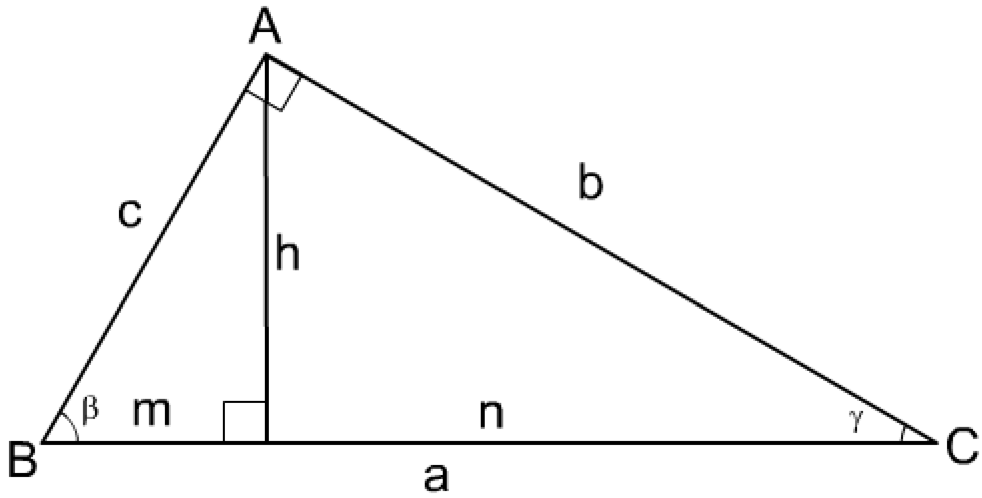
RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

CONCEITUAÇÃO:

No capítulo anterior foram abordadas as relações métricas no triângulo retângulo, e você deve ter percebido que em nenhuma delas havia referência aos valores dos ângulos internos. Por este motivo foram estabelecidos alguns conceitos que envolvem tais elementos, aos quais daremos os nomes de Seno, Cosseno e Tangente dos ângulos agudos do triângulo retângulo.

ILUSTRAÇÃO:

Seja o triângulo BAC retângulo no vértice A, conforme a figura:



DEFINIÇÃO

Para qualquer ângulo agudo deste triângulo, definimos:

SENO do ângulo agudo é o quociente entre a medida do cateto oposto ao ângulo e a medida da hipotenusa, e assim o representamos: $\text{sen}\,\beta = \frac{b}{a}$ e $\text{sen}\,\gamma = \frac{c}{a}$.

COSSENO do ângulo agudo é o quociente entre a medida do cateto adjacente ao ângulo e a da hipotenusa, e o representamos do seguinte modo: $\cos\beta = \frac{c}{a}$ e $\cos\gamma = \frac{b}{a}$.

TANGENTE do ângulo agudo é o quociente entre a medida do cateto oposto ao ângulo pela do cateto adjacente a ele, e a representamos assim: $\text{tg}\,\beta = \frac{b}{c}$ e $\text{tg}\,\gamma = \frac{c}{b}$.

PROPRIEDADE DOS ÂNGULOS COMPLEMENTARES:

Dois ângulos são complementares se sua soma for um ângulo reto: Se β e γ são ângulos agudos do triângulo retângulo, então sua soma será 90º, logo eles são complementares, e, de acordo com as definições de seno, cosseno e tangente, você deve ter percebido que:

$\text{sen}\,\beta = \cos\gamma$, $\text{sen}\,\gamma = \cos\beta$ e que $\text{tg}\,\beta = \frac{1}{tg\gamma}$.

Podemos então afirmar que valem as propriedades:

$\text{sen}\,\beta = \cos(90º - \beta)$, $\cos\beta = \text{sen}(90º - \beta)$ e $\text{tg}\,\beta = \frac{1}{tg(90º - \beta)}$

EXEMPLO:

Os catetos de um triângulo retângulo medem 6 cm e 8 cm. Obtenha as razões trigonométricas de seus ângulos agudos.

Resolução:

Se b = 6 cm e c = 8 cm, então o teorema de Pitágoras ficará:

$a^2 = 6^2 + 8^2$. Então $a^2 = 100$ e $a = \pm\sqrt{100}$. Como $a \rangle 0$, por ser medida de um segmento, então a = 10 cm.

Logo as razões trigonométricas pedidas serão:

$\text{sen}\,\beta = \frac{b}{a} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} = \cos\gamma$, $\cos\beta = \frac{c}{a} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} = sen\gamma$,

$\text{tg}\,\beta = \frac{b}{c} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$. Como $\text{tg}\,\gamma = \frac{1}{tg\beta}$, então $\text{tg}\,\gamma = \frac{4}{3}$

EXERCÍCIOS :

1) Obtenha as razões trigonométricas dos ângulos agudos dos triângulos retângulos onde :

a) a = 8cm, b = 6cm

(Resp.: sen $\beta = \cos\gamma = 3/4,$ cos $\beta = sen\gamma = \sqrt{7}/4, tg\beta = \frac{3\sqrt{7}}{7}, tg\gamma = \frac{\sqrt{7}}{3}$)

b) a = 2b, c = 9cm

(Resp.:sen $\beta = \cos\gamma = 1/2, \cos\beta = sen\gamma = \frac{\sqrt{3}}{2}, tg\beta = \frac{\sqrt{3}}{3}, tg\gamma = \sqrt{3}$)

c) h = 4cm, a = 10cm

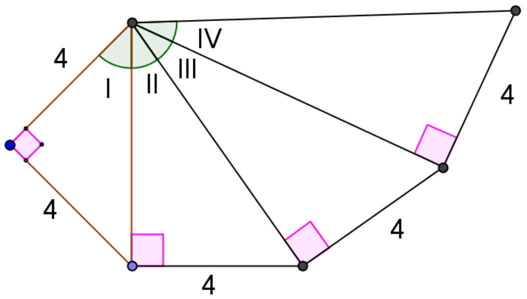
(Resp.: sen $\beta = \cos\gamma = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \cos\beta = sen\gamma = \frac{\sqrt{5}}{5}, tg\beta = 2, tg\gamma = 1/2$)

d) m = 2cm, n = 6cm

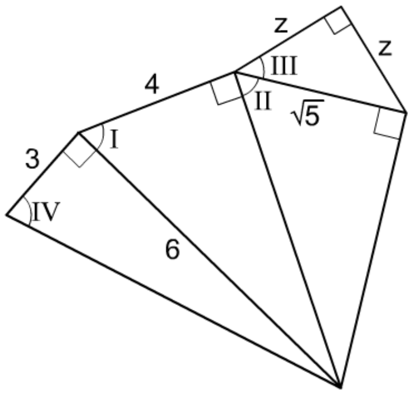
(Resp.: sen $\beta = \cos\gamma = \frac{\sqrt{3}}{2}$, cos $\beta = sen\gamma = 1/2$, tg $\beta = \sqrt{3}$, tg $\gamma = \frac{\sqrt{3}}{3}$)

2) Calcule os valores de seno e cosseno dos ângulos I,II, III e IV das figuras :

a)



b)



Resp::a)

$$\left(senI = \cos I = \frac{\sqrt{2}}{2}, senII = \frac{\sqrt{3}}{3}, \cos II = \frac{\sqrt{6}}{3}, senIII = 1/2, \cos III = \frac{\sqrt{3}}{2}, senIV = \frac{\sqrt{5}}{5}, \cos IV = \frac{2\sqrt{5}}{5} \right)$$

Resp b)

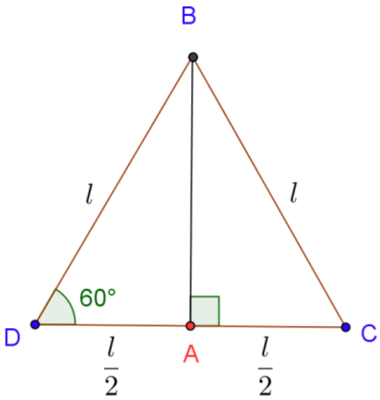
$$\left(senI = \frac{\sqrt{5}}{3}, \cos I = \frac{2}{3}, senII = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos II = \frac{1}{2}, senIII = \cos III = \frac{\sqrt{2}}{2}, senIV = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \cos IV = \frac{\sqrt{5}}{5} \right)$$

<u>ÂNGULOS NOTÁVEIS :</u>

Os ângulos de 30º, 45º e 60º são chamados ângulos notáveis pois, assim como os produtos notáveis da Álgebra, são muito utilizados em cálculos trigonométricos, por serem divisores exatos do ângulo de 180º, e questões envolvendo estes ângulos são comuns na Matemática e na Física. Portanto é importante conhecer os valores de suas razões trigonométricas.   Vejamos :

Ângulo de 60º:

Este ângulo, como você já sabe, é o ângulo interno do triângulo equilátero de Lado ℓ.   A figura nos mostra o triângulo equilátero BCD e sua altura h, que o divide em 2 triângulos retângulos CAB e DAB congruentes .



Logo, CA = $\frac{\ell}{2}$, e teremos, por Pitágoras: $h^2 = \ell^2 + (\frac{\ell}{2})^2 \rightarrow h^2 = \ell^2 + \frac{\ell^2}{4} \rightarrow h^2 = \frac{3\ell^2}{4}$

$\rightarrow h = \pm\sqrt{\frac{3\ell^2}{4}}$, como h$\rangle$ 0, então h = $\frac{\ell\sqrt{3}}{2}$, e podemos calcular as razões trigonométricas de 60º :

$$\text{sen } 60^\circ = \frac{h}{\ell} = \frac{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{\ell} = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\ell} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{\frac{\ell}{2}}{\ell} = \frac{\ell}{2} \cdot \frac{1}{\ell} = \frac{1}{2}$$

$$\text{tg } 60^\circ = \frac{h}{\frac{\ell}{2}} = \frac{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{\frac{\ell}{2}} = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{\ell} = \sqrt{3}$$

Ângulo de 30º.

Como 30º e 60º são ângulos complementares, pois sua soma é um ângulo reto, então 30º = 90º - 60º, e podemos concluir que :

sen 30º = cos (90º -30º) = cos 60º = $\frac{1}{2}$

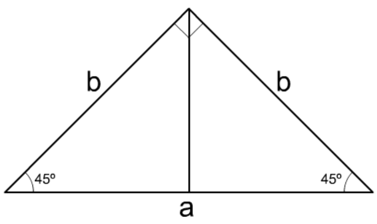
cos 30º = sen (90º - 30º) = sen 60º = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\text{tg } 30^\circ = \frac{1}{tg(90^\circ - 30^\circ)} = \frac{1}{tg\, 60^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Ângulo de 45º

Se um dos ângulos agudos do triângulo retângulo mede 45º, então o outro terá a mesma medida, pois a soma de ambos é 90º, e tal triângulo será isósceles. Ou seja, seus catetos serão iguais e de medida b. O comprimento de sua hipotenusa será dado por Pitágoras :

a $^2 = b^2 + b^2 \rightarrow$ a $^2 = 2b^2 \rightarrow a = \pm\sqrt{2b^2}$, como a $\rangle 0$,então a = b $\sqrt{2}$, e assim teremos :



sen45º = $\frac{b}{a} = \frac{b}{b\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

cos45º =sen(90º-45º)=sen45º = $\frac{\sqrt{2}}{2}$

tg 45º = $\frac{b}{b} = 1$

Seria conveniente memorizar os valores das razões trigonométricas que acabamos de obter.

A tabela a seguir engloba os valores que acabamos de deduzir para essas razões:

Ângulo	seno	cosseno	Tangente
30º	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45º	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60º	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

EXERCÍCIOS:

1) Calcule o valor das expressões:

a) E = $\frac{\cos 60º + sen 30º}{2tg 45º}$

Resp.: ½

b) Y = $\frac{tg^2 30º}{1 - tg 30º}$

Resp.: $\frac{3+\sqrt{3}}{6}$

c) E = 2sen60ºcos60º - $\sqrt{3}$

Resp.: - $\frac{\sqrt{3}}{2}$

d) E= $\frac{sen30º}{\cos 30º} + \frac{3\cos 60º}{1 + tg\,45º}$

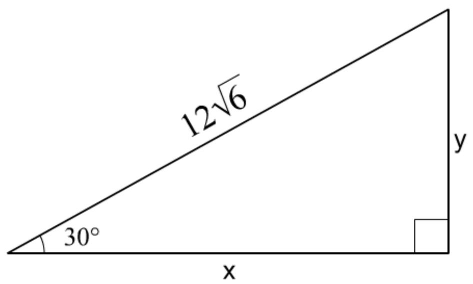
Resp.: $\frac{4\sqrt{3} + 9}{12}$

e) E $= \frac{2.sen70º}{5.\cos 20º} + \frac{3.\cos 50º}{5sen40º}$

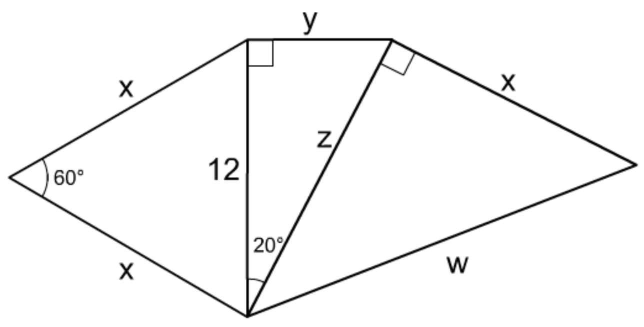
Resp.: 1

2) Ache os valores desconhecidos nas figuras :

a)



b)



Resp.: a) x = $18\sqrt{2}, y = 6\sqrt{6}$

:b) x=12, y $\approx 4{,}37, z \approx 12{,}77, w \approx 17{,}52$

<u>CONCEITUAÇÃO :</u>

Em um triângulo qualquer, os valores do seno e do cosseno de seus ângulos internos obedecem às propriedades que veremos a seguir, conhecidas como Lei dos Cossenos e Lei dos Senos :

1) LEI DOS SENOS :

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos\alpha}$$

onde α é o ângulo oposto ao lado a. Logo, podemos ter:

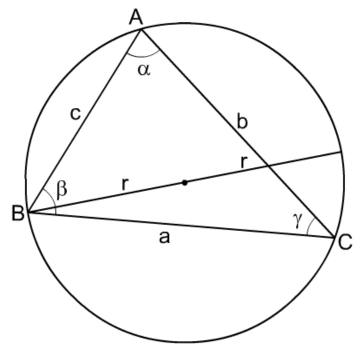
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \text{ e}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

2) LEI DOS COSSENOS :

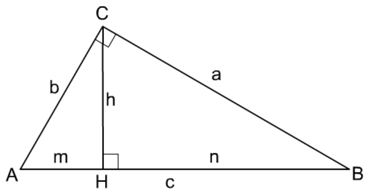
$$\boxed{\frac{a}{sen\alpha} = \frac{b}{sen\beta} = \frac{c}{sen\gamma} = 2r}$$

onde r é o raio da circunferência circunscrita ao triângulo.



DEMONSTRAÇÕES :

1) LEI DOS COSSENOS : Seja o triângulo cuja altura h é perpendicular ao lado c, que



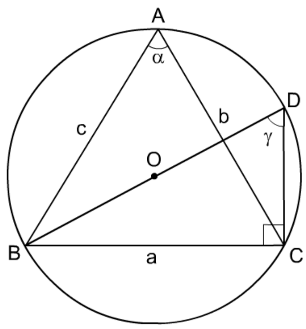
fica por ela dividido em duas partes. Uma destas partes será simbolizada por m, e assim , se aplicarmos o Teorema de Pitágoras aos triângulos AHC e BHC, retângulos em H, teremos :

$b^2 = h^2 + m^2$ e $a^2 = h^2 + (c-m)^2 = h^2 + c^2 - 2cm + m^2$

Se substituirmos convenientemente h e m por b na 2ª igualdade, e nos lembrarmos de que, de acordo com a definição de cosseno, $\cos\alpha = \frac{m}{b}$, logo m = b $\cos\alpha$, então fica verdadeira a seguinte igualdade : $a^2 = b^2 + c^2 - 2cb\cos\alpha$ (cad.)

As demais igualdades desta lei são obtidas pela rotação dos lados e dos ângulos.

2) LEI DOS SENOS : Seja o triângulo ABC qualquer e a circunferência que o



circunscreve. Se traçarmos o diâmetro BD, ficará em D determinado o ângulo γ inscrito no arco determinado na circunferência pelos pontos B e C, assim como o ângulo α . Logo, $\alpha \cong \gamma$ e BCD é um triângulo retângulo, por estar inscrito em uma semicircunferência.

Logo , sen$\gamma = \frac{a}{2r}$, ou $\frac{a}{sen\gamma} = 2.r$. Como $\alpha \cong \gamma$, poderemos escrever $\frac{a}{sen\alpha} = 2r$. Podemos demonstrar a mesma igualdade para os outros lados e respectivos ângulos opostos de modo análogo, e teremos : $\frac{a}{sen\alpha} = \frac{b}{sen\beta} = \frac{c}{sen\gamma} = 2r.$

cqd

TABELA DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS :

Apresentamos a seguir uma tabela que associa a cada ângulo entre 0º e 90º os valores de seus seno, cosseno e tangente, com aproximação até a 4ª casa após a vírgula (décimo-milésimos)

Ângulo	Sen	Cos	Tg
1°	0,0175	0,9998	0,0175
2°	0,0349	0,9994	0,0349
3°	0,0523	0,9986	0,0524
4°	0,0698	0,9976	0,0699
5°	0,0872	0,9962	0,0875
6°	0,1045	0,9945	0,1051
7°	0,1219	0,9925	0,1228
8°	0,1392	0,9903	0,1405
9°	0,1564	0,9877	0,1584
10°	0,1736	0,9848	0,1763
11°	0,1908	0,9816	0,1944
12°	0,2079	0,9781	0,2126
13°	0,2250	0,9744	0,2309
14°	0,2419	0,9703	0,2493
15°	0,2588	0,9659	0,2679
16°	0,2756	0,9613	0,2867
17°	0,2924	0,9563	0,3057
18°	0,3090	0,9511	0,3249
19°	0,3256	0,9455	0,3443
20°	0,3420	0,9397	0,3640
21°	0,3584	0,9336	0,3839
22°	0,3746	0,9272	0,4040
23°	0,3907	0,9205	0,4245
24°	0,4067	0,9135	0,4452
25°	0,4226	0,9063	0,4663
26°	0,4384	0,8988	0,4877
27°	0,4540	0,8910	0,5095
28°	0,4695	0,8829	0,5317
29°	0,4848	0,8746	0,5543
30°	0,5000	0,8660	0,5774
31°	0,5150	0,8572	0,6009
32°	0,5299	0,8480	0,6249
33°	0,5446	0,8387	0,6494
34°	0,5592	0,8290	0,6745
35°	0,5736	0,8192	0,7002
36°	0,5878	0,8090	0,7265
37°	0,6018	0,7986	0,7536
38°	0,6157	0,7880	0,7813
39°	0,6293	0,7771	0,8098
40°	0,6428	0,7660	0,8391
41°	0,6561	0,7547	0,8693
42°	0,6691	0,7431	0,9004
43°	0,6820	0,7314	0,9325
44°	0,6947	0,7193	0,9657
45°	0,7071	0,7071	1,0000

Ângulo	Sen	Cos	Tg
46°	0,7193	0,6947	1,0355
47°	0,7314	0,6820	1,0724
48°	0,7431	0,6691	1,1106
49°	0,7547	0,6561	1,1504
50°	0,7660	0,6428	1,1918
51°	0,7771	0,6293	1,2349
52°	0,7880	0,6157	1,2799
53°	0,7986	0,6018	1,3270
54°	0,8090	0,5878	1,3764
55°	0,8192	0,5736	1,4281
56°	0,8290	0,5592	1,4826
57°	0,8387	0,5446	1,5399
58°	0,8480	0,5299	1,6003
59°	0,8572	0,5150	1,6643
60°	0,8660	0,5000	1,7321
61°	0,8746	0,4848	1,8040
62°	0,8829	0,4695	1,8807
63°	0,8910	0,4540	1,9626
64°	0,8988	0,4384	2,0503
65°	0,9063	0,4226	2,1445
66°	0,9135	0,4067	2,2460
67°	0,9205	0,3907	2,3559
68°	0,9272	0,3746	2,4751
69°	0,9336	0,3584	2,6051
70°	0,9397	0,3420	2,7475
71°	0,9455	0,3256	2,9042
72°	0,9511	0,3090	3,0777
73°	0,9563	0,2924	3,2709
74°	0,9613	0,2756	3,4874
75°	0,9659	0,2588	3,7321
76°	0,9703	0,2419	4,0108
77°	0,9744	0,2250	4,3315
78°	0,9781	0,2079	4,7046
79°	0,9816	0,1908	5,1446
80°	0,9848	0,1736	5,6713
81°	0,9877	0,1564	6,3138
82°	0,9903	0,1392	7,1154
83°	0,9925	0,1219	8,1443
84°	0,9945	0,1045	9,5144
85°	0,9962	0,0872	11,4301
86°	0,9976	0,0698	14,3007
87°	0,9986	0,0523	19,0811
88°	0,9994	0,0349	28,6363
89°	0,9998	0,0175	57,2900

De acordo com esta tabela podemos ver que, por exemplo, sen 31º = 0,5150 , cos 59º = 0,5150 e que tg 26º = 0,4877 , tg 64º = 2,0503, e se multiplicarmos uma pela outra obteremos tg 26º . tg 64º = 0,4877 . 2,0503 = 0,99993 que é aproximadamente igual a 1, pois 26º e 64º são ângulos complementares.

PROPRIEDADES DOS ÂNGULOS SUPLEMENTARES :

Dois ângulos cuja soma é um ângulo raso são chamados suplementares. Ou seja, se α e β são suplementares, então $\alpha+\beta=180^{o}$, e poderemos dizer que $\alpha=180^{o}-\beta$ ou que $\beta=180^{o}-\alpha$.

Embora ainda não possamos demonstrar, afirmamos que :

$\boxed{\text{sen}\ (180^{o}-\alpha) = \text{sen}\,\alpha}$, $\boxed{\cos(180^{o}-\alpha)=-\cos\alpha}$, $\boxed{tg(180^{o}-\alpha)=-tg\,\alpha}$

Estas propriedades serão demonstradas oportunamente.

APLICAÇÃO :

Se usarmos a tabela das funções trigonométricas e as propriedades que acabamos de enunciar, poderemos calcular funções de ângulos que não constam dele

Exemplos :

a) sen 142º = sen (180º-38º) = sen 38º = 0,61566
b) cos 111º = cos (180º-69º) = -cos 69º = -0,35837
c) tg 173º = tg (180º - 7º) = -tg 7º = -0,12278

EXERCICIOS :

1) Obtenha o valor das expressões :
   a) E = 2 sen125º - 4cos98º + tg 179º (Resp-.: 2,17752)

b) E = $\dfrac{sen148º + \cos 92º}{2tg144º}$ (Resp.: -0,34067)

2) Calcule, usando os ângulos notáveis, os valores a seguir , conforme o exemplo :

a) sen135º = sen(180º-45º) = sen45º = $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

b) cos135º

c) tg135º

d) sen 120º

e) tg 120º

f) sen150º

g) cos 150º

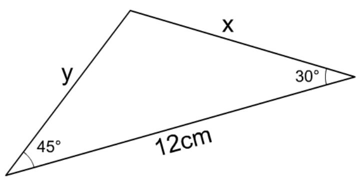
h) tg 150º

Resp.: (b) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; c) -1 ; d) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; e) $-\sqrt{3}$; f) $\dfrac{1}{2}$; g) -$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; h) -$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$) .

<u>EXEMPLOS :</u>

Obtenha os lados desconhecidos dos triângulos :

1)



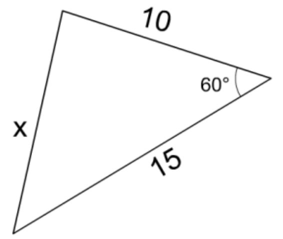
O ângulo desconhecido, que chamaremos de α , é tal que sua soma com os outros ângulos internos do triângulo é 180º. Logo, α = 105º. Se utilizarmos a Lei dos Senos, teremos:

$\dfrac{12}{sen105º} = \dfrac{x}{sen45º} = \dfrac{y}{sen30º}$ Logo: $\dfrac{12}{sen75º} = \dfrac{x}{sen45º} = \dfrac{y}{sen30º} \to \dfrac{12}{0{,}96593} = \dfrac{x}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{y}{\frac{1}{2}}$.

Então : $\dfrac{12}{0{,}96593} = \dfrac{x}{0{,}707107} = \dfrac{y}{0{,}5}$.

Destas proporções obteremos os seguintes valores aproximados ; x = 8,78cm e y =6,21cm

2)



Podemos agora utilizar a Lei dos Cossenos:

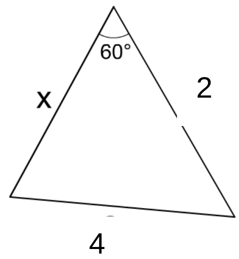
$x^2 = 10^2 + 15^2 - 2.10.15.\cos 60^o$

$x^2 = 100 + 225 - 300.0,5$

$x^2 = 325 - 150 = 175$

$x = \pm\sqrt{175}$,como $x \in R_+$, então $x = 5\sqrt{7}$

3)



Aqui também usaremos a Lei dos Cossenos :

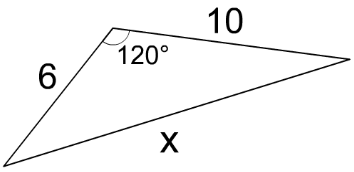
$4^2 = 2^2 + x^2 - 2.2.x.\cos 60^\circ$

$16 = 4 + x^2 - 4.x.0,5$

$x^2 - 2x - 12 = 0$

que é uma equação de 2º grau na variável x, cujas raízes são $x_1 = 2 + \sqrt{13}$ e $x_2 = 2 - \sqrt{13} \notin R_+$. Logo, $x = 2 + \sqrt{13}$

4)



Novamente a Lei dos Cossenos :

$x^2 = 6^2 + 10^2 - 2.6.10\cos 120^o$

$x^2 = 136 - 120.(-\cos 60^o)$

$x^2 = 136 - 120.(-\frac{1}{2}) = 136 + 60 = 196$

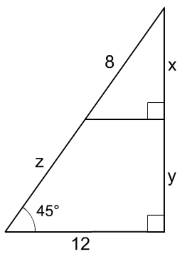
$x = \pm\sqrt{196} = \pm 14$

Como x é positivo, então x = 14

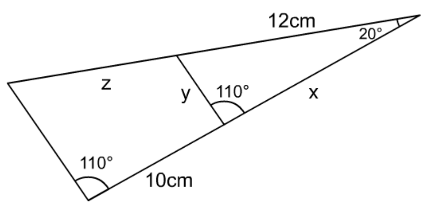
<u>EXERCÍCIOS :</u>

1) Obtenha os valores de x, y e z nas figuras :

a)



b)



Resp. a): ($x = 4\sqrt{2}, y = 12 - 4\sqrt{2}, z = 12\sqrt{2} - 8$)

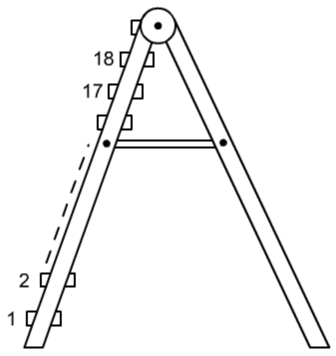
Resp. b): ($x \approx 9,78cm, y \approx 4,37cm, z \approx 12,27cm$)

2) Um homem de 1,90m de altura observa o topo de um prédio com um ângulo de elevação de 45°. Se ele se aproximar 50m do prédio, esse ângulo passara a ser de 60°. Calcule a altura do prédio.
(Resp.: 118,49m)

3) Uma pessoa de 1,70m de altura e à distância de 20m de uma árvore, observa um falcão no seu topo, sob ângulo de elevação de 45°. Por sua vez, o falcão observa uma lebre no chão sob ângulo de 35° com a horizontal. Calcule a distância da lebre à árvore. (Resp.: 31m)

4) Duas estradas retas se cruzam formando ângulo de 36°. Os móveis A e B partem simultaneamente do cruzamento das estradas, cada um deles em uma delas, nos sentidos que formam o maior ângulo assim definido, ambos com velocidades iguais e constantes. Passados 30 segundos da largada, qual será a distância entre eles em função da velocidade comum ?
(Resp: d $\approx 57v$)

5) A escada de pintor ao lado tem 18 degraus, 5,6m de comprimento e o ângulo entre suas pernas é 28°.
Se as distâncias entre os degraus são iguais à do mais baixo ao chão e à do mais alto ao vértice, ache a altura do terceiro degrau.



(Resp.: h $\approx 9cm$)