FUNÇÃO EXPONENCIAL

REVISÃO: POTENCIAÇÃO

Dados um número real "a" e um número natural "n", a expressão "a^n" representa a operação de potenciação onde "a" é chamado base e "n" é o expoente, e cujo resultado é obtido pela multiplicação da base por si mesma tantas vezes quantas o expoente indicar. Ou seja:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n\ vezes}$$

A definição pode ser estendida para os seguintes casos particulares: $a^1 = a$ e $a^0 = 1$, com $a \neq 0$.

EXEMPLOS: Podemos então calcular os resultados das seguintes potenciações, que são chamados potências:

1) $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$; 2)$(-3)^4 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = +81$;

3) $(-4)^3 = (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) = -64$; 4) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{27}$; 5) $\left(-\frac{5}{7}\right)^2 = \left(-\frac{5}{7}\right) \cdot \left(-\frac{5}{7}\right) = +\frac{25}{49}$

Um resultado muito importante pode ser obtido com a propriedade que permite calcular potências com expoente inteiro negativo do seguinte modo: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, com $a \neq 0$.

PROPRIEDADES: As potências possuem as seguintes propriedades relacionadas com as operações de multiplicação, divisão e a própria potenciação:

1) Multiplicação de potências de mesma base: $a^n \cdot a^p = a^{n+p}$

2) Divisão de potências de mesma base: $a^n : a^p = a^{n-p}$, com $a \neq 0$.

3) Potência de potência: $(a^n)^p = a^{n \cdot p}$

4) Potência de um produto: $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

5) Potência de um quociente: $(a : b)^n = a^n : b^n$, com $b \neq 0$.

IMPORTANTE: O símbolo 0^0, pelo fato de poder representar mais de um resultado, é chamado Indeterminação.

DEFINIÇÃO: Potência com expoente racional

Toda potência cujo expoente é um número racional é igual a uma raiz cujo índice é o denominador do expoente e cujo expoente é o numerador do expoente inicial. Ou seja:

$$a^{\frac{n}{p}} = \sqrt[p]{a^n}$$

EXERCÍCIOS:

1) Calcular o resultado das expressões :

a) $(-3)^5$ b) $(-4)^2$ c) -4^2 d) $0{,}2^3$

e) $[(-2)^3]^2$ f) $3 \cdot 3^2 \cdot 3^3$ g) $\left(-\frac{5}{9}\right)^3$ h) $(-0{,}1)^3$

i) $\left[\left(-\frac{3}{8}\right)^2\right]^2$ j) $\frac{5^4 \cdot 5^7 \cdot 5^{10}}{5 \cdot 5^{12} \cdot 5^8}$ k) $\left(5^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}}$ l) $\left[\left(\sqrt{2}\right)^{(\sqrt{2}+1)}\right]^{\sqrt{2}-1}$

Respostas:

a) -243 b) $+16$ c) -16 d) $0{,}008$

e) $+64$ f) 59049 g) $-\frac{125}{729}$ h) $-0{,}001$

i) $\frac{81}{4096}$ j) 1 k) 125 l) $\sqrt{2}$

2) Efetue as operações indicadas:

a) $7^4 \cdot 7^6 \cdot 7 \cdot 7^8$

b) $(-3)^5 : (-3)^{-2} \cdot (-3)^2 \cdot (-3)^{-2}$

c) $\left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{-2} \cdot 0{,}75$

d) $\frac{2^{x+y} \cdot 2^{2x-y}}{2^{3x-y}}$

e) $\frac{0{,}001 \cdot 0{,}01^2 \cdot 10^3}{\frac{1}{10^2} \cdot 0{,}1^{-2} \cdot 100}$

f) $\frac{m^{-1}+n^{-1}}{m+n}$

g) $\frac{5^7-5^6+5^5}{5^6+2 \cdot 5^5}$

h) $3125^{0{,}1} \cdot 3125^{0{,}1} - 49 \cdot 49^{0{,}5}$

Respostas:

a) 343 b) -2187 c) $\frac{728}{4096}$ d) 2^y

e) $0{,}001$ f) $\frac{1}{mn}$ g) 3 h) 338

DEFINIÇÃO: EQUAÇÃO EXPONENCIAL

Chamamos de equação exponencial a toda equação cuja incógnita esteja em algum expoente.

Como exemplos deste tipo de equação temos: $3^{x-4} = 243$, $4^x - 2^{x+1} = 12$, etc.

RESOLUÇÃO: Veremos neste item alguns tipos de equações exponenciais, cada um deles utilizando uma forma de resolução.

1º tipo: Resolva em $\mathbb{R}$ a equação: $125^{2x-6} = 0{,}2$

Neste tipo, devemos procurar transformar os dois membros em potências de mesma base, e, para isso, iremos utilizar a fatoração, a transformação entre tipos de fração, e aplicar as propriedades da potenciação de forma conveniente. Deste modo, podemos perceber que $125 = 5^3$, e $0{,}2 = \frac{1}{5}$. Logo, a equação inicial passa a ser: $(5^3)^{2x-6} = \frac{1}{5}$, e, se aplicarmos as propriedades vistas na página anterior, teremos $5^{6x-18} = 5^{-1}$. Esta última sentença mostra uma igualdade de potências de bases iguais que só pode ser verdadeira se os expoentes forem iguais. Logo, a equação inicial se resume à equação $6x - 18 = -1$, cuja solução é $x = \frac{17}{6}$. O conjunto solução da equação será $V = \left\{\frac{17}{6}\right\}$.

2º tipo: Resolva a equação em $\mathbb{R}$: $9^x - 12 \cdot 3^x + 27 = 0$

Para resolvermos tal tipo de equação, utilizaremos um artifício que se resume a uma mudança de variável, e , para isso, faremos $y = 3^x$, e, deste modo a equação inicial se transformará em: $y^2 - 12y + 27 = 0$, cuja solução é $y_1 = 3$ e $y_2 = 9$. Porém os valores obtidos se referem à incógnita y, e devemos a partir dela calcular os valores d e x. Para tanto, resolveremos as duas equações seguintes:

Quando $y = 3 \rightarrow 3^x = 3 \rightarrow x = 1$ (Potências iguais de bases iguais têm expoentes iguais).

Quando $y = 9 \rightarrow 3^x = 9 \rightarrow 3^x = 3^2 \rightarrow x = 2$ (Pelo mesmo motivo)

Então, a solução da equação proposta é $V = \{1, 2\}$

3º tipo : Obtenha o Conjunto Verdade da equação: $7^x + 7^{x+1} + 7^{x+2} = 57$.

A resolução deste tipo de equação se inicia com o uso da propriedade operatória do produto de potências de mesma base, e transformamos a equação inicial na seguinte: $7^x + 7^x \cdot 7^1 + 7^x \cdot 7^2 = 57$. Se pusermos 7^x em evidência no 1º membro, escreveremos:

$$7^x \cdot (1 + 7^1 + 7^2) = 57 \rightarrow 7^x \cdot 57 = 57 \rightarrow 7^x = \frac{57}{57} = 1 \rightarrow x = 0 \rightarrow V = \{0\}$$

EXERCÍCIOS:

1) Resolva as equações no conjunto $\mathbb{R}$:

a) $3^{x-4} = 243$

b) $16^{4-3x} = 128^{2x+6}$

c) $\left(\frac{4}{9}\right)^{4x-6} = \left(\frac{8}{27}\right)^{2x+1}$

d) $0{,}64^{x^2-4x} = 1$

e) $\left(\frac{3}{2}\right)^{2x-5} = \left(\frac{2}{3}\right)^{x+4}$

f) $10^{3+2x} = 0{,}0001$

g) $8^{x+6} = \sqrt[3]{4^{2x-1}}$

h) $4^{x^2-x-3} = 64$

i) $\frac{2^{3x-4}}{2^x} = 0{,}5$

j) $5^{x+4} = \frac{25}{5^{2x-3}}$

k) $9^x - 28 \cdot 3^x + 27 = 0$

l) $5^{2x-1} - 10 \cdot 5^{x-1} - 75 = 0$

m) $3^x + 3^{x-1} = 11 + 3^{x-2}$

n) $64 + 16^x = 5 \cdot 4^{1+x}$

o) $5^x + 25^x = 2$

p) $2^{2x+2} - \frac{3 \cdot 2^{x+2}}{4} - 1 = 0$

q) $5^{x+1} + 5^x + 5^{x-1} = 775$

Respostas:

a) $V = \{9\}$

b) $V = \{-1\}$

c) $V = \left\{\frac{15}{2}\right\}$

d) $V = \{0, 4\}$

e) $V = \left\{\frac{1}{3}\right\}$

f) $V = \left\{-\frac{7}{2}\right\}$

g) $V = \left\{-\frac{56}{5}\right\}$

h) $V = \{-2, 3\}$

i) $V = \left\{\frac{3}{2}\right\}$ (   )

j) $V = \left\{\frac{1}{3}\right\}$

k) $V = \{0, 3\}$

l) $V = \{2\}$

m) $V = \{1, 2\}$

n) $V = \{0\}$

o) $V = \{0\}$

p) $V = \{3\}$

CONCEITO: FUNÇÃO EXPONENCIAL

Dizemos que $y = f(x)$ é uma função exponencial de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ se ela puder ser escrita na forma $y = f(x) = a^x$, onde a base "a" é positiva e diferente de 1, e o expoente x é um número real qualquer.

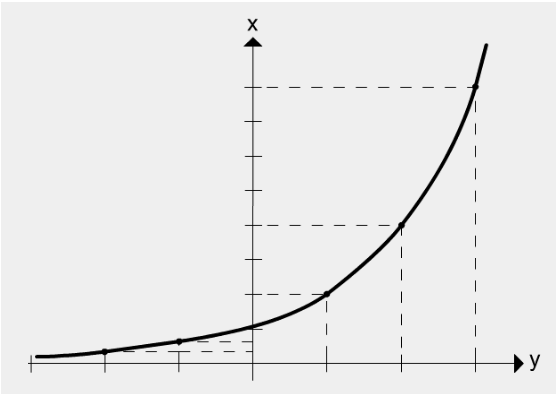
EXEMPLOS;

Deste modo, $f(x) = 6^x$, $f(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^{x+2}$, $f(\mathrm{x}) = \sqrt{0{,}12^{3x+4}}$ são funções exponenciais na variável x, e $f(x) = (-3)^{x+5}$, $y = \left(-\frac{1}{2}\right)^x$, $g(x) = (-0{,}25)^{\frac{x+2}{3}}$ e $y = 1^{2x}$ não são. É importante perceber que $f(x) = -3^{x+3}$ é uma função exponencial na variável x, pois a sua base é 3, pois o sinal de menos não está elevado ao expoente $x + 3$.

EXEMPLOS:

GRÁFICOS: Em seguida, construiremos os gráficos de duas funções exponenciais. A primeira delas $f(x) = 2^x$, cuja base é $a = 2$, e portanto maior que 1. Para obter a curva que representa a função, montaremos uma tabela com valores de x e seus correspondentes $f(x)$, onde os de x serão quaisquer. Então, teremos obtido vários pontos da curva, que, ligados por um traçado suave e sem "quebras" será o seguinte:

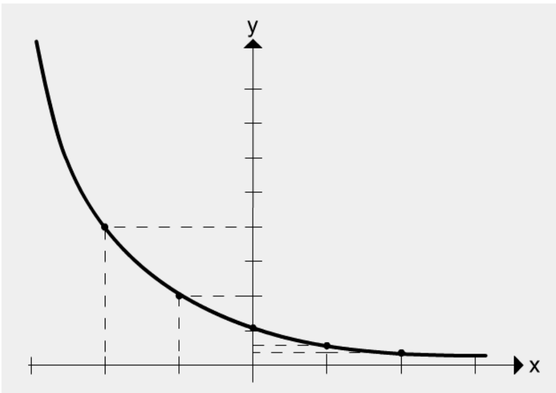
x	$f(x)$
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8



Podemos perceber que esta função é crescente, que para valores cada vez menores de x, a função se aproxima cada vez mais do eixo x sem nunca tocá-lo, e por isso, ela nunca se anula. Dizemos então que o eixo x é uma assíntota da função.

Tomemos agora a função exponencial $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Esta função exponencial possui base igual a $\frac{1}{2}$, situada entre zero e um. Para obter seu traçado, montaremos do mesmo modo uma tabela e, para isso, usaremos os mesmos valores de x da função anterior. A tabela será então:

x	$f(x)$
-2	4
-1	2
0	1
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$



Percebemos agora que a função é decrescente, e, para valores cada vez maiores de x, a função se aproxima do eixo x, sem nunca tocá-lo. Logo, ela jamais se anula, e o eixo x é também chamado de assíntota da função.

Os dois exemplos que acabamos de representar graficamente nos permitem dizer que a função exponencial $f(x) = a^x$ é crescente se $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$.

OBSERVAÇÕES:

Você deve ter percebido que, nos dois casos, a função passa pelos pontos (0,1) e $(1, a)$; as duas são representadas por curvas com as mesmas formas, porém que possuem posições diferentes no plano cartesiano. O Domínio e o Contra-Domínio de ambas é $\mathbb{R}$ e suas Imagens são iguais a$\mathbb{R}_+^*$. Seja qual for a base, a função exponencial $y = a^x$ é injetora, pois, dados dois valores distintos de x, ela associa a eles imagens distintas. Porém, como a Imagem e o Contra-Domínio não coincidem, elas não são sobrejetoras. Logo, não serão bijetoras.

APLICAÇÕES:

1) Um interessante, e importante, uso das funções exponenciais, e que é muito comum em finanças, é o cálculo do rendimento de uma quantia em dinheiro aplicado em um banco que paga uma certa taxa percentual durante determinado tempo, com o Montante (capital + juro) retirado no fim do contrato. Veja o exemplo:

Um poupador deposita $R\$ \, 2\,800{,}00$ em uma aplicação bancária que credita mensalmente 3% do saldo, a título de juros, em seu nome mensalmente. Elabore uma planilha da aplicação:

Nº de meses	Montante M = capital + juros
0	$M = R\$2800{,}00$
1	$M = 2800 + 0{,}03 \cdot 2800 = 2800(1 + 0{,}03) = 2884{,}00$
2	$M = 2800 \cdot (1 + 0{,}03) \cdot (1 + 0{,}03) = 2800 \cdot (1 + 0{,}03)^2 = 2970{,}52$
3	$M = 2800 \cdot (1 + 0{,}03) \cdot (1 + 0{,}03)^2 = 2800 \cdot (1 + 0{,}03)^3 = 3059{,}10$
4	$M = 2800 \cdot (1 + 0{,}03)^4 = 3150{,}87$
…	…
n	$M = 2800 \cdot 1{,}03^n$

$M = 2800 \cdot 1{,}03^n$ que é uma função exponencial na variável n, onde n é o número de meses que durou a aplicação, uma vez que a taxa é mensal.

Podemos até dizer que, para qualquer aplicação financeira deste tipo (regime de juros compostos) vale a "fórmula" $M = C \cdot (1+i)^n$, onde C representa o Capital aplicado, i é a taxa percentual escrita como fração decimal, n é o número de períodos de tempo que demorou a aplicação, lembrando que taxa i e número de períodos de tempo n devem se referir à mesma unidade de tempo.

2) Veja agora esta aplicação da função exponencial na Biologia: Um pesquisador de um laboratório farmacêutico se decidiu por cultivar um tipo de bactéria, o Matematicocus, e em um certo instante introduziu 500 delas em um caldo de cultura, e verificou que, se as condições de temperatura forem as ideais, a cada meia hora a quantidade de bactérias presentes na cultura triplica. Sendo assim, obtenha a quantidade de bactérias após 5 horas.

Você pode perceber que a população P das bactérias crescerá da seguinte maneira:

No início da cultura, $t = 0$, então teremos: $P = 500$ bactérias.

Decorrida a 1ª meia hora, teremos $t = 1$ e $P = 500.3 = 1500$ bactérias.

Decorrida a 2ª meia hora, teremos $t = 2$, e $P = 500 \cdot 3^2 = 500 \cdot 9 = 4500$ bactérias.

Decorrida a 3ª meia hora, teremos $t = 3$, e $P = 500.3^3 = 500 \cdot 27 = 13500$ bactérias.

Assim, decorrida a n-ésima meia hora, teremos $P = 500 \cdot 3^n$. Como queremos obter a quantidade de bactérias após 5 horas, ou 10 meias horas, ela será dada por $P = 500 \cdot 3^{10} = 500 \cdot 59049 = 29524500$ bactérias.

3) No exemplo anterior, em quantas horas a população será igual a 265720500 bactérias?

Como acabamos de ver, o número de bactérias é dado pela igualdade $P = 500 \cdot 3^n$. Sabemos que $P = 265720500$, então escrevemos: $265720500 = 500.3^n$, que é uma equação exponencial cuja solução será dada por: $\frac{265720500}{500} = 3^n \rightarrow 3^n = 531441 \rightarrow 3^n = 3^{12} \rightarrow n = 12$ meias horas, ou $n = 6$ horas, conforme a pergunta foi feita.

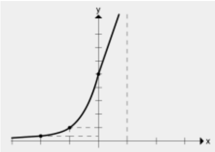
4) Represente graficamente as funções, dê suas imagens e classifique-as quanto ao crescimento:

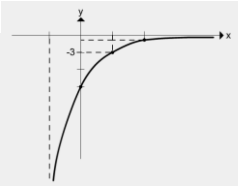
a) $y = 5^{x+2}$ b) $f(x) = -3^{2-x}$ c) $f(x) = 0{,}2^{x-1}$

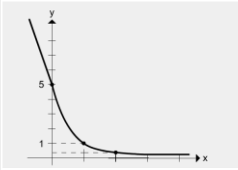
e) $h(x) = 0{,}125^{2-3x}$

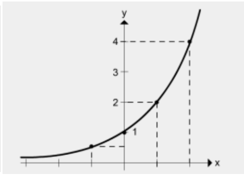
d) $g(x) = 4^{\frac{x}{2}}$

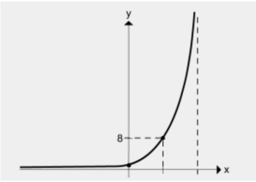
Resp.: (a b c, d e)











a) $Im(y) = \mathbb{R}_{+}^{*}$ b) $Im(f) = \mathbb{R}_{-}$ c) $Im(f) = \mathbb{R}_{+}^{*}$

Crescente Crescente Decrescente

d) $Im(g) = \mathbb{R}_{+}^{*}$ e) $Im(h) = \mathbb{R}_{+}^{*}$

Crescente Crescente

4) Durante o Segundo Império do Brasil, em 1871, foi assinada a Lei do Ventre Livre, segundo a qual todos os nascidos a partir de então estariam livres. Com isso, tendo já sido interrompida a entrada de novos escravos pois o tráfico estava proibido, só continuariam nessa condição aqueles que já fossem escravos no país. Posteriormente foi assinada a Lei dos Sexagenários, ou Lei Saraiva Cotegipe, que libertava todo escravo que atingisse a idade de 60 anos. Se esta lei foi assinada em 1885 , quando a população brasileira de escravos era igual a aproximadamente 900 mil pessoas, e considerando que a cada ano por volta de 25 % da população escrava deixava de sê-lo, ou devido à lei ou por óbito normalmente ocasionado pelas péssimas condições de vida e trabalho, qual a estimativa da população escrava no ano de 1900, caso não fosse assinada a Lei Áurea, extinguiu a escravidão no Brasil?

Resp:(aproximadamente 12 mil pessoas)

<u>CONCEITO</u>: INEQUAÇÃO EXPONENCIAL

Para resolvermos uma inequação exponencial devemos levar em consideração as condições de crescimento e de decrescimento da função exponencial que originou a inequação.

<u>EXEMPLOS</u>:

Resolva as inequações em $\mathbb{R}$:

a) $4^{2x+6} \geq 64$

A função $y = 4^{2x+6}$, com base > 1, é crescente, logo $4^{2x+6} \geq 4^3$ implica que $2x + 6 \geq 3$ ou ainda que $x \geq -\frac{3}{2}$ e teremos então o seguinte Conjunto Verdade: $V = \left\{x \in \mathbb{R} / \, x \geq -\frac{3}{2}\right\}$.

b) $0{,}01^{4x-3} < 0{,}1^{x-2}$

$(0{,}1^2)^{4x-3} < 0{,}1^{x-2} \rightarrow 0{,}1^{8x-5} < 0{,}1^{x-2}$ que são duas funções de mesma base entre 0 e 1, e por isso decrescentes. Portanto, $8x - 6 > x - 2 \ \rightarrow 7x > 4 \ \rightarrow x > \frac{4}{7}$. Portanto o Conjunto Verdade será: $V = \left\{x \in \mathbb{R} \ / x > \frac{4}{7}\right\}$.

b) $25^{4-8x} \leq 0{,}2^{x+2}$

Devemos em primeiro lugar escrever os dois membros como funções exponenciais de mesmas bases: $25^{4-8x} \leq \left(\frac{1}{5}\right)^{x+2} \rightarrow 25^{4-8x} \leq 5^{-x-2} \ \rightarrow 5^{8-16x} \leq 5^{-x-2}$. Como as funções têm base 5 que é maior que 1, então $8 - 16x \leq -x - 2$ cuja resolução é $-15x \leq -10$ ou ainda $x \geq \frac{2}{3}$ e o Conjunto Verdade: $V = \left\{x \in \mathbb{R} \ / x \geq \frac{2}{3}\right\}$.

c) $\left(7^{x^2-3}\right)^2 > 49^{-1}$

Se escrevermos os dois membros na mesma base, teremos: $7^{2x^2-6} > 7^{-2}$. Como as bases são maiores que 1 poderemos escrever $2x^2 - 6 > -2 \ \rightarrow 2x^2 - 4 > 0$ que é uma inequação de 2º grau, cuja solução é o seguinte Conjunto Verdade: $V = \{x \in \mathbb{R} / \, x < -2 \ ou \ x > 2\}$.

<u>EXERCÍCIOS</u>:

Os valores reais de x que resolvem as inequações são:

a) $81^{x+2} \leq 3$

b) $0{,}6^{4-2x} > 0{,}6^{x+2}$

c) $121 \leq \frac{11}{11^{x-3}}$

d) $16^{2x+8} < \sqrt{8^{x-3}}$

e) $\left(\frac{2}{3}\right)^{3x-4} \geq 1$

f) $\left(\frac{1}{7}\right)^{x+1} < \frac{1}{343}$

g) $2^{2x+2} \leq 1 + \frac{3}{4} \cdot 2^{x+2}$

h) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} \cdot 4^{-1-2x} \geq 0{,}125^{3+4x}$

Sugestão: no g) Chame 2^x de y

Respostas:

a) $x \leq -\frac{7}{4}$

b) $x > \frac{2}{3}$

c) $x \leq 2$

d) $x < -\frac{73}{13}$

e) $x \leq \frac{4}{3}$

f) $x > 2$

g) $-\frac{1}{4} \leq x \leq 1$

h) $x \geq -\frac{6}{7}$