



INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
DE SÃO PAULO  
Campus São Paulo

**EQUAÇÕES DIFERENCIAIS FRACIONÁRIAS: UM  
ESTUDO TEÓRICO-NUMÉRICO COM UMA  
INTRODUÇÃO AO CÁLCULO FRACIONÁRIO**

MARCELO ANDRIOLI DA SILVA JUNIOR

Trabalho de Conclusão de Curso Superior de Licenciatura em  
Matemática, sob a orientação do Prof. Dr. Marco Aurélio Granero  
Santos

IFSP  
SÃO PAULO  
2021



MARCELO ANDRIOLI DA SILVA JUNIOR

**EQUAÇÕES DIFERENCIAIS FRACIONÁRIAS: UM  
ESTUDO TEÓRICO-NUMÉRICO COM UMA  
INTRODUÇÃO AO CÁLCULO FRACIONÁRIO**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo – IFSP, em cumprimento ao requisito parcial para obtenção do grau acadêmico de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marco Aurélio Granero Santos

SÃO PAULO

2021



MARCELO ANDRIOLI DA SILVA JUNIOR

# **EQUAÇÕES DIFERENCIAIS FRACIONÁRIAS: UM ESTUDO TEÓRICO-NUMÉRICO COM UMA INTRODUÇÃO AO CÁLCULO FRACIONÁRIO**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo – IFSP, em cumprimento ao requisito parcial para obtenção do grau acadêmico de Licenciado em Matemática.

Conceito: \_\_\_\_\_

---

**Prof. Dr. Marco Aurélio Granero Santos**  
Orientador

---

**Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Flávia Milo dos Santos**  
Membro da Banca

---

**Prof. Me. Mauricio Di Tota Montanari  
Boni**  
Membro da Banca

---

**Marcelo Andrioli da Silva Junior**  
Aluno

SÃO PAULO  
2021



*Dedico este trabalho à minha mãe, Dione, que apesar de todas as circunstâncias de nossas vidas, sempre fez de tudo por mim e pelos meus irmãos, mesmo quando não pôde estar presente. O que sou hoje e onde cheguei, devo tudo à você. Essa conquista não é só minha, é nossa, mãe.*



## Agradecimentos

Agradecer é uma tarefa complicada, já que sempre tenho sensação de ter esquecido ou estar devendo agradecimentos a alguém. Por isso, decidi, nesse momento, pecar pelo excesso e não pela falta.

Agradeço...

Primeiramente a Deus, pois sem ele nada é possível, por me guardar, guardar minha família e todas as pessoas que são importantes para mim, por me dar forças todos os dias em que eu acordava, às quatro da manhã, pensando se valeria a pena e se eu conseguiria chegar até aqui.

À minha mãe, Dione, por ter me proporcionado as melhores condições para que fosse possível chegar até aqui, por sempre cuidar de mim, acreditar em mim, me apoiar, me incentivar e ser a minha maior inspiração. Por todos os dias, ter me dado sua benção para que eu tivesse forças e segurança ao sair de casa. Acho que nenhuma seção de agradecimentos seria suficiente e justa para agradecer tudo que ela fez, e faz, por mim.

Ao meu pai, Marcelo, por sempre proporcionar as melhores condições materiais, não deixando nada faltar, para mim e para meus irmãos e por me incentivar estudar.

Aos meus irmãos, Gabriella, Giulia e Lucas, por nunca me deixarem desistir, por sempre confiarem no meu potencial, até mais do que eu mesmo, por estarem comigo em todos os momentos dessa trajetória e por serem os meus melhores amigos.

À minha amada, Maria Beatriz, por ter me acompanhado e me ajudado como ninguém nos últimos anos, não só na minha vida acadêmica. Por compreender minhas ausências, por me ajudar sempre que podia, às vezes colocando suas próprias responsabilidades em segundo plano, por tornar essa caminhada mais leve, mais prazerosa e por ser minha melhor companhia da vida.

Ao meu primo, Matheus Oliveira, por me acompanhar, desde o dia da matrícula, compartilhando das angústias de morar longe da faculdade. Por ser minha companhia todos os dias no trajeto até a faculdade, por me ajudar a, mesmo sob todas essas adversidades, continuar firme nessa jornada e por ser um amigo incrível.

Aos meus avós, Cida e Pedro, meus tios, Felipe, Carla e Nathalia, meu padrasto, Fernando e à minha prima, Ana Luiza, por sempre torcerem pelo meu sucesso e me motivarem a ser uma pessoa melhor a cada dia.

Aos meus queridos, Benedito, Marina, Rosimeire e Rafael, que se tornaram

parte da minha família, por sempre acreditarem no meu potencial, por me acolherem tão bem e por serem bons amigos.

Ao meu orientador, Marco, que foi fundamental para que eu chegasse nessa etapa do curso, por ter me dado a oportunidade de me desenvolver academicamente de uma forma que nunca imaginei, por ter aceitado realizar projetos de pesquisa quando eu o procurei, por me ensinar não só sobre Matemática mas também sobre a vida afora, por me levar ao meu primeiro congresso científico e por todas as trocas que tivemos nesses anos de curso.

Às incríveis, Ana Carolina e Dara, por me acompanharem nesta trajetória desde o primeiro dia de aula, por tornarem tudo mais leve em todas as manhãs que estivemos juntos, por suportarem meu senso de humor excessivamente ruim e não desistirem de mim, mesmo tendo de lidar com minhas piadas, todos os dias, às sete da manhã. Por serem as melhores amigas que eu poderia ter encontrado na faculdade, por me ensinarem tanto, por compartilharem todos esses momentos comigo e por me ajudarem a ser uma pessoa muito melhor do que era quando entrei no curso.

Aos grandes amigos, Matheus Alves e Sarah, por me ajudarem tanto, por tornar cada dia dessa caminhada mais tranquilo, com as conversas, com as ajudas em Física, com os passeios aos fins de semana e com todo o companheirismo que sempre tiveram e por me acolherem tão bem todas as vezes que precisei.

Aos professores, Gabriela, Henrique, Larissa, Leandro, Silvio e Vânia. Em especial à professora Flávia, que contribuiu muito para meu desenvolvimento acadêmico, nas tardes em que trabalhávamos nos projetos de iniciação científica, nas aulas de EDO e nas aulas de Cálculo.

Ademais, a todos que não citei aqui, mas contribuíram de alguma forma para que eu realizasse esse sonho.

## Resumo

Este trabalho apresenta uma introdução ao cálculo fracionário, no qual destacam-se as propriedades e as características de diferentes formulações para os operadores de integração e derivação fracionários e o conceito de algumas funções ditas especiais, no contexto da física-matemática. A seguir, são apresentadas as chamadas Equações Diferenciais Fracionárias (EDF's) através do estudo e da análise de suas soluções exatas e numéricas. Nesta análise, procurou-se observar as semelhanças entre o que ocorre quando se utiliza o cálculo fracionário e quando se utiliza o cálculo de ordem inteira.

**Palavras-chaves:** Derivada Fracionária, Integral Fracionária, Grünwald-Letnikov, Caputo; Riemann-Liouville, Métodos Numéricos, Problema de Valor Inicial Fracionário.



## **Abstract**

This work presents an introduction to fractional calculus, enhancing the properties and characteristics of different formulations for the fractional operators of integration and derivation as well the some special functions. Then, the fractional differential equations (EDF's) are presented through the study and analysis of their exact and numerical solutions. In this analysis, we tried to observe the similarities between fractional and traditional calculus results.

**Key Words:** Fractional Derivation, Fractional Integration, Grünwald-Letnikov, Caputo, Riemann-Liouville, Numerical Methods, Fractional Initial Value Problem.



## Lista de ilustrações

Figura 1 – Função Gama. . . . .	26
Figura 2 – Gráfico das soluções, exata e numérica, de $5y^{(\alpha)}(t) + y(t) = 1$ para diferentes valores de $\alpha$ . . . . .	42
Figura 3 – Gráfico das soluções, exata e numérica, de $3y^{(1,5)}(t) + y(t) = 1$ . . .	43
Figura 4 – Solução numérica de $0,8y^{(2,2)}(t) + 0,5y^{(0,9)}(t) + y(t) = 1$ . . . . .	44



## Lista de símbolos

$\Gamma(\cdot)$	Função Gama
$\mathcal{F}(\cdot)$	Transformada de Fourier
$\mathcal{L}(\cdot)$	Transformada de Laplace
$E_\alpha(\cdot)$	Função de Mittag de um Parâmetro
$E_{\alpha,\beta}(\cdot)$	Função de Mittag de dois Parâmetros
$\phi_v(\cdot)$	Função de Gel'fand-Shilov
$I_{a+}^\alpha$	Integral de Riemann-Liouville à esquerda
$I_{b-}^\alpha$	Integral de Riemann-Liouville à direita
${}^{RL}D_{a+}^\alpha$	Derivada de Riemann-Liouville à esquerda
${}^{RL}D_{b-}^\alpha$	Derivada de Riemann-Liouville à direita
${}^L D_{0+}^\alpha$	Derivada de Liouville à esquerda
${}^L D_-^\alpha$	Derivada de Liouville à direita
${}^C D_{a+}^\alpha$	Derivada de Caputo à esquerda
${}^C D_{b-}^\alpha$	Derivada de Caputo à direita
${}^{GL}D_{a+}^\alpha$	Derivada de Grünwald-Letnikov à esquerda
${}^{GL}D_{b-}^\alpha$	Derivada de Grünwald-Letnikov à direita



## Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>19</b>
1.1	Revisão histórica	19
1.2	Estrutura do trabalho e objetivos	22
<b>2</b>	<b>CÁLCULO FRACIONÁRIO</b>	<b>23</b>
2.1	Função Gama	23
2.2	Transformadas Integrais	26
2.2.1	Transformada de Fourier	27
2.2.2	Transformada de Laplace	28
2.3	Funções de Mittag-Leffler	29
2.3.1	Função de Mittag-Leffler de um Parâmetro	29
2.3.2	Função de Mittag-Leffler de dois Parâmetros	29
2.4	Integrais fracionárias	30
2.4.1	Integral fracionária de Riemann-Liouville	32
2.4.2	Integrais Fracionárias de Liouville	32
2.5	Derivadas Fracionárias	33
2.5.1	Formulação de Riemann-Liouville	33
2.5.2	Formulação de Caputo	35
2.5.3	Formulação de Grünwald-Letnikov	36
<b>3</b>	<b>EQUAÇÕES DIFERENCIAIS FRACIONÁRIAS</b>	<b>39</b>
3.1	Equação Diferencial Fracionária	39
3.1.1	EDF de dois termos	39
3.1.2	EDF de três termos	40
3.2	Solução Numérica das EDF's	40
3.2.1	Método de Grünwald-Letnikov	40
3.2.2	Discretização das EDF's de dois e três termos	41
3.3	Implementação numérica das soluções no MATLAB	42
	<b>Conclusão</b>	<b>47</b>
	<b>Referências</b>	<b>49</b>
	<b>APÊNDICE A Implementação dos algoritmos no software MATLAB</b>	<b>51</b>



## 1 INTRODUÇÃO

O cálculo diferencial e integral, ou somente cálculo, é um tópico da Matemática ligado à área de Análise, presente nos cursos de Licenciaturas e Bacharelados em Matemática, onde são estudados fenômenos que envolvem movimento e variação, associados a conceitos de área e de reta tangente. A partir destes dois conceitos surgem os dois principais ramos do cálculo: o cálculo integral e o cálculo diferencial.

A ideia de integração teve origem em processos somatórios ligados ao cálculo de certas áreas e certos volumes e comprimentos. A diferenciação, criada bem mais tarde, resultou de problemas sobre tangentes a curvas e de questões sobre máximos e mínimos. Mais tarde ainda, verificou-se que a integração e a diferenciação estão relacionadas entre si, sendo cada uma delas operação inversa da outra (EVES, 2004, p.417).

Em geral, nos cursos de graduação, são apresentados processos de diferenciação e integração de ordem  $n$  inteira, com  $n \geq 0$ , conhecidos como **cálculo de ordem inteira**. Entretanto, matematicamente, nada impede que esses processos sejam generalizados para uma ordem arbitrária. Esta possibilidade deu origem ao chamado **cálculo fracionário** e seus resultados são o assunto principal deste trabalho.

Mais especificamente, este trabalho tem como objetivo estudar as chamadas Equações Diferenciais Fracionárias (EDF's) de dois e três termos, tanto do ponto de vista teórico como numérico. Também serão apresentados alguns resultados referentes a possíveis interpretações e aplicações deste tipo de equação.

### 1.1 Revisão histórica

No que diz respeito ao cálculo diferencial e integral de ordem inteira ou somente cálculo de ordem inteira, Camargo e Oliveira (2015, p.7) comentam que os primeiros registros referentes ao cálculo integral remetem à Grécia antiga, quando Arquimedes (287 a.C-212 a.C) desenvolve e aplica o Método da Exaustão para solucionar o problema de determinação de áreas.

Este método consiste em inscrever polígonos, com áreas conhecidas, na figura cuja área deseja-se determinar, até que esta seja completamente recoberta pelos polígonos.

No século XVII Isaac Newton (1642-1727) e Leibniz (1646-1716), algebrizam o método da exaustão que, com o passar do tempo, é chamado hoje de cálculo integral e que segundo Camargo e Oliveira (2015, p.7), não se limita a resolver somente problemas geométricos relacionados ao cálculo de áreas, mas também possui grande aplicabilidade em outras áreas da ciência, em especial na Física.

Já o outro ramo, o cálculo diferencial, se desenvolve quando Fermat (1601-1665) procura obter os valores máximos e mínimos de certas funções. Ele tinha como ideia utilizar o método das tangentes, que busca encontrar um número que fornece a inclinação de uma reta ou determinar a direção da reta tangente num ponto arbitrário de uma curva.

Na segunda metade do século XVII, Leibniz algebriza esse problema e apresenta os conceitos de variáveis, constantes e parâmetros, também introduz a notação  $\frac{dy}{dx}$ , onde  $dx$  e  $dy$  são chamados de *diferenciais* e entendidos como "a menor possível das diferenças em  $x$  e em  $y$ ", respectivamente.

Se  $f(x)$  tem um máximo ou mínimo comum em  $x$  e se  $e$  é muito pequeno, então o valor de  $f(x - e)$  é quase igual ao de  $f(x)$ . Portanto, pode-se experimentar fazer  $f(x - e) = f(x)$  e, para tornar essa igualdade correta, impor que  $e$  assuma o valor zero. As raízes da equação resultante darão, então, os valores de  $x$  para os quais  $f(x)$  assume um máximo ou um mínimo (EVES, 2004, p.429).

Esta citação pode ser interpretada como uma das origens do conceito de derivada, e do cálculo diferencial, que pode ser entendida como a taxa de variação de uma função.

Quando se fala sobre a conexão dos dois ramos do cálculo, Eves (2004, p.435) argumenta que Barrow (1630-1677) foi o primeiro a perceber que os processos de diferenciação e integração são operadores inversos um do outro.

Entretanto, mesmo Barrow sendo o primeiro a perceber a conexão entre os dois ramos, em Camargo e Oliveira (2015, p.8) é dito que Newton e Leibniz foram os primeiros a compreender a verdadeira importância dessa conexão e explorá-la de forma coerente e ordenada, culminando com o desenvolvimento do Teorema Fundamental do Cálculo, unindo os dois ramos no que se conhece atualmente como Cálculo Diferencial e Integral.

O desenvolvimento do cálculo de ordem inteira continuou e teve seus conceitos ampliados até o século XIX, com o surgimento da Análise Matemática, quando Gauss (1777-1855), Cauchy (1789-1857), Weierstrass (1815-1897) e Riemann (1826-1866), desenvolvem com clareza e elegância, através de suas obras, uma base de matemática que introduz formalmente os conceitos de limites, derivadas e integrais, ou seja, introduz o rigor matemático.

Diferentemente do cálculo de ordem inteira, o cálculo fracionário, ou cálculo de ordem não-inteira ou até mesmo cálculo de ordem arbitrária surge a partir de um questionamento feito em uma troca de correspondências entre Leibniz e L'Hospital, onde L'Hospital questiona Leibniz sobre uma possível generalização da ordem da derivada.

Ross (1975) comenta que a ideia de generalização da ordem da derivação e da integração está relacionada a poder estender o significado da expressão  $\frac{d^n y}{dx^n}$  com  $n$  sendo qualquer número irracional, racional ou complexo. Ross (1975) ainda destaca que na referida troca de correspondências L'Hospital pergunta a Leibniz sobre o caso no qual  $n$  fosse  $\frac{1}{2}$ , ao qual, em 1695, Leibniz responde que isso levará a um paradoxo que trará conseqüências frutíferas.

O termo **derivada de ordem arbitrária** aparece, segundo Ross (1975, p.1), pela primeira vez em um livro em 1819, quando o francês S. F. Lacroix (1765-1843) escreve aproximadamente duas páginas sobre uma fórmula que visava obter para a  $n$ -ésima derivada para monômios do tipo  $y = x^n$ . Euler e Fourier mencionaram derivadas de ordem arbitrária em seus estudos, mas não forneceram nenhuma aplicação ou exemplo.

O primeiro resultado conhecido sobre a aplicação do cálculo fracionário foi apresentado por Abel (1802-1829) em 1823, quando obteve a solução do problema da tautócrona.

Desde então, muitos outros matemáticos tiveram grandes contribuições em relação ao desenvolvimento do cálculo fracionário como Liouville (1809-1882), Riemann (1826-1866), Grünwald (1838-1920), Letnikov (1837-1888), Caputo (1932), dentre outros.

No que diz respeito a conferências sobre o cálculo fracionário, somente em junho de 1974, 279 anos após a troca de correspondências entre L'Hospital e Leibniz, aconteceu a primeira conferência internacional sobre o tema, realizada na Universidade de New Haven, EUA.

Esta conferência teve vários objetivos, sendo o mais importante, popularizar o assunto na esperança de induzir cientistas de modo a incluir o tema em sua pesquisa e encorajá-los a descobrir novos métodos formais para representar fenômenos físicos por modelos matemáticos que podiam ser tratados com elegância através do CF (CAMARGO; OLIVEIRA, 2015).

Nos dias atuais, o cálculo fracionário, como dito em Camargo (2009), conta com aplicações para descrever fenômenos em diversas áreas de uma forma mais "elegante", como na Física, Biologia, Matemática Financeira etc. Existem também estudos sobre possíveis interpretações da derivada fracionária, como por exemplo em Lorenzo e Hartley (1998) que propõem uma interpretação geométrica para a derivada fracionária.

No Brasil, provavelmente, a primeira menção ao termo derivada fracionária tenha sido em Ricieri (1993). Atualmente existem diversos pesquisadores brasileiros na área, espalhados em diferentes universidades e estados do país, com trabalhos de

grande relevância, o que tem contribuído para o desenvolvimento desta área, como Camargo (2009) que traz em sua tese de doutorado o problema do telegráfo trabalhado do ponto de vista do cálculo fracionário, Grigoletto e Oliveira (2013) mostrando versões fracionárias do teorema fundamental do cálculo, Boni (2017) com uma aplicação do cálculo fracionário às equações horárias do movimento, Rodrigues e Oliveira (2015) utilizando o cálculo fracionário para estudar os modelos da física matemática, Soares (2016) trazendo uma aplicação do cálculo fracionário às equações de evolução, Grigoletto (2014) mostrando uma equação diferencial fracionária associada ao processo de desaceleração de neutrons, Ramos e Camargo (2012) aplicando o cálculo fracionário ao problema da tautócrona, dentre outros.

## 1.2 Estrutura do trabalho e objetivos

O trabalho tem como objetivo analisar qualitativamente e quantitativamente as Equações Diferenciais Fracionárias (EDF's) de dois e três termos. Para tanto, o trabalho se divide em dois objetivos específicos.

O primeiro deles diz respeito a apresentar a teoria acerca do conhecimento matemático necessário à compreensão e desenvolvimento do cálculo fracionário, como algumas das diferentes formulações para os operadores de derivação e integração fracionários, a Função Gama, a Transformada de Laplace, a Função de Mittag-Leffler e a Transformada de Fourier.

Na segunda parte são apresentadas as Equações Diferenciais Fracionárias bem como suas possíveis soluções exatas e numéricas, além de alguns exemplos.

O trabalho é finalizado com as considerações finais e sugestões para trabalhos futuros.

## 2 CÁLCULO FRACIONÁRIO

Neste capítulo são apresentados os conceitos teóricos do Cálculo Fracionário (CF), iniciando com conceitos preliminares necessários tanto para o desenvolvimento da teoria como das aplicações, como a Função Gama, a Função de Mittag-Leffler, a Transformada de Laplace e a Transformada de Fourier.

Todo o capítulo foi escrito tomando como base os livros: *Cálculo Fracionário* de Camargo e Oliveira (2015), *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications* de Samko, Kilbas e Marichev (1993), *Theory and Applications of Fractional Differential Equations* de Kilbas, Srivastava e Trujillo (2006), a dissertação de mestrado de Boni (2017) e a tese de doutorado de Camargo (2009).

### 2.1 Função Gama

Camargo e Oliveira (2015) nos diz que existem diversas formas de se estudar a função gama; Wierstrass (1815-1897) por exemplo, estudou-a utilizando um produto infinito, já Gauss estudou-a através de um limite.

Este trabalho utiliza a função gama definida a partir de um representação integral, mais especificamente, uma integral imprópria, definida por Euler.

#### Definição 2.1. Fatorial

O fatorial no número  $n$ , com  $n = 0, 1, 2, \dots$  é definido pela integral imprópria:

$$n! = \int_0^{\infty} e^{-t} t^n dt. \quad (2.1)$$

A generalização desta definição é obtida substituindo-se o valor de  $n$  por um número, em princípio complexo,  $z = x + yi$ , tal que  $x, y \in \mathbb{R}$  e  $\text{Re}(z) > 0$ . Esta generalização é conhecida como a função gama.

#### Definição 2.2. Função Gama

A função gama, denotada por  $\Gamma(z)$  é definida pela integral imprópria:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad (2.2)$$

com  $z \in \mathbb{C}$ .

Trabalhar diretamente com a definição da função gama pode apresentar uma certa dificuldade, uma vez que ela é representada por uma integral imprópria. Para superar essa adversidade, é possível extrair diferentes propriedades com o intuito de facilitar este trabalho.

**Propriedade 1.**  $\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$

*Demonstração.*

$$\Gamma(z + 1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{(z+1)-1} dt = \int_0^{\infty} e^{-t} t^z dt. \quad (2.3)$$

Integrando por partes e adotando a mudança de variável  $u = t^z$  e  $dv = e^{-t} dt$ , com  $du = z t^{z-1} dt$  e  $v = -e^{-t}$ , tem-se:

$$\Gamma(z + 1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^z dt = \left[ -t^z e^{-t} \right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} z t^{z-1} e^{-t} dt. \quad (2.4)$$

Em (2.4), a parcela  $-t^z e^{-t} = 0$ , restando apenas a segunda parcela que, aplicando a definição da função gama, resulta em:

$$\int_0^{\infty} z t^{z-1} e^{-t} dt = z \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt = z\Gamma(z). \quad (2.5)$$

□

A Propriedade (1) pode ser interpretada como uma generalização da identidade  $n! = n(n - 1)!$ .

**Propriedade 2.**  $\Gamma(1) = 1$

*Demonstração.*

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} t^{1-1} e^{-t} dt = \left[ -e^{-t} \right]_0^{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ -e^{-t} \right]_0^x = \lim_{x \rightarrow \infty} (-e^{-x} + e^0) = 1. \quad (2.6)$$

□

Utilizando o Princípio da Indução Finita e os resultados das propriedades (1) e (2) é possível concluir que, se  $z \in \mathbb{N}$ , então

$$\Gamma(z + 1) = z!$$

Também é possível mostrar que a função gama não está definida para  $z = 0$ , já que pela propriedade (1) tem-se que  $\Gamma(0 + 1) = 0 \cdot \Gamma(1) = 0$  o que contradiz a propriedade (2). Além disso, obtêm-se a partir das propriedades vistas que a função gama não está definida para inteiros negativos, uma vez que a propriedade (2) pode ser reescrita como:

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z) \Rightarrow \Gamma(z) = \frac{\Gamma(z + 1)}{z}$$

e, a função gama para  $z = -1$  depende de  $\Gamma(0)$ , pensando recursivamente não encontra-se um modo de definir a função gama para nenhum inteiro negativo.

A seguir, é apresentado um exemplo do cálculo a função gama de um valor não inteiro.

**Exemplo 2.1.** Cálculo de  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} t^{1-\frac{1}{2}} e^{-t} dt = \int_0^{\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt. \quad (2.7)$$

Fazendo a mudança de variável  $t = u^2$  e  $dt = 2u du$  na equação (2.7) tem-se:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} (u^2)^{-\frac{1}{2}} e^{-u^2} 2u du = 2 \int_0^{\infty} u^{-1} u e^{-u^2} du = 2 \int_0^{\infty} e^{-u^2} du. \quad (2.8)$$

Seja  $I = \int_0^{\infty} e^{-u^2} du$ , então tem-se que  $I^2 = \left(\int_0^{\infty} e^{-u^2} du\right)^2 = \int_0^{\infty} e^{-u^2} du \int_0^{\infty} e^{-v^2} dv$ . Assim sem perder a generalidade, em uma das integrais,  $u$  por  $v$ , chegando em

$$I^2 = \int_0^{\infty} e^{-u^2} du \int_0^{\infty} e^{-v^2} dv = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-u^2} e^{-v^2} du dv = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(u+v)^2} du dv. \quad (2.9)$$

Realizando uma mudança para as coordenadas polares com  $u^2 + v^2 = r^2$  em (2.9), obtém-se:

$$I^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr d\theta. \quad (2.10)$$

Fazendo uma segunda mudança de variável, onde  $w = r^2$ , logo  $dw = 2r dr$ , para a primeira integral tem-se:

$$\frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-w} dw = \frac{1}{2} [-e^{-w}]_0^{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2} [-e^{-w}]_0^x = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \infty} (-e^{-x} + e^0) = \frac{1}{2}. \quad (2.11)$$

voltando para a equação (2.10):

$$I^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} d\theta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \quad (2.12)$$

Voltando agora para a equação (2.8) conclui-se que:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \quad (2.13)$$

O resultado obtido em (2.13) possibilita calcular a função gama para todos os valores fracionários de denominador 2. Por exemplo,

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad \text{e} \quad \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$$

e, utilizando o princípio da indução finita em conjunto com o resultado da equação (2.13) tem-se a lei de recorrência para determinar a função gama de todos os valores fracionários de denominador 2, com  $n \geq 1$ , dada por:

$$\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \sqrt{\pi}.$$

A Figura 1 apresenta o gráfico da função gama no intervalo  $]-8,8]$ , no qual pode-se observar o comportamento descontínuo desta função para valores inteiros não-positivos.

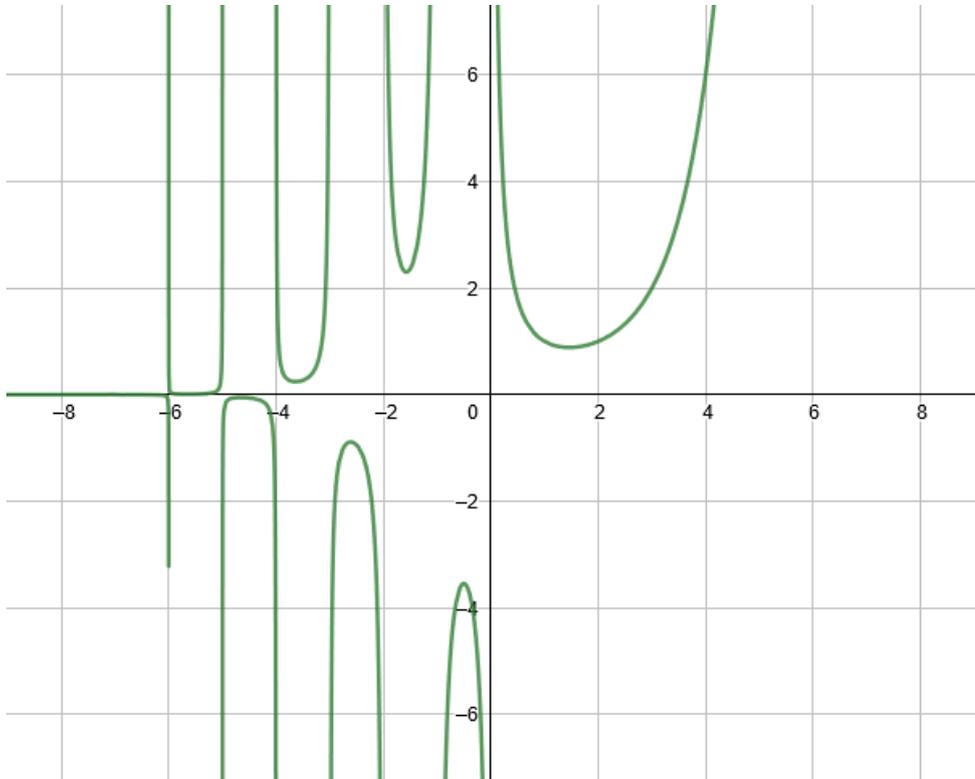


Figura 1 – Função Gama.

## 2.2 Transformadas Integrais

A seguir será apresentada a definição das Transformadas Integrais e suas características. Além disso, serão apresentadas duas transformadas específicas, sendo elas a de Laplace e a de Fourier. Também foi utilizado, além das referências já citadas no início do capítulo, o livro *Integral Transforms and Their Applications* de Debnath e Bhatta (2007).

### Definição 2.3. Transformada Integral

A transformada integral de uma função  $f(x)$ , no intervalo  $a \leq x \leq b$ , denotada por  $F(k)$ , é definida por:

$$F(k) = \int_a^b K(x, k) f(x) dx, \quad (2.14)$$

onde  $K(x, k)$  é chamado de núcleo da transformada,  $F(k)$  a função transformada e  $k$  a variável transformada.

Em geral, cada transformada corresponde a uma diferente escolha da função  $K$ , chamada núcleo da transformada, e dos limites de integração  $a$  e  $b$ .

Como as transformadas são integrais e integrais são lineares, essa propriedade se mantém para todas as transformadas.

### 2.2.1 Transformada de Fourier

A transformada de Fourier é a transformada integral que decompõe uma função temporal em frequência, ou seja, uma função  $f(t)$ , onde  $t$  é o tempo, será transformada em uma função  $F(\omega)$ , onde  $\omega$  é a frequência, ao aplicarmos a transformada de Fourier.

Apresenta-se a seguir, a definição e algumas propriedades da transformada de Fourier para funções  $f(t)$  absolutamente contínuas, considerando apenas o caso unidimensional.

#### Definição 2.4. Transformada de Fourier

A transformada de Fourier de uma função  $f(t)$ , denotada por  $\mathcal{F}[f](\omega) = F(\omega)$ , com  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $F(\omega) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , é definida por:

$$\mathcal{F}[f](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (2.15)$$

#### Definição 2.5. Transformada de Fourier inversa

A transformada de Fourier inversa de  $F(\omega)$ , denotada por  $\mathcal{F}^{-1}[F](t) = g(t)$  é definida como:

$$\mathcal{F}^{-1}[F](t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (2.16)$$

Para que existam a transformada e a transformada inversa de Fourier de uma função  $f(t)$ , as integrais das equações (2.15) e (2.16) devem ser convergentes.

#### Definição 2.6. Produto de Convolução

O produto de convolução, também conhecido como convolução de Fourier, denotado por " $\star$ ", entre duas funções bem comportadas<sup>1</sup>,  $f(t)$  e  $g(t)$  com  $t \in \mathbb{R}$ , é definido pela integral:

$$f(t) \star g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau) d\tau. \quad (2.17)$$

A Transformada de Fourier unidimensional apresenta diversas propriedades, algumas delas listadas abaixo.

<sup>1</sup> Neste texto, termo função bem comportada faz referência à uma função que é absolutamente contínua e limitada em todos os pontos do seu domínio.

## Propriedades

1. A transformada de Fourier do produto de convolução de duas funções é igual ao produto das respectivas transformadas:

$$[f_1 \star f_2](\omega) = \mathcal{F}[f_1](\omega) \mathcal{F}[f_2](\omega).$$

2. A transformada de Fourier de um produto de duas funções é dada por:

$$\mathcal{F}[f_1 \cdot f_2](\omega) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}[f_1](\omega) \star \mathcal{F}[f_2](\omega).$$

3. Seja  $n \in \mathbb{N}$ , a transformada de Fourier e a transformada de Fourier inversa da derivada enésima, são dadas respectivamente por:

$$\mathcal{F}[f^{(n)}](\omega) = (i\omega)^n \mathcal{F}[f](\omega) \quad \text{e} \quad \mathcal{F}^{-1}[f^{(n)}](\omega) = (-ix)^n f(x).$$

4. O produto de convolução é comutativo, ou seja,

$$f(t) \star g(t) = g(t) \star f(t).$$

Por fim, além da relação tempo-frequência, é possível interpretar a transformada de Fourier de uma função como sendo a sua decomposição exponencial.

### 2.2.2 Transformada de Laplace

A Transformada de Laplace, que será apresentada nesta subseção, é uma ferramenta que nos permite obter a solução de uma ampla classe de equações diferenciais, tanto de ordem inteira quanto de ordem fracionária.

#### Definição 2.7. Transformada de Laplace

Seja  $f(t)$  uma função definida para  $t \geq 0$ . Então, a integral

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (2.18)$$

é chamada Transformada de Laplace de  $f$ , desde que a integral convirja.

#### Definição 2.8. Transformada inversa de Laplace

A Transformada inversa de Laplace de  $F(s)$ , denotada por  $\mathcal{L}^{-1}[F](s) = f(t)$  é definida da seguinte forma:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_{\sigma - i\tau}^{\sigma + i\tau} e^{st} F(s) ds \quad (2.19)$$

onde  $\text{Re}(s) > \sigma$ , para que todas as singularidades de  $F(s)$  estejam à esquerda da reta  $\text{Re}(s) = \sigma$ , no plano complexo, garantindo a convergência da Transformada inversa.

**Teorema 2.1.** *Sejam  $f$  e  $g$  funções contínuas por partes em  $\mathbb{R}_+$  e de ordem exponencial, então*

$$\mathcal{L}[f \star g] = \mathcal{L}[f(t)]\mathcal{L}[g(t)] = F(s)G(s).$$

*Demonstração.* Ver Zill (2001). □

## 2.3 Funções de Mittag-Leffler

Além da Função Gama, outras funções de grande importância para o CF são as funções de Mittag-Leffler, conhecidas como a generalização da função exponencial. Essas funções são de grande importância pois, enquanto as Equações Diferenciais de Ordem Inteira (ED's) têm suas soluções dadas em termos da função exponencial, as Equações Diferenciais Fracionárias (EDF's) terão suas soluções expressas em termos das funções de Mittag-Leffler.

As funções de Mittag-Leffler são definidas a partir do número de parâmetros que possuem e, para o presente estudo, serão utilizadas apenas as funções de Mittag-Leffler de um e de dois parâmetros.

### 2.3.1 Função de Mittag-Leffler de um Parâmetro

A função de Mittag-Leffler,  $E_\alpha(z)$ , é uma função complexa que depende um parâmetro complexo  $\alpha$ , com  $Re(\alpha) > 0$  e é dada a partir da seguinte expressão:

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}. \quad (2.20)$$

Observe que, no caso particular de  $\alpha = 1$ , tem-se a função exponencial:

$$E_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k + 1)} = \frac{z^k}{k!} = e^z. \quad (2.21)$$

### 2.3.2 Função de Mittag-Leffler de dois Parâmetros

A função de Mittag-Leffler de dois Parâmetros tem papel importante no desenvolvimento do cálculo fracionário e também no processo de obtenção da solução de algumas EDF's, sendo definida por:

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}. \quad (2.22)$$

Vale destacar que, quando  $\beta = 1$  recupera-se a função de Mittag-Leffler de um parâmetro,

$$E_{\alpha,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} = E_\alpha(z), \quad (2.23)$$

e, no caso particular de  $\alpha = 1$  e  $\beta = 1$  recupera-se a função exponencial.

Outro caso particular da função de Mittag-Leffler e que será utilizada no decorrer do trabalho é a função de Prabhakar,  $\varepsilon_k(t, \lambda; \mu, \nu)$ , introduzida por Sousa, Junior e Oliveira (2020) e definida como:

$$\varepsilon_k(t, \lambda; \mu, \nu) = t^{\mu k + \nu - 1} E_{\mu, \nu}^{(k)}(\lambda t^\mu) \quad (2.24)$$

que tem sua transformada de Laplace dada por:

$$\mathcal{L}[\varepsilon_k(t, \pm\lambda; \mu, \nu)] = \frac{k! s^{\alpha - \beta}}{(s^\alpha \mp \lambda)^{k+1}}. \quad (2.25)$$

## 2.4 Integrais fracionárias

A literatura apresenta diferentes formulações para o operador de integração fracionário. Entretanto, neste trabalho, serão abordadas apenas as formulações de Riemann-Liouville e de Liouville.

Antes de introduzir o conceito de integral fracionária ou integral de ordem não inteira, é necessário mostrar que uma integral de ordem  $n \in \mathbb{N}$  pode ser escrita como sendo um produto de convolução entre  $f(x)$  e a função de Gel'fand-Shilov de ordem  $n$ . Em seguida através da generalização do fatorial pela função gama, é introduzido o conceito de integral fracionária.

### Definição 2.9. Função de Gel'fand-Shilov

Sejam  $n \in \mathbb{N}$  e  $\nu \in \mathbb{R}$ , a função de Gel'fand-Shilov é definida como:

$$\phi_n(t) = \begin{cases} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{se } t < 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \phi_\nu(t) = \begin{cases} \frac{t^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)} & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{se } t < 0 \end{cases}, \quad (2.26)$$

onde  $\Gamma(\nu)$  é a generalização da função fatorial.

### Definição 2.10. Integral de Ordem Inteira

Define-se a integral de ordem inteira, integral múltipla ou iterada, através do operador  $I$ , sobre a função  $f(x)$ , como:

$$I f(t) = \int_0^t f(t_1) dt_1. \quad (2.27)$$

Desta forma, a partir da definição dada pela (2.27) podemos escrever

$$I^2 f(t) = I[I f(t)] = \int_0^t \int_0^{t_1} f(t_2) dt_2 dt_1$$

$$I^3 f(t) = I[I^2 f(t)] = \int_0^t \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} f(t_3) dt_3 dt_2 dt_1$$

que pode ser generalizada para a integral de ordem  $n$  como:

$$I^n f(t) = \int_0^t \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \dots \int_0^{t_{n-2}} \int_0^{t_{n-1}} f(t_n) dt_n dt_{n-1} \dots dt_3 dt_2 dt_1$$

A integral de ordem  $n$ , com  $n \in \mathbb{N}$ , também pode ser introduzida através do teorema a seguir, que envolve a função de Gel'fand-Shilov e o produto de convolução de Laplace.

**Teorema 2.2.** *Integral de ordem  $n$*

Sejam  $n \in \mathbb{N}$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$  e  $f(t)$  uma função integrável, então

$$I^n f(t) = \phi_n(t) \star f(t),$$

onde  $\star$  denota o produto de convolução.

*Demonstração.* Utilizando o Princípio da Indução Finita (PIF), para  $n = 1$  tem-se:

$$I f(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{1-1}}{(1-1)!} f(\tau) d\tau = \phi_1(t) \star f(t).$$

Assumindo a validade da hipótese de indução para  $n$ ,

$$I^n f(t) = \phi_n(t) \star f(t),$$

tem-se que:

$$I^{n+1} f(t) = I[I^n f(t)] = I[\phi_n(t) \star f(t)] = \int_0^t \phi_n(u) \star f(u) du = \int_0^t \left[ \int_0^u \frac{(u-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} f(\tau) d\tau \right] du$$

. Neste caso, é possível inverter a ordem de integração de modo a obter:

$$I^{n+1} f(t) = \int_0^t \left[ \int_\tau^t \frac{(u-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} f(\tau) du \right] d\tau.$$

Calculando a integral entre colchetes, tem-se:

$$I^{n+1} f(t) = \int_0^t \frac{(t-\tau)^n}{(n)!} f(\tau) d\tau = \phi_{n+1}(t) \star f(t),$$

demonstrando que a relação vale para todo  $n \in \mathbb{N}$ . □

Demonstrado o Teorema, a função gama será utilizada para generalizar a ordem da integral para um  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

**Definição 2.11.** *Integral de ordem  $\alpha$*

Seja  $f(t)$  uma função integrável, a integral de ordem  $\alpha$  de  $f(t)$ , denotada por  $I^\alpha(t)$ , é definida por:

$$I^\alpha f(t) = \phi_\alpha(t) \star f(t) = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(\tau) d\tau. \quad (2.28)$$

### 2.4.1 Integral fracionária de Riemann-Liouville

**Definição 2.12.** *Integral de Riemann-Liouville em intervalos finitos*

Seja  $A = [a, b]$  um intervalo finito no eixo real  $\mathbb{R}$ . As integrais de Riemann-Liouville, à esquerda e à direita, ambas de ordem  $\alpha \in \mathbb{C}$ , com  $Re(\alpha) > 0$ , são definidas respectivamente por:

$$(I_{a+}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^{1-\alpha}}, \quad x > a \quad (2.29)$$

e

$$(I_{b-}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{f(t) dt}{(t-x)^{1-\alpha}}, \quad x < b. \quad (2.30)$$

Para o caso particular em que  $\alpha = 1$ , recuperam-se as definições usuais de integrais de ordem inteira,

$$(I_{a+}^1 f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1)} \int_a^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^{1-1}} = \int_a^x f(t) dt,$$

e

$$(I_{b-}^1 f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1)} \int_x^b \frac{f(t) dt}{(t-x)^{1-1}} = \int_x^b f(t) dt.$$

As integrais fracionárias de Riemann-Liouville, definidas em um intervalo finito  $[a, b]$  do eixo real  $\mathbb{R}$ , podem ter seu significado estendido para o semieixo  $\mathbb{R}^+$  e também para o eixo real  $\mathbb{R}$ .

### 2.4.2 Integrais Fracionárias de Liouville

**Definição 2.13.** *Integrais de Liouville nos semieixos*

Seja  $f$  um função contínua por partes no intervalo  $(0, \infty)$  e integrável em qualquer subconjunto de  $[0, \infty)$  e  $t > 0$ . As integrais fracionárias de Liouville nos semieixos, correspondentes as equações (2.29) e (2.30), de ordem  $\alpha$ , são dadas por:

$$(I_{0+}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^{1-\alpha}}, \quad x > 0, \quad Re(\alpha) > 0 \quad (2.31)$$

e

$$(I^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^{\infty} \frac{f(t) dt}{(t-x)^{1-\alpha}}, \quad x > 0 \quad Re(\alpha) > 0. \quad (2.32)$$

Da mesma forma que é definida no semieixo real  $\mathbb{R}$ , Liouville também define as integrais fracionárias no eixo real  $\mathbb{R}$ .

**Definição 2.14.** *Integrais de Liouville no eixo real*

As integrais fracionárias de Liouville no eixo real, semelhantes às definidas no semieixo, equação (2.31) e equação (2.32), são dadas por:

$$(I_+^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \quad (2.33)$$

e

$$(I_-^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^\infty \frac{f(t) dt}{(t-x)^{1-\alpha}} \quad (2.34)$$

onde  $x \in \mathbb{R}$  e  $Re(\alpha) > 0$ .

## 2.5 Derivadas Fracionárias

Assim como no caso das integrais fracionárias, existem diferentes formulações para os operadores de derivação fracionária. Isto faz com que a escolha do operador fracionário a ser utilizado dependa intimamente do problema abordado.

Para o escopo deste trabalho destacam-se as formulações de Riemann-Liouville, Caputo e Grünwald-Letnikov, apresentadas no decorrer desta seção. Porém, existem outras formulações como as de Liouville, Riesz, Weyl, Marchaud, Hilfer, Katugampola, entre outras. Estas formulações podem ser encontradas em Camargo e Oliveira (2015).

### 2.5.1 Formulação de Riemann-Liouville

**Definição 2.15.** Derivadas fracionárias de Riemann-Liouville em intervalos finitos

As derivadas de ordem fracionária de Riemann-Liouville em um intervalo finito do eixo real  $D_{a+}^\alpha y$  e  $D_{b-}^\alpha y$  de ordem  $\alpha \in \mathbb{C}$  com  $Re(\alpha) > 0$ , são definidas por:

$$({}^{RL}D_{a+}^\alpha y)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left( \frac{d}{dx} \right)^n \int_a^x \frac{y(t) dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}; \quad n = [Re(\alpha)] + 1; \quad x > a \quad (2.35)$$

e

$$({}^{RL}D_{b-}^\alpha y)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left( -\frac{d}{dx} \right)^n \int_x^b \frac{y(t) dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}}; \quad n = [Re(\alpha)] + 1; \quad x < b \quad (2.36)$$

onde  $[Re(\alpha)]$  significa a parte inteira de  $Re(\alpha)$ .

Da definição 2.18, percebe-se que a formulação da derivada fracionária segundo Riemann-Liouville é equivalente à derivada de ordem inteira de uma integral de ordem arbitrária, ou seja,

$$({}^{RL}D_{a+}^\alpha y)(x) = \left( \frac{d}{dx} \right)^n (I_{n-\alpha}^+ y)(x) \quad \text{e} \quad ({}^{RL}D_{b-}^\alpha y)(x) = \left( -\frac{d}{dx} \right)^n (I_{n-\alpha}^- y)(x).$$

As equações (2.35) e (2.36) são as derivadas de Riemann-Liouville de ordem  $\alpha$  à esquerda e à direita, respectivamente.

Para funções polinomiais têm-se, a partir da formulação de Riemann-Liouville, que, se  $Re(\beta) > 0$  e  $Re(\alpha) \geq 0$

$$({}^{RL}D_{a+}^{\alpha}(t-a)^{\beta-1})(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha-1} \quad (2.37)$$

e

$$({}^{RL}D_{a+}^{\alpha}(b-t)^{\beta-1})(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(b-x)^{\beta-\alpha-1}. \quad (2.38)$$

Tomando  $\beta = 1$  e  $Re(\alpha) \geq 0$ , tem-se a derivada de uma função constante, pois  $(t-a)^{\beta-1} = (b-t)^{\beta-1} = 1, \forall a, b \neq t$ .

Matematicamente, segue que:

$$({}^{RL}D_{a+}^{\alpha}1)(x) = \frac{(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \quad \text{e} \quad ({}^{RL}D_{b-}^{\alpha}1)(x) = \frac{(b-x)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)},$$

ou seja, a derivada de uma função constante não é nula. Essa é uma característica da formulação de derivada fracionária segundo Riemann-Liouville.

Em outro caso particular ocorre quando  $\beta = 2$  e  $\alpha = 1$ , neste caso tem-se a derivada da função identidade,

$$({}^{RL}D_{a+}^1(t-a)^{2-1})(x) = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(2-1)}(x-a)^{2-1-1} = 1. \quad (2.39)$$

As derivadas de ordem fracionária de Riemann-Liouville podem ter seu significado naturalmente estendido para o semieixo  $\mathbb{R}^+$  a partir das definições dadas por Liouville.

**Definição 2.16.** *Derivadas fracionárias de Liouville no semieixo*

*As derivadas de ordem fracionária de Liouville correspondentes às equações (2.35) e (2.36) são definidas por:*

$$({}^L D_{0+}^{\alpha} y)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left( \frac{d}{dx} \right)^n \int_0^x \frac{y(t) dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}} \quad (2.40)$$

e

$$({}^L D_{-}^{\alpha} y)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left( -\frac{d}{dx} \right)^n \int_x^{\infty} \frac{y(t) dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}}. \quad (2.41)$$

As derivadas,  $D_{0+}^{\alpha} y$  e  $D_{-}^{\alpha} y$ , dadas pelas equações (2.40) e (2.41), são chamadas de derivadas fracionárias de Liouville no semieixo  $\mathbb{R}^+$ , à esquerda e à direita, respectivamente.

Oldham e Spanier (2006) apresentam uma tabela com as derivadas de ordem  $\frac{1}{2}$  de algumas funções, segundo a formulação de Riemann-Liouville.

### 2.5.2 Formulação de Caputo

Caputo propõe uma definição baseada em Riemann-Liouville, que conta com uma inversão na ordem das operações de integração e derivação. Isto faz com que a derivada de uma função constante, segundo Caputo, seja nula, recuperando o mesmo resultado obtido no cálculo de ordem inteira.

**Definição 2.17.** *Derivadas fracionárias de Caputo em intervalos finitos*

Seja  $[a, b]$  um intervalo real e finito e sejam  $(D_{a+}^\alpha y)(x)$  e  $(D_{b-}^\alpha y)(x)$  as derivadas de Riemann-Liouville de ordem  $\alpha$ , com  $\alpha \in \mathbb{C}$  e  $Re(\alpha) \geq 0$ .

As derivadas fracionárias de Caputo de ordem  $\alpha$ , à esquerda e à direita, denotadas por  $({}^C D_{a+}^\alpha y)(x)$  e  $({}^C D_{b-}^\alpha y)(x)$ , são definidas respectivamente por:

$$({}^C D_{a+}^\alpha y)(x) = \left( D_{a+}^\alpha \left[ y(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right] \right) (x) \quad (2.42)$$

e

$$({}^C D_{b-}^\alpha y)(x) = \left( D_{b-}^\alpha \left[ y(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(b)}{k!} (b-t)^k \right] \right) (x), \quad (2.43)$$

com  $n = [Re(\alpha)] + 1$  para  $\alpha \notin \mathbb{N}$  e  $n = \alpha$  para  $\alpha \in \mathbb{N}$ .

Quando  $0 < Re(\alpha) < 1$ , tem-se que  $[Re(\alpha)] = 0$  e  $n = 1$ , e as equações (2.42) e (2.43) podem ser reescritas como:

$$({}^C D_{a+}^\alpha y)(x) = (D_{a+}^\alpha [y(t) - y(a)])(x) \quad (2.44)$$

e

$$({}^C D_{b-}^\alpha y)(x) = (D_{b-}^\alpha [y(t) - y(b)])(x). \quad (2.45)$$

As derivadas fracionárias de Caputo também podem ser definidas por:

$$({}^C D_{a+}^\alpha y)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{y^{(n)}(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt = (I_{a+}^{n-\alpha} D^n y)(x) \quad (2.46)$$

e

$$({}^C D_{b-}^\alpha y)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_x^b \frac{y^{(n)}(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt = (-1)^n (I_{b-}^{n-\alpha} D^n y)(x), \quad (2.47)$$

com  $n = [Re(\alpha)] + 1$ , se  $\alpha \notin \mathbb{N}$  e  $n = \alpha$  se  $\alpha \in \mathbb{N}$ .

Dessa forma, pode-se perceber que as derivadas fracionárias de Caputo de ordem  $\alpha$ , são integrais de Riemann-Liouville de ordem  $n - \alpha$  das derivadas de ordem inteira  $n$ .

No caso particular em que  $0 < Re(\alpha) < 1$ , tem-se novamente o caso em que  $n = 1$  e as derivadas podem ser reescritas como sendo:

$$({}^C D_{a+}^\alpha y)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \frac{y'(t)}{(x-t)^\alpha} dt \quad (2.48)$$

e

$$({}^C D_{b-}^\alpha y)(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_x^b \frac{y'(t)}{(t-x)^\alpha} dt. \quad (2.49)$$

A partir das equações (2.48) e (2.49) é possível verificar que as derivadas de ordem arbitrária de funções constantes são nulas, o que é uma das intenções de Caputo com sua formulação.

De fato, adotando  $y(x) = k$ , com  $k \in \mathbb{R}$ , tem-se  $y^{(n)}(x) = 0$ , uma vez que se  $n \in \mathbb{N}$  a derivada de ordem  $n$  de uma função constante é nula, e, substituindo-se  $y^{(n)}(x)$  na equação (2.46) resulta em:

$$({}^C D_{a+}^\alpha y)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{y^{(n)}(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{0}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt = 0. \quad (2.50)$$

Analogamente, tem-se  $({}^C D_{b-}^\alpha y)(x) = 0$ .

Da mesma forma que foram definidas as equações (2.46) e (2.47) é possível definir as derivadas fracionárias de Caputo no semieixo  $\mathbb{R}^+$  e no eixo real  $\mathbb{R}$ , com  $\alpha \in \mathbb{C}$ ,  $Re(\alpha) > 0$ ,  $\alpha \notin \mathbb{N}$  e  $n = [Re(\alpha)] + 1$ .

**Definição 2.18.** *Derivadas fracionárias de Caputo no semieixo*

*As derivadas de ordem fracionária de Caputo, no semieixo  $\mathbb{R}^+$  são dadas por:*

$$({}^C D_{0+}^\alpha y)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^x \frac{y^{(n)}(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt, \quad x \in \mathbb{R}^+ \quad (2.51)$$

e

$$({}^C D_{-}^\alpha y)(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_x^\infty \frac{y^{(n)}(t)}{(t-x)^{\alpha-n+1}} dt, \quad x \in \mathbb{R}^+. \quad (2.52)$$

**Definição 2.19.** *Derivadas fracionárias de Caputo no eixo*

*As derivadas de ordem fracionária de Caputo, no eixo  $\mathbb{R}$  são dadas por:*

$$({}^C D_{0+}^\alpha y)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{-\infty}^x \frac{y^{(n)}(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt, \quad x \in \mathbb{R} \quad (2.53)$$

e

$$({}^C D_{-}^\alpha y)(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_x^\infty \frac{y^{(n)}(t)}{(t-x)^{\alpha-n+1}} dt, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.54)$$

### 2.5.3 Formulação de Grünwald-Letnikov

A derivada segundo Grünwald-Letnikov desenvolve papel importante em problemas numéricos.

Alguns autores, como Ross e Miller (1993), acreditam que o paradoxo mencionado na troca de cartas entre Leibniz e L'Hopital, tem relação com o fato da derivada

fracionária poder ser escrita como uma série, assim como é proposto na definição de Grünwald-Letnikov.

A definição da derivada de ordem arbitrária de Grünwald-Letnikov baseia-se na generalização do processo de derivação, de uma função  $y$ , para uma ordem  $n \in \mathbb{N}$ , da forma,

$$y^n(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\Delta_h^n y)(x)}{h^n} \quad (2.55)$$

onde  $(\Delta_h^n y)(x)$  é uma diferença finita de ordem  $n \in \mathbb{N}$  de uma função  $y$  com um passo  $h \in \mathbb{R}$  centrado no ponto  $x \in \mathbb{R}$ .

A partir da equação (2.55) é definida a derivada de ordem arbitrária, substituindo  $n$  por  $\alpha > 0$  e  $h^n$  por  $h^\alpha$ . A diferença finita  $(\Delta_h^n y)(x)$  é substituída pela diferença  $(\Delta_h^\alpha y)(x)$ , de uma ordem arbitrária  $\alpha \in \mathbb{R}$ , definida pela série infinita:

$$(\Delta_h^\alpha y)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} y(x - kh), \quad x, h \in \mathbb{R}, \quad (2.56)$$

onde  $\binom{\alpha}{k}$  são os coeficientes binomiais.

Quando  $h > 0$ , tem-se a diferença à esquerda e quando  $h < 0$  a diferença à direita. Além disso, é garantida a convergência absoluta e uniforme da série presente na equação (2.56) para todo  $\alpha > 0$  e para qualquer função  $y(x)$ .

A partir da equação (2.55) são definidas as derivadas de Grünwald-Letnikov de ordens arbitrárias à esquerda e à direita.

**Definição 2.20.** *Derivadas fracionárias de Grünwald-Letnikov*

Seja  $y$  uma função definida em um intervalo dado e  $x$  um ponto fixo no interior deste intervalo. As derivadas de ordem arbitrária  $\alpha$  segundo Grünwald-Letnikov, à esquerda e à direita, são definidas respectivamente por:

$${}^{GL}D_+^{(\alpha)} y(x) = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{(\Delta_h^\alpha y)(x)}{h^\alpha}, \quad \alpha > 0 \quad (2.57)$$

e

$${}^{GL}D_-^{(\alpha)} y(x) = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{(\Delta_{-h}^\alpha y)(x)}{h^\alpha}, \quad \alpha > 0. \quad (2.58)$$

Utilizando a equação (2.56) e a propriedade da função gama,  $\Gamma(n+1) = n!$ , pode-se reescrever as equações (2.57) e (2.58) da seguinte forma:

$${}^{GL}D^\alpha(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{\Gamma(\alpha+1) y(x - kh)}{\Gamma(k+1) \Gamma(\alpha - k + 1)}. \quad (2.59)$$

Utilizando a identidade  $(-1)^k \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-k+1)} = \frac{\Gamma(k-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)}$ , a equação (2.59) pode ser reescrita como:

$${}^{GL}D^\alpha(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^{-\alpha}}{\Gamma(-\alpha)} \sum_{k=0}^n \frac{\Gamma(k-\alpha)}{\Gamma(k+1)} y(x - kh). \quad (2.60)$$

As derivadas fracionárias de Grünwald-Letnikov, à esquerda e à direita, de ordem  $\alpha > 0$ , podem ser definidas em um intervalo finito  $[a, b]$ , tal como é feito nas equações (2.57) e (2.58), da seguinte forma:

$${}^{GL}D_{a+}^{(\alpha)} y(x) = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{(\Delta_{h, a+}^{\alpha} y)(x)}{h^{\alpha}}, \quad \alpha > 0 \quad (2.61)$$

e

$${}^{GL}D_{b-}^{(\alpha)} y(x) = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{(\Delta_{h, b-}^{\alpha} y)(x)}{h^{\alpha}}, \quad \alpha > 0, \quad (2.62)$$

e as diferenças de ordem arbitrária também podem ser reescritas como:

$$(\Delta_{h, a+}^{\alpha} y)(x) = \sum_{k=0}^{\left[ \frac{x-a}{h} \right]} (-1)^k \binom{\alpha}{k} y(x - kh), \quad x \in \mathbb{R}, h > 0, \alpha > 0 \quad (2.63)$$

e

$$(\Delta_{h, b-}^{\alpha} y)(x) = \sum_{k=0}^{\left[ \frac{b-x}{h} \right]} (-1)^k \binom{\alpha}{k} y(x - kh), \quad x \in \mathbb{R}, h > 0, \alpha > 0. \quad (2.64)$$

A derivada de Grünwald-Letnikov e seus casos particulares são importantes no estudo de problemas numéricos, uma vez que alguns autores citam a eficiência dessa definição neste tipo de problema, por exemplo Petras (2011) e Podlubny (1999).

Lorenzo e Hartley (1998) apresentam uma proposta de interpretação geométrica da derivada de ordem fracionária a partir da formulação de Grünwald-Letnikov.

### 3 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS FRACIONÁRIAS

Nesta seção do trabalho serão apresentadas as Equações Diferenciais Fracionárias (EDF's), bem como serão discutidas as soluções exatas e numéricas das EDF's de dois termos e três termos. Por fim, é realizada uma discussão acerca dos resultados numéricos obtidos em alguns exemplos bem como a comparação com a solução exata, quando possível.

Este capítulo tem como base os artigos de Petras (2011), Dimitrov, Dimov e Todorov (2018), Dimitrov (2014), Garrappa (2018) e o livro de Podlubny (1999).

#### 3.1 Equação Diferencial Fracionária

Uma Equação Diferencial Fracionária (EDF) é a uma equação definida por:

$$a_n D_t^{\alpha_n} y(t) + a_{n-1} D_t^{\alpha_{n-1}} y(t) + \dots + a_1 D_t^{\alpha_1} y(t) + a_0 D_t^{\alpha_0} y(t) = u(t), \quad (3.1)$$

onde  $a_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) são os coeficientes e  $\alpha_i$  são a ordem da derivada fracionária de cada um dos termos da equação. Além disso,  $y(t)$  é a função procurada ou função solução e  $u(t)$  é o termo de não-homogeneidade.

As EDF's são definidas de acordo com o número de termos que possuem e, neste trabalho, serão estudados alguns casos particulares de EDF's de dois e de três termos, analisando suas soluções numéricas e exatas, quando possível.

Para se obter as soluções, tanto das EDF's quanto das Equações Diferenciais Ordinárias (EDO's) um método muito eficiente é a utilização da Transformada de Laplace. Porém, nas EDF's a transformada é mais efetiva em equações mais simples, por conta da dificuldade no cálculo da transformada inversa. Havendo esta necessidade, a transformada inversa de Laplace por ser obtida numericamente, conforme descrito em Sheng, Li e Chen (2011).

##### 3.1.1 EDF de dois termos

Uma EDF de dois termos é expressa como:

$$a D_t^\alpha y(t) + b y(t) = u(t), \quad (3.2)$$

onde  $a$  e  $b$  são coeficientes, constantes, da equação e  $u(t)$  o termo de não homogeneidade.

Considerando uma EDF de dois termos onde  $u(t) = C$ , com  $C \in \mathbb{R}^*$  e condição inicial igual a zero,  $y(0) = 0$ , a partir da (3.2) obtêm-se o seguinte problema de valor

inicial fracionário (PVIF):

$$\begin{aligned} aD_t^\alpha y(t) + by(t) &= C \\ y(0) &= 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

A solução de (3.3) pode ser obtida através da transformada de Laplace:

$$\begin{aligned} a\mathcal{L}[y^\alpha(t)] + b\mathcal{L}[y(t)] &= \mathcal{L}[C] \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathcal{L}[y(t)] &= \frac{\frac{C}{a}}{s(s^\alpha + b)} \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathcal{L}[y(t)] &= \frac{C}{s(as^\alpha + b)} = \frac{\frac{C}{a}}{s(s^\alpha + \frac{b}{a})}. \end{aligned}$$

Aplicando a Transformada inversa de Laplace e utilizando a equação (2.25), a solução da equação (3.3) é dada por:

$$y(t) = \frac{C}{a}\varepsilon_0\left(t, -\frac{b}{a}; \alpha, \alpha + 1\right) = \frac{C}{a}t^\alpha E_{\alpha, \alpha+1}\left(-\frac{b}{a}t^\alpha\right) \quad (3.4)$$

que é a solução exata de uma EDF de dois termos com coeficientes constantes e  $u(t)$  também constante escrita em termos da função de Mittag-Leffler de dois parâmetros.

### 3.1.2 EDF de três termos

Uma EDF de três termos é expressa da seguinte forma:

$$a_2D_t^{\alpha_2} y(t) + a_1D_t^{\alpha_1} y(t) + a_0 y(t) = u(t). \quad (3.5)$$

A solução de uma EDF de três termos, mesmo que em casos particulares é muito complexa de ser encontrada, pela dificuldade em encontrar a transformada inversa, visto que para solucionar as EDF's o método mais utilizado é a transformada de Laplace. Deste modo, as EDF's de três termos, neste trabalho, serão tratadas apenas do ponto de vista numérico.

## 3.2 Solução Numérica das EDF's

As soluções numéricas das EDF's de dois termos (3.3) e de três termos (3.5) são obtidas a partir da implementação numérica da derivada fracionária pelo método de Grünwald-Letnikov.

### 3.2.1 Método de Grünwald-Letnikov

O método de Grünwald-Letnikov é um método numérico para calcular a derivada de Grünwald-Letnikov, de ordem  $\alpha$ , nos pontos  $kh$ , com  $k = 1, 2, \dots$  através da

discretização:

$${}^{GL}D_{t_k}^{\alpha} y(t) \approx h^{-\alpha} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{\alpha}{j} y(t_k - j) = h^{-\alpha} \sum_{j=0}^k c_j^{(\alpha)} y(t_k - j), \quad (3.6)$$

onde  $t_k = kh$  e  $h$  é o passo adotado no cálculo e  $c_j^{(\alpha)}$   $j = 0, 1, 2, \dots, k$  são os coeficientes binomiais, dados por:

$$c_0^{(\alpha)} = 1, \quad c_j^{(\alpha)} = \left(1 - \frac{1 + \alpha}{j}\right) c_{j-1}^{(\alpha)}, \quad (3.7)$$

os quais podem ser descritos pela função gama como:

$$(-1)^j \binom{\alpha}{j} = (-1)^j \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(j + 1)\Gamma(\alpha - j + 1)} = \frac{\Gamma(j - \alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(j + 1)}. \quad (3.8)$$

Embora essa discretização seja baseada na formulação da derivada fracionária de Grünwald-Letnikov, para uma ampla classe de funções, as formulações de Riemann-Liouville, Caputo e Grünwald-Letnikov são equivalentes sob condições iniciais nulas,  $f(a) = 0$ .

### 3.2.2 Discretização das EDF's de dois e três termos

Partindo da equação (3.1), a discretização da EDF's de três termos, equação (3.8) é dada por:

$$\frac{a_2}{h^{\alpha_2}} \sum_{j=0}^k c_j^{(\alpha_2)} y(t_k - j) + \frac{a_1}{h^{\alpha_1}} \sum_{j=0}^k c_j^{(\alpha_1)} y(t_k - j) + a_0 y(t_k) = u(t_k). \quad (3.9)$$

De modo a explicitar  $y(t_k)$ , a equação (3.9) pode ser reescrita como:

$$\frac{a_2}{h^{\alpha_2}} c_0^{(\alpha_2)} y(t_k) + \frac{a_2}{h^{\alpha_2}} \sum_{j=1}^k c_j^{(\alpha_2)} y(t_k - j) + \frac{a_1}{h^{\alpha_1}} c_0^{(\alpha_1)} y(t_k) + \frac{a_1}{h^{\alpha_1}} \sum_{j=1}^k c_j^{(\alpha_1)} y(t_k - j) + a_0 y(t_k) = u(t_k), \quad (3.10)$$

que, isolado  $y(t_k)$  resulta em:

$$y(t_k) = \frac{u(t_k) - \frac{a_2}{h^{\alpha_2}} \sum_{j=1}^k c_j^{(\alpha_2)} y(t_k - j) - \frac{a_1}{h^{\alpha_1}} \sum_{j=1}^k c_j^{(\alpha_1)} y(t_k - j)}{\frac{a_2}{h^{\alpha_2}} + \frac{a_1}{h^{\alpha_1}} + a_0} \quad (3.11)$$

onde  $t_k = kh$  com  $k = 1, 2, \dots, N$ , para  $N = \frac{T}{h}$ , e  $T$  sendo o limitante superior do intervalo de interesse e  $c_j^{(\alpha)}$ , ( $j = 0, 1, 2, \dots, k$ ) são os coeficientes binomiais calculados de acordo com (3.7) ou (3.8).

A equação (3.11) é a solução numérica de uma EDF de três termos e também da EDF de dois termos, no caso particular em que  $\alpha_1 = \alpha$ ,  $\alpha_2 = 0$ ,  $a_1 = a$  e  $a_0 = b$ .

### 3.3 Implementação numérica das soluções no MATLAB

Esta parte do trabalho trata da implementação numérica e análise das soluções das EDF's, equação (3.11), utilizando o software MATLAB, para alguns casos particulares. Também são feitos comentários sobre possíveis interpretações e analogias destas soluções através da comparação com resultados conhecidos sobre as soluções das EDO's.

**Exemplo 3.1.** A EDF de dois termos dada por:

$${}_5y^{(\alpha)}(t) + y(t) = 1, \quad (3.12)$$

tem como solução exata a função  $y(t) = \frac{1}{5}t^\alpha E_{\alpha, \alpha+1}(-\frac{1}{5}t^\alpha)$ .

Nesta solução, observa-se que, ao variar o valor de  $\alpha$  tem-se uma nova EDF e conseqüentemente uma nova solução, como no caso particular para  $\alpha = 0,25$ , cuja solução é:

$$y(t) = \frac{1}{5}t^{0,25} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(0,25k + 1, 25)}.$$

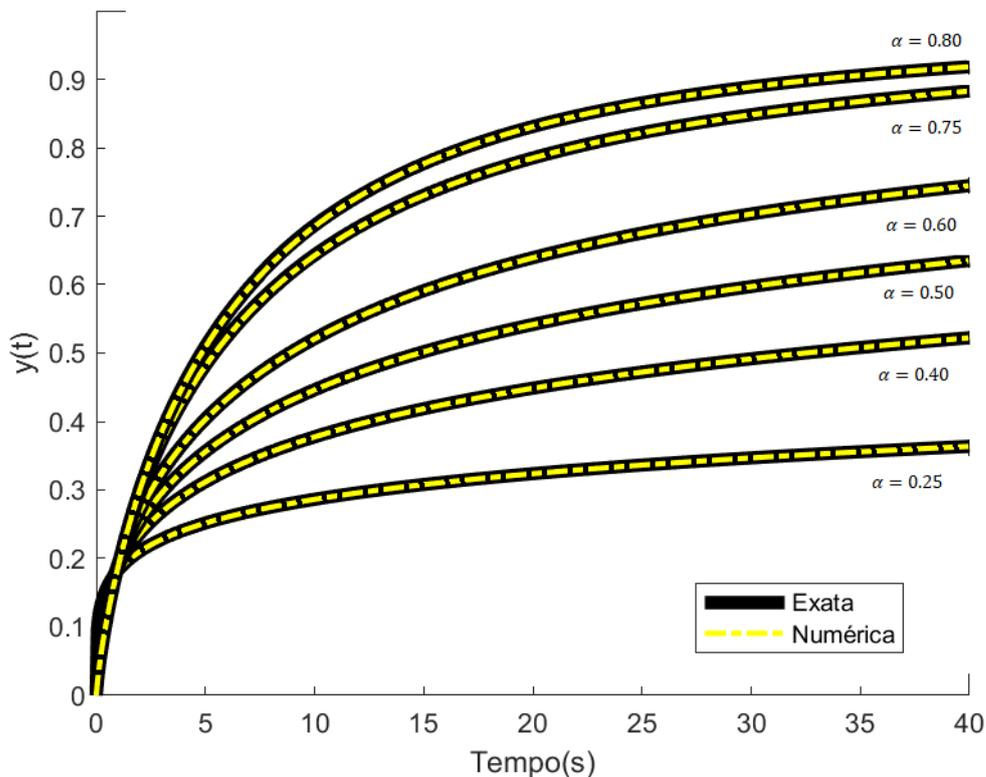


Figura 2 – Gráfico das soluções, exata e numérica, de  ${}_5y^{(\alpha)}(t) + y(t) = 1$  para diferentes valores de  $\alpha$ .

A Figura 2 apresenta a solução exata para  $\alpha = [0,25; 0,40; 0,50; 0,60; 0,75; 0,80]$ , curvas em preto, bem como a solução numérica, curvas em amarelo, obtidas através da equação (3.11) dentro do intervalo  $t = [0, 40]$ .

Em relação ao método numérico utilizado para se obter as soluções da equação (3.12), pode-se perceber, visualmente, que ele foi muito eficiente visto que para todos os casos as soluções numéricas coincidiram com as soluções exatas para os diferentes valores de  $\alpha$ .

Além disso, pode-se perceber que conforme o valor de  $\alpha$  se aproxima de 1, as curvas se assemelham cada vez mais à curva que descreve a equação da carga de um capacitor. O que era de se esperar, pois quando  $\alpha$  se aproxima de 1 a função de Mittag-Leffler se aproxima da função exponencial que é a solução da equação de carga de um capacitor.

**Exemplo 3.2.** Olhando novamente para uma EDF de dois termos, mas desta vez adotando  $a = 3$ ,  $b = 1$ ,  $C = 1$  e  $\alpha = 1,5$ , obtêm-se então

$$3y^{(1,5)}(t) + y(t) = 1 \quad (3.13)$$

que tem sua solução exata dada por:

$$y(t) = \frac{1}{3} t^{1,5} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(1, 5k + 2, 5)} \quad (3.14)$$

e solução numérica dada pela equação (3.11).

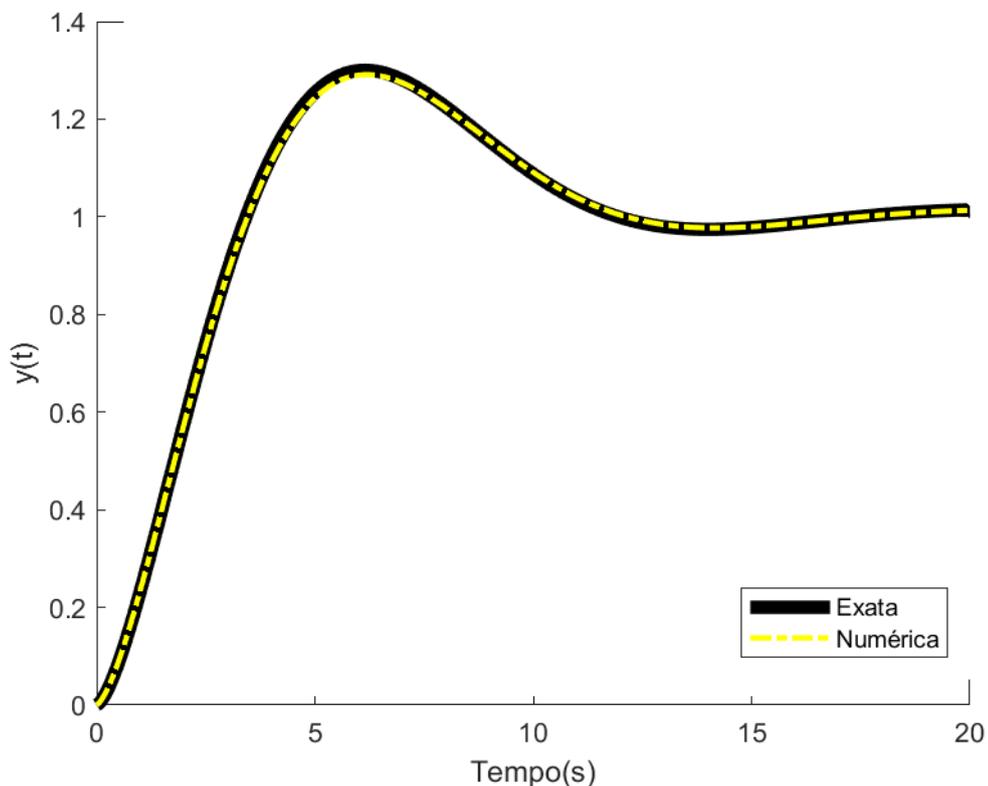


Figura 3 – Gráfico das soluções, exata e numérica, de  $3y^{(1,5)}(t) + y(t) = 1$ .

Pode-se observar na Figura 3 que, assim como no Exemplo (3.1), o método numérico adotado apresentou, visualmente, bons resultados, uma vez que as soluções exatas e numéricas coincidem em todo o intervalo de  $t$  considerado.

Também é possível notar que a solução dada por (3.14) apresenta semelhanças com a curva de solução de um oscilador harmônico crítico. Isto permite conjecturar que a Equação (3.14) pode ser interpretada como o oscilador harmônico crítico fracionário, dados os devidos ajustes nas unidades dos coeficientes.

**Exemplo 3.3.** Considerando agora uma EDF de três termos, assim como definida em (3.8) com  $a_2 = 0,8$ ,  $a_1 = 0,5$ ,  $a_0 = 1$ ,  $\alpha_2 = 2,2$ ,  $\alpha_1 = 0,9$  e  $u(t) = 1$  tem-se:

$$0,8y^{(2,2)}(t) + 0,5y^{(0,9)}(t) + y(t) = 1. \quad (3.15)$$

Tomando como condições iniciais  $y(0) = y'(0) = 0$ , a solução numérica da Equação (3.15) pode ser observada na Figura (4).

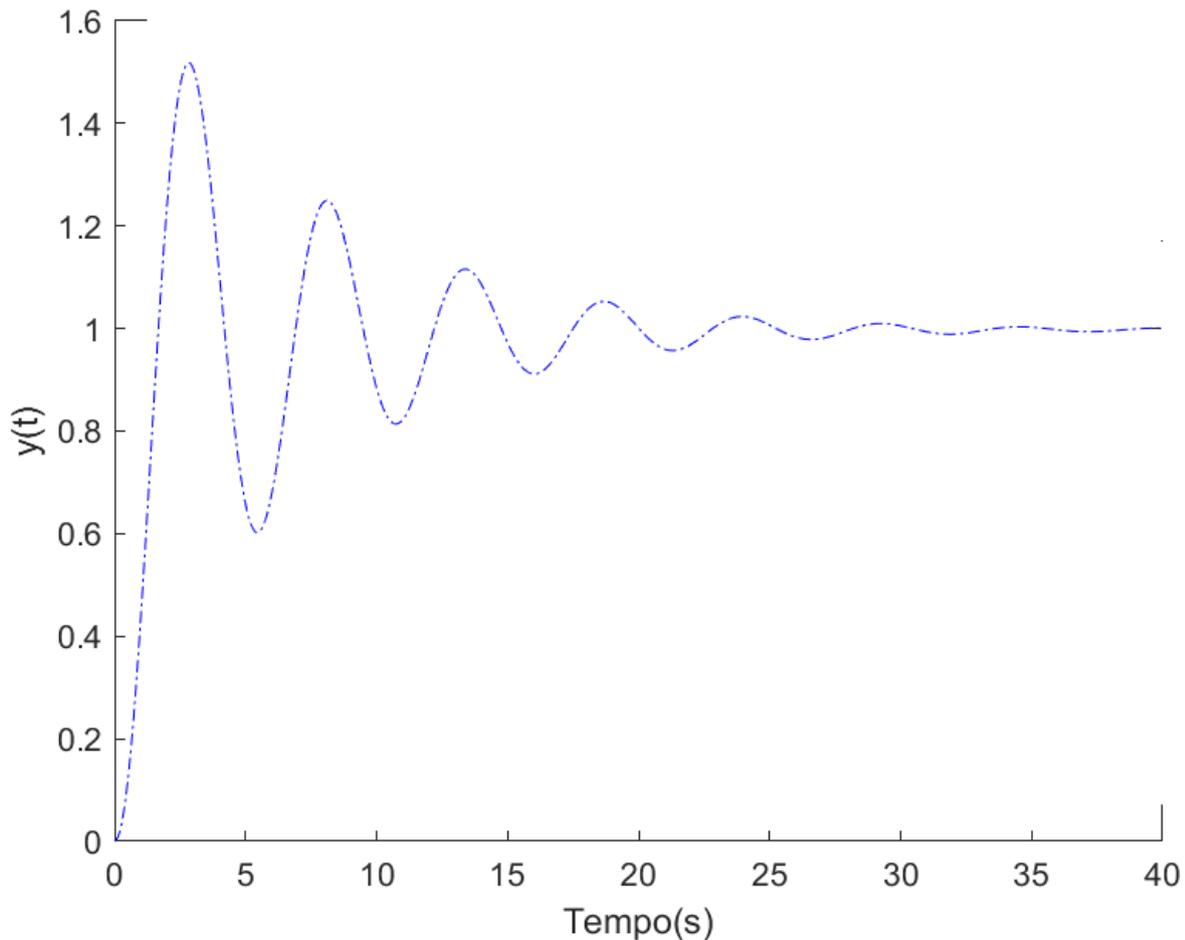


Figura 4 – Solução numérica de  $0,8y^{(2,2)}(t) + 0,5y^{(0,9)}(t) + y(t) = 1$ .

Na Figura 4 é possível observar uma oscilação em torno do ponto  $y = 1$ , muito semelhante ao resultado obtido no caso do oscilador harmônico amortecido obtido, quando  $\alpha_2 = 2$  e  $\alpha_1 = 1$ .

Este resultado também permite conjecturar que a Equação (3.15) em conjunto com as condições iniciais  $y(0) = y'(0) = 0$  representem o oscilador harmônico amortecido fracionário, dados os devidos ajustes nas unidades dos coeficientes.

Com isto, nos exemplos trabalhados nesta seção, foi possível perceber que mesmo resolvendo equações diferenciais fracionárias, obtêm-se resultados similares aos vistos nos casos das equações diferenciais ordinárias.

Camargo e Oliveira (2015) e Herrmann (2011) apresentam diversos problemas aplicados em suas versões de ordem inteira e fracionária e também mostram que é possível observar novas características de alguns problemas a partir das formulações fracionárias. Em especial, nas modelagens fracionárias eles mostram que o oscilador harmônico fracionário descreve com mais precisão a realidade, se comparado com a modelagem de ordem inteira.



## CONCLUSÃO

O cálculo fracionário assim como visto em Camargo e Oliveira (2015), tem grande aplicabilidade nas mais diversas áreas da ciência, tal como Biologia, Física, Engenharia, dentre outras.

Com o desenvolvimento deste trabalho, foi possível perceber a existência de uma versatilidade, no que diz respeito às formulações de derivadas e integrais fracionárias. Mesmo possuindo características em comum, suas diferenças possibilitam selecionar a formulação a ser utilizada de acordo com o problema em que se deseja aplicá-la. Por exemplo, a diferença de resultados que se obtém a partir da derivada de uma função constante na formulação de Riemann-Liouville, que não é nula, e na de Caputo, que é nula. Isto não deve ser visto como um problema, mesmo que os resultados sejam distintos entre si e entre o cálculo de ordem inteira. Deste modo, a escolha da formulação a ser utilizada dependerá intrinsecamente do problema em estudo.

Além disso, também foi possível perceber que o cálculo fracionário preserva características em relação aos problemas de ordem inteira, visto que a solução de algumas EDF's tem comportamento semelhante com as soluções encontradas nos problemas modelados com o cálculo de ordem inteira.

Por fim, como trabalhos futuros, pretende-se continuar estudando aplicações do cálculo fracionário a problemas em que, utilizando esta ferramenta, seja possível aprimorar sua modelagem obtendo soluções cada vez mais próximas da realidade e também estudar o chamado efeito memória, visto em Rodrigues e Oliveira (2015).



## Referências

- BONI, M. D. T. M. Cálculo Fracionário aplicado às equações horárias do movimento e outras aplicações. Dissertação (Mestrado) — Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia São Paulo - Campus São Paulo, São Paulo, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 23.
- CAMARGO, R. F. Cálculo Fracionário e Aplicações. 135 p. Tese (Doutorado) — UNICAMP, Campinas, 2009. Citado 3 vezes nas páginas 21, 22 e 23.
- CAMARGO, R. F.; OLIVEIRA, E. C. de. Cálculo Fracionário. 1. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2015. Citado 7 vezes nas páginas 19, 20, 21, 23, 33, 45 e 47.
- DEBNATH, L.; BHATTA, D. Integral Transforms and Their Applications. 2. ed. New York: Chapman Hall/CRC, 2007. Citado na página 26.
- DIMITROV, Y. Numerical approximations for fractional differential equations. Journal of Fractional Calculus and Applications, p. 1–45, 2014. Citado na página 39.
- DIMITROV, Y.; DIMOV, I.; TODOROV, V. Numerical solutions of ordinary fractional differential equations with singularities. Efficient Numerical Methods with an Improved Rate of Convergence for Applied Computational Problems, 2018. Citado na página 39.
- EVES, H. Introdução à História da Matemática. 3. ed. São Paulo: Unicamp, 2004. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 20.
- GARRAPPA, R. Numerical solution of fractional differential equations: A survey and a software tutorial. Mathematics, 2018. Citado na página 39.
- GRIGOLETTO, E. C. Equações Diferenciais Fracionárias e as Funções de Mittag-Leffler. 152 p. Tese (Doutorado) — UNICAMP, Campinas, 2014. Citado na página 22.
- GRIGOLETTO, E. C.; OLIVEIRA, E. C. de. Fractional version of the fundamental theorem of calculus. Applied Mathematics, n. 4, p. 23–33, 2013. Citado na página 22.
- HERRMANN, R. Fractional Calculus: An Introduction for Physicists. 2. ed. New Jersey: World Scientific, 2011. Citado na página 45.
- KILBAS, A.; SRIVASTAVA, H. M.; TRUJILLO, J. J. Theory and Application of Fractional Differential Equations. 1. ed. Amsterdam: Elsevier B.V., 2006. Citado na página 23.
- LORENZO, C.; HARTLEY, T. Initialization, conceptualization, and application in the generalized fractional calculus. NASA/TP-1998-208415, p. 1–112, 1998. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 38.
- OLDHAM, K.; SPANIER, J. The Fractional Calculus: Theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order. 2. ed. New York: Dover Books, 2006. Citado na página 34.

- PETRAS, I. Fractional derivatives, fractional integral and fractional differential equations in matlab. Disponível em: <http://www.intechopen.com/books/engineering-education-and-research-usingmatlab/fractional-derivatives-fractional-integrals-and-fractional-differential-equations-in-> Acesso em: 20 de maio de 2020., 2011. Citado 3 vezes nas páginas 38, 39 e 51.
- PODLUBNY, I. Fractional Differential Equations. 1. ed. San Diego, California-USA: Mathematics in Science and Engineering, 1999. v. 198. Citado 2 vezes nas páginas 38 e 39.
- RAMOS, P. F. P.; CAMARGO, R. de F. Cálculo fracionário aplicado ao problema da tautócrona. Revista Eletrônica Paulista de Matemática, 2012. Citado na página 22.
- RICIERI, A. P. Derivada Fracionária, Transformada de Laplace e Outros Bichos. 1. ed. São José dos Campos: Prandiano, 1993. Citado na página 21.
- RODRIGUES, F. G.; OLIVEIRA, E. C. de. Introdução às técnicas do cálculo fracionário para estudar os modelos da física matemática. Revista Brasileira de Ensino de Física, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 47.
- ROSS, B. Fractional Calculus and its Applications. 1. ed. West Haven: Lectures Notes in Mathematics, 1975. v. 457. Citado na página 21.
- ROSS, B.; MILLER, K. S. An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations. 1. ed. New York: John Wiley and Sons, 1993. Citado na página 36.
- SAMKO, S.; KILBAS, A.; MARICHEV, O. Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications. 1. ed. Amsterdam: Gordon and Breach Science Publishers S.A., 1993. Citado na página 23.
- SHENG, H.; LI, Y.; CHEN, Y. Q. Application of numerical inverse laplace transform algorithms in fractional calculus. Journal of the Franklin Institute, v. 348, p. 315–330, 2011. Citado na página 39.
- SOARES, J. C. A. Cálculo Fracionário e as Equações de Evolução. 98 p. Tese (Doutorado) — UNICAMP, Campinas, 2016. Citado na página 22.
- SOUSA, J. V. da C.; JUNIOR, J. V.; OLIVEIRA, E. C. de. Cálculo de ordem não inteira para iniciantes. Notas em Matemática Aplicada, v. 90, 2020. Citado na página 30.
- ZILL, D. G. Equações Diferenciais. 3. ed. São Paulo: Editora Pearson Makron Books, 2001. v. 1. Citado na página 29.

## APÊNDICE A – Implementação dos algoritmos no software MATLAB

Este apêndice traz uma breve introdução sobre como implementar os algoritmos utilizados no trabalho, através do software MATLAB. Sendo estes algoritmos os que implementam a função Gama, a função de Mittag-Leffler, a solução numérica e exata de uma EDF de 2 termos e a solução numérica de uma EDF de 3 termos. Todas as funções a serem utilizadas podem ser encontradas no artigo de Petras (2011).

### Função Gama

A função gama pode ser implementada utilizando a sintaxe `[]=gamma()`. Ou seja, para encontrar o valor de  $\Gamma(\frac{1}{2})$ , basta fazer:

```
>> x=gamma(1/2)

x =

    1.7725
```

Também é possível construir, a partir deste algoritmo, a função Gama em um certo intervalo. Por exemplo, no intervalo  $-8 \leq x \leq 8$ , ao fazer:

```
>> x=-8:0.01:8;
>> y=gamma(x);
>> plot(x,y);
```

### Função de Mittag-Leffler

A função de Mittag-Leffler de um e dois parâmetros pode ser implementada, a partir da sintaxe `[]=mlf(alpha,beta,x,Z)`, onde alpha e beta são os dois parâmetros da função, x a variável e Z o expoente da precisão da aproximação  $10^{-Z}$ . Por exemplo, pode-se construir a função de Mittag-Leffler  $E_{1,1}(x)$ , no intervalo  $-10 \leq x \leq 10$ , com precisão de  $10^{-7}$ , da seguinte forma:

```
>> x=-10:0.01:10;
>> y=mlf(1,1,x,7);
>> plot(x,y);
```

O algoritmo utilizado para implementação da função de Mittag-Leffler, tem precisão padrão de  $10^{-6}$ .

### Solução exata da EDF de dois termos

Seja a EDF de dois termos, com condição inicial igual a zero,  $y(0) = 0$ , da forma

$$a y^{(\alpha)}(t) + b y(t) = C,$$

que tem sua solução dada, através da Transformada de Laplace, por:

$$y(t) = \frac{C}{a} t^\alpha E_{\alpha, \alpha+1} \left( -\frac{b}{a} t^\alpha \right)$$

Adotando  $a = 5$ ,  $b = 1$ ,  $C = 1$  e  $\alpha = 0.5$ , obtem-se a EDF

$$5y^{(0.5)} + y(t) = 1,$$

que tem a solução dada por:

$$y(t) = \frac{1}{5} t^{0.5} E_{0.5, 1.5} \left( -\frac{1}{5} t^{0.5} \right)$$

É possível implementar a solução dessa EDF, da seguinte maneira:

```
>> a=5;b=1;alpha=0.5; C=1;
>> t=0:0.05:20;
>> y=(C/a)*t.^(alpha).*mlf(alpha,alpha+1,((-b/a)*t.^(alpha)));
>> plot(t,y);
```

### Solução numérica das EDF's de dois e três termos

Seja uma EDF de três termos, da forma

$$a_2 y^{(\alpha_2)}(t) + a_1 y^{(\alpha_1)}(t) + a_0 y(t) = u(t)$$

Com condição inicial igual a zero,  $y(0) = 0$ . Através da discretização da derivada de Grünwald-Letnikov obtem-se a solução como sendo:

$$y(t_k) = \frac{u(t_k) - \frac{a_2}{h^{\alpha_2}} \sum_{j=1}^k c_j^{(\alpha_2)} y(t_k - j) - \frac{a_1}{h^{\alpha_1}} \sum_{j=1}^k c_j^{(\alpha_1)} y(t_k - j)}{\frac{a_2}{h^{\alpha_2}} + \frac{a_1}{h^{\alpha_1}} + a_0},$$

no caso particular em que  $a_1 = 0$  temos uma EDF de dois termos.

Adotando  $a_2 = 5$ ,  $a_1 = 3$  e  $a_0 = 1$ ,  $\alpha_2 = 0.25$ ,  $\alpha_1 = 0.5$  e  $u(t) = 1$ , temos a seguinte EDF:

$$5y^{(0.25)}(t) + 3y^{(0.5)}(t) + 1y(t) = 1,$$

que pode ter sua solução encontrada através da seguinte implementação numérica:

```

a2=5; a1=3; a0=1.0; alpha2=0.25; alpha1=0.5;
h=0.05; TSim=40;
n=round(TSim/h);
cp1=1; cp2=1; Y0=0; u=1.0;
for j=1:n
c1(j)=(1-(1+alpha1)/j)*cp1;
c2(j)=(1-(1+alpha2)/j)*cp2;
cp1=c1(j); cp2=c2(j);
end
Y1(1)=Y0;
for i=2:n
Y1(i)=(u - (a2)*h^(-alpha2)*memo(Y1,c2,i)- ...
(a1)*h^(-alpha1)*memo(Y1,c1,i))/(a2/(h^alpha2)+a1/(h^alpha1)+a0);
end
T=0:h:39.95;
plot(T,Y1);

function [yo] = memo(r, c, k)
%
temp = 0;
for j=1:k-1
temp = temp + c(j)*r(k-j);
end
yo = temp;
end

```

Onde a sintaxe **memo (r, c, k)** é a função que representa o efeito de memória que permite calcular os coeficientes binomiais da solução numérica da EDF, através do algoritmo que utiliza a discretização da derivada de Grünwald-Letnikov.