SISTEMAS LINEARES

CONCEITOS

Observemos a equação $2x + 4y = 10$. Podemos perceber que ela possui duas incógnitas que são representadas pelas letras x e y. Podemos também notar que se $x = 3$ e $y = 1$, a igualdade se torna verdadeira, pois $2 \cdot 3 + 4 \cdot 1 = 6 + 4 = 10$ que é o valor do segundo membro. É possível também verificar que, se $x = 5$ e $y = 0$ a igualdade se verifica, porque $2 \cdot 5 + 4 \cdot 0 = 10$. A mesma coisa acontece se $x = 0$ e $y = \frac{5}{2}$. Faça você a verificação.

Então vemos que a igualdade $2x + 4y = 10$ pode ser tornada verdadeira para uma infinidade de valores de x e y. Assim, para que possamos saber quais desses valores nos interessam, precisamos de outra sentença, ou equação, que também os relacione, como por exemplo, $3x - 5y = 4$. Esta nova equação e a primeira deverão ser tornadas verdadeiras simultaneamente, ou pelos mesmos valores de x e de y, e formarão por isso um sistema de duas equações a duas incógnitas. Para deixar nítido que ambas pertencem ao mesmo sistema, nós as escreveremos dentro de chaves:

$$\begin{cases} 2x + 4y = 10 \\ 3x - 5y = 4 \end{cases}$$

Fica nítido para nós que x = 3 e y = 1 tornam verdadeiras as duas equações do sistema. Então afirmamos que o par ordenado $(x, y) = (3,1)$ é solução do sistema, e seu conjunto Verdade ou Solução é $V = \{(3,1)\}$.

Como o sistema apresentado possui duas equações de 1º grau, o sistema também é assim denominado, ou ainda de Sistema Linear de duas equações a duas incógnitas.

É claro que você ainda não sabe muito bem como foi que nós chegamos aos valores de x e y, ou como foi que resolvemos o sistema de equações proposto. Este é o nosso assunto a seguir.

RESOLUÇÃO DE UM SISTEMA LINEAR

Inicialmente resolveremos sistemas lineares de 2 equações a 2 incógnitas pelos métodos da Substituição, da Adição e da Comparação, tomando como exemplo o nosso sistema que acabamos de nos referir.

MÉTODO DA SUBSTITUIÇÃO

Para simplificarmos nosso trabalho, chamaremos de (I) a primeira e de (II) a segunda equação do sistema: $\begin{cases} 2x + 4y = 10\ (I) \\ 3x - 5y = 4\ (II) \end{cases}$.

Em seguida, devemos escolher uma das equações, por exemplo a (II), e isolemos nela uma de suas incógnitas, por exemplo x: $3x - 5y = 4 \ \rightarrow 3x = 4 + 5y \ \rightarrow x = \frac{4x+5y}{3}$.

Esta expressão de x, obtida na equação (II) será substituída na outra equação, a (I). Assim teremos: $(I) 2x + 4y = 10 \ \rightarrow 2 \cdot \left(\frac{4+5y}{3}\right) + 4y = 10 \ \rightarrow \ \frac{8+10y}{3} + 4y = 10$

$\frac{8+10y}{3} + 4y = 10$. Esta equação, de primeiro grau, se transforma em: $\frac{8+10y+12y=30}{3}$.

Podemos agora "eliminar" o denominador, e teremos: $10y + 12y = 30 - 8 \ \rightarrow 22y = 22 \ \rightarrow y = 1$.

Como vimos, $x = \frac{4+5y}{3} = \frac{4+5 \cdot 1}{3} = \frac{9}{3} = 3$. Logo, $V = \{(3,1)\}$.

MÉTODO DA ADIÇÃO

Vamos agora resolver o mesmo sistema por outro método, o da Adição. Para tanto, multiplicaremos a equação (I) por 5 e a (II) por 4. Assim teremos: $\begin{cases} 5 \cdot (I) & 10x + 20y = 50 \\ 4 \cdot (II) & 12x - 20y = 16 \end{cases}$. Se adicionarmos membro a membro tais equações teremos: $22x + 0 = 66$ e, deste modo, poderemos afirmar que $x = 3$

Para obtermos y, devemos substituir o valor de x, já calculado, em qualquer uma das equações: $2x + 4y = 10 \ \rightarrow 2 \cdot 3 + 4y = 10 \ \rightarrow 4y = 10 - 6 \ \rightarrow 4y = 4 \ \rightarrow y = 1$.

Logo, como já era esperado, $V = \{(3,1)\}$.

OBSERVAÇÃO:

Você deve ter percebido que os fatores 4 e 5 que utilizamos para multiplicar as equações foram estratégicos, pois os escolhemos de modo que, ao somarmos as duas, a incógnita y desaparecesse, e pudéssemos então resolver uma equação com apenas uma incógnita, que no caso era x.

Poderíamos escolher outros fatores para que desaparecesse a incógnita x. Quais seriam?

Resposta: Equação (I) multiplicada por 3 e (II) por -2 , ou ainda (I) por -3 e (II) por 2.

MÉTODO DA COMPARAÇÃO

Para resolvermos o mesmo sistema por Comparação, escolheremos uma incógnita e a isolaremos nas duas equações. Como exemplo, isolaremos x:

Da equação (I) podemos escrever:

$$2x + 4y = 10 \rightarrow x + 2y = 5 \rightarrow x = 5 - 2y$$

De (II) teremos:

$$3x - 5y = 4 \rightarrow 3x = 4 + 5y \rightarrow x = \frac{4 + 5y}{3}$$

Igualando as duas equações, temos:

$$5 - 2y = \frac{4 + 5y}{3}$$

Resolvendo essa igualdade, temos:

$$\frac{15 - 6y = 4 + 5y}{3} \rightarrow -6y - 5y = 4 - 15 \rightarrow y = 1$$

Assim, podemos calcular x: $x = 5 - 2y = 5 - 2 \cdot 1 = 5 - 2 \rightarrow x = 3$. Logo, $V = \{(3{,}1)\}$

OBSERVAÇÃO:

Algebricamente os 3 métodos se equivalem, nenhum deles é superior ao outro. O que devemos fazer é optar por um sistema que favoreça a resolução de cada sistema, e, para tanto há a necessidade de resolver vários exercícios.

EXERCÍCIOS:

Resolva os sistemas pelos 3 métodos:

1)$\begin{cases} 3x - 2y = 16 \\ 2x - 3y = 19 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x - 5y = -2 \\ 2x + 10y = -28 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} -x + 7y = 7 \\ 4x + 5y = -28 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 6x - 3y = 0 \\ 4x + y = 3 \end{cases}$

Resp: 1) $V = \{(2, -5)\}$; 2) $V = \{(-4, -2)\}$; 3) $V = \{(-7{,}0)\}$; $V = \left\{\left(\frac{1}{2}, 1\right)\right\}$

OBSERVAÇÃO:

Vejamos agora o seguinte sistema: $\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ 6x - 4y = 10 \end{cases}$

Se quisermos resolvê-lo por adição, poderemos multiplicar a 1ª equação por (-2) e passaremos a ter $\begin{cases} -6x + 4y = -8 \\ 6x - 4y = 10 \end{cases}$. Ao somarmos as duas equações obteremos $0 = 2$ que é uma igualdade falsa, o que mostra ser este um sistema impossível (SI), e seu Conjunto Verdade é ϕ.

Se optarmos por resolver o mesmo sistema por Substituição, poderemos, por exemplo, isolar a variável x na 1ª equação e substituí-la na 2ª. Ou seja:

Se optarmos por resolver o mesmo sistema por Substituição, poderemos, por exemplo, isolar a variável x na 1ª equação e substituí-la na 2ª. Ou seja:

Da 1ª, $x = \frac{4+2y}{3}$. A 2ª será então: $6 \cdot \frac{4+2y}{3} - 4y = -8 \rightarrow 2 \cdot (4+2y) - 4y = -8 \rightarrow 8 + 4y - 4y = -8 \rightarrow 0 = -16$, que, do mesmo modo, também é uma frase falsa e o sistema, como já vimos, é impossível. Logo V = ϕ.

Passemos agora à solução do sistema $\begin{cases} 2x + 4y = -3 \\ -4x - 8y = 6 \end{cases}$. Se multiplicarmos a 1ª equação por 2, teremos $\begin{cases} 4x + 8y = -6 \\ 4x + 8y = 6 \end{cases}$. Ao somarmos as duas equações teremos $0 = 0$. Embora as incógnitas x e y tenham desaparecido do 1º membro, a igualdade 0 = 0 é sempre verdadeira, e, por isso, o sistema é possível, embora não tenhamos conseguido resolvê-lo. Por este motivo, este sistema é classificado como Possível e Indeterminado (SPI), para que seu Conjunto Verdade seja conhecido, substituiremos a variável x por um parâmetro m, por exemplo, e a 1ª equação passará a ser: $2m + 4y = -3$, e, consequentemente, o valor de y será $y = -\frac{2m+3}{4}$, e o Conjunto Verdade, $V = \left\{\left(m, -\frac{2m+3}{4}\right)\right\}$.

Aqueles sistemas de equações cujas incógnitas conseguimos obter são classificados como Possíveis e Determinados (SPD).

EXERCÍCIOS:

Classifique os sistemas quanto à existência ou não de raízes, resolva-os caso possível, aplicando o método de sua preferência em cada um, e escreva o seu Conjunto Verdade:

1) $\begin{cases} x + y = 4 \\ x - 2y = -2 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} 3x - y = -2 \\ x + 2y = 11 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} 8y - 6x = 2 \\ 3x + 4y = 7 \end{cases}$; 4) $\begin{cases} \frac{2x}{3} - 5y = 4 \\ \frac{x}{2} + 2y = -\frac{5}{4} \end{cases}$;

5) $\begin{cases} 4x + y = \frac{1}{2} \\ 3y + 12x = \frac{3}{2} \end{cases}$; 6) $\begin{cases} 2x - 5y = 6 \\ -4x + 10y = -6 \end{cases}$

RESP: 1) SPD, $V = \{(2,2)\}$; 2) SPD, $V = \{(1,5)\}$; 3) SPD, $V = \left\{\left(\frac{2}{3}, \frac{3}{4}\right)\right\}$; 4) SPD $V = \left\{\frac{3}{2}, -1\right\}$; 5) SPI, $V = \left\{\left(m, \frac{1}{2} - 4m\right)\right\}$; 6) SI, $V = \phi$

PROBLEMAS:

A partir de agora, trataremos de problemas cuja solução envolve sistemas lineares. Para resolver um destes problemas, deveremos lê-lo com toda a atenção, traduzi-lo para linguagem algébrica e resolver a equação ou sistema resultante da leitura.

Finalmente, deveremos responder, em Português, a questão formulada, tomando o cuidado de verificar se o valor ou valores obtidos satisfazem àquilo que foi pedido.

EXEMPLOS:

1) A soma das idades de um pai e de seu filho é 32 anos. Quantos anos eles têm se a idade do pai quando o filho nasceu era 28 anos?

Resolução:

Vamos representar a idade do pai pela letra p e a do filho por f. Assim, a primeira sentença do problema nos diz que $p + f = 32$, e a segunda nos diz que $p = f + 28$. Então ficará definido o seguinte sistema linear: $\begin{cases} p + f = 3 \\ p = f + 28 \end{cases}$. Veja que nem sempre as incógnitas são representadas por x e y!

Como a 2ª equação já possui a incógnita p isolada, substituiremos na 1ª equação a sua expressão, e teremos: $f + 28 + f = 32 \rightarrow 2f = 4 \rightarrow f = 2$. Para obtermos p, faremos: $p = f + 28 \rightarrow p = 2 + 28 \rightarrow p = 30$.

Resposta : A idade do pai é 30 anos, e a do filho é 2 anos.

2) Obtenha dois números tais que o dobro de um deles, adicionado ao triplo do outro resulta 85, e o triplo do primeiro é igual ao dobrodo segundo adicionado a 30.

Resolução:

A leitura atenta das sentenças que compoem o problema nos permite montar o sistema $\begin{cases} 2x + 3y = 85 \\ 3x - 2y = 30 \end{cases}$ que poderá ser resolvido com o uso de algum dos métodos, por exemplo o da Adição, e, para isso, multiplicaremos por 2 a primeira equação e por 3 a segunda. Obteremos então o seguinte: $\begin{cases} 4x + 6y = 170 \\ 9x - 6y = 90 \end{cases}$

Somando as duas equações termo a termo nos fornecerá a equação:

$13x = 260 \rightarrow x = 20$

$4x + 6y = 170 \rightarrow 80 + 6y = 170 \rightarrow 6y = 90 \rightarrow y = 15$

Resposta : O primeiro número é 20 e o segundo é 15.

3) A soma entre a quarta parte de um número e a sétima parte de outro é 5. Obtenha-os se a soma do primeiro com a metade do segundo é igual a $\frac{37}{2}$.

Resolução:

O sistema que resolverá o problema é: $\begin{cases} \frac{x}{4} + \frac{y}{7} = 5 \\ x + \frac{y}{2} = \frac{37}{2} \end{cases}$

Se iniciarmos o nosso trabalho isolando x na 2ª equação, teremos:

$x = \frac{37}{2} - \frac{y}{2} \rightarrow x = \frac{37-y}{2}$

Se substituirmos este valor de x na 1ª equação, ficaremos com

$\frac{37-y}{8} + \frac{y}{7} = 5 \rightarrow \frac{7\cdot(37-y+8y)=5\cdot 56}{56} \rightarrow 259 - 7y + 8y = 280 \rightarrow y = 21.$

Em consequência, $x = \frac{37-21}{2} = 8.$

Resposta : O primeiro número é 8 e o outro é 21.

4) A soma de 3 números inteiros é 10. Calcule-os, sabendo que o dobro do primeiro deles é igual ao triplo do segundo, e a diferença entre o terceiro e o segundo é 3.

Resolução:

O sistema de equações que resolverá a questão é: $\begin{cases} x + y + z = 10 \\ 2x = 3y \\ z - y = 3 \end{cases}$

Este sistema, que é composto por 3 equações a 3 incógnitas, será resolvido por substituição. Naturalmente o trabalho é um pouco maior, mas não é muito diferente dos exemplos já resolvidos:

Assim, da segunda equação, poderemos escrever que $x = \frac{3y}{2}$, e, da terceira, $z = y + 3$.

Se substituirmos tais valores na primeira equação, teremos: $x + y + z = 10 \rightarrow \frac{3y}{2} + y + y + 3 = 10 \rightarrow \frac{3y+2y+2y+6=20}{2} \rightarrow 7y = 14 \rightarrow y = 2.$ Como $x = \frac{3y}{2}$, então: $x = \frac{3\cdot 2}{2} \rightarrow x = 3.$ Analogamente, como $z = y + 3 \rightarrow z = 5.$

Resposta : O primeiro número é 3, o segundo é 2 e o terceiro é 5.

EXERCÍCIOS

1) Ache dois números tais que um deles seja igual à metade do outro adicionada a 5, e , ao mesmo tempo, seja igual a este outro adicionado a 4.

2) Um pai, de maneira muito justa, resolveu repartir 32 balas entre seus dois filhos em partes proporcionais às suas idades. Um deles tem 6 anos e o outro, 10. Faça você a distribuição.

3) O perímetro de um retângulo é 56cm. Ache seus lados, sabendo que o triplo de um deles é igual ao quádruplo do outro.

4) Uma compra de R$ 60,00 foi paga com moedas de R$ 1,00, notas de R$ 5,00 e de R$ 10,00. perfazendo, entre moedas e notas, 12 delas. Ache a quantidade de cada uma, se o número de moedas é um a mais que as notas de R$ 10,00.

5) Uma barraca de praia, em um final de semana prolongado, entre refrigerantes e cervejas, vendeu 500 garrafas. Se o preço unitário da cerveja foi R$ 1,60 e o do refrigerante foi $\frac{3}{4}$ do da cerveja e a renda total foi igual a R$ 744,00, quantas garrafas de refrigerante e quantas de cerveja foram vendidas?

6) A soma de 3 números inteiros é 10. Sabemos que o dobro do primeiro é o triplo do segundo, e que a diferença entre o terceiro e o segundo é 3. Quais são os números?

7) Uma lanchonete serve aos fregueses uma bebida especial. Conversando com o balconista ele explicou que, para que os fregueses fiquem muito satisfeitos, a quantidade de suco de acerola deve ser igual à metade da de leite, e, finalmente o mel, cuja quantidade deve ser igual à média das quantidades de leite e acerola. Você seria capaz de preparar 1800 ml desta vitamina? Quanto de cada componente seriam necessários?

8) Uma prova classificatória de um concurso é composta de 100 questões de testes múltipla escolha. A cada resposta correta o candidato ganha 3 pontos, e a cada resposta errada ele perde 2. Se um candidato obteve 75 pontos, quantas questões ele acertou e quantas errou?

9) Um ajudante de cozinha lavou 800 pratos. Ele recebe $R\$\ 0{,}05$ por prato lavado e paga a quantia de $R\$\ 0{,}25$ por prato que ele quebra. Como recebeu $R\$\ 35{,}80$ quantos ele lavou e quantos ele quebrou nesse dia de trabalho?

10) Em um dia especial, os lojistas de uma rua de comércio resolveram promover as vendas de roupas montando pacotes do seguinte modo : Um deles oferecia 5 camisetas e 6 bermudas por R$ 218,00. Um outro fez um grande cartaz onde era possível ler: 8 camisetas e 5 bermudas por R$ 266,00. Na verdade, o preço unitário de cada peça não mudava de uma loja para a outra. Deste modo, um terceiro lojista resolveu oferecer 10 camisetas e 10 bermudas. Qual deverá ser o preço deste último pacote?

11) Um restaurante tem 20 mesas, 12 das quais estão ocupadas, algumas por 4 pessoas e outras por duas. Como no momento estão no restaurante 38 clientes, quantas mesas têm 4 e quantas têm 2 pessoas?

12) A soma de dois números naturais é igual a 17 e a sua diferença é 5. Ache seu produto.

RESPOSTAS:

1) Os números são 6 e 2;

2) O filho mais novo receberá 12 balas, e o outro, 20;

3) Um lado mede 12cm e outro, 16cm;

4) 5 moedas, 3 notas de R$ 5,00 e 4 de R$ 10,00;

5) 140 garrafas de refrigerante e 360 de cerveja;

6) O primeiro número é 3, o segundo é 2 e o terceiro, 5;

7) Eu acho que vai ficar meio enjoativo, mas são 800 ml de leite, 400 ml de suco de acerola e 600ml de mel;

8) Acertou 55 questões e errou 45 ; 9) Lavou 796 pratos e quebrou 14;

10) R$ 400,00;

11) 7 mesas ocupadas por quatro pessoas e 5 por duas; 12) O produto é 66 .