



INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
DE SÃO PAULO  
Campus São Paulo

## **UMA ABORDAGEM FUZZY DO ESCOAMENTO DA ÁGUA EM UM TANQUE CILÍNDRICO**

MATHEUS HENRIQUE PEREIRA SILVA

Trabalho de Conclusão de Curso Superior de Licenciatura em  
Matemática, sob a orientação da Profa. Dra. Mônica Helena Ribeiro  
Luiz e do Prof. Dr. Marco Aurélio Granero Santos

IFSP  
São Paulo  
2022



MATHEUS HENRIQUE PEREIRA SILVA

# **UMA ABORDAGEM FUZZY DO ESCOAMENTO DA ÁGUA EM UM TANQUE CILÍNDRICO**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo – IFSP, em cumprimento ao requisito parcial para obtenção do grau acadêmico de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Mônica Helena Ribeiro Luiz  
Coorientador: Prof. Dr. Marco Aurélio Granero Santos

São Paulo  
2022

Catalogação na fonte  
Biblioteca Francisco Montojos - IFSP Campus São Paulo  
Dados fornecidos pelo(a) autor(a)

s586a Silva, Matheus Henrique Pereira  
Uma abordagem fuzzy do escoamento da água em um tanque cilíndrico / Matheus Henrique Pereira Silva. São Paulo: [s.n.], 2022.  
51 f.

Orientadora: Mônica Helena Ribeiro Luiz  
Co-orientador: Marco Aurélio Granero Santos

() - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, IFSP, 2022.

1. Fuzzy. 2. Modelagem Matemática. 3. Hidrodinâmica. 4. Sistema Baseado Em Regras Fuzzy. I. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo II. Título.

CDD

ATA N.º 1/2022 - SAM-SPO/DCM-SPO/DRG/SPO/IFSP

Ata de Defesa de Trabalho de Conclusão de Curso - Graduação

Na presente data realizou-se a sessão pública de defesa do Trabalho de Conclusão de Curso intitulado **Uma abordagem fuzzy do escoamento da água em um tanque cilíndrico** apresentado(a) pelo(a) aluno(a) **Matheus Henrique Pereira Silva (SP3003124)** do Curso **SUPERIOR EM LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**, (Câmpus Câmpus São Paulo). Os trabalhos foram iniciados às 14:00 pelo(a) Professor(a) presidente da banca examinadora, constituída pelos seguintes membros:

Membros	IES	Presença (Sim/Não)	Aprovação/Conceito (Quando Exigido)
Monica Helena Ribeiro Luiz (Orientadora)	IFSP	Sim	10,0
Marco Aurelio Granero Santos (Coorientador Interno)	IFSP	Sim	10,0
Flavia Milo dos Santos (Examinadora Interna)	IFSP	Sim	10,0
Larissa Marques Sartori (Examinadora Externa)	FGV	Sim	10,0

Observações:

A banca examinadora, tendo terminado a apresentação do conteúdo da monografia, passou à arguição do(a) candidato(a). Em seguida, os examinadores reuniram-se para avaliação e deram o parecer final sobre o trabalho apresentado pelo(a) aluno(a), tendo sido atribuído o seguinte resultado:

Aprovado(a)                       Reprovado(a)                      Nota (quando exigido): 10,0

Proclamados os resultados pelo presidente da banca examinadora, foram encerrados os trabalhos e, para constar, eu lavrei a presente ata que assino juntamente com os demais membros da banca examinadora.

Câmpus São Paulo, 12 de janeiro de 2022

Avaliador externo:  Sim  Não

Assinatura: *Larissa Marques Sartori*

Documento assinado eletronicamente por:

- **Monica Helena Ribeiro Luiz**, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 12/01/2022 20:53:33.
- **Flavia Milo dos Santos**, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 13/01/2022 08:59:00.
- **Marco Aurelio Granero Santos**, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 13/01/2022 09:19:02.

Este documento foi emitido pelo SUAP em 12/01/2022. Para comprovar sua autenticidade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse <https://suap.ifsp.edu.br/autenticar-documento/> e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 283167  
Código de Autenticação: 9e12413d65



À minha família e amigos.

## **Agradecimentos**

Aos meus orientadores, Mônica Helena e Marco Granero, por me orientarem nesta experiência incrível, por toda paciência e por todo conhecimento compartilhado.

À minha mãe, Maria do Socorro, que sempre me incentivou estudar, por me apoiar e por ser a pessoa que me ensina a ser melhor todos os dias.

Aos amigos que conheci e que levarei para a vida: Danielle, Douglas, Kátia e Victor. Obrigado por cada minuto que compartilhamos estudando e nos divertindo, o curso certamente não seria o mesmo sem vocês.

Ao IFSP Campus São Paulo pela oportunidade da graduação em um excelente curso, aos colegas que participaram comigo de toda trajetória e aos professores por toda dedicação e inspiração nesta profissão.

À todos, muito obrigado!





## Resumo

Neste trabalho é apresentado um modelo p-fuzzy para descrever o escoamento da água em um tanque cilíndrico através de um orifício circular. Para a elaboração do modelo foram utilizadas técnicas de Modelagem Matemática e conceitos da Teoria dos Conjuntos Fuzzy com ênfase na construção do modelo por meio de um Sistema Baseado em Regras Fuzzy (SBRF) e um sistema p-fuzzy. Nesta construção, foram utilizados os dados experimentais coletados por Santos (2021) para a realização do processo de Modelagem Matemática. A escolha da abordagem fuzzy foi feita por permitir considerar subjetividades inerentes às variáveis e aos parâmetros do fenômeno. Inicialmente, são apresentados conceitos gerais da Modelagem Matemática, seguido da apresentação de alguns conceitos da Teoria dos Conjuntos Fuzzy necessários para a elaboração do modelo capaz de representar o fenômeno real. Por fim, é feita a construção do modelo p-fuzzy utilizando os dados obtidos do experimento.

**Palavras-chaves:** Escoamento de Fluido; Modelagem Matemática; Sistema Baseado em Regras Fuzzy; Sistema P-Fuzzy; Teoria dos Conjuntos Fuzzy.



## Abstract

This work presents a p-fuzzy model to describe the flow of water in a cylindrical tank through a circular hole. For the elaboration of the model were used techniques of Mathematical Modeling and concepts of Fuzzy Set Theory with emphasis on the construction of the model by means of a Fuzzy Rules Based System (FRBS) and a p-fuzzy system. In this construction, we used the experimental data collected by Santos (2021) to perform the Mathematical Modeling process. The choice of the fuzzy approach was made to allow considering subjectivities inherent to the variables and parameters of the phenomenon. Initially, general concepts of Mathematical Modeling are presented, followed by the presentation of some concepts of Fuzzy Set Theory necessary for the elaboration of the model capable of representing the real phenomenon. Finally, the p-fuzzy model is constructed using the data obtained from the experiment.

**Key Words:** Fluid Flow; Mathematical Modeling; Fuzzy Rules Based System; P-Fuzzy System; Fuzzy Set Theory.



## Lista de ilustrações

Figura 1 – Analogia do fotógrafo. . . . .	20
Figura 2 – Diagrama que representa um processo de modelagem. . . . .	21
Figura 3 – Etapas do processo de modelagem. . . . .	22
Figura 4 – Representação gráfica da função característica $X_A(x)$ da equação (2.3). . . . .	27
Figura 5 – Representação gráfica da função de pertinência $\mu_F(x)$ da equação (2.4). . . . .	27
Figura 6 – Representação gráfica do 0,6-nível da função de pertinência $\mu_F(x)$ da equação (2.4). . . . .	29
Figura 7 – Representação gráfica do suporte da função de pertinência $\mu_F(x)$ da equação (2.4). . . . .	30
Figura 8 – Representação gráfica do número triangular fuzzy (2; 3; 4). . . . .	31
Figura 9 – Representação gráfica do número trapezoidal fuzzy (2; 3; 4; 5). . . . .	32
Figura 10 – Estrutura de um Sistema Baseado em Regras Fuzzy. . . . .	33
Figura 11 – Ilustração do método de inferência de Mamdani. . . . .	35
Figura 12 – Arquitetura de um sistema p-fuzzy. . . . .	36
Figura 13 – Escoamento de água em um tanque cilíndrico. . . . .	37
Figura 14 – Dados do experimento 1 do trabalho de Santos (2021). . . . .	40
Figura 15 – Variável de entrada: Altura. . . . .	41
Figura 16 – Variável de saída: Variação da altura. . . . .	41
Figura 17 – Representação dos conjuntos fuzzy de entrada e saída considerando a altura 5 <i>cm</i> . . . . .	42
Figura 18 – Representação da saída. . . . .	43
Figura 19 – Esquema p-fuzzy. . . . .	44
Figura 20 – Modelo p-fuzzy e dados do experimento 1. . . . .	45



## Sumário

<b>Introdução</b> . . . . .	<b>15</b>
<b>1 Modelagem Matemática</b> . . . . .	<b>19</b>
<b>2 Teoria dos Conjuntos Fuzzy</b> . . . . .	<b>25</b>
2.1 Subconjuntos Fuzzy . . . . .	25
2.2 Números Fuzzy . . . . .	30
2.3 Sistemas Baseados em Regras Fuzzy . . . . .	32
2.3.1 Método de Inferência de Mamdani . . . . .	34
2.3.2 Método de Defuzzificação Centro de Gravidade . . . . .	35
2.4 Sistemas P-fuzzy . . . . .	36
<b>3 Problema Hidrodinâmico</b> . . . . .	<b>37</b>
3.1 Solução a partir da Equação Bernoulli . . . . .	37
3.2 Aplicação do sistema p-fuzzy . . . . .	38
<b>Considerações Finais</b> . . . . .	<b>47</b>
<b>Referências</b> . . . . .	<b>49</b>





## Introdução

A curiosidade e a busca pelo conhecimento instigam a humanidade a procurar maneiras de compreender todo tipo de fenômeno com qual se tem contato. A história mostra que para entender um simples fenômeno, como a produção de fogo, foi necessário, previamente, observar e analisar como a chama se iniciava e se alimentava, por exemplo. Esse conhecimento, obtido da observação, foi fundamental para que o elemento fogo pudesse ser controlado e reproduzido outras vezes.

Com o objetivo de compreender os fenômenos que atuam no universo, faz-se necessário adotar algum tipo de metodologia para realizar tais análises. Dessa forma, uma das estratégias possíveis para obter resultados e entender os objetos estudados é utilizar o processo de Modelagem Matemática.

Segundo Bassanezi (2006) o processo de Modelagem Matemática é um meio para conciliar teoria e prática com o objetivo de interpretar as situações reais a fim de explicá-las ou agir sobre elas. Entretanto, é possível para um mesmo fenômeno várias interpretações e, nesse caso, cada modelo utilizará os dados conforme aquele que estiver produzindo-o achar mais conveniente para o estudo.

Ubiratan D'Ambrosio, no prefácio da obra de Bassanezi diz que

[...] a modelagem matemática é matemática por excelência. As origens das ideias centrais da matemática são o resultado de um processo que procura entender e explicar fatos e fenômenos observados na realidade. O desenvolvimento dessas ideias e sua organização intelectual dão-se a partir de elaborações sobre representações do real. (BASSANEZI, 2006, p.10)

Em termos gerais, a Modelagem Matemática é a matemática em caráter investigativo, onde as respostas do problema são obtidas dos parâmetros fornecidos pelo objeto observado. Sendo assim, segundo Bassanezi (2006), a Modelagem Matemática pode ser encarada como método científico de pesquisa e como estratégia de ensino e aprendizagem.

Ao utilizar a Modelagem Matemática como método científico de pesquisa o modelador é estimulado a propor novas ideias e técnicas experimentais para projetar ou extrapolar resultados e, ainda, com base nos métodos utilizados, é possível compensar uma eventual lacuna nos dados do fenômeno.

Para este trabalho, a Modelagem Matemática será utilizada para a interpretação do problema com base na Teoria dos Conjuntos Fuzzy. Segundo Barros e Bassanezi (2010), a Teoria dos Conjuntos Fuzzy foi apresentada por Lofti Asker Zadeh em 1965

e vem ganhando destaque desde então. Essa teoria tem o objetivo de interpretar a subjetividade de termos linguísticos, como “aproximadamente”, “em torno de” etc., de uma forma matemática.

“Esse seria um primeiro passo no sentido de se programar e armazenar conceitos vagos em computadores, tornando possível a produção de cálculos com informações imprecisas” (BARROS; BASSANEZI, 2010, p.12).

É comum a confusão quanto ao real valor de termos linguísticos como “perto”, “longe”, “alto” ou “baixo”. Esses são apenas alguns exemplos de termos linguísticos que, quando quantificados pela lógica clássica, dispõem de imprecisão por serem subjetivos. A partir desse desafio, a ferramenta fuzzy apresenta uma proposta mais eficiente, pois os elementos podem pertencer parcialmente a um ou mais conjuntos.

Um exemplo seria um copo com água. Tem-se que um copo completamente cheio de água está cheio. Após beber um pequeno gole de água o copo está menos cheio do que inicialmente, porém ainda pode-se dizer que é um copo cheio. Nesse caso, o cheio inicial é maior do que o cheio de agora, isto é, pode-se ter ambos os copos pertencendo ao conjunto de copos cheios, contudo o primeiro pertence mais do que o segundo. Assim sendo, passa-se a considerar um grau de pertinência de um elemento a um conjunto, o qual indica o quanto cada elemento pertence ao conjunto.

Dessa forma, é possível modelar por meio da Teoria dos Conjuntos Fuzzy termos linguísticos que geram subjetividade e/ou incertezas que, modeladas adequadamente, podem representar, além de um processo de modelagem mais simples, um resultado mais próximo ao fenômeno observado. Isso significa que, dado um determinado estudo no qual um parâmetro ou uma variável observada possui essa característica de incerteza, é possível aplicar a esse elemento do modelo um tratamento subjetivo com base na Teoria dos Conjuntos Fuzzy.

Inspirado nas propostas de Barros e Bassanezi (2010), que em seu prefácio apresenta ao leitor suas ideias de contrapor modelos determinísticos a modelos mais flexíveis utilizando a Lógica Fuzzy, este trabalho tem o objetivo de modelar, utilizando a Teoria dos Conjuntos Fuzzy, a variação da altura da água em um tanque, quando apenas a gravidade atua no escoamento do líquido, que flui através de um orifício no centro da base do tanque.

Esse problema hidrodinâmico é estudado por meio da teoria de Mecânica dos Fluidos. Santos (2021) apresenta um modelo teórico para esse fenômeno com base nas Equações de Bernoulli e de Navier-Stokes e, ainda em seu trabalho, o autor elabora experimentos com diferentes recipientes para estudar o comportamento do escoamento.

Santos (2021) destaca a complexidade dos temas de Mecânica dos Fluidos

---

e que mesmo um problema relativamente simples de escoamento, como o proposto, gera equações mais elaboradas. Portanto, faz-se necessário algumas simplificações no processo de modelagem realizado por ele, justamente por existir essa dificuldade em determinar ou quantificar algumas variáveis.

Por esse motivo, dadas as incertezas que envolvem o problema, dentre elas o coeficiente de viscosidade e a velocidade instantânea, justifica-se uma alternativa de modelagem utilizando um método que contemple essas subjetividades. Sendo assim, a abordagem escolhida para a elaboração do modelo foi a Teoria dos Conjuntos Fuzzy, mais especificamente, o Sistema Baseado em Regras Fuzzy (SBRF) para a elaboração de um modelo p-fuzzy.

Para alcançar o objetivo deste trabalho, que é elaborar um modelo que alcance resultados fidedignos em relação ao fenômeno físico estudado, conforme Lakatos e Marconi (2003), será utilizada como metodologia a pesquisa bibliográfica alinhada com a proposta da Modelagem Matemática enquanto instrumento de pesquisa. Para isso, o trabalho traz, no primeiro capítulo, uma apresentação da Modelagem Matemática e suas principais contribuições como método científico de pesquisa.

O segundo capítulo contextualizará a Teoria dos Conjuntos Fuzzy e os principais conceitos necessários para a elaboração do SBRF, como os subconjuntos fuzzy, operações dos subconjuntos fuzzy, números fuzzy e outros.

Em seguida, o terceiro capítulo apresenta brevemente o que foi explorado por Santos (2021) na elaboração do modelo teórico, construído por ele, seguido da proposta do modelo utilizando um sistema p-fuzzy com auxílio do *software* Matlab<sup>®</sup>.

Por fim, serão apresentadas algumas considerações acerca do modelo elaborado e dos resultados obtidos, junto a propostas para futuros trabalhos.



## 1 Modelagem Matemática

De forma geral, a Matemática não é perceptível pelos sentidos humanos, na natureza, por exemplo, não é possível vê-la ou tocá-la, apenas imaginá-la. As ideias abstratas obtidas por meio da linguagem matemática são uma forma de comunicação com as demais ciências e uma das maneiras de possibilitar essa comunicação é utilizando os conceitos da Modelagem Matemática.

Segundo Bassanezi (2006), a Modelagem Matemática pressupõe multidisciplinaridade e, portanto, é capaz de superar as barreiras entre as áreas de pesquisa, e ainda sinaliza que é possível perceber isso a partir da ciência contemporânea quando áreas como a Química, Biologia, Economia entre outras, passaram a incluir a Matemática em pesquisas.

A Modelagem Matemática respalda diversas áreas do conhecimento com uma linguagem que facilita a compreensão de um fenômeno observado por meio de um modelo matemático. Este é um método de pesquisa que favorece a interpretação da realidade por meio de artifícios matemáticos. Segundo Bassanezi,

Modelagem Matemática é um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos. É uma forma de abstração e generalização com a finalidade de previsão de tendências. A modelagem consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual. (BASSANEZI, 2006, p.24)

O resultado dessa tradução da realidade é um modelo que, ao ser representado com alguma característica matemática, é chamado de modelo matemático. É importante que este modelo tenha uma linguagem objetiva com ideias claras.

Para Bassanezi (2006, p.20), um modelo matemático é “um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado” e, conforme a Matemática utilizada na elaboração do modelo, o autor o classifica em:

- **Linear ou não linear**

Neste caso, segue as características de suas equações básicas.

- **Estático ou dinâmico**

No modelo estático não há variações no processo, por exemplo, uma forma geométrica. No modelo dinâmico há variações nos estágios do processo, por exemplo, um crescimento populacional.

- **Educacional ou aplicativo**

No modelo educacional, é considerado um número pequeno de variáveis a fim de proporcionar uma experiência para construção de modelos mais elaborados. No modelo aplicativo, é considerado um número maior de variáveis inter-relacionadas, com uma exigência maior de precisão e, conseqüentemente, resultando em modelos mais elaborados.

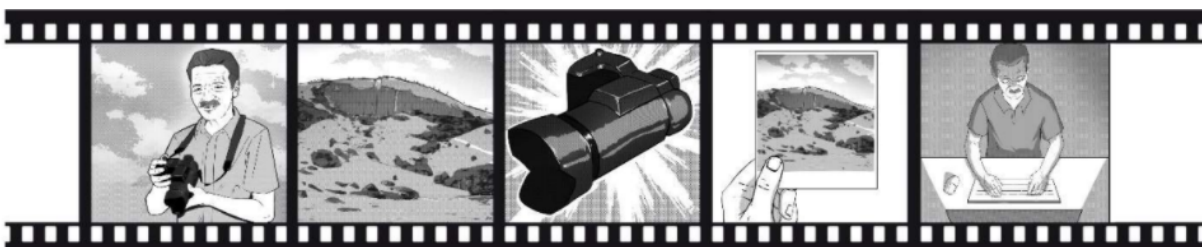
- **Estocástico ou determinístico**

No modelo estocástico, é considerada a probabilidade na dinâmica do seu sistema. No modelo determinístico, é considerado que, com base nas informações já sabidas, é possível prever a dinâmica do sistema.

A eficiência da arte de modelar está vinculada com a assimilação de que a proposta do modelo é aproximar-se da realidade, ou seja, um exagero nas considerações de um sistema pode descaracterizar o modelo do problema prejudicando a proposta da modelagem. Por esse motivo, deve-se pensar no uso adequado da modelagem matemática enquanto método pesquisa, pois seu objetivo é a representação e compreensão do fenômeno estudado.

Um exemplo que ilustra o processo de modelagem matemática e o modelo matemático é a analogia do fotógrafo feita por Santos (2020), apresentada na Figura 1. Nessa analogia, o matemático seria o fotógrafo em busca de uma foto que represente fielmente determinada paisagem. A paisagem seria o fenômeno a ser observado. A câmera utilizada pelo fotógrafo seria o processo de modelagem, pois é com ela que o fotógrafo observa a paisagem. Por fim, a fotografia seria o modelo que representa aquele fenômeno.

Figura 1 – Analogia do fotógrafo.



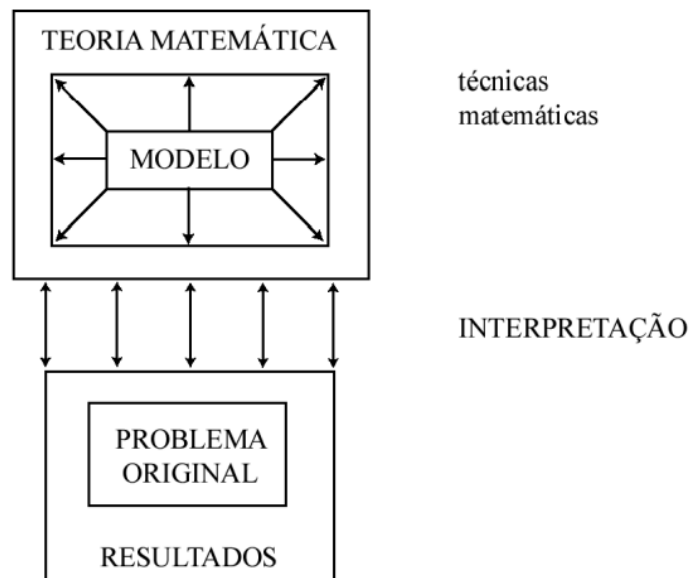
Fonte: Santos (2020).

Nota-se que um outro fotógrafo poderia tirar uma foto daquela mesma paisagem por um outro ângulo ou com uma câmera diferente, isso representaria dois modelos distintos.

De maneira mais técnica, o diagrama da Figura 2 apresenta uma ilustração do processo de Modelagem Matemática. Nele é possível observar que, dado um

problema real, em um contexto teórico próprio, por meio de teorias matemáticas, é estabelecido um modelo matemático – seria como transcrever os dados observados do problema por meio da matemática e equacionar em uma solução que o descreve – e, continuamente, é possível interpretá-lo conforme o problema original.

Figura 2 – Diagrama que representa um processo de modelagem.



Fonte: Bassanezi (2006).

Bassanezi (2006) argumenta que um dos possíveis desafios nesse processo seria a necessidade da construção de um novo ramo da Matemática caso não exista previamente um meio adequado para realizar o estudo. Segundo o autor, “[...] o objetivo (e a esperança) de todo matemático aplicado ao estudar um problema é construir um modelo dentro de uma teoria matemática já desenvolvida e amplamente estudada, que facilite a obtenção de resultados” (BASSANEZI, 2006, p.26).

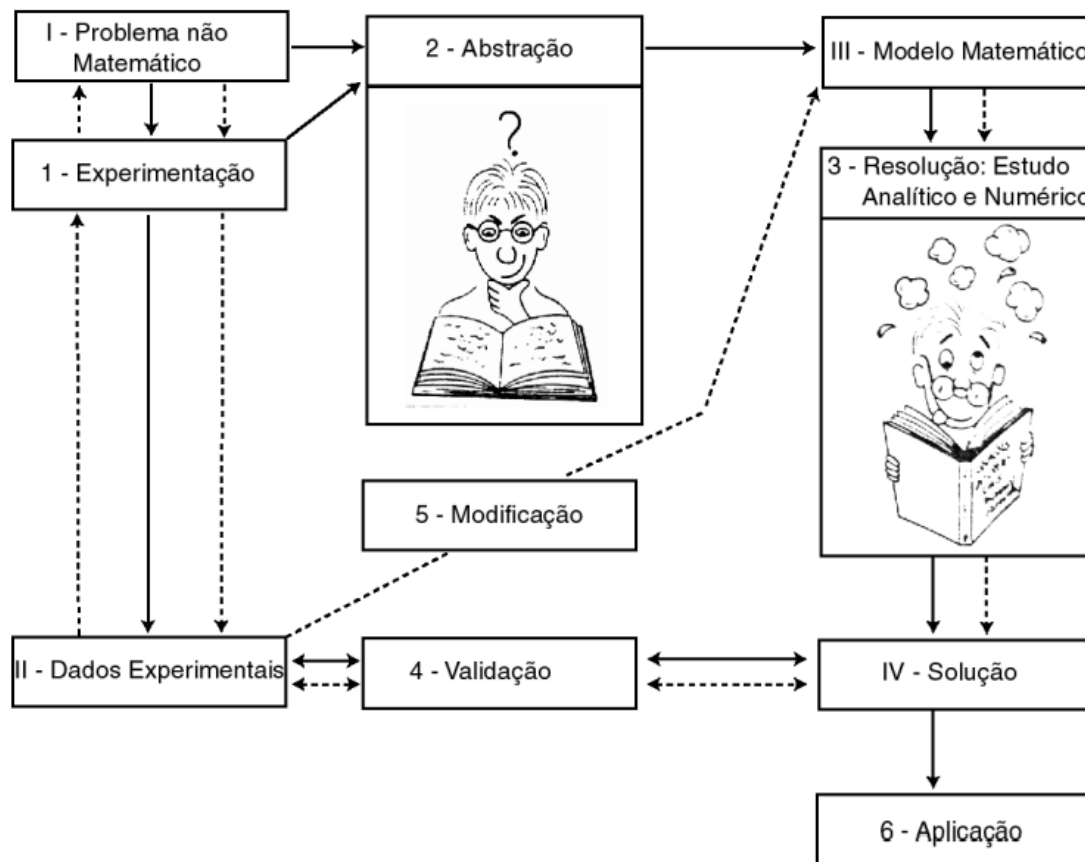
A fim de garantir um processo de modelagem adequado, é definida uma sequência de etapas ilustrada na Figura 3, apresentada por Bassanezi (2006).

As setas contínuas indicam a primeira abordagem do problema. Como o processo de modelagem é dinâmico e um modelo pode ser modificado de forma contínua, as setas tracejadas representam a repetição do processo. Cada etapa é definida da seguinte maneira:

### 1. Experimentação

Nesta etapa são obtidos os dados da situação de interesse. Este processo tem caráter laboratorial, na maioria das vezes. Condiz ao matemático a coleta dos dados com técnicas e métodos estatísticos que facilitem o processo e garantam dados confiáveis.

Figura 3 – Etapas do processo de modelagem.



Fonte: Bassanezi (2006).

## 2. Abstração

Nesta etapa é feito o procedimento que deve levar à formulação dos modelos matemáticos. Sendo discutidos os seguintes pontos:

- Seleção de variáveis: as variáveis são separadas em variáveis de estado, que atuam diretamente no sistema, e variáveis de controle, que atuam sobre o sistema. É dito como parte fundamental que as variáveis estejam bem definidas.
- Problematização ou formulação dos problemas teóricos em uma linguagem própria da área que se está trabalhando: o problema é descrito de forma que indique o propósito do estudo, que pode ser abrangente, sendo a formalização do problema o cuidado que delimita a pesquisa para o foco do estudo.
- Formulação de hipóteses: as hipóteses guiam o pesquisador na investigação do problema. Elas podem ser observadas no experimento ou enunciadas de forma universal e geradas pela observação dos fatos, comparação



com outros estudos, dentre outras maneiras.

- Simplificação: os fenômenos, em geral, apresentam determinada complexidade e, para uma análise primária do evento, faz-se necessário um sistema mais simples, deste modo, o pesquisador deve usar a criatividade e a experiência para selecionar as informações que possuem maior relevância.

### **3. Resolução**

Nesta etapa, a linguagem real é traduzida para uma linguagem matemática adequada. A resolução pode ser um processo desafiador, dessa forma, o pesquisador deve compreender o grau de dificuldade que o problema oferece. Dado que grande parte das soluções dos fenômenos apresentam certa complexidade, os resultados, por vezes, são obtidos por meio computacional. Posteriormente, tais resultados podem colaborar para soluções analíticas.

### **4. Validação**

Nesta etapa, é verificada a aceitação ou não do modelo proposto. As hipóteses são confrontadas por meio de dados obtidos no experimento e os dados previstos pelo modelo. Deve-se avaliar o grau de aproximação das previsões e garantir que o modelo, ao menos, preveja os fatos que o originaram. Esse processo de validação está condicionado ao objetivo do modelador, neste caso, cabe a ele interpretar se foi possível descrever o fenômeno adequadamente. A interpretação é feita, principalmente, pela análise gráfica da solução do modelo.

### **5. Modificação**

Nesta etapa, são feitas as modificações no modelo. Na produção de um modelo que representa uma fração da realidade sua construção considera simplificações e, em alguns casos, faz-se necessário modificá-lo a fim de aproximar-se do fenômeno real. Nenhum modelo pode ser considerado definitivo, dado que um aprofundamento teórico implica na reformulação do modelo que pode ser sempre melhorado. Na verdade, é uma prática comum iniciar a construção de um modelo considerando apenas as variáveis mais relevantes e, caso seja necessário, mais informações deverão ser agregadas a ele. Este é um processo dinâmico que pode ser repetido quantas vezes o modelador achar necessário.

### **6. Aplicação**

Nesta etapa, com o modelo matemático validado, ocorre a aplicação. Para isso, o modelo deve, neste ponto, corresponder aos resultados esperados, ou seja, dentro do erro estipulado, e atender o comportamento do fenômeno real, possibilitando simular as previsões desejadas.

Sendo assim, a Modelagem Matemática, abordada como método científico de pesquisa, mostra-se capaz de transitar entre as ciências de modo criativo, eficiente, colaborando com o desenvolvimento da ciência. Além disso, o processo de modelagem é dinâmico, desse modo, a partir de novas teorias, existe a possibilidade da construção de modelos mais elaborados ou mesmo a reformulação dos modelos já existentes.

## 2 Teoria dos Conjuntos Fuzzy

Segundo Barros e Bassanezi (2010) a teoria dos conjuntos fuzzy foi apresentada por Lofti Asker Zadeh (ZADEH, 1965), com o objetivo de interpretar a subjetividade de termos linguísticos, como “aproximadamente”, “em torno de” e outros, de uma forma matemática. Assim, um computador, por exemplo, poderia exercer uma função mais próxima do pensamento humano.

“Esse seria um primeiro passo no sentido de se programar e armazenar conceitos vagos em computadores, tornando possível a produção de cálculos com informações imprecisas” (BARROS; BASSANEZI, 2010, p.12).

Um conjunto dito clássico ou *crisp* pode ser escrito como uma função, na qual cada elemento pertence ou não ao conjunto. Zadeh, inspirado neste conceito, deu início à teoria dos conjuntos fuzzy expandindo esse pensamento para um intervalo, que determina o grau de pertinência. Desta forma, o subconjunto fuzzy pode ser visto como uma ampliação do subconjunto clássico.

Nas próximas seções, serão apresentados alguns conceitos da Teoria dos Conjuntos Fuzzy que serão utilizados ao longo do trabalho.

As definições e os teoremas apresentados neste capítulo foram baseados nos livros de Barros e Bassanezi (2010) e Bassanezi, Cecconello e Silva (2010), Barros, Bassanezi e Jafelice (2012), e nos trabalhos de Gomes (2009), Santos (2008) e Silva (2005).

### 2.1 Subconjuntos Fuzzy

A formalização matemática de um conjunto clássico é dada por uma função chamada *função característica*, definida como segue.

**Definição 2.1.** *Um subconjunto clássico  $A$  de  $U$ , sendo  $U$  o conjunto clássico universo, é caracterizado por uma função*

$$X_A : U \rightarrow \{0, 1\},$$

onde, para todo  $x \in U$ ,

$$X_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A, \\ 0, & \text{se } x \notin A. \end{cases}$$

A função característica  $X_A$  descreve o conjunto  $A$  indicando quais elementos do conjunto universo  $U$  estão em  $A$ . Porém, existem casos em que não é tão simples

estabelecer uma relação entre elementos e conjuntos, ou seja, não é possível dizer se o elemento pertence totalmente ou não ao conjunto, ou até mesmo, não é possível diferir a “intensidade” de pertencimento de um elemento para o outro neste conjunto.

Uma alternativa para representar elementos com essas características é a utilização de subconjuntos fuzzy.

**Definição 2.2.** *Seja  $U$  um conjunto clássico. Um subconjunto fuzzy  $F$  em  $U$  é caracterizado por uma função*

$$\mu_F : U \rightarrow [0, 1], \quad (2.1)$$

*chamada função de pertinência do subconjunto  $F$ .*

A função  $\mu_F(x)$  indica o quanto cada elemento  $x$  de  $U$  pertence ao subconjunto  $F$ , sendo atribuído a todo elemento um valor entre 0 e 1 que representa o grau de pertinência. Para  $\mu_F(x) = 1$  e  $\mu_F(x) = 0$  tem-se, respectivamente, os indicadores de pertinência total e não pertinência do elemento  $x$  a  $F$ .

Fica evidente que essa definição de subconjunto fuzzy é obtida com a ampliação do contradomínio de  $\{0,1\}$  para  $[0,1]$ , ou ainda, que o conjunto clássico é um caso particular do conjunto fuzzy. Além disso, o subconjunto fuzzy  $F$  de  $U$  pode ser representado por um conjunto clássico de pares ordenados, como segue:

$$F = \{(x, \mu_F(x)), \text{ com } x \in U\}. \quad (2.2)$$

**Exemplo 2.1.** *Ao considerar os números reais próximos de 1, suponha que são representados pelo intervalo  $[0, 2]$ . Pelo raciocínio da lógica clássica, todo elemento no intervalo  $[0, 2]$  está próximo de 1 sem considerar o quão próximo, ou seja,*

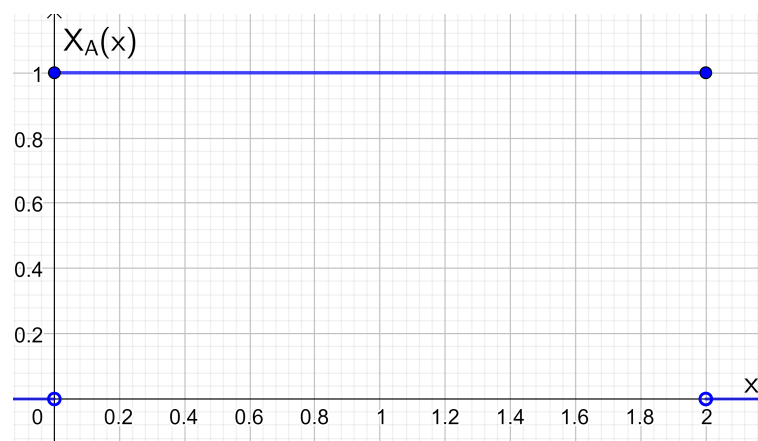
$$X_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in [0, 2], \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.3)$$

Na Figura 4 é apresentada a representação gráfica da função característica (2.3). É possível observar que todos os elementos do intervalo  $[0, 2]$  estão igualmente próximos a 1.

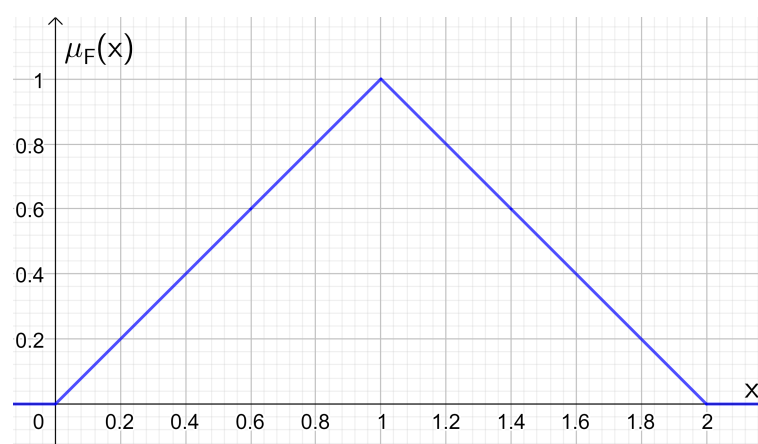
Este mesmo exemplo pode ser abordado segundo a Teoria de Conjuntos Fuzzy. Para isso, pode-se definir uma função de pertinência que considera essa proximidade, dada por:

$$\mu_F(x) = \begin{cases} x, & \text{se } 0 < x \leq 1, \\ 2 - x, & \text{se } 1 < x \leq 2, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.4)$$

Na Figura 5 é apresentada a representação gráfica da função de pertinência (2.4).

Figura 4 – Representação gráfica da função característica  $X_A(x)$  da equação (2.3).

Fonte: Autoria própria.

Figura 5 – Representação gráfica da função de pertinência  $\mu_F(x)$  da equação (2.4).

Fonte: Autoria própria.

Os gráficos ilustram o comportamento de ambas as funções. Supondo uma situação na qual fossem estudados os números do intervalo  $[-0, 2; 0, 2]$ , nota-se que, no primeiro gráfico (Figura 4), não é possível identificar um ponto onde os valores irão começar a se aproximar de 1, eles apenas aparecem como próximos de 1. Já no segundo gráfico (Figura 5), é possível observar essa noção de proximidade a partir do ponto 0. Essa análise também é válida quando os valores se afastam de 1, no intervalo  $[1, 8; 2, 2]$ .

Dados os subconjuntos fuzzy, deve-se pensar em operações com esses conjuntos. A seguir, serão abordadas as operações elementares.

Sejam  $A$  e  $B$  subconjuntos clássicos de  $U$ , ao estender os casos clássicos de união, intersecção e complementar para suas respectivas funções características, tem-se:

- União:  $X_{A \cup B}(x) = \max\{X_A(x), X_B(x)\}, \forall x \in U;$
- Intersecção:  $X_{A \cap B}(x) = \min\{X_A(x), X_B(x)\}, \forall x \in U;$
- Complementar:  $X_{A'}(x) = 1 - X_A(x), \forall x \in U.$

As operações com os subconjuntos fuzzy são definidas considerando uma extensão dos casos clássicos, ou seja, substituindo as funções características por funções de pertinência.

**Definição 2.3.** *Sejam  $A$  e  $B$  subconjuntos fuzzy de  $U$ , as funções de pertinência que representam os subconjuntos fuzzy união, intersecção e complementar são dadas por:*

- União:  $\mu_{A \cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \forall x \in U;$
- Intersecção:  $\mu_{A \cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \forall x \in U;$
- Complementar:  $\mu_{A'}(x) = 1 - \mu_A(x), \forall x \in U.$

Definidas as operações entre conjuntos fuzzy, utiliza-se as normas triangulares para generalizar os operadores união e intersecção.

**Definição 2.4.** *A norma triangular (t-norma) é uma operação binária*

$$\Delta : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$$

*se satisfazer as seguintes operações:*

- *Comutatividade:*  $x \Delta y = y \Delta x;$
- *Associatividade:*  $x \Delta (y \Delta z) = (x \Delta y) \Delta z;$
- *Monotonicidade:* *se  $x \leq y$  e  $w \leq z$  então  $(x \Delta w) \leq (y \Delta z);$*
- *Condições de fronteira:*  $0 \Delta x = 0$  e  $1 \Delta x = x.$

A operação t-norma estende o operador  $\wedge$  que modela o conectivo “E”. O operador  $\min$  é uma t-norma.

**Definição 2.5.** *A conorma triangular (t-conorma) é uma operação binária*

$$\nabla : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$$

*se satisfazer as seguintes operações:*

- *Comutatividade:*  $x \nabla y = y \nabla x;$

- **Associatividade:**  $x \nabla (y \nabla z) = (x \nabla y) \nabla z$ ;
- **Monotonicidade:** se  $x \leq y$  e  $w \leq z$  então  $(x \nabla w) \leq (y \nabla z)$ ;
- **Condições de fronteira:**  $0 \nabla x = x$  e  $1 \nabla x = 1$ .

A operação t-conorma estende o operador  $\nabla$  que modela o conectivo “OU”. O operador *max* é uma t-conorma.

Para que seja possível definir um número fuzzy, primeiramente serão definidos os conceitos de níveis e suporte de subconjuntos fuzzy.

**Definição 2.6.** *Sejam  $F$  um subconjunto fuzzy e  $\alpha \in [0, 1]$ . Define-se como  $\alpha$ -nível de  $F$  o conjunto*

$$[F]^\alpha = \{x \in U; \mu_F(x) \geq \alpha\}, \text{ para } \alpha \in (0, 1]. \quad (2.5)$$

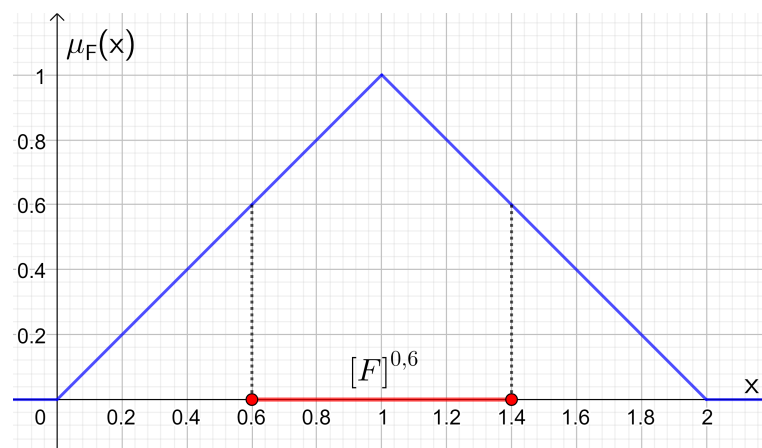
*Para  $\alpha = 0$  segue que  $[F]^0 = \overline{\text{supp}} F$ , dito fecho do suporte de  $F$ . Neste caso,  $\{x \in U; \mu_F(x) \geq 0\} = U$  não é necessariamente igual a  $[F]^0$ .*

**Exemplo 2.2.** *Considere o subconjunto fuzzy dos números próximos de 2 dado pela função de pertinência (2.4) do Exemplo 2.1. Para  $\alpha = 0,6$ , tem-se:*

$$[F]^{0,6} = [0,6; 1,4].$$

*Na Figura 6 é apresentada a representação gráfica do nível 0,6 da função de pertinência  $\mu_F(x)$  da equação (2.4).*

Figura 6 – Representação gráfica do 0,6-nível da função de pertinência  $\mu_F(x)$  da equação (2.4).



Fonte: Autoria própria.

**Definição 2.7.** *Suporte de um conjunto fuzzy  $F$  são todos os elementos de  $U$  que têm grau de pertinência diferente de zero em  $F$  e é denotado por  $\text{supp } F$ , isto é,*

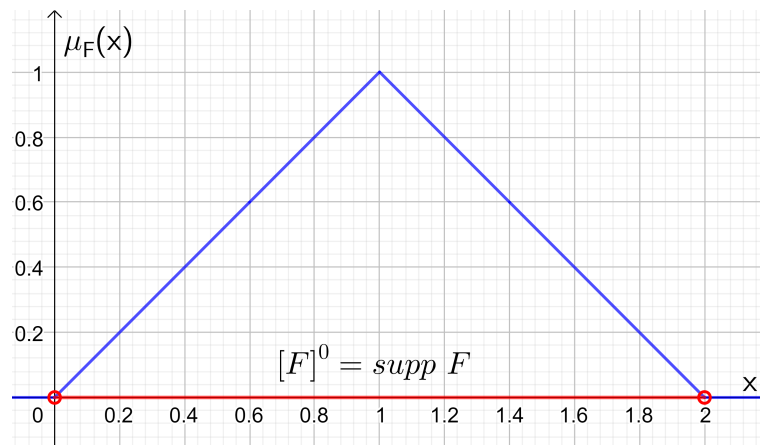
$$\text{supp } F = \{x \in U; \mu_F(x) > 0\}. \quad (2.6)$$

**Exemplo 2.3.** Considere o subconjunto fuzzy dos números próximos de 2 dado pela função de pertinência (2.4) do Exemplo 2.1. Tem-se:

$$\text{supp } F = (0; 2).$$

Na Figura 7 é apresentada a representação gráfica do suporte da função de pertinência  $\mu_F(x)$  da equação (2.4).

Figura 7 – Representação gráfica do suporte da função de pertinência  $\mu_F(x)$  da equação (2.4).



Fonte: Autoria própria.

## 2.2 Números Fuzzy

Nesta seção é apresentada a definição de um número fuzzy bem como alguns números fuzzy especiais.

**Definição 2.8.** Um subconjunto fuzzy  $N$  é chamado número fuzzy quando o conjunto  $U$ , no qual  $N$  está definido, é o conjunto dos números reais  $\mathbb{R}$  e a função de pertinência  $\mu_N : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  é tal que:

1.  $\mu_N(x) = 1$  para pelo menos um valor  $x$  do  $\text{supp } N$ ;
2.  $[N]^\alpha$  é um intervalo fechado,  $\forall x \in (0, 1]$ ;
3. O  $\text{supp } N$  é limitado.

Além disso, o  $\alpha$ -nível do número fuzzy  $N$  é dado por

$$[N]^\alpha = [\alpha_1^\alpha; \alpha_2^\alpha].$$

Os números fuzzy mais utilizados são os números triangulares e os números trapezoidais, cujas definições são apresentadas a seguir.



**Definição 2.9.** Um número fuzzy é dito triangular quando sua função de pertinência é do tipo

$$\mu_N(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{m-a}, & \text{se } a < x \leq m, \\ \frac{x-b}{m-b}, & \text{se } m < x \leq b, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.7)$$

Os  $\alpha$ -níveis desse número podem ser escritos como

$$[N]^\alpha = [(m-a)\alpha + a; (m-b)\alpha + b],$$

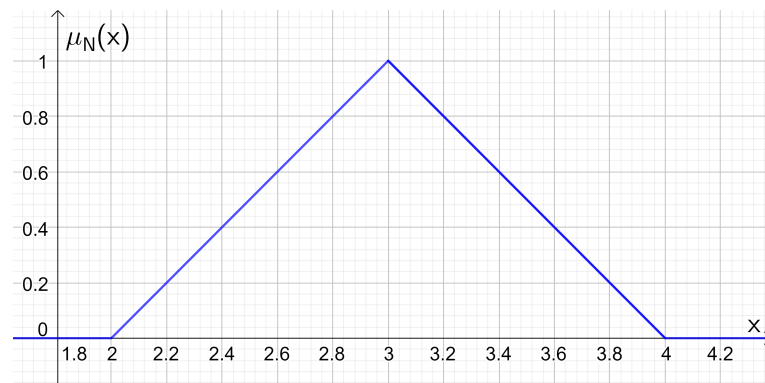
para todo  $\alpha \in [0, 1]$ .

**Exemplo 2.4.** Considere o número fuzzy triangular  $(2; 3; 4)$ . Sua representação analítica é dada pela seguinte função de pertinência

$$\mu_N(x) = \begin{cases} x - 2, & \text{se } 2 < x \leq 3, \\ 4 - x, & \text{se } 3 < x \leq 4, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

e sua representação gráfica é a apresentada na Figura 8.

Figura 8 – Representação gráfica do número triangular fuzzy  $(2; 3; 4)$ .



Fonte: Autoria própria.

Este número pode ser escrito por  $\alpha$ -níveis da seguinte maneira:

$$[N]^\alpha = [\alpha + 2; -\alpha + 4].$$

**Definição 2.10.** Um número fuzzy é dito trapezoidal quando sua função de pertinência é do tipo

$$\mu_N(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{m-a}, & \text{se } a \leq x < m, \\ 1, & \text{se } m \leq x \leq n, \\ \frac{b-x}{b-n}, & \text{se } n < x \leq b, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.8)$$

Os  $\alpha$ -níveis desse número podem ser escritos como

$$[N]^\alpha = [(m - a)\alpha + a; (n - b)\alpha + b],$$

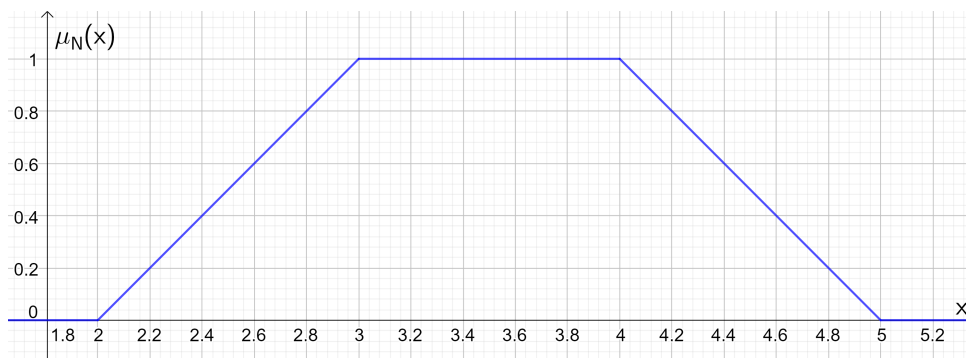
para todo  $\alpha \in [0, 1]$ .

**Exemplo 2.5.** Considere o número fuzzy trapezoidal  $(2;3;4;5)$ . Sua representação analítica é dada pela seguinte função de pertinência

$$\mu_N(x) = \begin{cases} x - 2, & \text{se } 2 \leq x < 3, \\ 1, & \text{se } 3 \leq x \leq 4, \\ 5 - x, & \text{se } 4 < x \leq 5, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

e sua representação gráfica é a apresentada na Figura 9.

Figura 9 – Representação gráfica do número trapezoidal fuzzy  $(2; 3; 4; 5)$ .



Fonte: Autoria própria.

*Este número pode ser escrito por  $\alpha$ -níveis da seguinte maneira*

$$[N]^\alpha = [\alpha + 2; -\alpha + 5].$$

Nos Exemplos 2.4 e 2.5, a representação gráfica tanto do número triangular como do número trapezoidal tem como característica a semelhança com as formas geométricas de um triângulo e um trapézio, respectivamente, o que justifica como são chamados.

### 2.3 Sistemas Baseados em Regras Fuzzy

A fim de sistematizar informações imprecisas, de forma que seja possível compreender seu significado e deduzir uma resposta adequada, os Sistemas Baseados em Regras Fuzzy (SBRF) podem ser utilizados. Os SBRF são sistemas que utilizam a Teoria de Conjuntos Fuzzy para produzir, por meio de uma base de regras, uma

Figura 10 – Estrutura de um Sistema Baseado em Regras Fuzzy.



Fonte: Barros, Bassanezi e Jafelice (2012).

relação entre os parâmetros presentes no objeto estudado. Na Figura 10 é apresentada a estrutura de um SBRF.

Dada uma base de regras, um SBRF pode ser visto como um mapeamento entre entrada e saída da forma  $y = f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $y \in \mathbb{R}^m$ , conforme o esquema acima. Este tipo de sistema é muito utilizado em problemas de modelagem, controle e classificação.

Uma base de regras fuzzy é descrita pela relação

$R_1$  : “Proposição fuzzy 1”

ou

$R_2$  : “Proposição fuzzy 2”

ou

⋮

ou

$R_r$  : “Proposição fuzzy  $r$ ”

As proposições fuzzy são construídas da forma “SE (antecedente)... ENTÃO (consequente)...”, sendo cada uma das regras condições associadas às variáveis linguísticas impostas pelo problema e modeladas por conjuntos fuzzy.

Um caso particular dos SBRF são os controladores fuzzy. Esse tipo de sistema se diferencia basicamente por adotar ao seu “antecedente” uma “condição” e ao “consequente” uma “ação”, ou seja, é um sistema eficiente para a realização de tarefas.

Para estabelecer um SBRF são necessários quatro módulos, sendo eles:

- **Módulo de fuzzificação (entrada)**

Nesta etapa ocorre o processo no qual as entradas são formuladas por conjuntos fuzzy com seus respectivos domínios. Com o auxílio de especialistas do fenômeno, são estabelecidas funções de pertinência para cada conjunto fuzzy.

- **Módulo de base de regras**

Nesta etapa as proposições fuzzy são definidas por variáveis linguísticas com base nas informações dos especialistas. Este módulo faz parte do núcleo do SBRF, onde cada regra descreverá as relações entre as variáveis linguísticas. As proposições tem a estrutura “SE (antecedente)... ENTÃO (consequente)...”.

- **Módulo de inferência**

Nesta etapa as proposições fuzzy da base de regras são traduzidas matematicamente por meio das técnicas da lógica fuzzy. São definidas as regras de inferência para modelar as proposições definidas na base de regras. Este módulo, assim como a base de regras, faz parte do núcleo do SBRF e tem fundamental importância no sistema, pois por meio dele será obtida a saída fuzzy.

- **Módulo de defuzzificação (saída)**

Neste módulo ocorre o processo contrário do módulo de fuzzificação. Por meio das relações atribuídas no módulo de inferência foi gerada uma saída fuzzy, e nesta etapa de defuzzificação a saída será convertida para um número real (*crisp*).

### 2.3.1 Método de Inferência de Mamdani

Dentre os métodos de inferência existentes, o método de Mamdani é um dos mais utilizados. A proposta desse método é estabelecer uma relação fuzzy binária entre  $x$  e  $y$  para modelar a base de regras utilizando os operadores *max* e *min*. Para cada regra  $R_j$ , da base de regras, a condicional “SE  $x$  é  $A_j$  ENTÃO  $y$  é  $B_j$ ” é modelada pela operação  $\wedge$  (mínimo).

De modo geral, adota-se a t-norma  $\wedge$  (mínimo) para o conectivo “E” e a t-conorma  $\vee$  (máximo) para o conectivo “OU”.

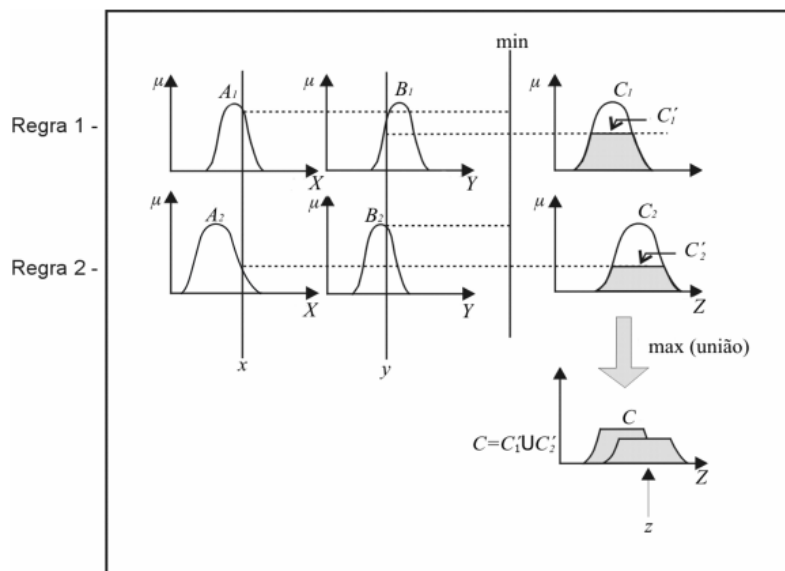
Por exemplo, sendo  $x, y \in \mathbb{R}$  e  $A$  e  $B$  os subconjuntos fuzzy de cada regra, dadas as regras:

$$R_1: \text{SE } (x \text{ é } A_1 \text{ e } y \text{ é } B_1) \text{ ENTÃO } (z \text{ é } C_1)$$

$$R_2: \text{SE } (x \text{ é } A_2 \text{ e } y \text{ é } B_2) \text{ ENTÃO } (z \text{ é } C_2)$$

Por meio dos operadores de máximo e mínimo e do método de defuzzificação, obtém-se uma saída  $z \in \mathbb{R}$  de  $C = C'_1 \cup C'_2$  pelo método de inferência de Mamdani, como apresentado na Figura 11.

Figura 11 – Ilustração do método de inferência de Mamdani.



Fonte: Barros, Bassanezi e Jafelice (2012)

### 2.3.2 Método de Defuzzificação Centro de Gravidade

Ao fim do módulo de inferência, é obtida uma saída fuzzy do sistema. Em geral, tem-se o interesse de traduzir a saída fuzzy para um número real e, para isso, é feito o processo de defuzzificação. Alguns métodos podem ser aplicados para defuzzificar a saída, dentre eles, o método do centro de gravidade se destaca. Neste método, o número real pode ser obtido de duas maneiras, sendo elas para domínio discreto e contínuo, respectivamente:

$$G(C) = \frac{\sum_{i=0}^n \mu_i C(z_i)}{\sum_{i=0}^n C(z_i)}, \quad (2.9)$$

$$G(C) = \frac{\int_R \mu C(z) du}{\int_R C(z) du}, \quad (2.10)$$

sendo  $R$  a região de integração.

## 2.4 Sistemas P-fuzzy

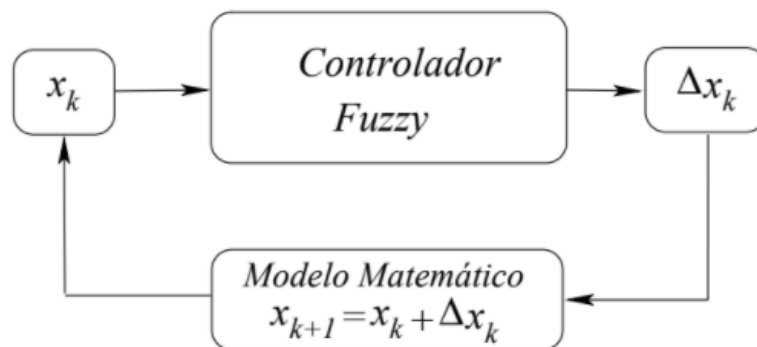
Um sistema parcialmente fuzzy, ou como comumente é chamado sistema p-fuzzy, é um sistema que se caracteriza por relacionar as variáveis de entrada com suas variações através da base de regras fuzzy. Esse tipo de sistema é chamado assim por conhecer apenas parcialmente o campo de direção. Serão considerados neste trabalho os sistemas p-fuzzy discretos que podem ser representados pelo seguinte sistema iterativo:

$$\begin{cases} x_{k+1} = F(x_k), \\ x_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (2.11)$$

sendo  $F(x_k) = x_k + \Delta(x_k)$ .

Tem-se que  $\Delta(x_k) \in \mathbb{R}^n$  é a variação obtida da saída defuzzificada do SBRF. Note que o sistema p-fuzzy é uma equação de diferenças, na qual  $x_{k+1} - x_k = \Delta(x_k)$ . Desta forma, o sistema p-fuzzy é associado ao esquema apresentado na Figura 12.

Figura 12 – Arquitetura de um sistema p-fuzzy.



Fonte: Santos (2008).

Os sistemas p-fuzzy podem ser utilizados para modelar fenômenos parcialmente conhecidos, tendo em vista que, nesses casos, tanto as variáveis quanto as variações acerca de um determinado fenômeno são oriundas de subjetividades, e para métodos tradicionais do cálculo diferencial esses casos podem ser um desafio.

Para o sistema p-fuzzy proposto neste trabalho, será considerado o caso unidimensional. Este tipo é um caso particular de sistemas p-fuzzy, considerado um caso mais simples pois são sistemas estudados em uma dimensão. O sistema p-fuzzy unidimensional tem o objetivo de auxiliar na compreensão dos efeitos sazonais da variação do fenômeno estudado. Esse caso será considerado com base no sistema (2.11).

### 3 Problema Hidrodinâmico

Neste capítulo, serão utilizados os conceitos apresentados nos capítulos anteriores para a construção do modelo matemático que descreve o problema hidrodinâmico do escoamento de um fluido.

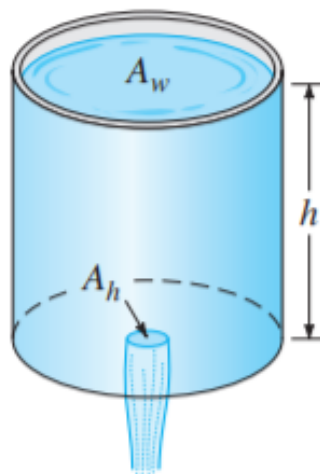
Os dados experimentais utilizados neste trabalho foram obtidos por Santos (2021), em sua pesquisa referente ao estudo experimental do escoamento de líquidos. Com base nesses dados, será elaborado, por meio de um SBRF, um modelo matemático p-fuzzy que represente o fenômeno.

Para isso, será apresentada, de forma breve, a solução encontrada por Santos (2021) e como foram feitos os experimentos que o auxiliaram no processo de validação do modelo matemático. Posteriormente, será apresentada uma proposta para a construção do controlador fuzzy que, através da aplicação do sistema iterativo p-fuzzy, terá como resultado a solução gráfica do modelo.

#### 3.1 Solução a partir da Equação Bernoulli

Deseja-se descrever a variação da altura da água, em um tanque, quando apenas a gravidade atua no escoamento do líquido, que flui através de um orifício localizado no centro da base do tanque. Para este estudo, será considerado um tanque cilíndrico como o apresentado na Figura 13.

Figura 13 – Escoamento de água em um tanque cilíndrico.



Fonte: Zill (2017).

Será tomado como base o trabalho de Santos (2021), no qual o autor, utilizando conceitos de Mecânica dos Fluidos, propõe um modelo que descreve o comportamento da água em cada instante. Para seu estudo, Santos (2021) considera como a única força atuante no sistema a gravidade. Como apontado por Zill (2017), este é um problema clássico associado às equações diferenciais.

Na elaboração do modelo teórico, Santos (2021) considera, inicialmente, a equação de Bernoulli:

$$\rho \frac{v_{inicial}^2}{2} + \phi + \rho g h_{inicial} = \rho \frac{v_{final}^2}{2} + \phi + \rho g h_{final}, \quad (3.1)$$

sendo  $\rho$  a densidade do fluido,  $\phi$  a pressão hidrostática,  $g$  o módulo de aceleração da gravidade,  $v$  a velocidade e  $h$  a altura. Além disso, como indicado na Figura 13,  $A_w$  é a área da base do tanque e  $A_h$  a área do orifício circular.

Com o desenvolvimento da Equação de Bernoulli, utilizando métodos de equações diferenciais ordinárias, a solução do problema encontrada pelo autor é:

$$h(t) = \frac{g}{2} \left( -\frac{A_h}{A_w} t + \sqrt{\frac{2h_{inicial}}{g}} \right)^2. \quad (3.2)$$

Ao desenvolver o quadrado da soma da equação (3.2), obtém-se:

$$h(t) = \frac{g}{2} \left( \frac{A_h}{A_w} \right)^2 t^2 - \frac{g A_h}{A_w} \sqrt{\frac{2h_{inicial}}{g}} t + h_{inicial}. \quad (3.3)$$

A solução apresentada nas equações (3.2) e (3.3) é uma equação quadrática, portanto, sua curva será um arco de parábola que representa o fenômeno em sua fase decrescente a partir da altura inicial  $h_{inicial}$ , quando  $t = 0$ , até o vértice da parábola, pois o fenômeno não considera o momento em que o tanque encheria.

Para o processo de validação do modelo teórico encontrado, Santos (2021) realiza três experimentos. A experimentação é descrita por uma coleta de dados utilizando uma filmadora para captar em cada instante a altura do fluido no tanque até o seu esvaziamento. As imagens foram analisadas de forma que represente a variação da altura do fluido a cada segundo. Mais detalhes sobre os experimentos realizados e a solução encontrada pelo autor podem ser encontradas em seu trabalho (SANTOS, 2021).

### 3.2 Aplicação do sistema p-fuzzy

Na seção anterior, foi apresentada a solução obtida por Santos (2021) para descrever o fenômeno do escoamento de um fluido. Segundo o autor, para realizar esse



estudo foi necessário o aprofundamento em alguns conceitos da teoria de Mecânica dos Fluidos, o que, em geral, não é trivial. Além disso, para a elaboração do modelo teórico também foram necessários conceitos de equações diferenciais ordinárias, o que pode tornar o processo de modelagem complexo dependendo do problema a ser estudado.

Neste trabalho, com o objetivo de promover um método alternativo para estudar o problema, a Teoria dos Conjuntos Fuzzy é considerada para o desenvolvimento de um modelo que contorne os desafios apresentados acima.

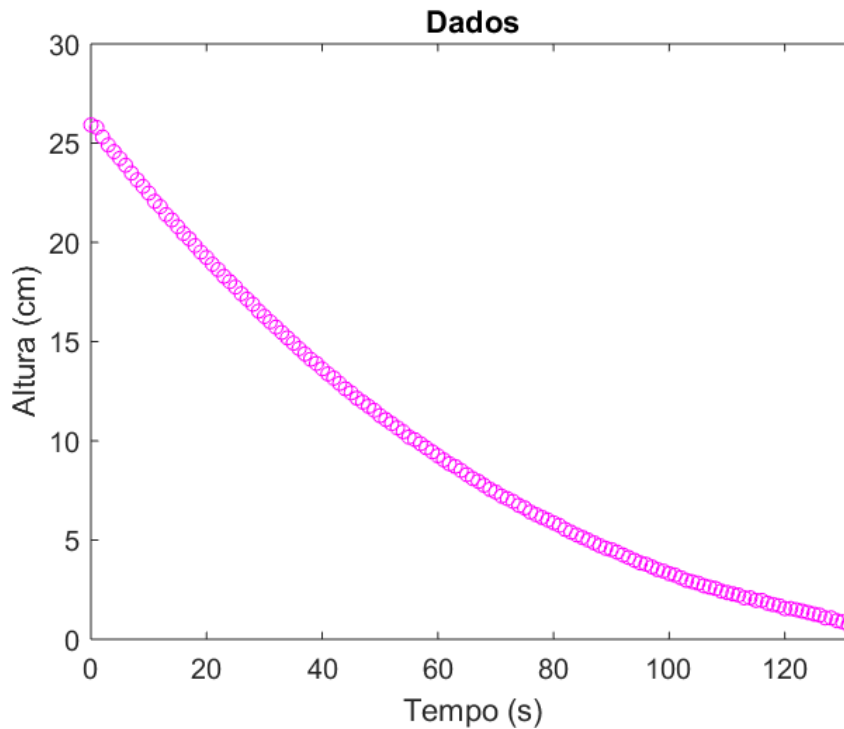
Segundo Bassanezi (2006), o objetivo ao estudar um problema é construir um modelo, dentro de uma teoria matemática já desenvolvida, que facilite a obtenção de resultados.

Para a construção do modelo, essa proposta tomará como referência os dados do primeiro experimento de Santos (2021), o qual tem as seguintes características:

- o líquido observado no experimento é a água;
- o tanque é preenchido com o líquido aos 25,92 *cm* de altura;
- o raio da base do tanque mede 3,10 *cm*;
- o raio de vazão do orifício circular mede 0,25 *cm*.

Os dados coletados por Santos (2021) em seu trabalho são dispostos num gráfico Altura(*cm*) X Tempo(*s*), apresentado na Figura 14.

Figura 14 – Dados do experimento 1 do trabalho de Santos (2021).



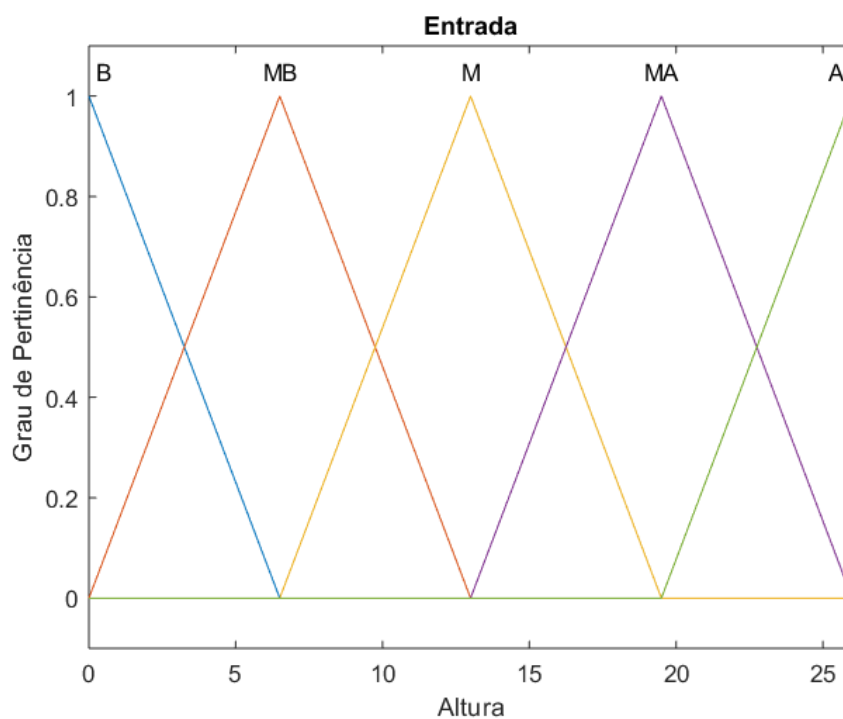
Fonte: Autoria própria.

Com o objetivo de elaborar um controlador fuzzy para descrever o problema em questão, esses dados foram analisados de forma que fosse possível atribuir às variáveis altura  $h(t)$  e variação da altura  $\Delta h(t)$  termos linguísticos, ou seja, considerá-las a partir dos conjuntos fuzzy. Serão considerados conjuntos triangulares fuzzy para essas variáveis, pois essa representação indica um pico rápido de transição das variáveis estudadas e pode-se observar essa característica nos dados.

Ao observar um recipiente que contém algum fluido, a interpretação natural do observador é avaliar se ele está cheio ou não e, caso exista alguma perfuração, avaliar se o fluido escoava muito ou pouco.

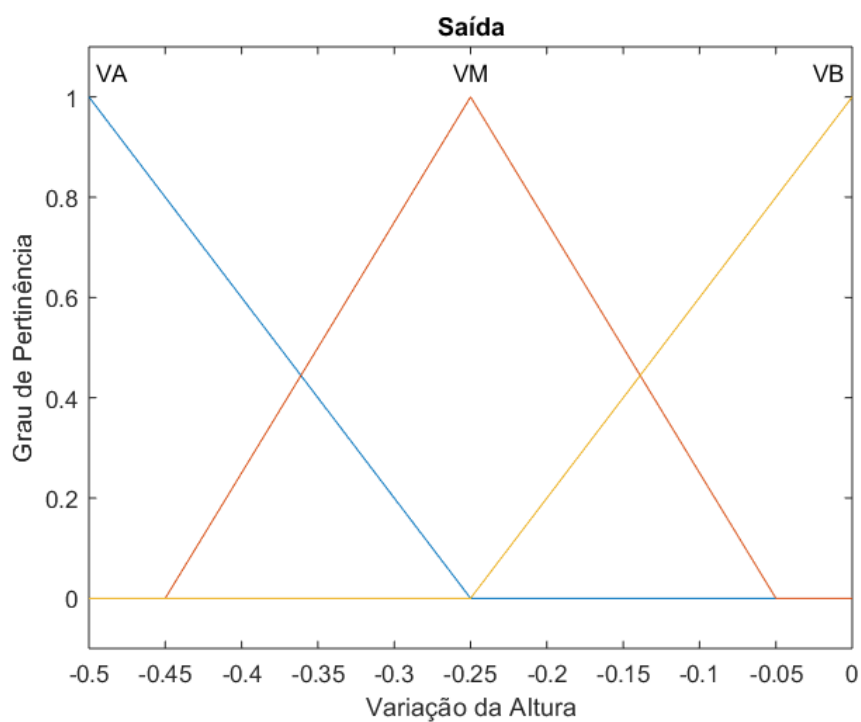
Pensando nisso, os termos linguísticos escolhidos para representar a variável de entrada Altura são: baixa (B), média baixa (MB), média (M), média alta (MA), alta (A), como apresentado na Figura 15. E os termos linguísticos escolhidos para representar a variável de saída Variação da Altura são: variação baixa (VB), variação média (VM), variação alta (VA), como apresentado a Figura 16.

Figura 15 – Variável de entrada: Altura.



Fonte: Autoria própria.

Figura 16 – Variável de saída: Variação da altura.



Fonte: Autoria própria.

Com os termos linguísticos atribuídos para a entrada e a saída do controlador fuzzy, será definida a base de regras do sistema. A base de regras que descreverá as proposições fuzzy da altura e sua variação será dada pelo seguinte conjunto de regras:

1. Se a altura é alta (A) então a variação da altura é alta (VA);
2. Se a altura é média alta (MA) então a variação da altura é alta (VA);
3. Se a altura é média (M) então a variação da altura é média (VM);
4. Se a altura é média baixa (MB) então a variação da altura é baixa (VB);
5. Se a altura é baixa (B) então a variação da altura é baixa (VB).

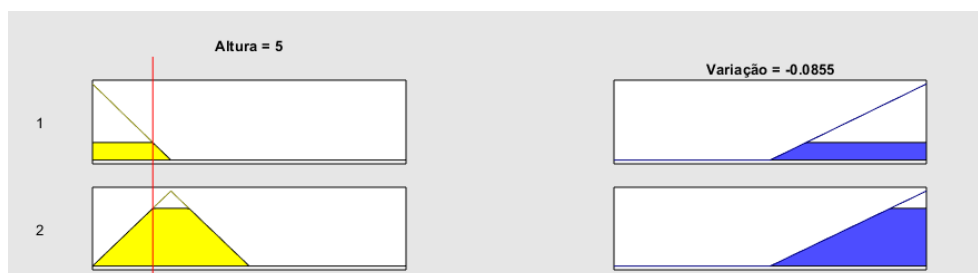
O próximo passo será definir o método de inferência utilizado no controlador fuzzy, neste caso, a escolha foi pelo método de Mamdani. Esse método, como apresentado no Capítulo 2, relaciona matematicamente os valores das proposições fuzzy com seus graus de pertinência por meio dos operadores máximo e mínimo.

Por último, será definido o método de defuzzificação, para o qual foi escolhido o centro de gravidade.

Todo esse processo foi elaborado utilizando o *toolbox fuzzy* do *software* Matlab®.

Para ilustrar a operação que ocorre utilizando o método de Mamdani, considere a altura de  $5\text{ cm}$ . Na Figura 17, são apresentadas as entradas e saídas das regras com as quais a altura considerada apresenta determinado grau de pertinência. Note que a altura de  $5\text{ cm}$  pertence aos conjuntos das alturas baixa (B) e média baixa (MB) que, de acordo com a base de regras, determina uma variação baixa (VB).

Figura 17 – Representação dos conjuntos fuzzy de entrada e saída considerando a altura  $5\text{ cm}$ .

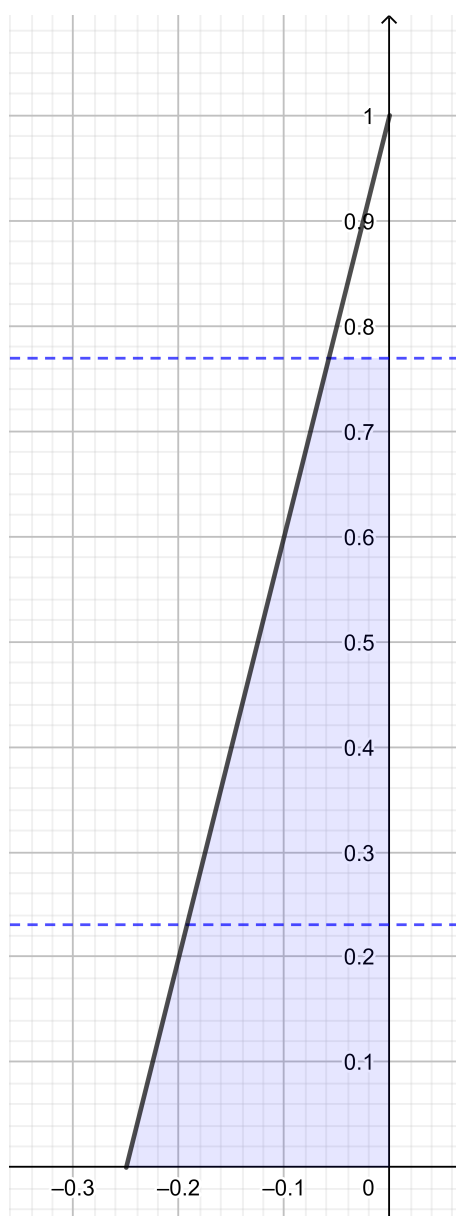


Fonte: Autoria própria.

Sendo assim, para o conjunto altura baixa (B) tem-se uma pertinência de  $3/13$  e para o conjunto altura média baixa (MB) uma pertinência de  $10/13$ . O método de

Mamdani determina, por meio do operador máximo entre as saídas de cada regra, a resposta do sistema como ilustrado o gráfico da Figura 18.

Figura 18 – Representação da saída.



Fonte: Autoria própria.

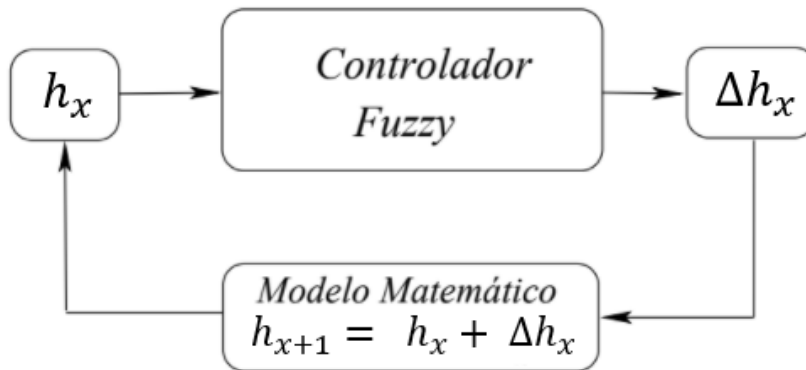
Obtida a resposta do módulo de inferência, é realizado o processo de defuzzificação. A partir do método centro de gravidade, apresentado no capítulo anterior, determina-se a variação da altura, no instante observado, ao calcular a média da área

destacada em azul na Figura 18, como segue:

$$G(C) = \frac{\int_{-\frac{1}{4}}^{-\frac{3}{52}} x(4x+1) dx + \int_{-\frac{3}{52}}^0 \frac{10}{13}x dx}{\int_{-\frac{1}{4}}^{-\frac{3}{52}} (4x+1) dx + \int_{-\frac{3}{52}}^0 \frac{10}{13} dx} = \frac{-\frac{475}{52728} - \frac{45}{35152}}{\frac{25}{338} + \frac{15}{338}} = -\frac{217}{2496} \quad (3.4)$$

Com o controlador fuzzy estruturado, o sistema iterativo p-fuzzy utiliza a saída do controlador, neste caso a variação da altura, para alimentar a entrada do modelo. Basicamente, a saída  $\Delta h(t)$  é somada à entrada  $h(t)$  sucessivamente, processo representado pelo esquema da Figura 19.

Figura 19 – Esquema p-fuzzy.

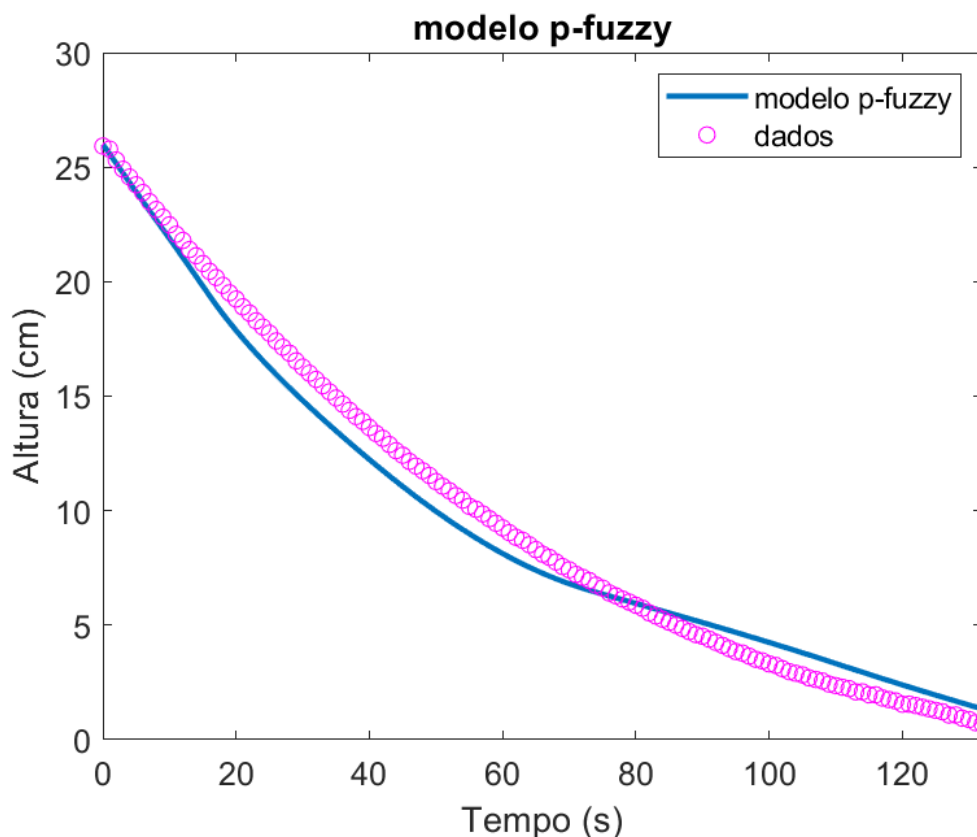


Fonte: Adaptado de Santos (2008).

Observe que a soma da variação da altura, feita em relação à condição inicial, como ilustrado no esquema, é realizada a cada iteração. No modelo elaborado, essa iteração representa o tempo de 1 segundo. Note também que foi considerada uma variação negativa, como representado na Figura 16, pois o fenômeno se refere a um processo de esvaziamento do tanque.

Para realizar esse processo de iterações descrito pelo sistema p-fuzzy foi utilizado o *software* Matlab®, no qual foi possível elaborar um programa para executar a soma da saída do sistema à entrada de forma sucessiva. O resultado do sistema p-fuzzy é dado pelo gráfico apresentado na Figura 20, que descreve o modelo do escoamento do fluido.

Figura 20 – Modelo p-fuzzy e dados do experimento 1.



Fonte: Autoria própria.

Destaca-se que a curva que representa o modelo é semelhante à parte decrescente de um arco de parábola, característica encontrada no modelo teórico desenvolvido por Santos (2021).

Na Figura 20, são apresentados, além do modelo p-fuzzy, os dados coletados do experimento. Note que apenas com a análise da altura e sua variação no tempo foi possível obter um modelo fidedigno ao fenômeno observado. Neste caso, foi estudado apenas o experimento 1 dos três apresentados por Santos (2021), porém, com uma análise semelhante dos demais dados, poderiam ser estabelecidos os outros modelos.

Segundo Bassanezi, Ceconello e Silva (2010), a principal característica de um sistema determinístico é a precisão obtida da solução, por este motivo, quando há condições imprecisas no sistema, elas podem comprometer a solução. Associando essa observação ao problema, seria possível determinar outros parâmetros com precisão, como a velocidade do escoamento e o coeficiente de viscosidade do fluido, por exemplo, entretanto, seria necessário um aprofundamento teórico ainda maior sobre a física que envolve o problema.

Neste caso, tratando de um fenômeno particular como neste estudo, o modelo fuzzy se mostrou, além de eficiente, um método com grande economia de considerações. Além disso, uma vez dominada a técnica de modelagem, por meio da Teoria dos Conjuntos Fuzzy, seria possível adaptar para novas condições a proposta apresentada neste trabalho.



## Considerações Finais

O estudo realizado neste trabalho mostra a Teoria dos Conjuntos Fuzzy como um método alternativo de modelagem eficiente para problemas físicos, em particular o problema hidrodinâmico, uma vez que a aplicação do conhecimento dessa teoria se mostrou capaz de descrever o comportamento do fenômeno hidrodinâmico estudado.

Com o apoio dos experimentos realizados por Santos (2021), e de seu trabalho como um todo, foi possível aplicar o Sistema Baseado em Regras Fuzzy ao problema e, por meio do sistema p-fuzzy, construir um modelo que descrevesse com sucesso o comportamento do escoamento do fluido. Foi possível perceber que o método utilizado se mostrou competente tanto em resultados quanto na economia de considerações sobre a teoria envolvendo o fenômeno.

Vale destacar os desafios proporcionados ao estudar a teoria fuzzy, pois este tópico não pertence ao conteúdo programático das disciplinas do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de São Paulo, campus São Paulo, e possui uma lógica diferente da habitual.

Embora tratada de forma implícita, a teoria que envolve o problema foi fundamental durante todo processo de produção do trabalho para entender o fenômeno e elaborar o modelo. Porém, para o leitor ou leitora que queira realizar um trabalho interdisciplinar, é interessante, se possível, trabalhar com um profissional da área, pois, como destaca Bassanezi (2006), a cooperação com especialistas de outras áreas é um dos procedimentos gerais da modelagem.

Portanto, considerando os objetivos do trabalho que visam a obtenção de um modelo matemático que descreva o fenômeno estudado e um método alternativo que pudesse simplificar os passos no processo de modelagem, conclui-se que, de fato, a construção do modelo fuzzy utilizando o SBRF alcançou as propostas esperadas da pesquisa.

Para trabalhos futuros, pensando neste mesmo fenômeno, pode-se propor uma alternativa de método dentro da teoria fuzzy utilizando o Princípio da Extensão de Zadeh para fuzzificar a velocidade de escoamento do fluido, por exemplo.

Outra possibilidade seria considerar outros fluidos com propriedades de viscosidade no sistema e considerar esse fator como entrada fuzzy do SBRF. Além disso, uma alternativa seria considerar uma força mecânica atuando no sistema comprimindo o fluido e fuzzificá-la.

Conforme o trabalho de Santos (2021), que serviu como base de estudo desta

proposta, espera-se que este possa contribuir e incentivar novas pesquisas.

## Referências

- BARROS, L. C.; BASSANEZI, R. C. Tópicos de Lógica Fuzzy e Biomatemática. 2. ed. Campinas: UNICAMP/IMECC, 2010. Citado 3 vezes nas páginas 15, 16 e 25.
- BARROS, L. C.; BASSANEZI, R. C.; JAFELICE, R. S. D. M. Teoria dos Conjuntos fuzzy com Aplicações. 2. ed. São Carlos: SBMAC, 2012. Citado 3 vezes nas páginas 25, 33 e 35.
- BASSANEZI, R. C. Ensino-aprendizagem com modelagem matemática. 3. ed. São Paulo: Contexto, 2006. Citado 6 vezes nas páginas 15, 19, 21, 22, 39 e 47.
- BASSANEZI, R. C.; CECCONELLO, M. S.; SILVA, J. D. M. Sistemas Dinâmicos Fuzzy: Modelagens Alternativas Para Sistemas Biológicos. São Carlos: SBMAC, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 45.
- GOMES, L. T. Um estudo sobre o espalhamento da dengue usando equações diferenciais parciais e lógica fuzzy. Dissertação (Mestrado) — UNICAMP/IMECC, Campinas, 2009. Citado na página 25.
- LAKATOS, E. M.; MARCONI, M. de A. Fundamentos de metodologia científica. 5. ed. São Paulo: Atlas, 2003. Citado na página 17.
- SANTOS, A. M. dos. Estudo Experimental do Escoamento de Líquidos Sob Ação Exclusiva da Gravidade. Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) — Instituto Federal de São Paulo (IFSP), São Paulo, 2021. Citado 11 vezes nas páginas 7, 9, 11, 16, 17, 37, 38, 39, 40, 45 e 47.
- SANTOS, L. R. dos. Estratégias para controle de pragas: sistemas p-fuzzy com controle híbrido. Dissertação (Mestrado) — UNICAMP/IMECC, Campinas, 2008. Citado 3 vezes nas páginas 25, 36 e 44.
- SANTOS, W. M. dos. Um Modelo Fuzzy para o Processo de Fermentação de Pães Artesanais via Princípio da Extensão de Zadeh. Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) — Instituto Federal de São Paulo (IFSP), São Paulo, 2020. Citado na página 20.
- SILVA, J. de Deus Mendes da. Análise de estabilidade de sistemas dinâmicos p-fuzzy com aplicações em biomatemática. Tese (Doutorado) — UNICAMP/IMECC, Campinas, 2005. Citado na página 25.
- ZADEH, L. A. Fuzzy sets. Information and Control, n. 8, p. 338–353, 1965. Citado na página 25.
- ZILL, D. G. A First Course in Differential Equations with Modeling Applications. 11. ed. Boston: Cengage Learning, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 37 e 38.