FUNÇÃO MODULAR

DEFINIÇÃO :

MÓDULO DE UM NÚMERO REAL :

Para qualquer número real m, representamos módulo de m por $|m|$, e o definimos do seguinte modo:

$$|m| = \begin{cases} m \text{ , se } m \geq 0 \\ -m \text{ , se } m < 0 \end{cases}$$

EXEMPLOS :

De acordo com o que acabamos de definir, podemos dizer que $|4| = 4$ pois $4 \geq 0$, e $|-3{,}666| = -(-3{,}666) = 3{,}666$ pois $-3{,}666 < 0$, e ainda que $|0| = 0$ pois $0 \geq 0$.

EXERCÍCIOS :

1) Calcule o valor de cada expressão a seguir :

a) $|5.(-7)|$ b) $|-2| - |2|$ c) $1-|-1|$ d) $2-|+3-1|$ e) $|-2+5-1| + |-2| + |5| -|1|$ f) $-| -2+3| - |-3 +2|$

Resp.: (a) 35 , b) 0 , c) 0 , d) 0 , e) 8 , f) -2)

2) Obtenha a expressão algébrica mais simples para as expressões dadas, conforme os valores da variável :

a) $E = |x-3| + |x+1|$, se $x < -3$, b) $Y = 2.| 2 – x| - | x – 1|$, se $x > 2$

Resp.:(a) $E = 2 -2x$, b) $Y = x – 3$)

DEFINIÇÃO :

FUNÇÃO MODULAR :

A função de R em R tal que $f(x) = |x|$ é uma função modular, pois apresenta a variável entre as barras de módulo. Deste modo, as funções $y = |3x - 2| + 4$, $f(x) = x - |4x+2|$ são também exemplos de funções modulares. Por outro lado, a função $f(x) = 4x - |4|$ não é modular, pois a variável não se encontra entre as barras.

TRAÇADO DE GRÁFICOS :

Para representarmos graficamente uma função modular, devemos aplicar a definição de módulo (abrir o módulo) e traçar os gráficos das funções resultantes desta "abertura". Em seguida, devemos verificar os intervalos de validade de cada uma das sentenças obtidas.

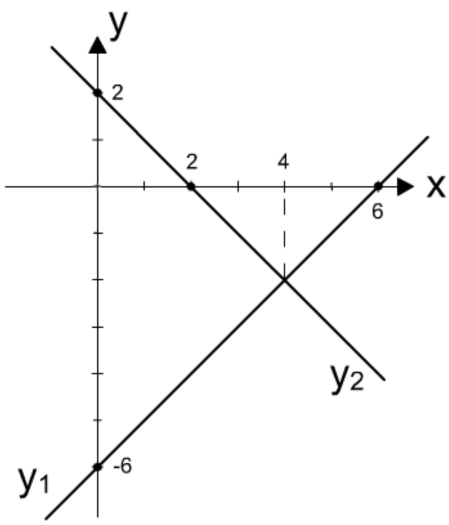
Vejamos os exemplos :

1) Representar graficamente a função : $f(x) = | x-4 | -2$

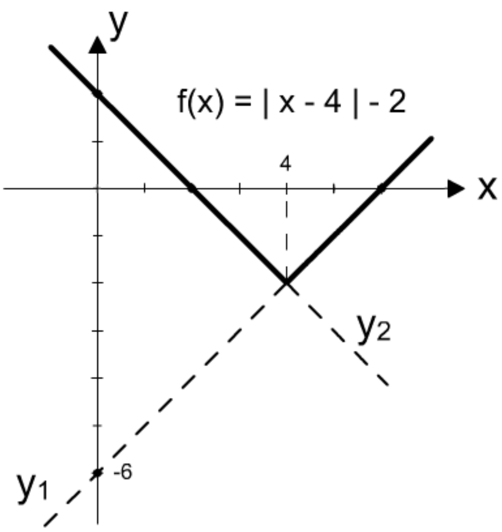
Primeiro passo (abrir o módulo):

$$f(x) = \begin{cases} (x-4) - 2 \text{ , se } x-4 \geq 0 \text{ ou seja, se } x \geq 4 \rightarrow y1 = x - 6 \\ -(x-4) - 2 \text{ , se } x-4 < 0 \text{ ou seja, se } x < 4 \rightarrow y2 = -x + 2 \end{cases}$$

Segundo passo (traçar os gráficos das funções obtidas):



Terceiro passo (reforçar cada função nos seus intervalos de validade):



Como esta função não apresenta impedimentos para valores da variável x, podemos afirmar que seu Domínio é R. Podemos também perceber que sua Imagem é dada por :

$$Im(f) = \{ y \in R \mid y \geq -2\}$$

2) Traçar o gráfico da função $f(x) = |x - 2| - |4 - x|$

Primeiro passo (abrir os módulos) :

$$|x - 2| = \begin{cases} x - 2 \ \text{ se } x \geq 2 \ \ (1) \\ 2 - x \ \text{ se } x < 2 \ \ (2) \end{cases}$$

$$|4 - x| = \begin{cases} 4 - x \ \text{ se } x \leq 4 \ \ (3) \\ x - 4 \ \text{ se } x \geq 4 \ \ (4) \end{cases}$$

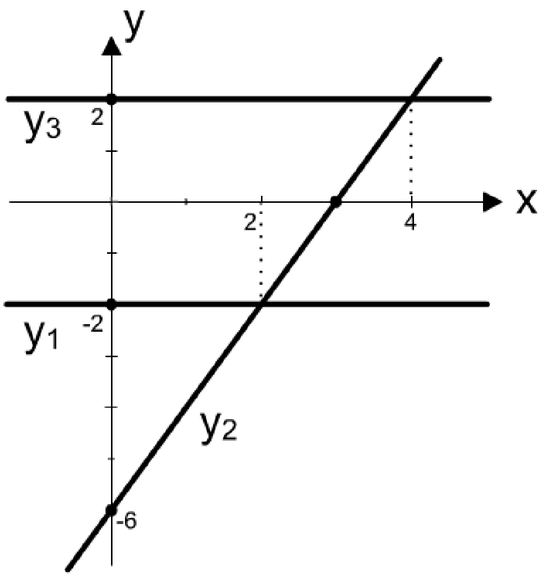
Vemos que o eixo x, que representa o conjunto R, está dividido pelos números 2 e 4 em 3 intervalos, e, por este motivo,a função f(x) será definida por 3 sentenças :

1ª divisão : $x < 2$: $y1 = (2) - (3) = 2 - x - (4 - x) = -2$ (função constante)

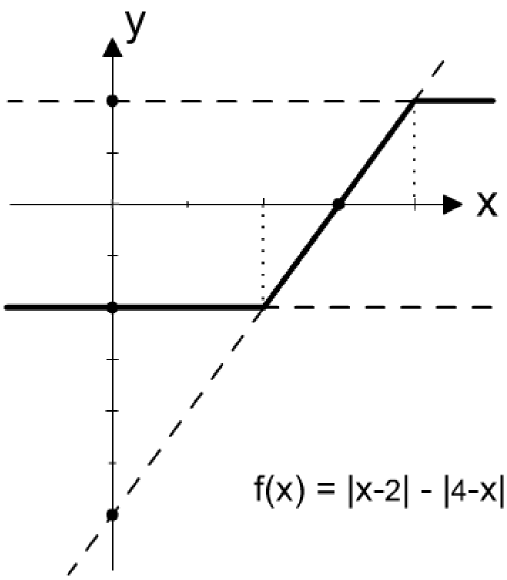
2ª divisão : $2 \leq x \leq 4$: $y2 = (1) - (3) = x - 2 - (4 - x) = 2x - 6$ (função de 1º grau)

3ª divisão : $x > 4$: $y3 = (1) - (4) = x - 2 - (x - 4) = 2$ (função constante)

Segundo passo (traçar os gráficos das funções obtidas):



Terceiro passo (Fazer os reforços) :



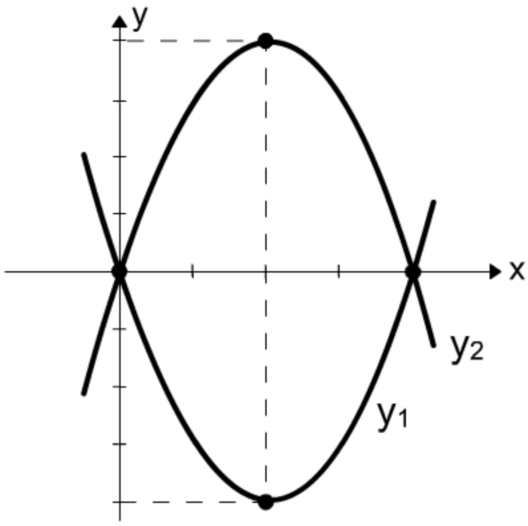
Vemos que Dom(f) = R e que Im(f) = [-2,2]

3) Representar graficamente a função $f(x) = | x^2 - 4x |$

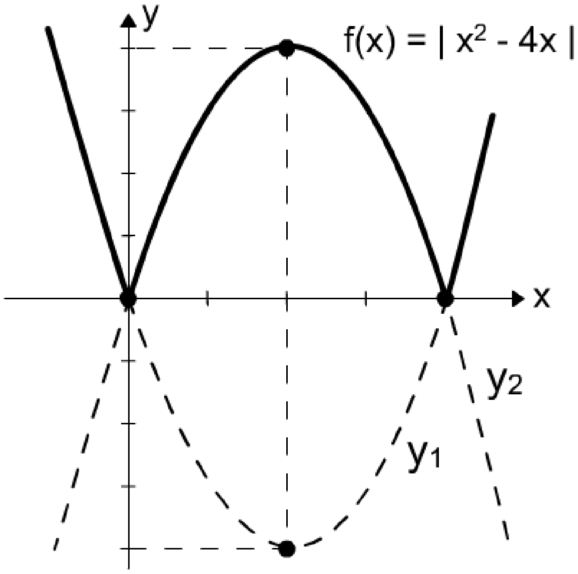
1º passo : Abrir o módulo :

$$|x2 - 4x! = \begin{cases} x^2 - 4x, \text{ se } x^2 - 4x \geq 0, \text{ ou seja : se } x \leq 0 \text{ ou } x \geq 4 \rightarrow y_1 = x^2 - 4x \\ -x^2 + 4x, \text{ se } x^2 - 4x < 0, \text{ ou seja : se } 0 < x < 4 \rightarrow y_2 = -x^2 + 4x \end{cases}$$

2º passo : Traçado dos gráficos :



3º passo : Reforçar



Obs : Dom(f) = R e Im(f) = R+

<u>EXERCÍCIOS :</u> Representar graficamente as funções e escrever seu Domínio e sua Imagem :

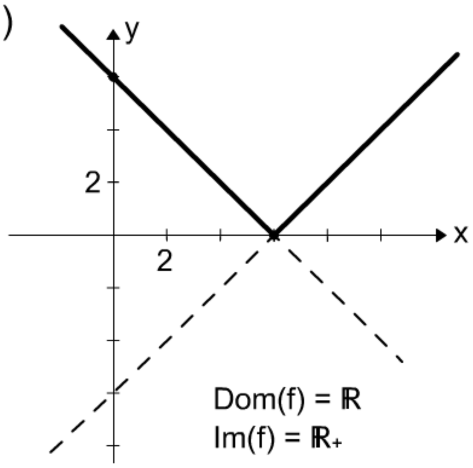
1) $f(x) = |x-6|$ 2) $f(x) = |x| - 6$ 3) $f(x) = 3.|2x+8|$ 4) $f(x) = |x^2 - 9|$

5) $f(x) = |x+2| + |x-5|$ 6) $f(x) = |3x+9| - |4-2x|$ 7) $f(x) = |x^2 - 4x + 3| - 3$

8) $f(x) = \dfrac{|x-4|}{x-4}$ 9) $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$ 10) $f(x) = 2.|3x+6| - 3.|2x-2|$

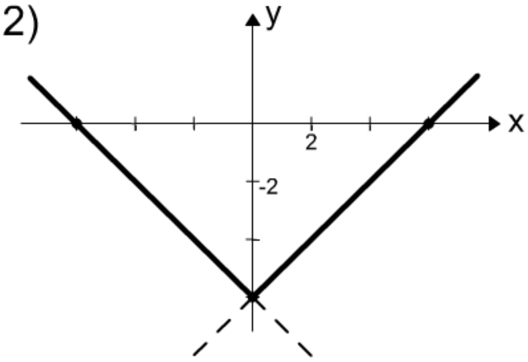
Resp.:

1)



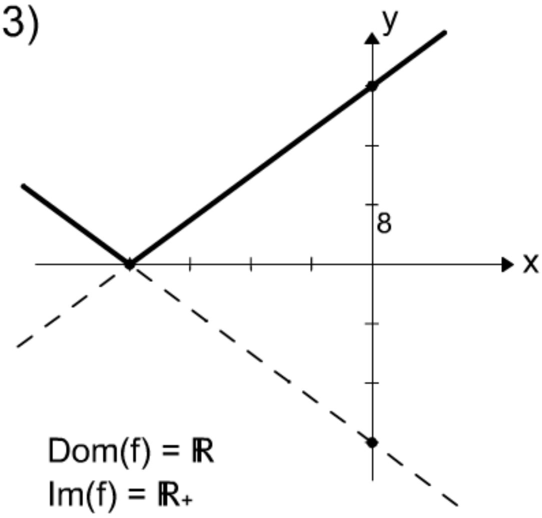
Dom(f) = ℝ
Im(f) = $\mathbb{R}_+$

2)



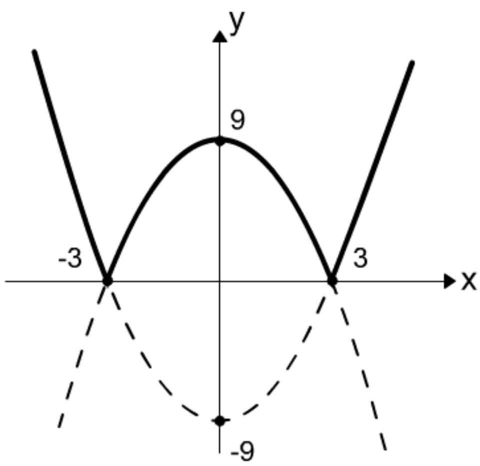
Dom(f) = ℝ
Im(f) = { y∈ℝ | y ≥ - 6 }

3)



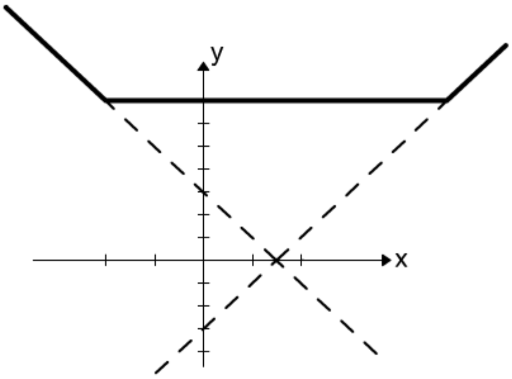
Dom(f) = ℝ
Im(f) = $\mathbb{R}_+$

4)



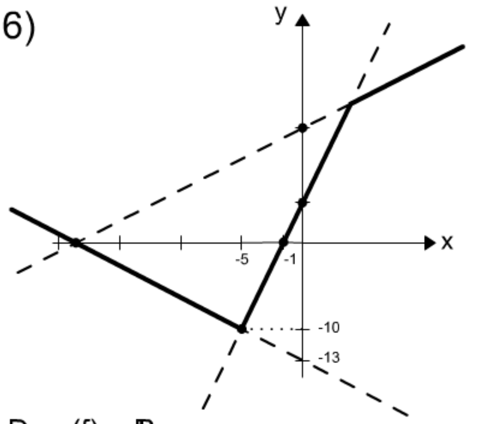
Dom(f) = ℝ Im(f) = $\mathbb{R}_+$

5)



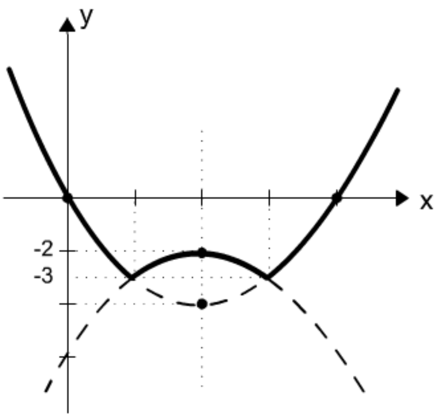
Dom(f) = ℝ
Im(f) = { y∈ℝ | y ≥ 7 }

6)



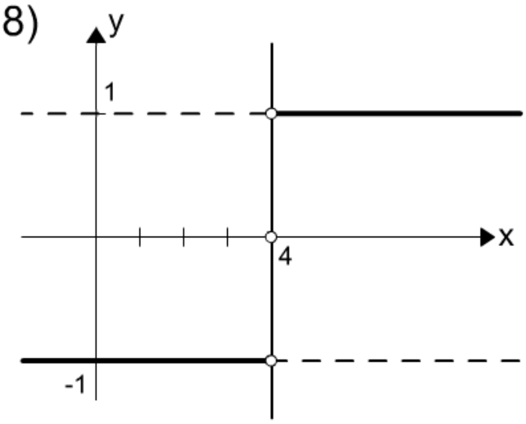
Dom(f) = ℝ
Im(f) = { y∈ℝ | y ≥ -10 }

7)



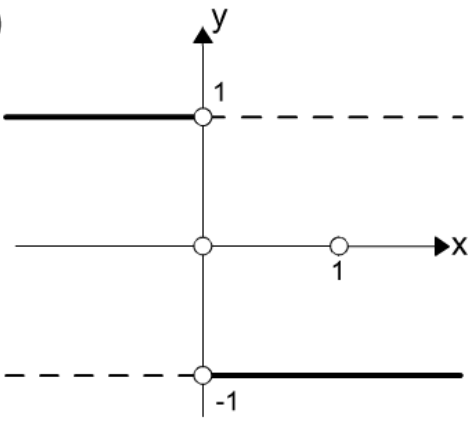
Dom(f) = ℝ
Im(f) = { y ∈ ℝ | y ≥ -3 }

8)



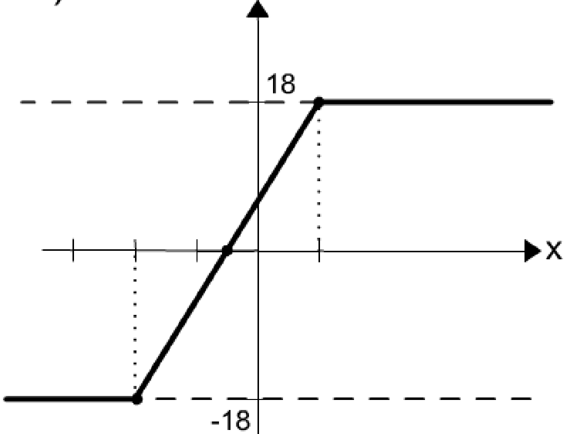
Dom(f) = ℝ - { 4 }
Im(f) = { -1, +1 }

9)



Dom(f) = ℝ*
Im(f) = { -1, +1 }

10)



Dom(f) = ℝ
Im(f) = [-18, +18]

DEFINIÇÃO :

EQUAÇÃO MODULAR :

Uma equação é dita modular se apresentar variável entre as barras de módulo.

Exemplos : 2x - |x+4| = 10 , $|x^2 - 4x| = 3$, etc.

Para resolvermos uma equação modular, devemos “abrir” os módulos e resolver a equação polinomial resultante, e , verificar, se for o caso, se os valores obtidos satisfazem a condição de existência dos módulos.

EXEMPLOS :

Resolva as equações em R :

1) | x + 4 | = | 6 – 2x |

Pela definição de módulo, podemos afirmar que a equação apresentada pode ser transformada nas seguintes equações polinomiais :

$$\begin{cases} x + 4 = 6 - 2x \rightarrow 3x = 2 \rightarrow x = \dfrac{2}{3} \\ x + 4 = -6 + 2x \rightarrow x = 10 \end{cases}$$

Logo, o Conjunto Verdade da equação é V = { $\frac{2}{3}$, 10 }

2) | x+4 | = 6 – 2x

De acordo com a definição de módulo de um número, temos que | x + 4 | ≥ 0 , logo, a expressão 6 – 2x também deve ser positiva ou nula. Ou seja : 6 – 2x ≥ 0 , e teremos x ≤ 3.

A equação modular se transforma nas seguintes equações polinomiais :

$x + 4 = 6 - 2x \rightarrow x = \dfrac{2}{3}$

$x + 4 = -6 + 2x \rightarrow x = 10$ (que não satisfaz as condições do módulo)

Então o Conjunto Verdade será : V = {$\frac{2}{3}$}

3) $|x|^2 - 2.|x| - 15 = 0$

Para resolvermos esta equação, devemos efetuar uma mudança de variáveis, fazendo com que

| x | = y, e passaremos a procurar a solução da equação polinomial de segundo grau na variável y $y^2 - 2y - 15 = 0$. As raízes desta nova equação são -3 e 5, então os valores de x serão obtidos do

seguinte modo : $\begin{cases} |x| = -3 \text{ não possui solução, pois devemos ter } y \geq 0. \\ |x| = 5 \text{ , então } x = 5 \text{ ou } x = -5 \end{cases}$

Assim, teremos $V = \{-5 , 5\}$

4) $| x + 1| + | x - 2 | = 5$

Se utilizarmos a definição de módulo teremos as seguintes sentenças :

$$| x + 1 | = \begin{cases} x + 1, \text{ se } x \geq -1 \\ -x - 1, \text{ se } x < -1 \end{cases} \qquad | x - 2 | = \begin{cases} x - 2 , \text{ se } x \geq 2 \\ -x + 2, \text{ se } x < 2 \end{cases}$$

Vemos que o conjunto R fica dividido em 3 intervalos pelos números -1 e 2. Então, teremos :

a) Se $x < -1$, a equação será: $-x - 1 + (-x+2) = 5$, cuja solução é $x = -2$.

b) Se $-1 \leq x < 2$, a equação será : $x + 1 + (-x + 2) = 5$, que não possui solução.

c) Se $x \geq 2$, a equação será : $x + 1 + (x - 2) = 5$, cuja solução é $x = 3$

Encerrando, poderemos escrever que $V = \{-2 , 3\}$.

<u>EXERCÍCIOS :</u> Resolva as equações em R :

1) $| 2x - 14 | + 6 = 0$, 2) $| 4x - 5 | = 8$, 3) $1 - | x - 1 | = 0$, 4) $| x^2 - 5 | = 4$, 5) $\left| \frac{x+3}{4} \right| = 6$,

6) $| 3x - x^2 | = 2$, 7) $| x |^2 - | 3x | + 2 = 0$, 8) $| x |^2 - 3 | x | + 2 = 0$, 9) $|17 + 3x | = | 1 + 5x |$,

10) $|| x - 4 | - 5 | = 2$. 11) $| x + 3 | - | x - 2 | = 1$, 12) $x^2 + 3 | x | - 10 = 0$.

Resp.: (1) $V = \{\}$, 2) $V = \{-\frac{3}{4}, \frac{13}{4}\}$, 3) $V = \{0,2\}$, 4) $V = \{-3,-1,1,3\}$, 5) $V = \{-27, 21\}$,

6) $V = \{\frac{3-\sqrt{17}}{2}, 1, 2, \frac{3+\sqrt{17}}{2}\}$, 7) $V = \{-2,-1, 1, 2\}$, 8) $V = \{-3. 3\}$, 9) $V = \{\frac{9}{4}, 8\}$,

10) $V = \{-3, 1, 7, 11\}$, 11) $V = \{0\}$, 12) $V = \{-2, 2\}$.

<u>DEFINIÇÃO :</u>

<u>INEQUAÇÕES MODULARES :</u>

Analogamente às equações modulares, as inequações assim chamadas são aquelas cuja variável se encontra entre as barras de módulo.

Para a sua resolução , devemos nos lembrar que, se $|m| \geq a$ então $m \leq -a$ ou $m \geq a$, e se $|m| \leq a$ então $-a \leq m \leq a$.

EXEMPLOS :

Resolva em R as inequações :

1) $| 3x + 8 | \geq x - 1$

Assim, teremos : $3x + 8 \leq -x + 1$ ou $3x + 8 \geq x - 1$ que são duas inequações polinomiais de 1º grau. A solução da primeira delas é $x \leq -\frac{7}{4}$, e a da segunda é $x \geq -\frac{9}{2}$ e o Conjunto Verdade da Inequação Modular inicial será o intervalo fechado : $V = [-\frac{9}{2}, -\frac{7}{4}]$.

2) $| 4 - 3x | < -2$

Esta inequação é impossível pois, pela definição, o módulo de qualquer número deve ser maior ou igual a zero. Logo, $V = \phi$.

3) $| 5x - 8 | < 8$

Dada a inequação modular, podemos afirmar que ela se resume às inequações simultâneas $-8 < 5x - 8 < 8$ cuja solução, conforme capítulo anterior, é $V =]0, \frac{16}{5}[$.

4) $| x^2 - x | \leq 12$

Esta inequação se transforma em $-12 \leq x^2 - x \leq 12$ cuja solução é $V = [-3, 4]$.

EXERCÍCIOS :

Resolva em R as inequações modulares :

1) $| 3 - 4x | < 6$, 2) $4 < | 2x - 6 ! < 8$, 3) $6 \leq |3x + 4| < 4$, 4) $| \left| \frac{2x+4}{x-3} \right| \geq 2$,

5) $| 8 - x^2 | < 4$, 6) $| 2x^2 - 1 | -1 > 0$, 7) $\left| \frac{x+2}{x-2} \right| < 3$, 8) $\left| \frac{x^2-2x}{6-3x} \right| \geq 0$

Resp.: (1) $V =]-\frac{3}{4}, \frac{9}{4}[$, 2) $V =]5, 7[$, 3) $V =][$, 4) $V = \{ x \in R \mid x \geq \frac{1}{2}$ e $x \neq 3\}$,

5) $V = \{ x < -2\sqrt{3}$ ou $x > 2\sqrt{3} \}$, 6) $V = \{ x \in R \mid x < 1$ ou $x > 4 \}$,

7) $V = \{ x \in R \mid x > 4 \}$, 8) $V = R - \{ 2\}$.