EAD

TRIGONOMETRIA NO CICLO TRIGONOMÉTRICO

DEFINIÇÃO:

Ângulo

Sejam r e s duas semirretas com mesma origem. Definimos ângulo entre elas a cada uma das duas regiões do plano delimitadas por elas, incluindo as duas semirretas. Normalmente utilizamos letras gregas para representar ângulos.

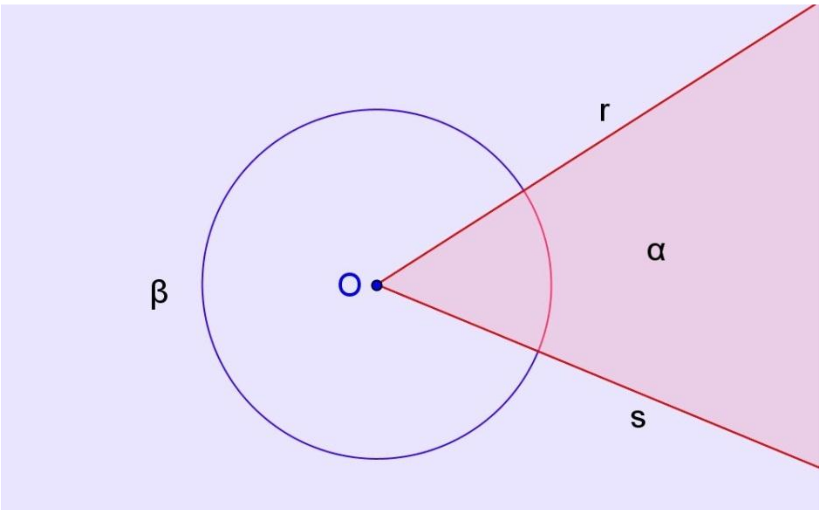



figura 1

Fica convencionado que o ângulo entre duas semirretas será sempre o menor deles. Logo, na figura 1, o ângulo entre as semirretas t e s será α. A figura nos mostra também que $\alpha + \beta$ é igual a um ângulo de volta inteira (ou de uma volta).

Unidades de medida de ângulos: Para melhor trabalharmos com os ângulos, devemos saber medi-los, e para tanto, definimos as seguintes unidades:

GRAU: Se dividirmos o ângulo de uma volta, independentemente do tamanho de seus lados, em 360 partes iguais, cada uma delas representará $1/360$ desse ângulo e será chamada 1 grau, e sua representação será 1º. O grau é subdividido em 60 minutos (60'), e cada um desses minutos é, por sua vez, subdividido em 60 segundos (60"). Assim, o ângulo de 1º pode ser subdividido em 3600".

Logo, a medida do ângulo de volta inteira é 360º, não importando o quanto a semirreta r for prolongada.

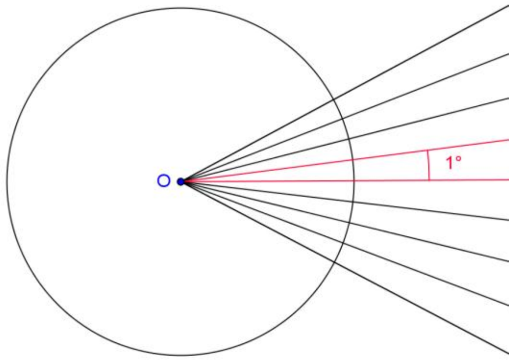
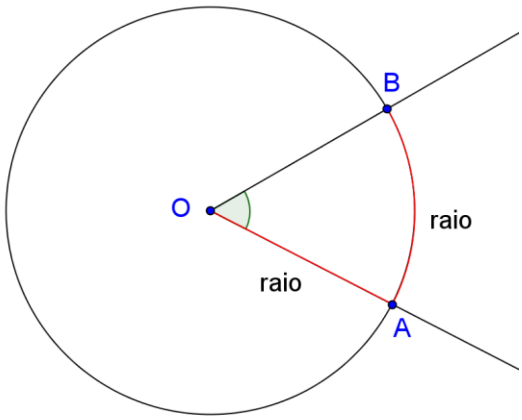



figura 2

<u>RADIANO:</u> Esta unidade de medida de ângulos, e também de arcos, tem como símbolo $1\,rad$. Dizemos que um arco mede $1\,rad$ se o seu comprimento for igual ao raio da circunferência onde este arco está definido.

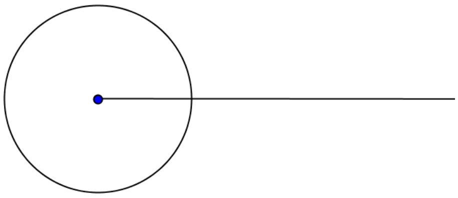
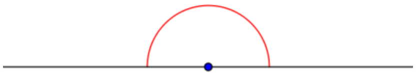
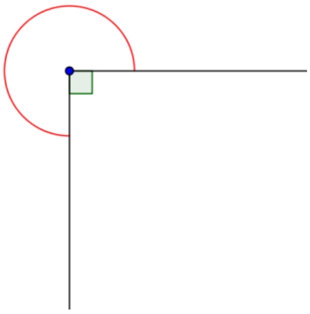
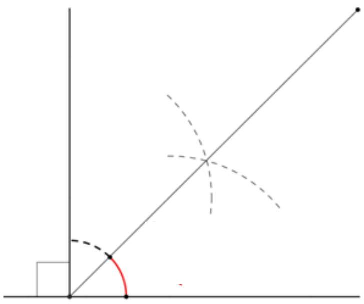



$$\alpha = arco\ \widehat{AB} = 1\,rad$$

Então, a medida do ângulo ou arco de uma volta será igual a $2\pi\,rad$ pois, como já sabemos, o comprimento da circunferência inteira é obtido pela expressão $C = 2\pi r$.

Uma terceira um idade de medida de ângulo, o Grado, não será usada neste texto.

Podemos agora montar então uma tabela de medidas de alguns ângulos importantes nas que acabamos de definir:

| Ângulo | Figura | Graus | Radianos |
|---|---|---|---|
| Volta inteira |  | 360 | $2\pi$ |
| Meia-volta |  | 180 | $\pi$ |
| Reto |  | 90 | $\frac{\pi}{2}$ |
| 3/4 de volta |  | 270 | $\frac{3\pi}{2}$ |
| 1/8 de volta |  | 45 | $\frac{\pi}{4}$ |

Vemos que assim é possível transformar as medidas de um ângulo de uma unidade para a outra se obedecermos a razão $\frac{180°}{\pi}$, conforme os exemplos a seguir :

EXEMPLOS:

1) Transforme em radiano o ângulo de 30º.

Devemos utilizar a razão que acabamos de escrever para montar a proporção conveniente: $\frac{180°}{\pi} = \frac{30°}{\alpha}$, donde podemos ter a equação: $180° \cdot \alpha = 30° \cdot \pi$, e assim podemos calcular o valor de $\alpha$ : $\alpha = \frac{30°\pi}{180°} = \frac{\pi}{6}\ rad.$

2) Escreva em graus o ângulo de $\frac{7\pi}{5}\ rad$

A proporção agora será: $\frac{180°}{\pi} = \frac{\alpha}{\frac{7\pi}{5}}$. Então: $\pi \cdot \alpha = 180° \cdot \frac{7\pi}{5}$, e então escreveremos que: $\alpha = \frac{180° \cdot 7\pi}{\pi \cdot 5}$, e finalmente teremos: $\alpha = 252°$

EXERCÍCIOS:

1) Efetue as transformações solicitadas:

a) $36°$ para radianos
b) $\frac{5\pi}{6}$ para graus
c) $15°$ para radianos
d) 3 $rad$ para graus
e) $1°$ para radianos
f) $\frac{4}{3} rad$ para graus

Resp.: ( $a)\ \frac{\pi}{5}\ , b)\ 150º\ , c)\ \frac{\pi}{12} rad\ ,\ d)\ \frac{540º}{\pi}\ ,\ e)\ \frac{\pi}{180}\ ,\ f)\ \frac{240º}{\pi}$ )

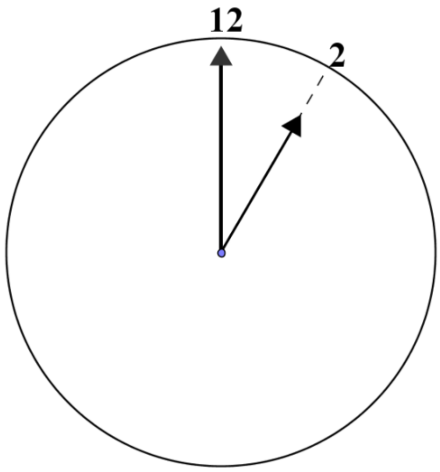
OBSERVAÇÃO:

Todos os relógios, não digitais, possuem ponteiros: O maior deles mostra as horas, o menor, os minutos, e há um bem fininho para os segundos. As horas no mostrador estão numeradas de 1 a 12, o ângulo central entre dois números consecutivos mede $\frac{360°}{12} = 30$ e o ângulo entre duas marcações de minutos consecutivas é $\frac{30°}{5} = 6$.

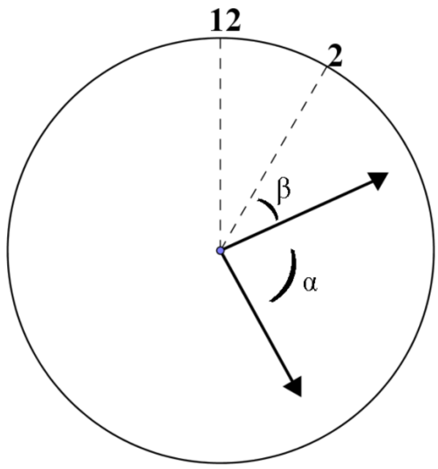
EXEMPLO:

Calcular o ângulo entre os ponteiros de um relógio às $14h28$.

Para resolvermos qualquer problema deste tipo, devemos voltar no tempo até a última hora inteira que antecedeu as $14h28$. Este horário é $14h$, conforme a figura a seguir:




Decorridos 28 minutos após este horário inteiro, o ponteiro das horas terá se afastado do número 2 conforme um ângulo $\beta$ e o ponteiro dos minutos estará exatamente sobre a terceira marcação de minutos após o número 5. Observe a figura:




Nesta última figura, estamos chamando de $\alpha$ ao ângulo solicitado, e podemos facilmente perceber que: $\alpha = 120º - 12º - \beta$.

O ângulo $\beta$ é o quanto o "ponteirinho" andou em 28 minutos, e podemos obtê-lo se utilizarmos a seguinte proporção: $\dfrac{30º}{60\,\text{min}} = \dfrac{\beta}{28\,\text{min}}$. Então: $\beta = \dfrac{30º.28\,\text{min}}{60\,\text{min}} = 14º$

Portanto: $\alpha = 120º - 12º - 14º = 94º$

<u>EXERCÍCIOS:</u>

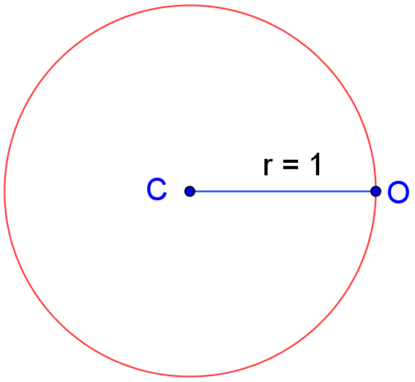
Calcular o ângulo entre os ponteiros do relógio nos seguintes horários:

1) $13h21min$ , 2) $19h14min$ , 3) $12h15min$ , 4) $12h45min$ , 5) $10h33min$

Resp.: ( 1) 130º 30’, 2) 17º , 3) 82º 30’ , 4) 112º 30’ , 5) 118º 30’)

DEFINIÇÃO:

Ciclo Trigonométrico ou simplesmente Ciclo: Qualquer circunferência cujo raio é considerado unitário, que possua um ponto considerado como Origem e m sentido considerado como positivo (normalmente o anti-horário) é denominada Ciclo Trigonométrico.

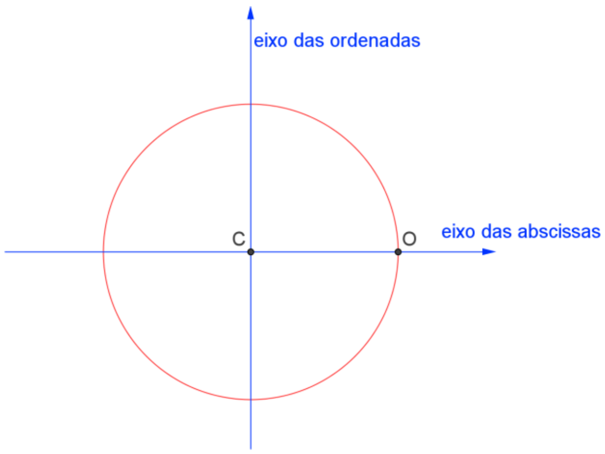



C: Centro

O: Origem

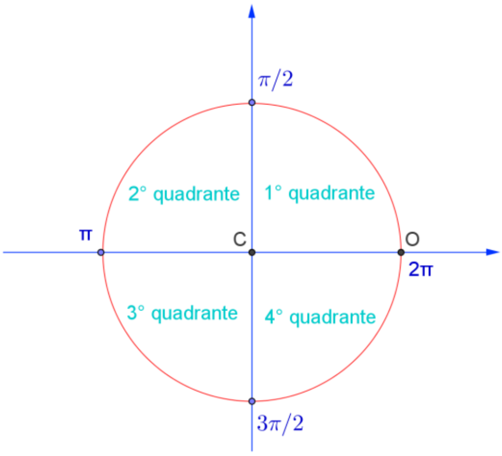
raio r = 1

É costume montarmos um sistema cartesiano ortogonal com origem no Centro do Ciclo e o eixo das abscissas passando pelo ponto O, conforme a figura a seguir:




Este sistema cartesiano, como podemos notar, divide o Ciclo em quatro partes denominadas Quadrantes, numeradas a partir do ponto O e obedecendo o sentido positivo de percurso.

É importante saber que os eixos das abscissas e das ordenadas não fazem parte de nenhum dos Quadrantes. Assim, se um ângulo central $\alpha$ do ciclo está no 1º Quadrante, ele obrigatoriamente será tal que $0° < \alpha < 90°$, ou ainda $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Se ele estiver no 2º Quadrante poderemos afirmar que $90° < \alpha < 180°$ ou $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Se fizer parte do 3º Quadrante deveremos ter $180° < \alpha < 270°$ ou $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, e, finalmente, se $\alpha$ pertencer ao 3º Quadrante, este ângulo será tal que $270° < \alpha < 360°$, ou, em radianos, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.




Porém, um ângulo pode dar mais que uma volta no Ciclo. Para sabermos a que Quadrante pertence um ângulo como este, ou até um ângulo negativo (que se move no sentido horário), deveremos obter sua menor determinação, que vem a ser o que resta dele após retirarmos as voltas inteiras que ele dá no Ciclo. O Quadrante onde esta menor determinação estiver será aquele onde estará o ângulo.

EXEMPLOS:

Obtenha a menor determinação dos seguintes ângulos e o Quadrante ao qual pertencem.

1) 3800º

Se dividirmos 3800º por 360º, obteremos quociente 10 e resto 200º, e isto significa que 3800º = 10. 360º + 200º, ou seja: são 10 voltas completas no Ciclo e 200º de menor determinação. Logo, como 200º pertence ao 3º Quadrante, pois 180º < 200º < 270º, afirmamos que 3800º pertence ao 3º Quadrante.

2) - 4530º

Do mesmo modo que no exemplo anterior, temos:

- 4530º = - 12. 360º + (- 210º) = -12. 360º -360º + 360º - 210º = - 13. 360º + 150º.

Isto é: Este ângulo significa 13 voltas completas no sentido horário no Ciclo e 150º de menor determinação, que deve ser sempre maior ou igual a zero. Como 150º está no 2º Quadrante, pois $90° < 150° < 180°$, então o ângulo de $-\ 4530°$ pertence ao 2º Quadrante.

3) $\frac{73\pi}{5}\ rad$

$\frac{73\pi}{5} rad = \frac{70\pi}{5} rad + \frac{3\pi}{5} rad = 7 \cdot (2\pi\ rad) + \frac{3\pi}{5} rad$. Isto quer dizer que este ângulo dá 7 voltas completas no Ciclo e possui menor determinação igual a $\frac{3\pi}{5} rad$, e como sabemos que $\frac{\pi}{2} < \frac{3\pi}{5} < \pi$, afirmamos que este ângulo faz parte do 2º Quadrante.

4) $-\frac{142\pi}{0} rad$

Podemos perceber com facilidade que: $-\frac{142\pi}{9} = -\frac{126\pi}{9} + \left(-\frac{16\pi}{9}\right) = -14\pi - \frac{16\pi}{9} + 2\pi = 16\pi + \frac{2\pi}{9} = -8 \cdot (2\pi) + \frac{2\pi}{9}$

Este ângulo, portanto, descreve 8 voltas no Ciclo em sentido horário e sua menor determinação é $\frac{2\pi}{9}$. Como $0 < \frac{2\pi}{9} < \frac{\pi}{2}$, podemos ver que o ângulo inicial está no 1º Quadrante.

OBSERVAÇÃO: É importante perceber que, para que o quociente represente o número inteiro de voltas no Ciclo, ele deve um número par vezes $\pi$.

5) $630°$

A divisão por $360°$ nos mostra que $630° = 1 \cdot 360° + 270°$, que significa que este ângulo efetua uma volta inteira no Ciclo no sentido anti-horário e ainda tem uma menor determinação de $270°$. Porém, $270°$ não se encontra em nenhum dos quadrantes, mas sobre o eixo y. Logo, $630°$ está sobre o eixo y, e não pertence a nenhum quadrante.

EXERCÍCIOS:

Obtenha a menor determinação dos seguintes ângulos e verifique o quadrante ao qual pertencem:

a) $844°$, b) $844\pi\ rad$, c) $1237°$, d) $2670°$, e) $-9860°$,

f) $-432°$, g) $\frac{38\pi}{4} rad$, h) $\frac{111\pi}{8} rad$, i) $-\frac{135\pi}{4} rad$ , j) $-\frac{175\pi}{13} rad$.

Resp: (a) 124º e 2ºQ, b) $0\ rad$ e eixo x, c) 157º e 2ºQ, d) 150º e 2ºQ e) 220º e 3ºQ,

f) 288º e 4ºQ, g) $\frac{3\pi}{2}$ rad e eixo y, h) $\frac{15\pi}{8}$ e 4ºQ, i) $\frac{5\pi}{4}$ e 2ºQ, j) $\frac{7\pi}{13}$ e 2º Q.)

DEFINIÇÃO:

ARCOS CONGRUENTES:

Se dois arcos de um mesmo Ciclo Trigonométrico possuírem mesmas Origens e mesmas Extremidades, eles são chamados congruentes, não importando o número de voltas que eles deem no Ciclo.

Deste modo, todos os arcos ou ângulos escritos na forma $\alpha = m + k.2\pi$, com medidas em radianos, ou ainda $\alpha = m + k \cdot 360°$ com medidas em graus, são congruentes a um dado arco de medida m, em radianos, com 0 $rad < m < 2\pi\ rad$ , ou $0° < m < 360°$, se em graus.

EXPRESSÕES GERAIS DE ARCOS:

Imagine um hexágono regular inscrito no Ciclo, com um de seus vértices coincidindo com a Origem do Ciclo. Seus vértices A,B,C,D,E,F nessa ordem dividirão esse Ciclo Trigonométrico em seis arcos congruentes, cada arco definindo um ângulo central de 60° ou $\frac{\pi}{3} rad.$

Podemos perceber que os ângulos na forma $\alpha = 60°k$ ou $\alpha = k \cdot \frac{\pi}{3}$, onde $k \in \mathbb{Z}$, serão precisamente aqueles que determinarão os vértices do hexágono citado.

Se, em vez de um hexágono, tivermos um octógono com um dos vértices coincidindo com a Origem do Ciclo, os 8 ângulos centrais que determinam as posições dos vértices deverão obedecer a forma $\alpha = 45°k$ ou $\alpha = k \cdot \frac{\pi}{4}$, com $k \in \mathbb{Z}$ .

O ângulo $\alpha$ expresso pela igualdade $\alpha = 30° + 90°$ onde $k \in \mathbb{Z}$, como podemos perceber, está no Primeiro Quadrante se $k = \cdots - 8, -4, 0, 4, 8, 12, \cdots$. Ele estará no Segundo Quadrante se $k = \cdots - 7, -3, 1, 5, 9, 13, \cdots$. Ele pertencerá ao Terceiro Quadrante se $k = \cdots - 10, -6, -2, 2, 6, 10, \cdots$, e, finalmente, ele fará parte do Quarto Quadrante se $k = \cdots - 9, -5, -1, 3, 7, 11, \cdots$

EXERCÍCIOS:

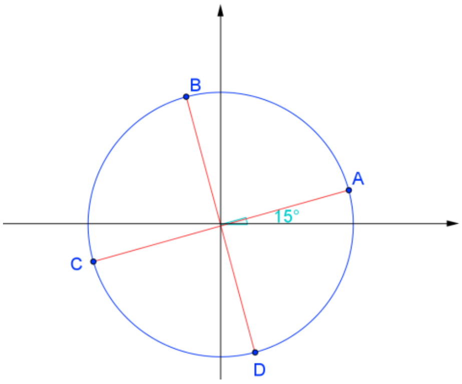
1) Obtenha os quadrantes aos quais pertencem os seguintes ângulos , se $k \in \mathbb{Z}$:

a) $\alpha = \frac{\pi}{10} + k\pi$, b) $k = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$, c) $\beta = -\frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi$, d) $\gamma = 120° + k \cdot 60°$

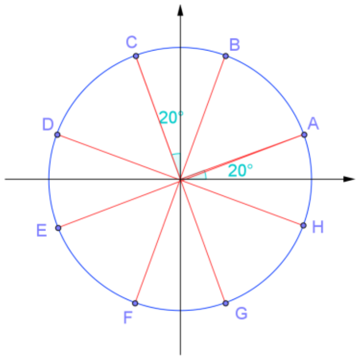
Resp.:

| Quadrant | **1º** | **2º** | **3º** | **4º** | **Eixo x** |
|---|---|---|---|---|---|
| Exerc. A | ...-4,-2,0,2,4,6, | ------ | ...-3,-1,1,3,5... | --- | ----- |
| Exerc. B | ...,-8,-4,0,4,8,.. | ...,-7,-3,1,5,9,.... | ...,-6,-2,2,6,10,.. | ..-5,-1,3,7,11,. | ----- |
| Exerc. C | -------- | ------- | ..,-2,-1,0,1,2,3,.. | ------- | ----- |
| Exerc. D | ...,-7,-1,5,11,... | ...,-12,-6,0,6,12,. | ...,-10,-4,2,8,14, | ...,-9,-3,3,9,15 | ...,-5,-2,1,4,7,. |

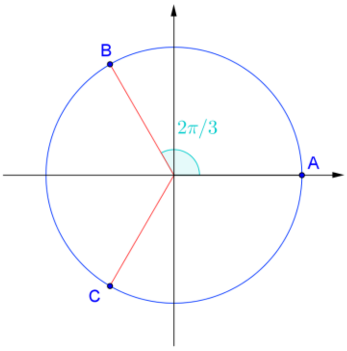
2) Escreva a igualdade que representa os pontos marcados nos Ciclos :




a)




b)

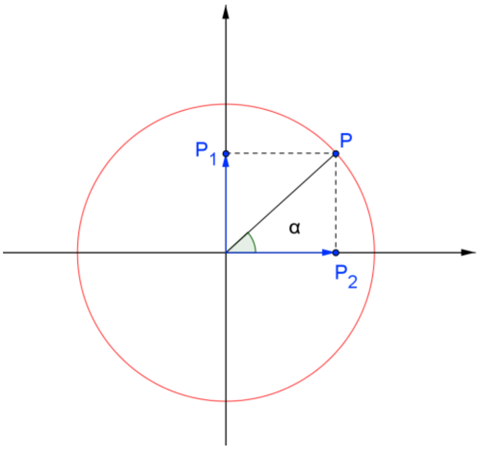



c)

Resp.:( a) $\alpha = 15° + 90°.k$, b) $\alpha = 20° + 45°.k$, c) $\alpha = k.\frac{2\pi}{3}$, (em todos, $k \in Z$))

<u>DEFINIÇÕES:</u>

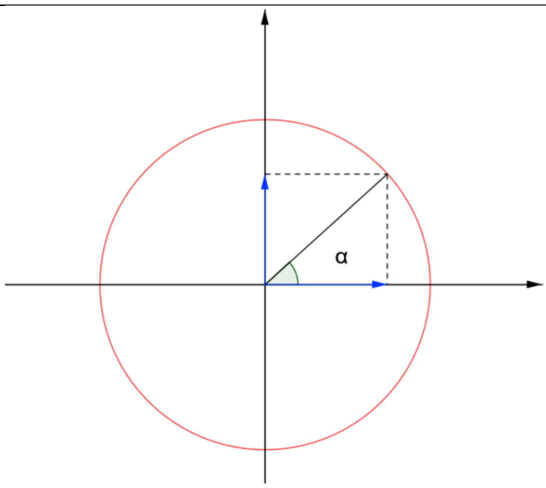
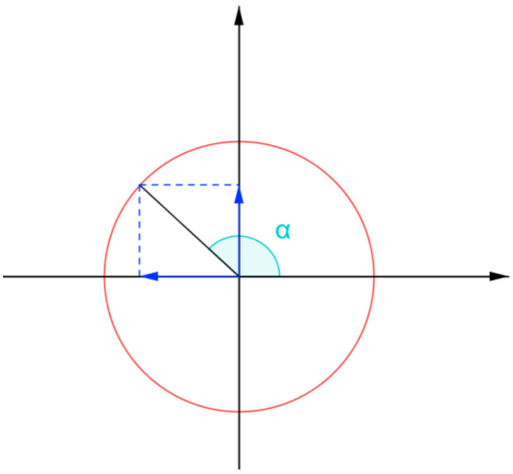
Dado um ponto $P(p_1, p_2)$ no Ciclo Trigonométrico, fica determinado em consequência um único ângulo central $\alpha$ para o qual definimos as funções seno e cosseno do seguinte modo:

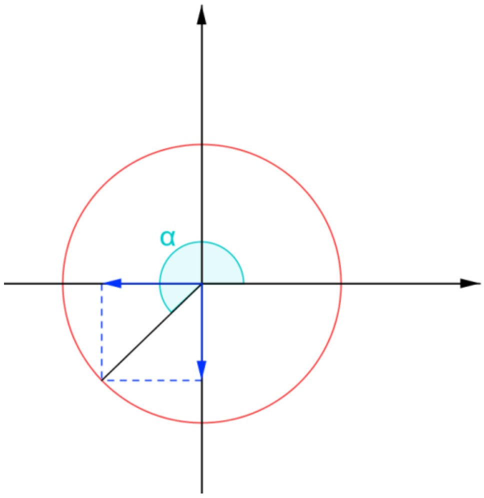
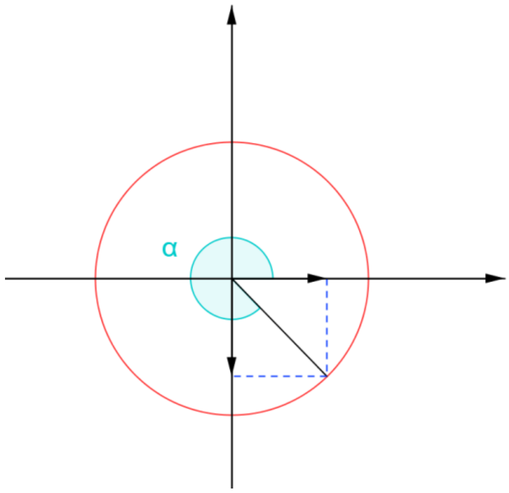



SENO do ângulo $\alpha$ é a ordenada de P, ou seja: $sen\ \alpha = p_1$.

COSSENO do ângulo $\alpha$ é a abscissa de P: $\cos\alpha = \ p_2$

Analisando as figuras a seguir, poderemos perceber que se o ângulo estiver no 1º Quadrante, tanto o seu seno como o cosseno serão positivos. Porém, se o ângulo estiver no 2º Quadrante, o seno continuará positivo, mas o cosseno será negativo. Se no 3º Quadrante, ambos, seno e cosseno serão negativos, e, por fim, se o ângulo pertencer ao 4º, o seno será negativo e o cosseno, positivo.

| 1º Quadrante | 2º Quadrante |
|---|---|
|   |   |
| $sen\ \alpha > 0$<br>$\cos\alpha > 0$ | $sen\ \alpha > 0$<br>$\cos\alpha < 0$ |

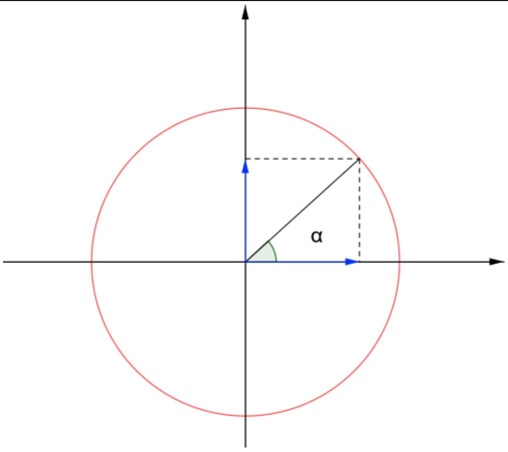
| 3º Quadrante | 4º Quadrante |
|---|---|
|  |  |
| $sen\ \alpha < 0$<br>$\cos\alpha < 0$ | $sen\ \alpha < 0$<br>$\cos\alpha > 0$ |

Estas figuras nos permitem, com um pequeno esforço, perceber que a tabela a seguir é verdadeira:

| Ângulo | 0° (0 rad) | 90° $(\frac{\pi}{2} rad)$ | 180° $(\pi\ rad)$ | 270° $(\frac{3\pi}{2} rad)$ | 360° $(2\pi\ rad)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Seno | 0 | 1 | 0 | -1 | 0 |
| Cosseno | 1 | 0 | -1 | 0 | 1 |

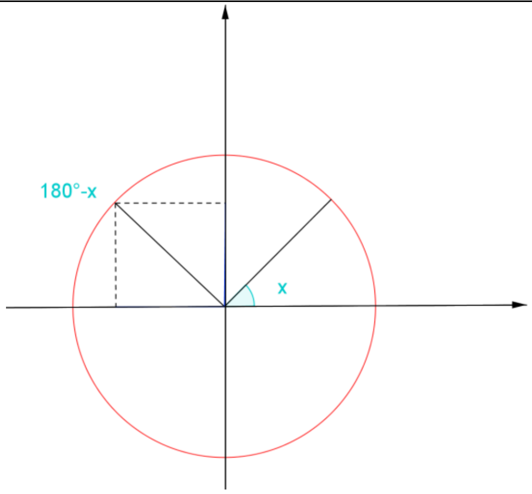
Se supusermos que um ângulo x está no 1º Quadrante, então o ângulo $\pi - x$ estará no 2º, $\pi + x$ pertencerá ao 3º , e $2\pi - x$ ou simplesmente $-x$ estará no 4º Quadrante.

Por isso, poderemos escrever que : $sen\ x > 0$, $\cos x > 0$, $sen\ (\pi - x) > 0$, $sen\ (\pi + x) < 0$, $\cos(\pi + x) < 0$, $sen\ (-x) < 0$ e $\cos(-x) > 0$. Verifique as próximas figuras:



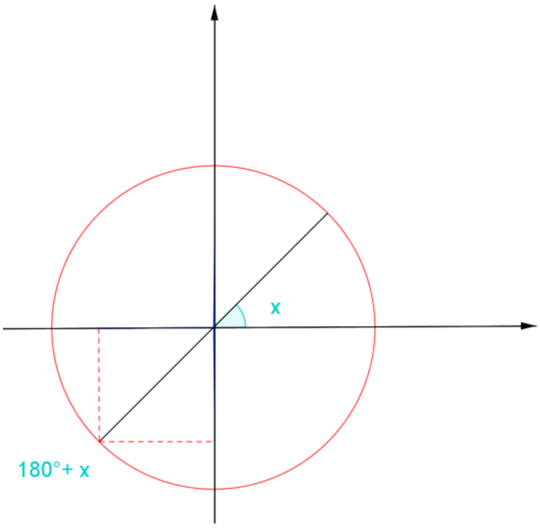

$sen\, x > 0$

$\cos x > 0$



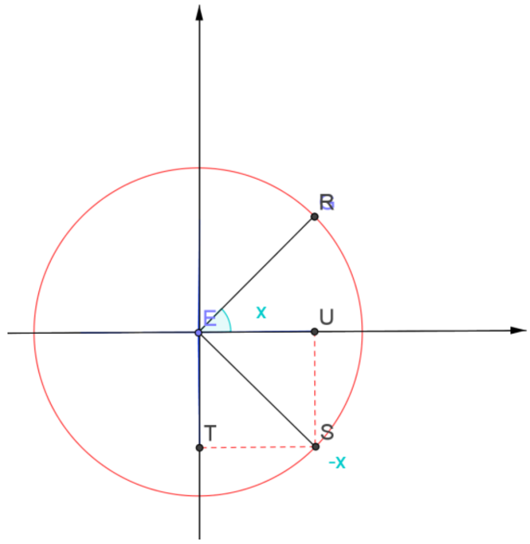

$sen(180° - x) > 0$

$\cos(180° - x) < 0$




$sen(180° + x) < 0$

$cos(180° + x) < 0$

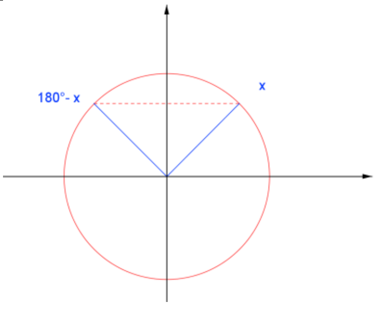


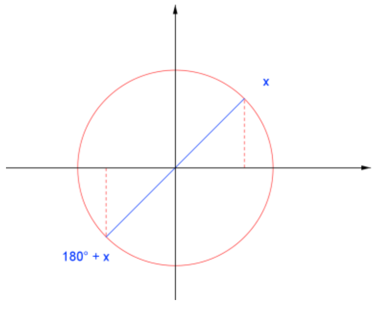

$sen\, (-x) < 0$

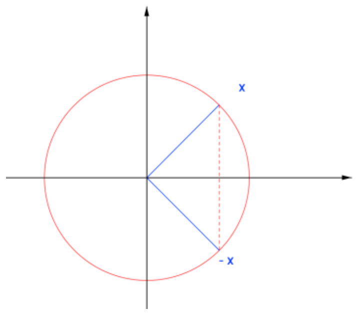
$\cos(-x) > 0$

Podemos ainda perceber que os vários valores de seno e cosseno nos diversos quadrantes podem se relacionar com valores do 1º Quadrante que já estão tabelados.

Assim, se analisarmos as figuras a seguir, poderemos estabelecer o seguinte:



| | | |
|---|---|---|
| $sen\ (180° - x) = sen\ x$<br>$\cos(180° - x) = -\cos x$ | $sen(180° + x) = -senx$<br>$\cos(180° + x) = -\cos x$ | $sen\ (-x) = -sen\ x$<br>$\cos(-x) = \cos x$ |

EXEMPLOS:

1) Calcular os valores de seno e cosseno pedidos a seguir :
   a) $sen\ 207° = sen(180° + 27°) = -sen27° = -0{,}454$
   b) $\cos 284° = \cos(360° - 76°) = cos76° = 0{,}242$
   c) $\cos(-34°) = \cos 34° = 0{,}829$
   d) $sen\ \left(\frac{5\pi}{3}\right) = sen\ \left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -sen\ \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
   e) $\cos\frac{5\pi}{4} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
   f) $sen\ 3752° = sen\ 152° = sen\ (180° - 28°) = sen\ 28° = 0{,}469$

2) Simplificar as expressões:
   a) $E = sen\ (x + 540°) - 2\cos(1800° - x) + sen\ (x - 900°)$
   b) $E = \cos(x + 6\pi) - 3sen\ (8\pi - x) + \cos(x - 5\pi)$

EXERCÍCIOS:

1) Calcular:

a) $sen\ 2718°$ b) $\cos(-34586°)$ c) $\cos 6{,}2\pi$ d) $sen\ (-347\pi)$ e) $\cos 9\pi$

Resp.:( a) -0,309 , b) 0,899 , c) d) 0,809 , d) zero , e) -1 )

2)Simplificar a expressão:

a) $E = sen\ (x - \pi) + sen\ (x + \pi) - sen\ (2\pi - x) + sen\ (2\pi + x)$.

b) $E = \frac{sen\ 2x + sen\ 4x}{sen\ 3x - sen\ 5x}$, para $x = 30°$.

c) $E = 2\cos x - \cos(2x) + (2\ sen\ x)^2$, para $x = \frac{\pi}{3}$.

d) $E = \left(sen\ \frac{\pi}{2}\right) + \left(sen\ \frac{\pi}{2}\right)^2 + \left(sen\ \frac{\pi}{2}\right)^3 + \left(sen\ \frac{\pi}{2}\right)^4$.

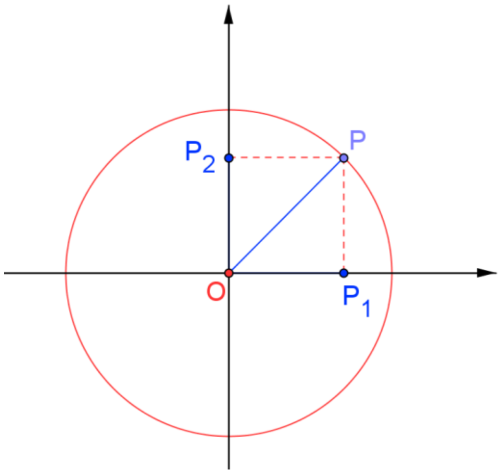
e) $E = \frac{sen\ (x+180°) + \cos(x-180°)}{-\cos(x+180°) - sen\ (x-180°)}$

Resp.: (a) 0 , b) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ , c) 4,5 , d) 4 , e) -1)

DEFINIÇÃO:

FUNÇÕES SENO E COSSENO DE UM ARCO

Seja $\alpha$ um número real que representa a medida de um ângulo central no Ciclo Trigonométrico medido a partir da Origem, e que assim determinará um único ponto $P(p_1, p_2)$, conforme a figura.

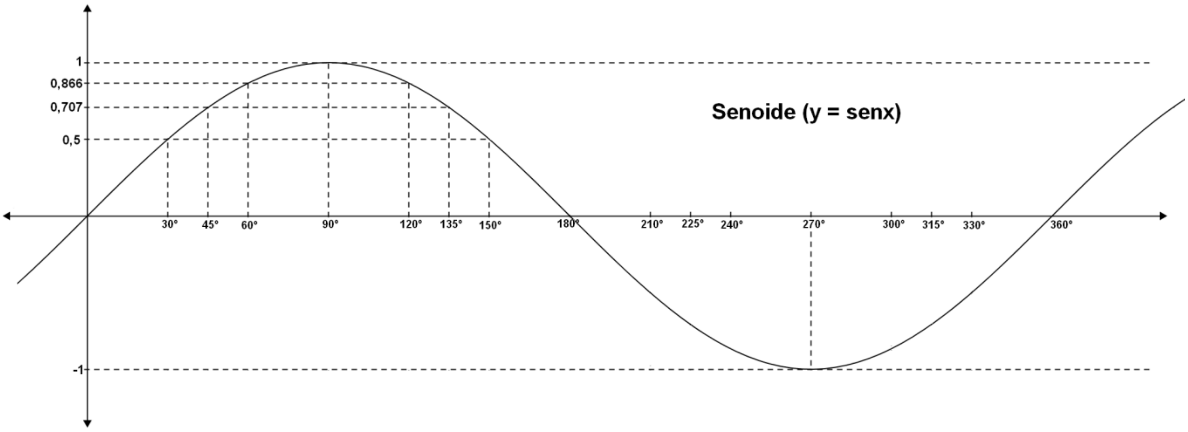


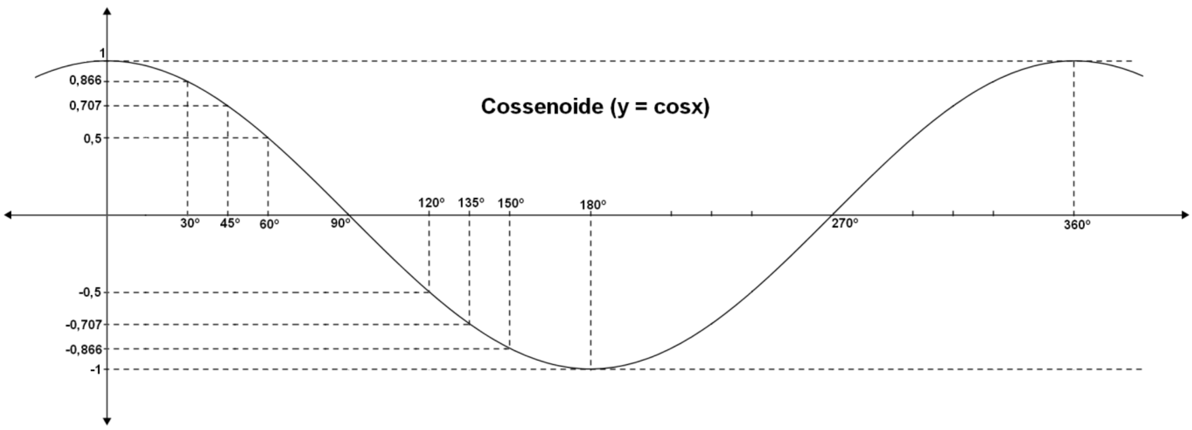

Com este pressuposto, definimos as funções seno e cosseno de um ângulo do seguinte modo, porém utilizando a letra x para a variável independente que representa o ângulo, e y, ou f(x), para as funções. O eixo das abscissas pode ser chamado de eixo dos cossenos e o das ordenadas de eixo dos senos.

Assim temos as funções y = sen x e y = cos x que associam a cada valor do ângulo x o seu seno ou o seu cosseno, respectivamente. As duas funções de R em R, para serem bem entendidas devem ter suas representações gráficas desenhadas, e, para tanto, pode ser conveniente montar a tabela a seguir,com os ângulos em graus:

| $\alpha$ | 0 | 30 | 45 | 60 | 90 | 120 | 135 | 150 | 180 | 210 | 225 | 240 | 270 | 300 | 315 | 330 | 360 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *sen* | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | -1 | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | 0 |
| *cos* | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | -1 | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 |

Os valores aproximados dos apresentados na tabela são: $\frac{1}{2} = 0{,}500$; $\frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}707$; $\frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}866$. Se representarmos graficamente os pontos dessa tabela, obteremos as seguintes representações gráficas para as funções $y = sen\ x$ e $y = \cos x$:




Observando os dois gráficos que acabamos de traçar, vemos que ambas as funções variam de -1 até +1, o que significa que as suas Imagens são iguais ao intervalo fechado $[-1{,}1]$. Podemos ainda notar que os gráficos se repetem, formando uma curva que sobe e desce indefinidamente. Tais curvas e suas funções, que se repetem deste modo, são chamadas Periódicas, e seu Período é igual à diferença entre duas abscissas mais próximas para as quais as citadas funções possuem o mesmo valor e a mesma inclinação. No caso da função $y = sen\ x$, podemos calcular o Período como sendo igual à diferença $P = 360° - 0°\ 360°$, ou ainda $P = 2\pi - 0 = 2\pi$ . Vemos também que a função $y = \cos x$ apresenta o mesmo período. É possível perceber ainda que estas funções existem para qualquer valor real da variável x, e isto significa que o seu Domínio é R, conjunto dos Números Reais.

<u>EXEMPLOS:</u>

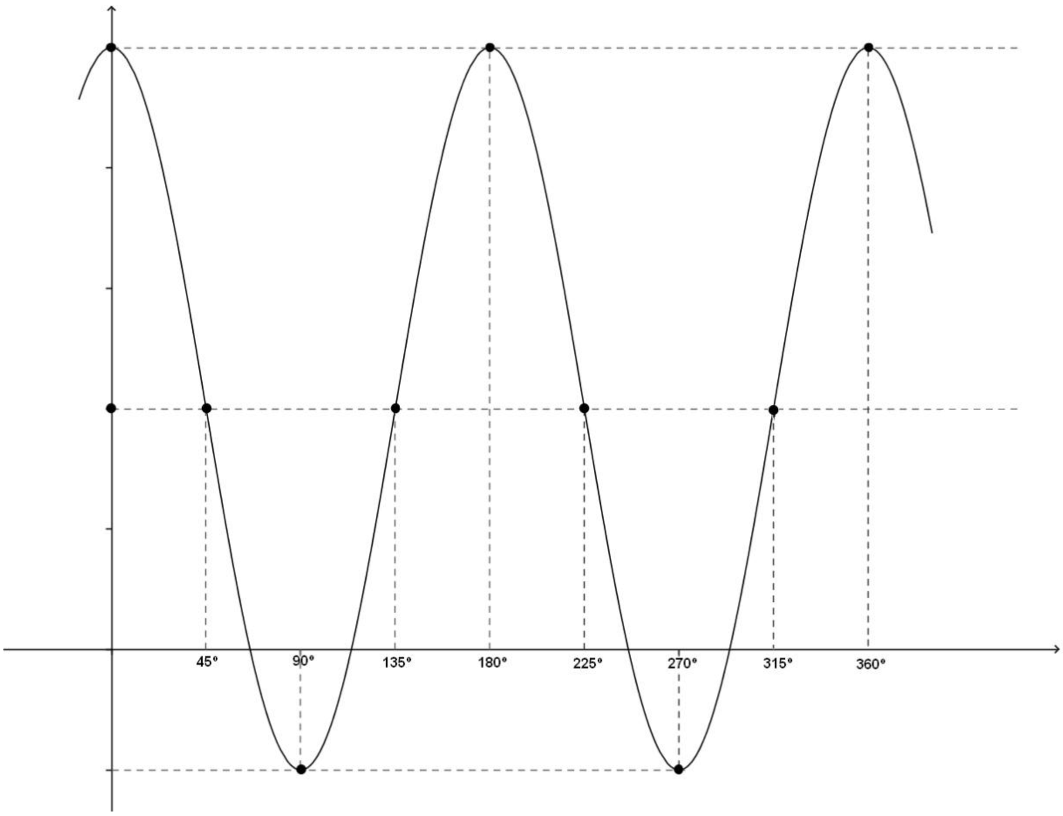
Representar graficamente as funções, e informar Domínio, Imagem e Período:

1) $f(x) = 2 + 3.cos\,2x$

a) Tabela :

| $x$ | $2x$ | $cos\,2x$ | $3.cos\,2x$ | $2 + 3.cos\,2x$ |
|---|---|---|---|---|
| 0º | 0º | 1 | 3 | 5 |
| 45º | 90º | 0 | 0 | 2 |
| 90º | 180º | -1 | -3 | -1 |
| 135º | 270º | 0 | 0 | 2 |
| 180º | 360 | 1 | 3 | 5 |
| 270° | 540º | -1 | -3 | -1 |
| 360º | 720º | 1 | 3 | 5 |

b) Gráfico:




c) Se observarmos o gráfico veremos que:

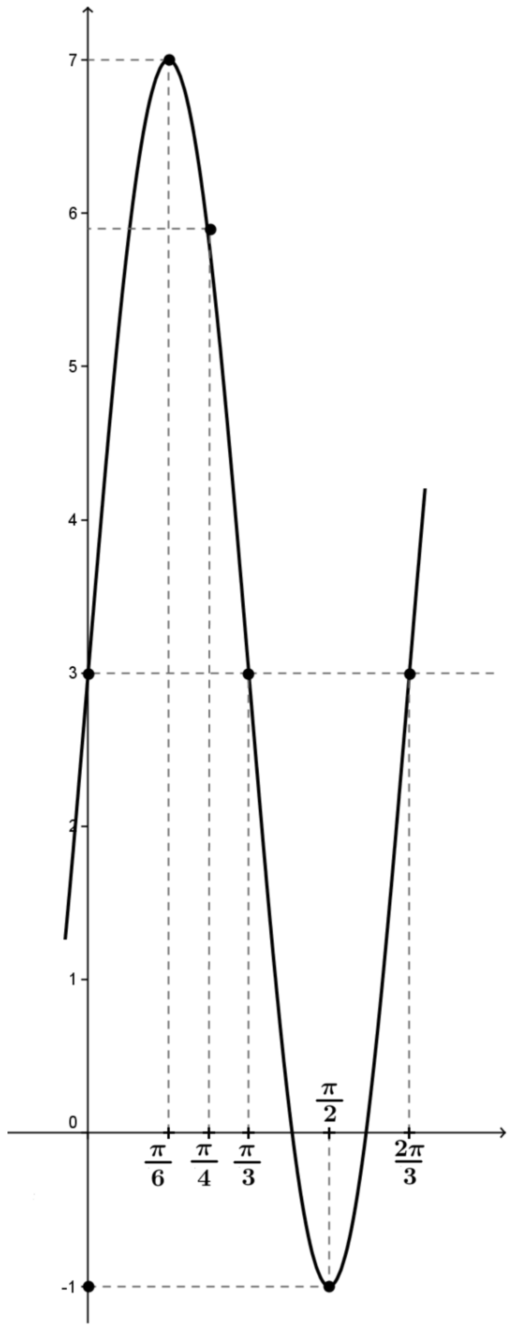
$Dom\,(f(x)) = \mathbb{R}$, $Im\,(f(x)) = [-1{,}5]$, Período = 180° ou $\pi\,rad$

2) $y = 3 - 4.sen\,(3x - \pi)$

a) Tabela:

| $x$ | $3x$ | $3x - \pi$ | $sen(3x - \pi)$ | -4.sen(3x-π) | 3-4sen(3x-π) |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | -π | 0 | 0 | 3 |
| $\pi/6$ | $\pi/2$ | $-\pi/2$ | -1 | 4 | 7 |
| π/4 | 3π/4 | -π/4 | -0,760 | 3,040 | 6,040 |
| π/3 | π | 0 | 0 | 0 | 3 |
| π/2 | 3π/2 | π/2 | 1 | -4 | -1 |
| 2π/3 | 2π | π | 0 | 0 | 3 |

b) Gráfico:



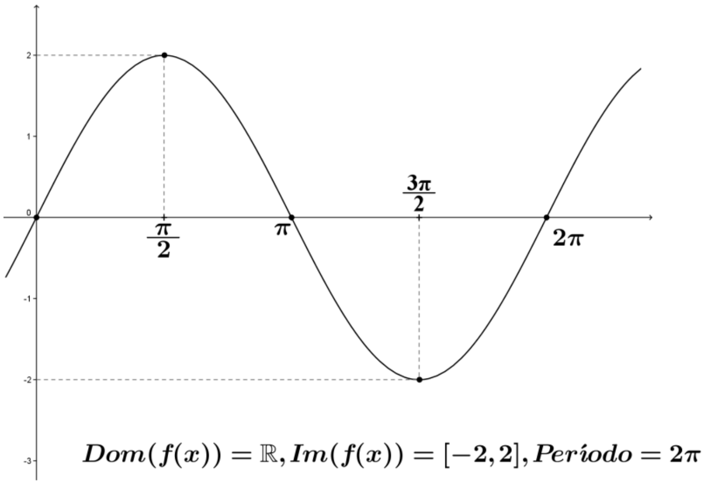
c) $Dom\left(f(x)\right) = \mathbb{R}$; $Im\left(f(x)\right) = [-1{,}7]$; Período = $\frac{2\pi}{3}\ rad$ ou 120°

EXERCÍCIOS:

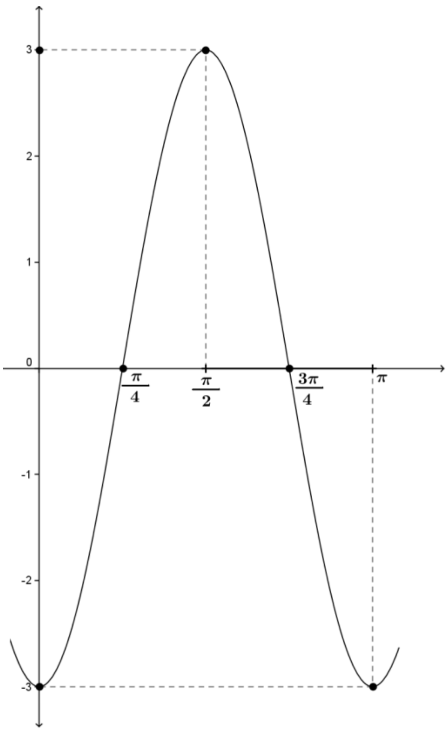
Representar graficamente as funções e informar sua Imagem e seu Período:

a) $y = 2\ sen\ x$ b) $f(x) = -3\cos(2x)$ c) $y = sen\ (3x - \pi)$

d) $y = \frac{3}{4}\cos(\pi - x)$ e) $f(x) = -4\ sen\ \frac{x+\pi}{2}$

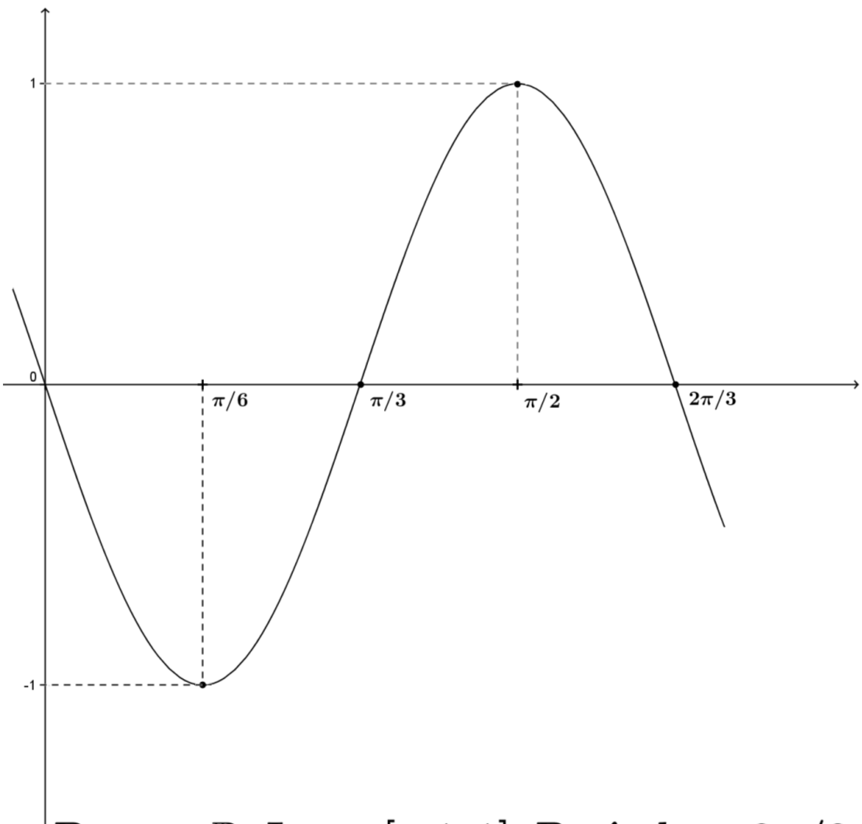



Resp.: a)



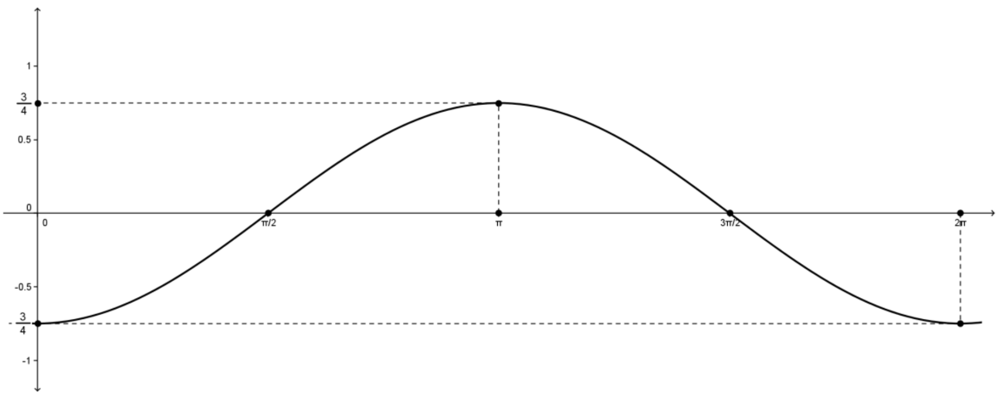

$Dom(f(x)) = \mathbb{R}, Im(f(x)) = [-3, 3], Período = \pi$

b)

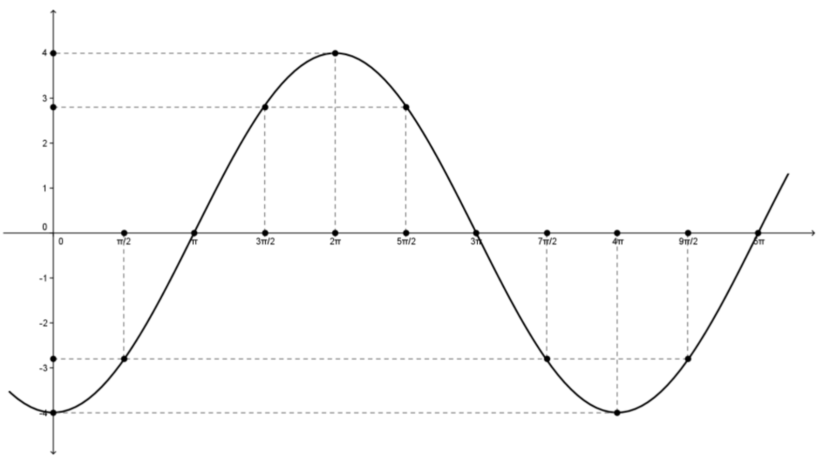



$$\boldsymbol{Dom = \mathbb{R}, Im = [-1,1], Período = 2\pi/3}$$

c)




d)

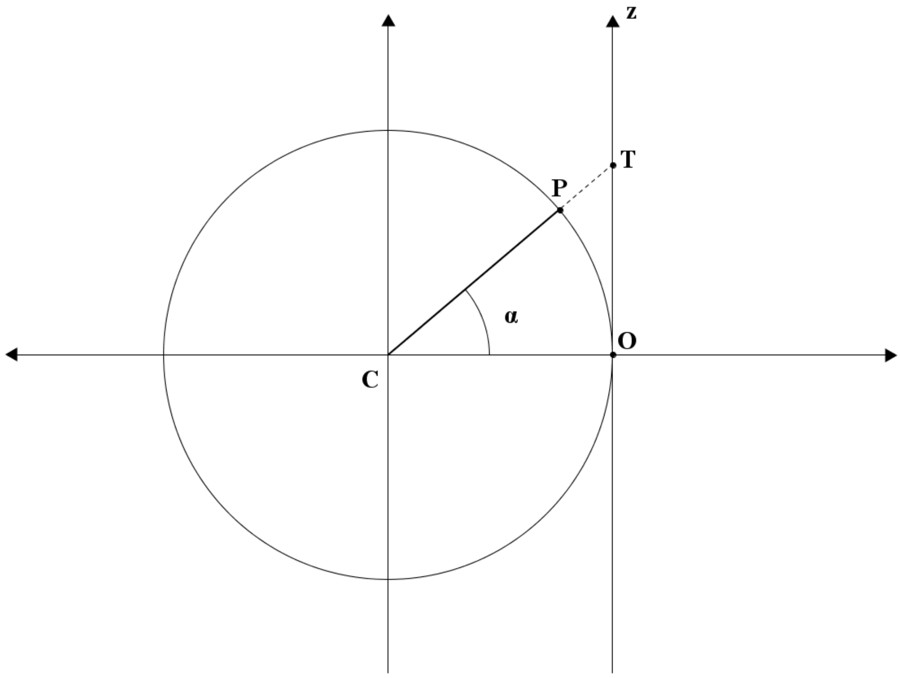



e)

DEFINIÇÃO:

FUNÇÃO TANGENTE DE UM ARCO:

Pela Origem de um Ciclo Trigonométrico, tracemos um eixo vertical orientado de baixo para cima, que chamaremos de eixo z, e prolonguemos o raio que determina o arco $\widehat{OP}$ até encontrar este eixo vertical no Ponto T, conforme a figura:

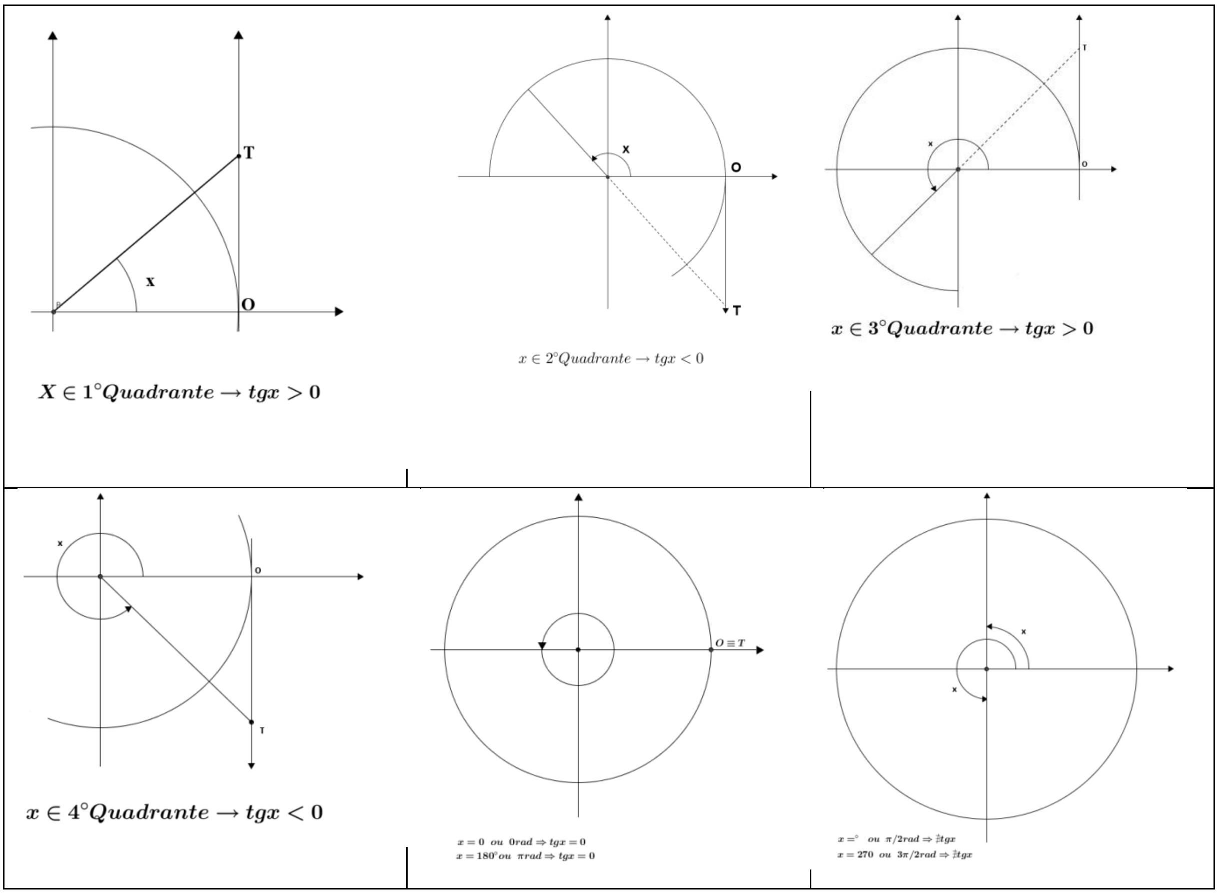



Ao segmento $\overline{OT}$, orientado de O para T, damos o nome de tangente do ângulo $\alpha$, e utilizamos o símbolo: $tg\,\alpha = OT$.

O eixo z é chamado de eixo das tangentes.

Mais uma vez, se observarmos a figura, perceberemos que se $\alpha = 0$ , então $tg\,\alpha = 0$, pois os pontos O e T coincidirão. Porém, se $\alpha = 90°$, então o raio que determina este ângulo será vertical e, em consequência, não cruzará o eixo z, também vertical. Dizemos então que não existe $tg$ 90°. Analogamente, não existirá também $tg$ 270°.

As figuras a seguir nos mostram os sinais da função $y = tg\,x$ nos vários quadrantes:




$X \in 1°Quadrante \rightarrow tgx > 0$

$x \in 2°Quadrante \rightarrow tgx < 0$

$x \in 3°Quadrante \rightarrow tgx > 0$

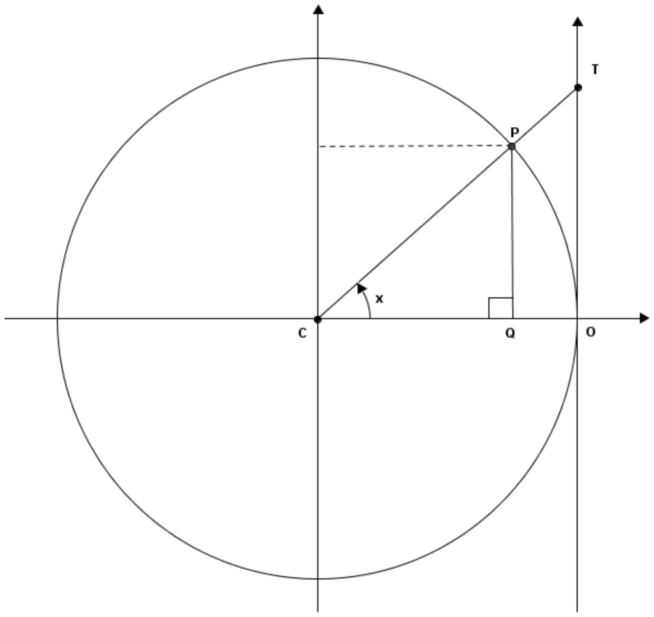
$x \in 4°Quadrante \rightarrow tgx < 0$

$x = 0 \;\; ou \;\; 0rad \Rightarrow tgx = 0$
$x = 180° ou \;\; \pi rad \Rightarrow tgx = 0$

$x =° \;\; ou \;\; \pi/2rad \Rightarrow \nexists tgx$
$x = 270 \;\; ou \;\; 3\pi/2rad \Rightarrow \nexists tgx$

Você já sabe que a igualdade $tg\,x = \frac{sen\,x}{\cos x}$ é verdadeira quando x é ângulo agudo de um triângulo retângulo. Vamos agora demonstrar que tal propriedade também vale no Ciclo Tigonométrico:

Observemos a figura a seguir, onde temos o ângulo x no Ciclo Trigonométrico e os triângulos $\Delta CQP$ e $\Delta COT$ retângulos respectivamente em Q e em O.



Como o ângulo x é interno dos dois triângulos, podemos afirmar que, pelo caso AA (ângulo, ângulo) de semelhança de triângulos, estes dois triângulos são semelhantes, e então podemos escrever as seguintes proporções e, em seguida, usar as definições de $sen\ x$, $\cos x$ e $tg\ x$ no Ciclo Trigonométrico que já conhecemos :

$$\frac{CO}{CQ} = \frac{OT}{QP} = \frac{CT}{CP} \Rightarrow \frac{1}{\cos x} = \frac{tg\ x}{sen\ x} = \frac{CT}{1} \Rightarrow \frac{1}{\cos x} = \frac{tg\ x}{sen\ x} \Rightarrow tg\ x = \frac{sen\ x}{\cos x}$$

Esta propriedade nos mostra que, para que exista $tg\ x$ é necessário que $\cos x$ não seja nulo, ou ainda que x seja diferente dos ângulos de 90° e 270° , ou ainda $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$ $rad$.

Desta forma, justificamos de dois modos, algebricamente e geometricamente, a não existência da tangente dos ângulos de 90° e 270°.

Se utilizarmos esta relação e a tabela de valores de seno e cosseno de um ângulo que construímos na página 14, poderemos calcular os valores das tangentes dos ângulos notáveis. Assim, temos:

$$tg\ 30° = \frac{sen\ 30°}{\cos 30°} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$tg\ 60° = \frac{sen\ 60°}{\cos 60°} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 = \sqrt{3}$$

$$tg\ 45° = \frac{sen\ 45°}{\cos 45°} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = 1$$

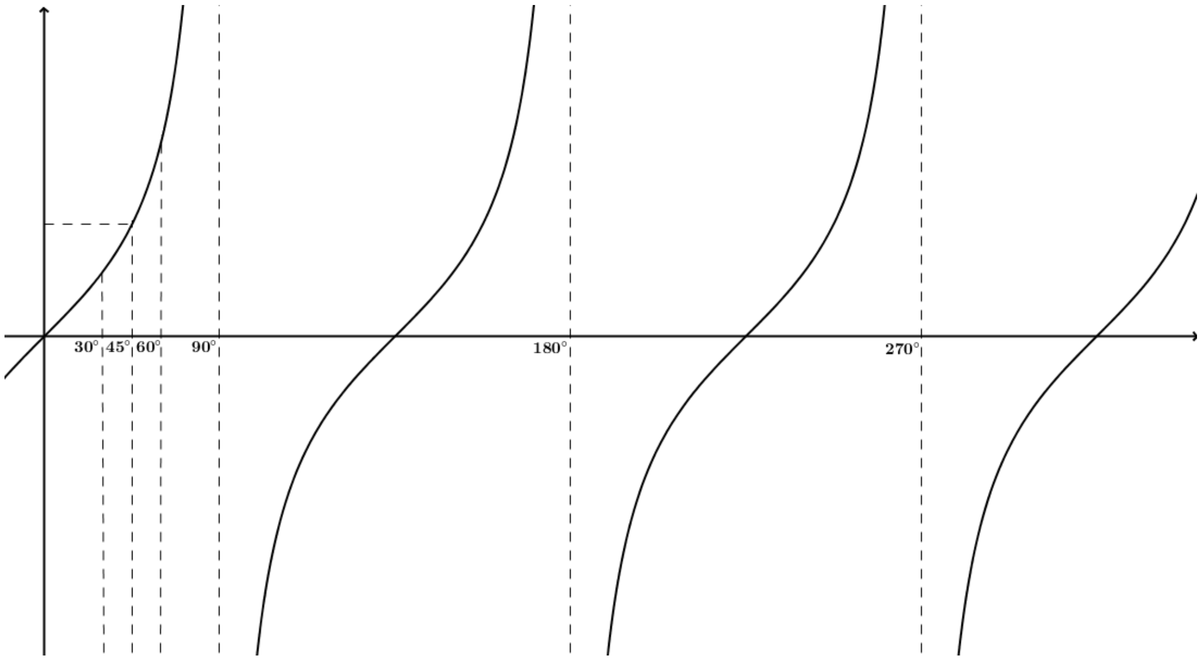
$$tg\ 135° = \frac{sen\ 135°}{\cos 135°} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = -1$$

Como exercício, deduza os valores das tangentes da tabela a seguir:

| Ângulo | Tangente |
|---|---|
| 0° | 0 |
| 30° | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ |
| 45° | 1 |
| 60° | $\sqrt{3}$ |
| 90° | $\nexists$ |

| | |
|---|---|
| 120° | $-\sqrt{3}$ |
| 135° | $-1$ |
| 150° | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ |
| 180° | 0 |
| 210° | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ |
| 225° | 1 |
| 240° | $\sqrt{3}$ |
| 270° | $\nexists$ |
| 300° | $-\sqrt{3}$ |
| 315° | -1 |
| 330° | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ |
| 360° | 0 |

Esta tábua de valores nos dá condições de traçar o gráfico de função $f(x) = tg\ x$ :



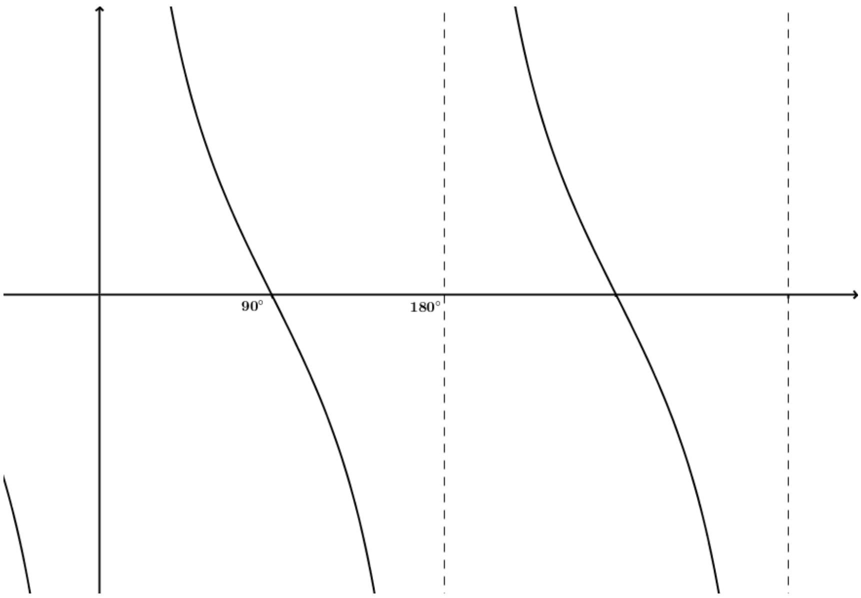

Analisando a representação gráfica que acabamos de elaborar, podemos afirmar que o período da função tangente é $\pi$ radianos ou $180°$, sua Imagem é todo o conjunto R e seu domínio é o conjunto R do qual retiramos os ângulos $90°$, $270°$, $450°$, $630°$, etc., além dos valores negativos $-90°$, $-270°$, etc. Estes ângulos podem ser descritos por uma única expressão, que é $90° + 180°.k$ , ou $\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$, onde k é um número inteiro. Assim, o domínio da função $y = tg\, x$ é dado por: $Dom(tg\, x) = \mathbb{R} - \{x /\, x = 90° + 180° \cdot k\}$ ou $\mathbb{R} - \left\{x\, /x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi\right\}$, onde $k \in \mathbb{Z}$.

Esta função apresenta em seu gráfico infinitos ramos, e ela é sempre crescente, ao contrário das funções seno e cosseno que ora são crescentes, ora decrescentes.

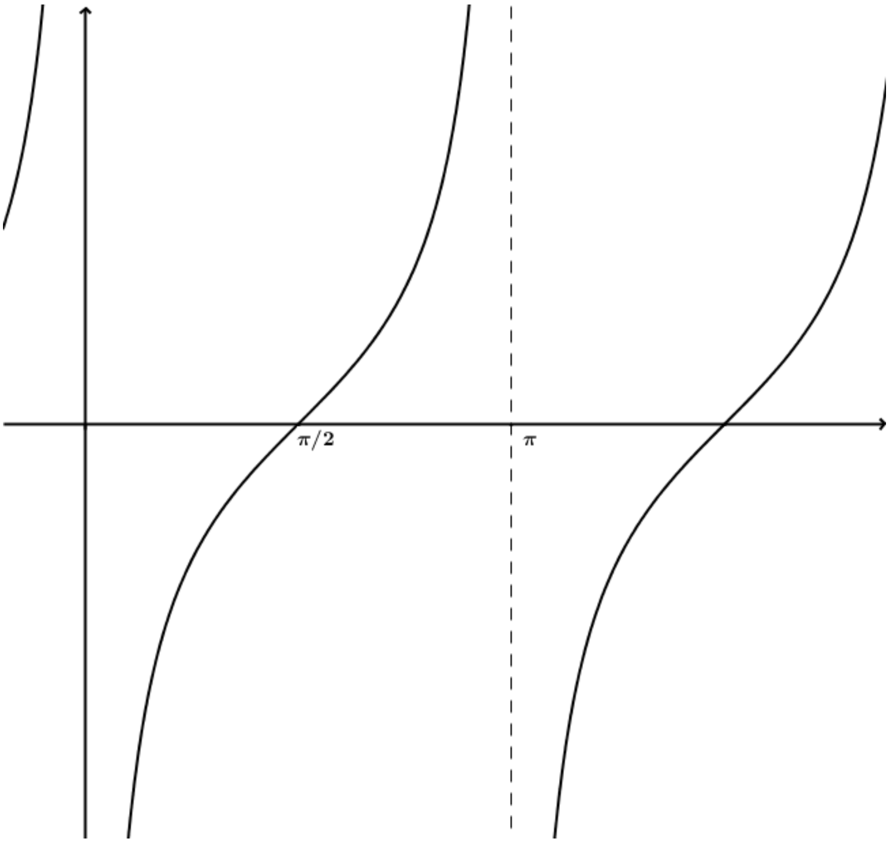
EXERCÍCIOS:

Representar graficamente as funções, escrevendo seu Domínio, sua Imagem e seu Período:

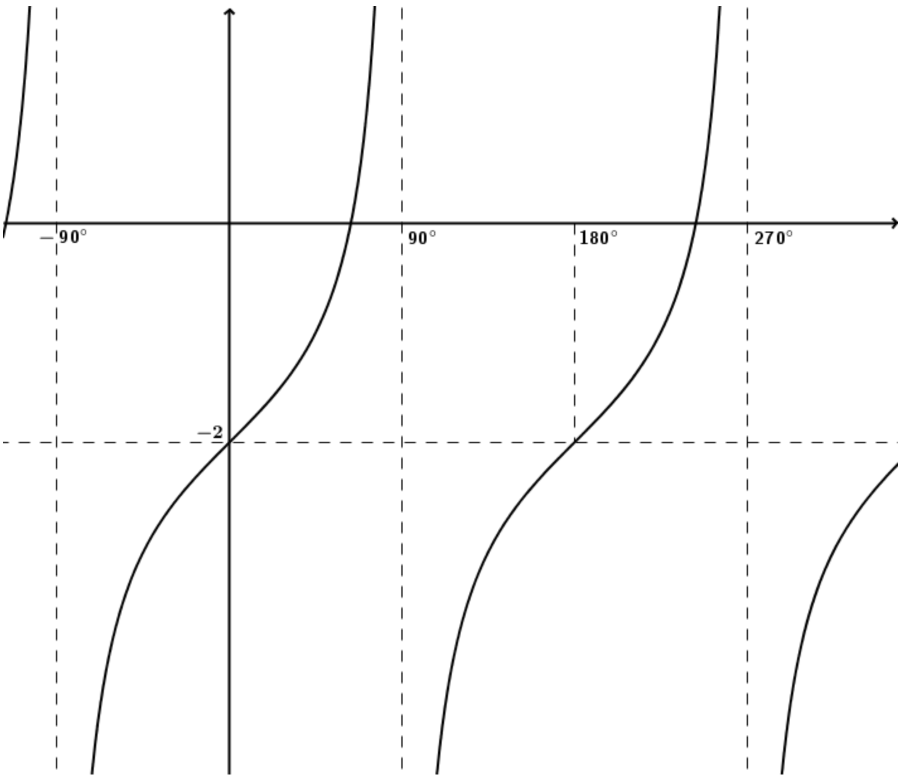
a) $f(x) = -2\, tg\, \left(\frac{x}{2}\right)$



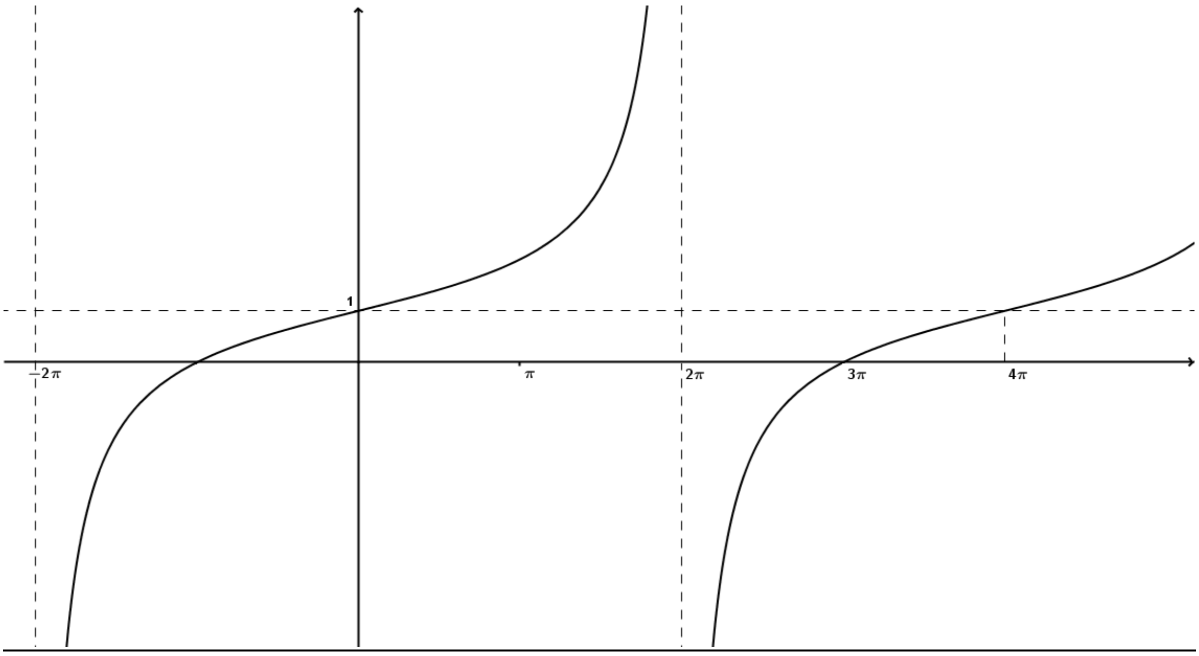

b) $y = tg\, \left(x - \frac{\pi}{2}\right)$




c) $y = -2 + tg\ (x + 180°)$




d) $f(x) = 1 + tg\ \left(\frac{x}{4} + \pi\right)$




CONCEITO:

ADIÇÃO DE ARCOS:

Você já sabe que $sen\,30° = \frac{1}{2}$, $sen\,60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $sen\,90° = 1$. Então é imediato perceber que $sen\,30° + sen\,60° = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \neq 1 = sen\,90°$. Ou seja, se somarmos dois arcos os seus senos não se somam, e, do mesmo modo podemos perceber que seus cossenos e suas tangentes também não se somarão.

Para tais cálculos precisamos desenvolver algumas fórmulas próprias :

$$cos\,(a + b) = cos\,a \,.\, cos\,b - sen\,a \,.\, sen\,b$$

$$sen\,(a + b) = sen\,a \,.\, cos\,b + sen\,b \,.\, cos\,a$$

$$tg(a+b) = \frac{tg\,a + tg\,b}{1 - tga \cdot tg\,b}$$

DEMONSTRAÇÕES:

Para a demonstração da primeira fórmula, cosseno de uma soma, são necessários conceitos que serão desenvolvidos futuramente em Geometria Analítica, e, por isso, consideraremos ser ela verdadeira.

Já a fórmula do seno de uma soma pode ser demonstrada com a utilização da anterior:

$$sen(a+b) = \cos\big(90° - (a+b)\big) = \cos((90° - a) - b)$$
$$= \cos\,(90° - a)\cdot\cos\,(-b) - sen\,(90° - a)\cdot sen(-b)$$
$$= sen\,a\cdot\cos\,b - \cos\,a\cdot(-senb) = sen\,a\cdot\cos\,b + sen\,b\cdot\cos\,a$$

A formula da tangente utiliza a já conhecida igualdade $tg\,x = \frac{sen\,x}{\cos x}$ com $cos\,x$ não nulo: $tg\,(a+b) = \frac{sen\,(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{sen\,a\cdot\cos b + sen\,b\cdot\cos a}{\cos a\cdot\cos b + sen\,a\cdot sen\,b}$. Se dividirmos o numerador e o denominador desta última fração por $cosa.cosb$ (não nulo) , obteremos :

$tg\,(a+b) = \frac{\frac{sen\,a\cdot\cos b + sen\,b\cdot\cos a}{\cos a\cdot\cos b}}{\frac{\cos a\cdot\cos b - sen\,a\cdot sen\,b}{\cos a\cdot\cos b}} = \frac{\frac{sen\,a\cdot\cos b}{\cos a\cdot\cos b}+\frac{sen\,b\cdot\cos a}{\cos a\cdot\cos b}}{\frac{\cos a\cdot\cos b}{\cos a\cdot\cos b}-\frac{sen\,a\cdot sen\,b}{\cos a\cdot cosb}} = \frac{tg\,a + tg\,b}{1 - tg\,a\cdot tg\,b}$, com o denominador diferente de zero.

Conhecidas tais fórmulas, podemos deduzir as seguintes:

a) $\cos(a-b)$, que já foi usada para demonstrar a fórmula $sen\,(a+b)$, pode ser assim obtida: $\cos(a-b) = \cos\big(a+(-b)\big) = \cos a\cdot\cos(-b) - sen\,a\cdot sen\,(-b) = \cos a\cdot\cos b - sen\,a\cdot(-sen\,b) = \cos a\cdot cosb + sen\,a\cdot sen\,b$

b) $sen\,(a-b) = sen\,\big(a+(-b)\big) = sen\,a\cdot\cos(-b) + sen\,(-b)\cdot\cos a = sen\,a\cdot \cos b + (-sen\,b)\cdot\cos a = sen\,a\cdot\cos b - sen\,b\cdot\cos a$

c) $tg(a-b) = tg\big(a+(-b)\big) = \frac{tg\,a + tg\,(-b)}{1 - tg\,a\cdot tg\,(-b)} = \frac{tg\,a + (-tgb)}{1 - tg\,a\cdot(-tg\,b)} = \frac{tg\,a - tg\,b}{1 + tg\,a\cdot tg\,b}$, supondo o denominador não nulo.

APLICAÇÃO

DUPLICAÇÃO DE UM ARCO:

As fórmulas de adição de dois arcos podem ainda ser úteis na sua duplicação. Vejamos:

a) $\cos 2a = \cos(a+a) = \cos a\cdot\cos a - sen\,a\cdot sen\,a = cos^2 a - sen^2 a$

Como $sen^2 a + cos^2 a = 1$, a última expressão ainda pode ser melhorada para: $cos^2 a = sen^2 a = cos^2 a - (1 - cos^2 a) = cos^2 a - 1 + cos^2 a = 2\cdot cos^2 a - 1$, ou ainda: $cos^2 a - sen^2 a = 1 - sen^2 a - sen^2 a = 1 - 2\cdot sen^2 a$.

Isto nos mostrou que a fórmula de cos 2a pode ter até três apresentações.

b) $sen\,2a = sen\,(a+a) = sen\,a\ \cdot\cos a = 2\cdot sen\,a\ \cdot\cos a$

c) $tg\,2a = tg(a+a) = \frac{tg\,a + tg\,a}{1 - tg\,a\cdot tg\,a} = \frac{2\cdot tg\,a}{1 - tg^2 a}$

EXEMPLOS:

Obtenha os seguintes valores :

1) $sen\ 75° = sen\ (30° + 45°) = sen\ 30° \cdot \cos 45° + sen\ 45° \cdot \cos 30° = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

2) $\cos 285° = \cos 15° = \cos(60° - 45°) = \cos 60° \cdot \cos 45° + sen\ 60° \cdot sen\ 45° = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

3) $tg\,\frac{7\pi}{3} = \left(tg 2\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{tg\ 2\pi + tg\frac{\pi}{3}}{1 + tg 2\pi \cdot tg\,\frac{\pi}{3}} = \frac{0+\sqrt{3}}{1+0\cdot\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$

EXERCÍCIOS:

Obtenha as funções trigonométricas solicitadas com o uso das fórmulas de adição ou duplicação de arcos:

a) sen $\frac{11\pi}{4}$ ; b) cos (-15º) ; c) tg 135º ; d) sen ($-\frac{5\pi}{3}$) ; e) cos 150º ; f) tg $\frac{9\pi}{4}$ .

Resp. : (a) ; b) ; c) ;d) ; e) ; f)

APLICAÇÃO:

ARCO METADE:

Já sabemos que $cos\ 2a = 2.cos^2 a - 1 = 1 - 2.sen^2 a$. Se fizermos $2a = x$, teremos:

$\cos x = 2 \cdot cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 \Rightarrow \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$, e ainda:

$\cos x = 1 - 2 \cdot sen^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 \Rightarrow \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$, e ainda:

$\cos x = 1 - 2 \cdot sen^2\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow sen\ \left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$, e, além disso:

$tg\ \left(\frac{x}{2}\right) = \frac{sen\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$. Nestas fórmulas, o sinal “$\pm$” será substituído por “+” ou por “-”, quando for conhecido o quadrante onde estamos trabalhando.

EXEMPLOS:

Calcular o valor de:

a) $sen\ 15° = sen\ \left(\frac{30°}{2}\right) = +\sqrt{\frac{1-cos30°}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

b) $\cos\frac{\pi}{8} = \cos\left(\frac{\frac{\pi}{4}}{2}\right) = +\sqrt{\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

c) $tg\ \left(\frac{3\pi}{8}\right) = tg\ \left(\frac{\frac{3\pi}{4}}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)}{1+cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)}} = \sqrt{\frac{1-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{1+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}} \cdot \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{4-2}{\left(2-\sqrt{2}\right)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$

Esta última expressão deve ter o seu denominador racionalizado ainda mais uma vez, e teremos: $tg\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} \cdot \frac{2+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}+2}{4-2} = \frac{2\cdot(\sqrt{2}+1)}{2} = 1 + \sqrt{2}$

CONCEITO:

EQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Dizemos que uma equação é trigonométrica se sua variável for um ângulo do qual desejamos uma função trigonométrica.

Assim, as equações: $2\ -\ 3\ sen\ (2x + 90º)\ =\ \frac{1}{2}$ , e $3.tg\ x\ =\ -1$ são trigonométricas, porém a equação $2x - 7\ cos\ 45° =\ 0$ não é.

A resolução de uma destas equações envolve o conhecimento da Imagem e do Período das funções que dela fazem parte.

EXEMPLOS:

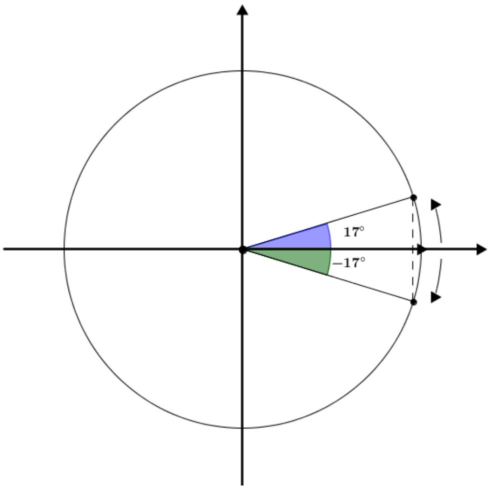
Resolva as equações em R :

1) $\operatorname{sen} x\ =\ 3$

Como sabemos, a Imagem da função $y = sen\ x$ é $[-1,1]$. Ou seja, 3 não faz parte dela, então esta equação é tal que sua solução é impossível, e teremos : $V = \phi$.

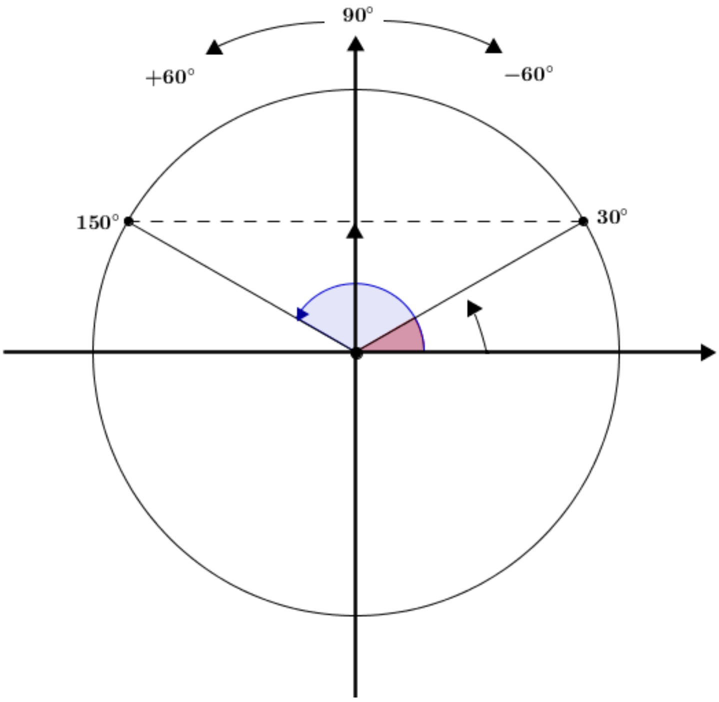
2) $\cos x\ =\ \cos 17°$

De acordo com o estudo que fizemos da função cosseno, podemos dizer que a solução desta equação é $x = \pm 17° + k \cdot 360°$, pois, tanto $17°$ como $-17°$ têm o mesmo cosseno, e o período desta função, em graus, é $360°$. Portanto, $V\ = \{\pm 17° + 360° \cdot k, k \in \mathbb{Z}\}$.




3) $sen\, x = \frac{1}{2}$

Sabemos que $sen\, 30° = \frac{1}{2}$, porém há outro ângulo que, na 1ª volta tem o mesmo seno, e este ângulo é $180° - 30° = 150°$. Além disso, há ângulos nas demais voltas que são também solução da equação.




Podemos representar todas estas soluções da seguinte maneira: $x = 30° + k \cdot 360°$ e $x = 150° + k \cdot 360°$, com $k \in Z$ , pois, como você já sabe, o Período da função seno é 360°.

Então, o Conjunto Verdade da equação será: $V = \{30° + 360° \cdot k, 150° + 360° \cdot k, k \in \mathbb{Z}\}$

Esta resposta ainda pode ser escrita do seguinte modo: $V = \{90° \pm 60° + 360° \cdot k, k \in \mathbb{Z}\}$.

4) $2.sen\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$

Esta equação nos permite escrever que: $sen\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Portanto, $x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}\pm\frac{\pi}{6}+2k\cdot\pi$, com $k\in\mathbb{Z}\Rightarrow x=\frac{3\pi}{4}\pm\frac{\pi}{6}+2k\pi$, com $k\in\mathbb{Z}$.

Logo, $V=\left\{\frac{3\pi}{4}\pm\frac{\pi}{6}+2k\pi, com\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

5) $3tg\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{3}$

De imediato, temos: $tg\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$. Logo, podemos escrever imediatamente: $2x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{6}+k\pi$, com $k\in\mathbb{Z}$, e, assim, $2x=-\frac{\pi}{12}+k\pi$. Assim, poderemos afirmar que $x=\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$, e concluir que $V=\left\{-\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

6) $sen\,x-\sqrt{3}\cdot\cos x=0$, com $x\in[-2\pi,\ 2\pi]$.

Da equação, temos: $sen\,x=\sqrt{3}\cdot\cos x\Rightarrow\frac{sen\,x}{\cos x}=\sqrt{3}$, com $cos\,x$ não nulo. Então, $tg\,x=\sqrt{3}$. Logo, $x=\frac{\pi}{6}+k\cdot\pi, k\in\mathbb{Z}$. Porém, a solução está restrita ao intervalo dado, portanto o conjunto solução da equação será: $V=\left\{-\frac{\pi}{6},-\frac{5\pi}{6},\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right\}$.

6) $sen\,2x - sen\,x = 0$

Se aplicarmos a fórmula do seno do arco duplo, a equação passará a ser a seguinte: $2\cdot sen\,x\cdot\cos x-sen\,x=0\Longrightarrow sen\,x\cdot(2\cdot\cos x-1)=0\Longrightarrow$

$$\begin{cases} senx=0\Longrightarrow x=k\cdot\pi, k\in\mathbb{Z} \\ 2\cdot\cos x-1=0\Longrightarrow\cos x=\pm\dfrac{\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

Logo, $V=\left\{k\pi\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$

Esta mesma equação poderia também ser resolvida do seguinte modo:

$$sen\,2x-sen\,x=0\Rightarrow sen\,2x=sen\,x\Rightarrow\begin{cases}2x+x+2k\pi \\ 2x=\pi-x+2k\pi=-x+(2k+1)\cdot\pi\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=2k\cdot\pi, com\ k\in\mathbb{Z} \\ 3x=(2k+1)\cdot\pi\Rightarrow x=(2k+1)\cdot\dfrac{\pi}{3}com\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

Então, temos: $V=\left\{2k\cdot\pi,(2k+1)\cdot\frac{\pi}{3}, k\in\mathbb{Z}\right\}$

OBSERVAÇÃO: Esperávamos que as duas resoluções chegassem às mesmas raízes. Porém, se observarmos melhor, veremos que, se variarmos os valores de K, elas realmente coincidem.

8) $sen^2x-\cos x=1$

Se nos lembrarmos que $sen^2x + 1 - cos^2x$, a equação inicial se transforma em: $1 - cos^2x - \cos x = 1 \Rightarrow cos^2x + \cos x = 0 \Rightarrow \cos x(\cos x + 1) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z} \\ \cos x + 1 = 0 \Rightarrow \cos x = -1 \Rightarrow x = \pi + k\pi \Rightarrow x = \pi \cdot (1 + k), k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Assim, o conjunto solução da equação será: $S = \left\{\pi \cdot \left(\frac{1}{2} + k\right), \pi \cdot (1 + k), k \in \mathbb{Z}\right\}$

EXERCÍCIOS:

1) Resolva as equações no conjunto R:

a) $2 \cdot sen\, x = -\sqrt{2}$

b) $2\sqrt{3} \cdot \cos x = 3$

c) $sen^2x + 1$

d) $4 \cdot cos^2x = 3$

e) $3 \cdot sen\, x + \sqrt{3} \cdot \cos x = 0$

f) $\cos 2x + 3 \cdot \cos x + 2 = 0$

g) $2 \cdot sen^2x + 6 \cdot \cos x + 5 + \cos 2x$

h) $\cos 5x + \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

Resp.: (a) V = { $\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in Z\}$ ou $V = \{\frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{3} + 2k.\pi, k \in Z\}$,

b) V = $\{\pm\frac{\pi}{6} + 2k.\pi, k \in Z\}$ , c) V = $\{\frac{\pi}{2} + k.\pi, k \in Z\}$ , d) V = $\{\frac{\pi}{4} + k.\frac{\pi}{2}, k \in Z\}$,

e) V = $\{-\frac{\pi}{6} + k.\pi, k \in Z\}$ ou V = $\frac{5\pi}{6} + k.\pi, k \in Z\}$, f) V = $\{\pm\frac{2\pi}{3} + 2k.\pi, (2k+1)\pi$, com k $\in Z\}$, g) V = $\{2k.\pi, \pm\frac{\pi}{3} + 2k.\pi, k \in Z\}$, h) V = $\{\frac{\pi}{12} + 2k.\pi, \frac{\pi}{9} + 2k.\pi, k \in Z)$

2) Resolva as equações nos intervalos dados:

a) $cos^2x + \cos x = 0, x \in [0,2\pi]$

b) $tg\ 2x - 1, s \in [0, \pi]$

c) $tg\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = tg\ \frac{\pi}{5}, x \in [-\pi, \pi]$

d) $tg\ 2x = tg\left(x + \frac{\pi}{4}\right), x \in [0,4\pi]$

Resp.:( a) V $=\{\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\}$, b) V = $\{\frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}\}$, c) V = $\{-\frac{11\pi}{20}, \frac{9\pi}{20}\}$,

d) V = $\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \frac{13\pi}{4}\}$,)