C = ϕ)

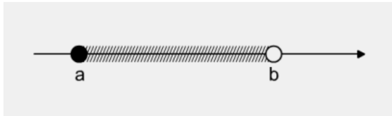
CONCEITO :

Intervalos numéricos : Dados dois números reais a e b tais que a 〈 b, definimos os seguintes intervalos :

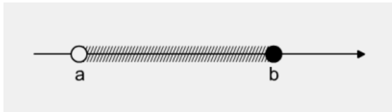
Intervalo fechado : $[a,b] = \{x \in R \mid a \leq x \leq b\}$. Representação :

Intervalo aberto : $]a,b[= \{x \in R \mid a \langle x \langle b\}$. Representação :

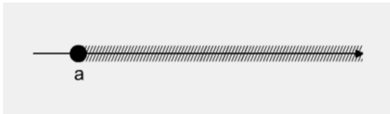
Intervalos mistos : $[a,b[$ = {x$\in$ R | a$\leq$ $x\langle$ b }. Representação :



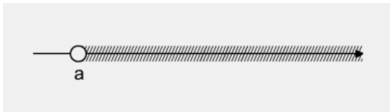
$]a,b]$ = {x$\in$ R | a$\langle$ x $\leq b\}$ .Representação :



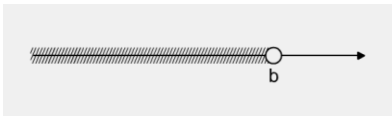
Intervalos impróprios : $[a,+\infty[$ = {x$\in$ R | x$\geq$ a }. Representação :



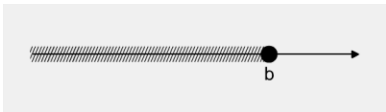
$]a,+\infty[$ = {x$\in$R | x $\rangle$ a} . Representação :



$]-\infty,b[$ = {x $\in$ R | x$\langle$ b }. Representação :



$]-\infty,b]$ = {x$\in$ R | x $\leq$ b }. Representação :



<u>EXEMPLO :</u>

Os intervalos, conjuntos que são, podem sofrer as operações de União, Interseção e diferença que já estão definidas. Assim, como exemplo, se A = $[-1,4[$ e B =]1,6] poderemos obter os intervalos A U B, A $\cap$ B e A – B, do seguinte modo :

A = [-1,4]

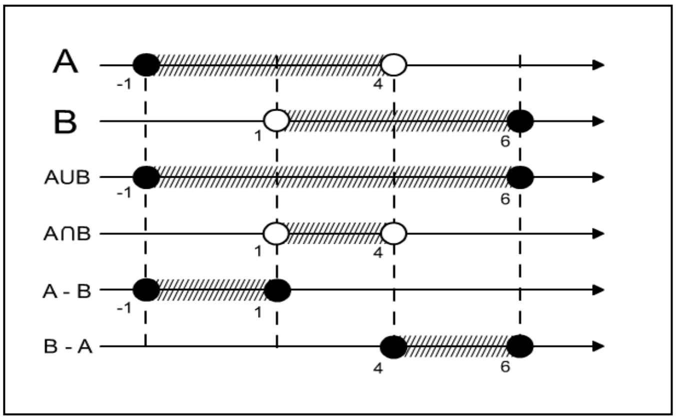
B=]1 , 6]

a) A U B

b) $A \bigcap B$

c) A – B

d) B – A



Obtemos então : A U B =[-1,6[, $A \cap B$ =]1,4[, A-B =[-1,1], e B-A = [4,6].

EXERCÍCIOS :

1) Dados os conjuntos A =[-2, 7] , B ={ x $\in R$ | 0<x<6 } e C = [-1,6] obtenha:A U B, B U A, B – C, C $\cap A$, A - ϕ , C – B, (C U B) – A.

(Resp.: AUB = [-2,7] , BUA=[-2,7] , B – C= ϕ , $C \bigcap A = \phi$,A - $\phi = A$, C- B=[-1,0] U{6} , (CUB)-A = ϕ.)

2) Sabendo que M={x$\in$R| 2 <x$\leq$6} , N =[2,6[e P = {x$\in$R| 1$\leq$x<5} obtenha os conjuntos :

a) M U N b) $P \cap N$ c) ($M \cap N$)- P d) (P U N) – (P $\cap M$)

(Resp.: a) [2.6] , b) [2,5[, c) [5,6[, d) [1,2]U[5,6[ )

APLICAÇÕES :

Quando estudamos o conceito de função, vimos que, dada uma função f: A$\to$ B, o conjunto A era denominado Domínio de f, cujo símbolo era Dom(f). Suponhamos que f seja uma função de variável x, e anotaremos este fato por f(x). Então, Dom(f) é o conjunto dos possíveis valores que a variável x pode assumir. Assim, se x $\in$Dom(f), então f(x) $\in$ Im(f).

Vemos que uma função tem sentido quando sabemos quais são os valores que sua variável independente x pode assumir. Então é muito importante conhecermos este conjunto :

Se a função f: $R \to R$ é um polinômio na variável x, fica já acertado que x pode ter qualquer valor real, e então Dom(f) = R. Se f: $Z \to R$, ocorre o mesmo, e Dom(f) = Z. Se o mesmo polinômio for uma função f: $[a,b] \to R$, seu domínio será [a,b].

Porém, se f(x) = $\dfrac{2x-3}{9x^2-4}$, deveremos nos lembrar que o denominador deve ser diferente de zero, logo $9x^2-4 \neq 0$, e obteremos $x \neq \pm\dfrac{2}{3}$, então Dom(f) = $\{x \in R \mid x \neq \pm\dfrac{2}{3}\}$.

<u>EXEMPLOS :</u> Obtenha o Domínio das funções :

1) f(x) = $\dfrac{3x+4}{4x-3}$

Como $4x - 3 \neq 0$, então $x \neq \dfrac{3}{4}$. Portanto : Dom(f) = $\{x \in R \mid x \neq \dfrac{3}{4}\} = R - \{\dfrac{3}{4}\}$

2) f(x) = $\sqrt{5-4x}$:

Sabemos que o radicando de uma raiz com índice par deve ser maior ou igual a zero, senão a raiz não será um número real. Portanto, $5 - 4x \geq 0$ e isto nos levará a $x \leq \dfrac{5}{4}$. Portanto, podemos escrever que Dom(f) = $\{x \in R \mid x \leq \dfrac{5}{4}\}$

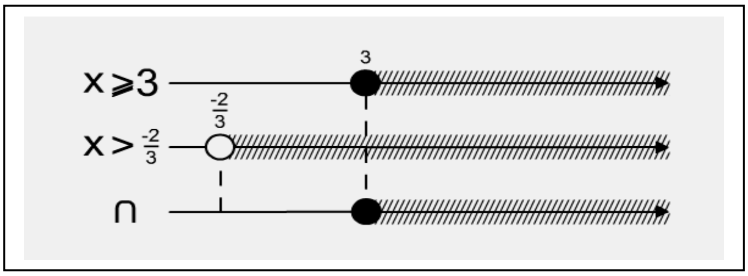
3) f(x) = $\dfrac{3+\sqrt{2x-6}}{\sqrt{3x+2}}$

Esta função apresenta dois radicais com índice par. Assim, o radicando do numerador deve ser maior ou igual a zero, porém o do denominador somente poderá ser maior que zero :

$2x - 6 \geq 0 \to x \geq 3 \to$

$3x+2 > 0 \to x > -\dfrac{2}{3} \to$

$\cap \to$



Portanto, Dom(f) = $\{x \in R \mid x \geq 3\}$

<u>ANOTAÇÃO :</u> O Domínio desta função foi obtido pela interseção de dois intervalos, pois cada um desses intervalos é um domínio referente a cada radicando. Como a função só pode existir caso os dois domínios sejam satisfeitos, então há a necessidade de interceptá-los.

<u>EXERCÍCIOS :</u>

Obtenha o domínio das seguintes funções :

1) f(x) = $\sqrt[3]{x+2}$ (Resp.: R)

2) f(x) = $\sqrt{x+2}$ (Resp.: $\{x \in R \mid x \geq -2\}$

3) f(x) = $\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x}$ (Resp.: $\{x \in R \mid 2 \leq x \leq 4\}$

4) f(x) = $\dfrac{2x-4}{x-2}$ (Resp.: R-{2})

5) f(x) = $\dfrac{3-\sqrt{2x-6}}{\sqrt{x+4}}$ (Resp.: $\{x \in R \mid x \geq 3\}$)

6) f(x) = $\dfrac{5x+\sqrt{x-3}}{\sqrt[6]{3-x}}$ (Resp.: ϕ)

7) f(x) = $\dfrac{x}{x-5} + 2\sqrt{2x+3}$ (Resp.: $\{x \in R \mid x \geq -\frac{3}{2} e x \neq 5\}$)

<u>CONCEITO :</u>

<u>Função Composta :</u>

Sejam f e g duas funções tais que f : A $\rightarrow$ B e g : B $\rightarrow$ C , onde o Domínio de g é o mesmo Contradomínio de f. A função composta de f e g é a função h: A $\rightarrow$ C, cujo Domínio é o Dom(f) e cujo contradomínio é CDom(g), é dada por h(x) = f(g(x)) que será obtida pela composição das funções iniciais, conforme os exemplos :

<u>EXEMPLOS :</u>

1) Sejam f(x) = x^2+6x-3 e g(x) = 2x+1. Obtenha a forma algébrica de f(g(x)) e de g(f(x)).
   a) f(g(x)) = f(2x+1) = $(2x+1)^2$ +6.(2x+1) -3 = $4x^2+4x+1+12x+6-3$ = $4x^2+16x+4$

b) $g(f(x)) = g(x^2+6x-3) = 2.(x^2+6x-3)+1 = 2x^2+12x-5$

2) Se $f(x) = 2x^2-10x+12$ e $g(x) = x-3$, ache as raízes da equação $f(g(x))=0$.

$f(g(x))=f(x-3)=2(x-3)^2-10(x-3)+12 = 2x^2-12x+18-10x+30+12 = 2x^2-22x+60=0$

Se resolvermos esta equação, obteremos as raízes 5 e 6.

3) Se $f(x) = 2x + 7$ e $g(x) = 4 - 6x^2$, resolva a equação $f(g(x)) = g(f(x))$

$f(g(x)) = f(4-6x^2) = 2.(4-6x^2) +7 = 8-12x^2 +7 = 15 - 12x^2$

$g(f(x)) = g(2x+7) = 4 - 6(2x+7)^2 = 4 - 24x^2 - 168x - 294 = -24x^2-168x-290$

Logo, $15 - 12x^2 = -24x^2 - 168x - 290 \rightarrow 12x^2+168x+305=0$, cujas raízes são :

$$x = \frac{-168 \pm \sqrt{28224-14640}}{24} = \frac{-168 \pm \sqrt{13584}}{24} = \frac{-168 \pm 4\sqrt{283}}{24} = \frac{-42 \pm \sqrt{283}}{6}$$

<u>EXERCÍCIOS :</u>

1) Dadas as funções $f(x) = 3x-4$ e $g(x) = 2-5x$, obtenha: a) $f(g(x))$, b) $g(f(x))$, c) $f(f(x))$, d) $g(g(x))$.

(Resp.: a) 2-15x , b) 22-15x , c) 9x-16 , d) 25x-8)

2) Seja a função $h(x) = 3x+5$. Obtenha a função $h(h(h(h(x))))$.

(Resp.: 81x+200)

3) Um homem muito crente entrou em uma igreja, aproximou-se do altar de São Longuinho, e disse para o santo :

- Oh, meu São Longuinho ! Se dobrares o dinheiro que eu tenho nesta sacola, eu lhe darei R$ 10,00.

O homem percebe uma movimentação dentro da sacola e,crente que é, retira-se satisfeito e vai ao altar de São Cominho, onde repete o pedido, prometendo R$ 10,00 para o santo.

O milagre novamente se realiza, e ele corre agora para o altar de São Pertinho. Tudo acontece novamente, pedido e milagre. Ele se afasta de São Pertinho e vai renovar o pedido para São Curtinho, São Lerdinho e São Pergaminho, o milagre se repetindo.

Cansado de tanta oração, o fiel e crente homem se retira da igreja, e aí percebe que a sacola de dinheiro está vazia !

Quanto ele tinha ao entrar na igreja ?

(Resp.:R$ 9,84)

4) Sejam f(t) = 4t+1 e g(t) = $3t^2 + 3t - 4$. Obtenha :

a) $t \in R \mid f(g(t)) = 2$; b) g(f(-1)) ; c) f(g(g(0)))

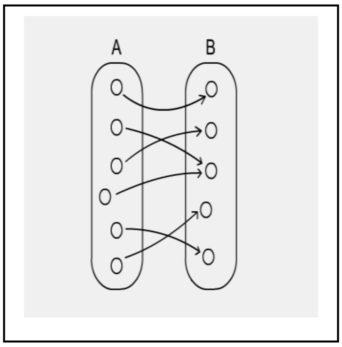
(Resp.: a) $\dfrac{-3 \pm 2\sqrt{15}}{6}$; b) 14 ; c) 129)

<u>CONCEITO :</u>

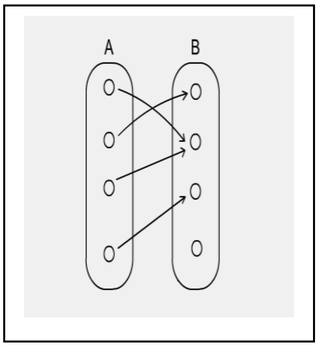
<u>Classificação de uma função :</u>

Toda função f: $A \to B$, que possui A como Domínio , B como Contra-Domínio e cuja Imagem é, naturalmente, um subconjunto do Contra-Domínio será chamada :

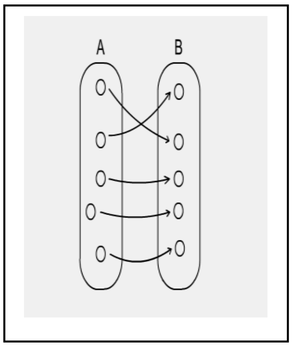
a) <u>Sobrejetora</u> se e somente se sua Imagem for igual ao seu Contra-Domínio.
b) <u>Injetora</u> se e só se, para elementos diferentes de A ela associar elementos diferentes de B.
c) <u>Bijetora</u> se e apenas se ela for sobrejetora e injetora.



Função Sobrejetora



Função Injetora



Função Bijetora

<u>EXEMPLOS :</u>

Dados os conjuntos A={-1,0,1,2,3,4}, B = {-1,1,3,5,7,9} e B’={0,2,8.18,32}. Classifique as seguintes funções e justifique a sua resposta :

a) f: $A \to B$ | f(x) = 2x+1

Podemos perceber que Im(f) = {-1,1,3,5,7,9} = B= CDom(f).Logo f(x) = 2x+1 é Sobrejetora. Por outro lado, dados dois elementos diferentes de A, suas imagens são diferentes, e a função é Injetora. Deste modo, f(x) = 2x+1, de A em B dados na questão, é Bijetora.

b) g: $A \to$ B' | g(x) = $2x^2$

Vemos que Im(g) = {0,2,8,18,32} = B'= CDom(g), o que a faz Sobrejetora. Porém, os elementos -1 e 1 de seu Domínio são associados ao mesmo elemento 2, e, por isso, ela não pode ser classificada como Injetora e nem como Bijetora.

<u>EXERCÍCIOS :</u>

Sejam os conjuntos A = {-2,-1,0,1,2,3,4}, B ={-1,0,3,8,15}, C ={-3,-2,-1,0,1,2,3} e D ={ -4,-2.0.2.4.6.8,10}. Classifique as seguintes funções :

a) f: $A \to B$, f(x) = $x^2 - 1$; b) g: $A \to C$ | g(x) = -x+1 ; c) h: $A \to D$ | h(t) = 2t ; d) j:$A \to B$ tal que j(r) = r

(Resp.: a) f é Sobrejetora ; b) g é Bijetora ; c) h é Injetora ; d) Não é função de A em B)

<u>CONCEITO :</u>

<u>Função Inversa :</u>

Observe as funções f(x) = 2x-2 e g(x) = $\frac{x}{2}+1$. Vamos atribuir valores de x em f(x). Ex: Se x =1, então f(1) = 2.1-2 = 0. Se atribuirmos x =0 em g(x), teremos g(0) = $\frac{0}{2}+1=1$,que é o valor inicial de x. Se x = 4, f(4) = 2.4-2 = 6. Se calcularmos g(6), teremos : g(6) = $\frac{6}{2}+1$= 4, e o valor inicial de x é novamente obtido. Ou seja, o cálculo obtido por f(x) foi "desfeito" por g(x).

Percebemos que f(x) percorre caminho inverso ao de g(x), e vice-versa, e, por isso , dizemos que g(x) é a função inversa de f(x), e vice-versa. É importante perceber que ambas são bijetoras.

Ou seja , para que uma função seja inversível é necessário que ela seja bijetora, e o mesmo ocorre com a função inversa obtida. O símbolo que usamos para a função inversa de f(x) é f^{-1}(x).

Se tomarmos f(x) = x^2, veremos que g(x) = $\pm\sqrt{x}$, sua possível inversa, não é função. Isto ocorre pelo fato de f(x) não ser bijetora, pois a valores diferentes de x, são associadas imagens iguais de f(x) e ela deixa de ser injetora.

PROCEDIMENTO :

Dada uma função f(x), bijetora, como obter a sua inversa $f^{-1}(x)$?

Para tanto devemos : 1- Trocar a variável x por y e a variável y por x ; 2- Isolar a variável y.

EXEMPLOS :

Obtenha a função inversa de: a) f(x) = 3x-4 ; b) y = $\frac{x-3}{2x-1}(x \neq \frac{1}{2})$

a) f(x) = 3x-4

1- Trocar x por y e y por x : y = 3x -4 $\rightarrow$ x = 3y -4

2- Isolar y : x + 4 = 3y $\rightarrow$ y = $\frac{x+4}{3}$ $\rightarrow$ $f^{-1}(x) = \frac{x+4}{3}$

Como exemplo de verificação , se x = 5 teremos f(5) = 3.5 -4 = 11. Se calcularmos agora f^{-1}(11) teremos $f^{-1}(11) = \frac{11+4}{3} = 5$, que é o valor de onde partimos.

b) y = $\frac{x-3}{2x-1}(x \neq \frac{1}{2})$

1- Trocar x por y e y por x : x = $\frac{y-3}{2y-1}$

2- Isolar y : x.(2y-1) = y-3 $\rightarrow$ 2xy – x –y = -3 $\rightarrow$ y.(2x-1) =x-3 $\rightarrow$ y = $\frac{x-3}{2x-1}(x \neq \frac{1}{2})$.

Faça você uma verificação como exemplo.

EXERCÍCIOS :

Inverta as funções : a) y = x-10 ; b) f(x) = -2x+1 ; c) y = $\frac{x-1}{x+1}$ $(x \neq -1)$; d) f(x) = $\sqrt[3]{x+2}$;

e) f(x) = $\frac{2}{x^2}$ $(x \neq 0)$; f) y = $\frac{3x+4}{x-2}$ $(x \neq 2)$

(Resp. : a) y=x+10;

b) g(x) = $\frac{1-x}{2}$;

c) y = $-\frac{x+1}{x-1}$ ($x \neq 1$);

d) $f^{-1}(x) = x^3 - 2$;

e) Não há inversa;

f) y=$\frac{2x+4}{x-3}(x \neq 3)$)