

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE SÃO PAULO –
IFSP

ANA HILLARY DE OLIVEIRA NITÃO

**A REPRESENTAÇÃO VETORIAL DOS NÚMEROS COMPLEXOS E A SUA
UTILIZAÇÃO NA ONDULATÓRIA**

SÃO PAULO

2022

ANA HILLARY DE OLIVEIRA NITÃO

**A REPRESENTAÇÃO VETORIAL DOS NÚMEROS COMPLEXOS E A SUA
UTILIZAÇÃO NA ONDULATÓRIA**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo – Campus São Paulo – como pré-requisito para obtenção do grau de licenciada em Matemática, sob orientação do Prof. Me. Leandro Albino Mosca Rodrigues e coorientação do Prof. Dr. Rodrigo Carvalho Sponchiado.

SÃO PAULO

2022

Dedico este trabalho a Deus, a meus pais,
meus irmãos e meu noivo. Agradeço todo
apoio e carinho.

AGRADECIMENTOS

Neste momento gostaria de prestigiar as pessoas que colaboraram de forma significativa neste trabalho e tornaram este momento possível.

A Deus que me proporcionou força e determinação em momentos difíceis e me fez perceber que, independentemente das circunstâncias, Ele sempre estará à minha frente me guiando.

Aos meus pais, que mesmo sem condições e forças lutaram para que eu pudesse frequentar instituições de ensino de prestígio e me tornasse quem sou hoje.

Ao meu noivo, que sempre me apoiou, esteve presente em momentos difíceis e acreditou no meu sonho.

Aos meus irmãos, que viram a minha luta diária, viram altos e baixos que passei e mesmo assim cuidaram de mim e acreditaram no meu potencial.

Ao meu orientador, Leandro Albino Mosca Rodrigues, que me ensinou e mostrou tudo o que estava ao seu alcance, foi extremamente paciente, acreditou na minha carreira docente e, mesmo em situações de adversidade, não desistiu de mim.

Ao meu coorientador, Rodrigo Carvalho Spochiado, que me auxiliou com a abordagem física deste trabalho e despertou em mim esse interesse por essa disciplina tão ilustre.

Aos meus colegas de curso por todos os momentos de empenho, dedicação e descontração.

E, por fim, ao Campus São Paulo do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo (IFSP).

“Escute os sábios e procure entender o que eles ensinam. Sim, peça sabedoria e grite pedindo entendimento. Procure essas coisas, como se procurasse prata ou um tesouro escondido. Se você fizer isso, saberá o que quer dizer temer o Senhor, e aprenderá a conhecê-lo.”(SALOMÃO, Provérbios 2: 2-5)

RESUMO

Neste trabalho exploraremos a representação vetorial dos números complexos, apresentando as suas operações, a resolução de exercícios e a aplicação dessa representação na Ondulatória, especificamente, no experimento de Thomas Young (1773 – 1829). Assumiremos como objetivo principal apresentar essa representação e identificar o seu uso na Ondulatória. Temos como objetivos secundários propor uma nova percepção desses números, buscando oferecer ao estudo da Matemática uma alternativa satisfatória na utilização dos números complexos como vetores para a solução de eventuais problemas. Os números complexos como vetores contribuem para vários estudos, todavia, neste trabalho, abordaremos a aplicação dessa representação apenas na Ondulatória.

Palavras-chave: Números Complexos. Vetores. Ondulatória.

ABSTRACT

In this paper we will explore the vector representation of complex numbers, presenting their operations, the resolution of exercises and the application of this representation in the Undulating, specifically, in the experiment of Thomas Young (1773 – 1829). We will assume as main objective; present this representation and identify its use in the Wave. Our secondary objectives are to propose a new perception of these numbers, seeking to offer the study of Mathematics a satisfactory alternative in the use of complex numbers as vectors for the solution of eventual problems. Complex numbers as vectors contribute to several studies, however, in this work, we will approach the application of this representation only in Wave.

Keywords: Complex Numbers. Vectors. Wavy.

LISTA DE FIGURAS

	<u>Pág.</u>
Figura 1.1 - Rafael Bombelli (1526 – 1572).....	18
Figura 1.2 - Girolamo Cardano (1501 – 1576).....	19
Figura 1.3 - Niccolò Fontana Tartaglia (1499 – 1557).....	19
Figura 1.4 - Leonhard Euler (1707 – 1783).....	21
Figura 1.5 - Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855).....	22
Figura 1.6 - Abraham de Moivre (1667 – 1754).....	23
Figura 1.7 - Christiaan Huygens (1629 – 1695).....	24
Figura 1.8 - Sir Isaac Newton (1642 – 1727).....	25
Figura 1.9 - Jean Baptiste Joseph Fourier (1768 – 1830).....	25
Figura 1.10 - Thomas Young (1773 – 1829).....	26
Figura 1.11 - Augustin-Jean Fresnel (1788 – 1827).....	27
Figura 1.12 - Dominique-François-Jean Arago (1786-1853).....	27
Figura 1.13 - William Rowan Hamilton (1805 – 1865).....	28
Gráfico 2.1 - Representação do número complexo z no Plano Complexo.....	34
Gráfico 2.2 - Triângulo retângulo OPQ	35
Gráfico 2.3 - Argumento θ do número complexo z	35
Gráfico 2.4 - Segmento orientado (A, B)	41
Gráfico 2.5 - Vetor (\overrightarrow{AB})	42
Gráfico 2.6 - Representação de (\overrightarrow{AB}) e o seu vetor oposto $-(\overrightarrow{AB})$	43
Gráfico 2.7 - Representação dos vetores \vec{u} e \vec{v} no espaço.....	44
Gráfico 2.8 - Manipulação dos pontos C e D	44
Gráfico 2.9 - $\vec{u} + \vec{v}$ resulta em (\overrightarrow{DA})	44
Gráfico 2.10 - Representação dos vetores \vec{u} e $-(\vec{v})$ no espaço.....	45
Gráfico 2.11 - Manipulação dos pontos C e D (subtração).....	45
Gráfico 2.12 - $\vec{u} + (-\vec{v})$ resulta em (\overrightarrow{CA})	45
Gráfico 2.13 - Multiplicação de $0 < a < 1$ por $\vec{u} \neq \vec{0}$	46
Gráfico 2.14 - Multiplicação de $a > 1$ por $\vec{u} \neq \vec{0}$	46
Gráfico 2.15 - Multiplicação de $a < 0$ por $\vec{u} \neq \vec{0}$	47
Gráfico 3.1 - Representação vetorial de z	48

Gráfico 3.2 - Representação vetorial de z e \bar{z}	49
Gráfico 3.3 - Representação vetorial da soma de z e \bar{z}	50
Gráfico 3.4 - Representação vetorial de z_1 e z_2	50
Gráfico 3.5 - Representação vetorial da soma de z_1 e z_2	51
Gráfico 3.6 - Representação gráfica de $\vec{u} + (-\vec{v})$	51
Gráfico 3.7 - Representação gráfica de $\vec{u}_1 + (-\vec{u}_2)$	52
Gráfico 3.8 - Representação gráfica de z , \bar{z} , θ e β	53
Gráfico 3.9 - Representação gráfica da multiplicação de z por \bar{z}	54
Gráfico 3.10 - Representação gráfica de z_1 , z_2 , θ_1 e θ_2	55
Gráfico 3.11 - Representação gráfica da multiplicação de z_1 por z_2	55
Gráfico 3.12 - Representação gráfica da divisão de z por \bar{z}	56
Gráfico 3.13 - Representação gráfica da divisão de z_1 por z_2	57
Gráfico 3.14 - Representação gráfica das potências de z no ciclo trigonométrico.....	58
Gráfico 3.15 - Representação gráfica das potências de z , sendo $ z > 1$	58
Gráfico 3.16 - Representação gráfica das potências de z quando $ z < 1$	59
Gráfico 3.17 - Representação do triângulo equilátero formado pelos afixos de z_1 , z_2 e $z_3 = -\sqrt{3} + \sqrt{3}i$	62
Gráfico 3.18 - Representação do triângulo equilátero formado pelos afixos de z_1 , z_2 e $z'_3 = \sqrt{3} - \sqrt{3}i$	63
Gráfico 3.19 - Representação dos quadrados $ABCD$ e $BNMK$	64
Gráfico 3.20 - Representação gráfica de um hexágono qualquer e seus pontos médios.....	65
Gráfico 4.1- Representação gráfica das cristas, vales, amplitude e comprimento de uma onda.....	69
Figura 4.1 - Ilustração de uma onda em corda com uma de suas pontas presa a uma região sólida.....	69
Figura 4.2 - Ilustração de uma onda em corda com as duas pontas relativamente soltas.....	70
Figura 4.3 - Ilustração da visão superior de uma onda sendo produzida em um lago.....	71
Gráfico 4.2 - Representação gráfica do fenômeno de reflexão da onda com extremidade fixa.....	72
Gráfico 4.3 - Representação gráfica do fenômeno de reflexão da onda com extremidade livre.....	72
Figura 4.4 - Ilustração da visão superior do fenômeno de difração de uma onda.....	73

Figura 4.5 - Ilustração do fenômeno de interferência construtiva entre ondas unidimensionais.....	74
Figura 4.6 - Ilustração do fenômeno de interferência destrutiva entre ondas unidimensionais.....	75
Gráfico 4.4 - Representação gráfica do fenômeno da passagem de um feixe de luz por duas fendas.....	77
Gráfico 4.5 - Representação gráfica da interferência de ondas após a passagem por duas fendas.....	78
Gráfico 4.6 - Representação gráfica das funções f_1 e f_2 como números complexos em sua forma vetorial.....	79
Gráfico 4.7 - Representação gráfica da adição dos números complexos F_1 e F_2 como vetores.....	79
Gráfico 4.8 - Representação gráfica do cálculo de F_r	85

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	16
CAPÍTULO 1.....	18
UMA BREVE HISTÓRIA SOBRE OS NÚMEROS COMPLEXOS E A ONDULATÓRIA..	18
1.1 História dos Números Complexos.....	18
1.2 História da Ondulatória.....	24
CAPÍTULO 2.....	29
ALGUNS CONCEITOS IMPORTANTES SOBRE OS NÚMEROS COMPLEXOS E OS VETORES.....	29
2.1 Conjunto dos Números Complexos.....	29
Igualdade de complexos	30
2.1.2 Representação algébrica de um número complexo	30
Operações com números complexos em sua representação algébrica.....	31
2.1.2.1 Adição.....	31
2.1.2.2 Subtração	31
2.1.2.3 Multiplicação	32
2.1.2.4 Divisão	32
Conjugado.....	32
Divisão de números complexos.....	33
2.1.3 Plano Complexo.....	34
2.1.3.1 Módulo de um número complexo.....	34
2.1.3.2 Argumento	35
2.1.4 Representação trigonométrica de um número complexo	35
2.1.4.1 Multiplicação e divisão com números complexos em sua representação trigonométrica	36
2.1.4.2 Divisão	36
Conjugado representado na forma trigonométrica.....	37
Divisão de números complexos em sua forma trigonométrica	37
2.1.5 Fórmulas de D’Moivre.....	38
2.1.5.1 A potência de um Número Complexo.....	38
2.1.5.2 A raiz de um Número Complexo.....	39
2.2 Vetores.....	40
2.2.1 Grandeza escalar	40
2.2.2 Grandeza vetorial.....	40
2.2.2.1 Operações com vetores.....	42
Vetor oposto.....	42

Adição e subtração de vetores	43
Multiplicação de um número real por um vetor	45
CAPÍTULO 3.....	47
A REPRESENTAÇÃO VETORIAL DOS NÚMEROS COMPLEXOS.....	47
3.1 Representação Vetorial de um Número Complexo	47
3.1.1 Conjugado de um número complexo representado em sua forma vetorial	48
3.1.2 Operações entre números complexos em sua forma vetorial	48
3.1.2.1 Adição entre complexos em sua forma vetorial	48
3.1.2.2 Subtração entre complexos em sua forma vetorial	50
3.1.2.3 Multiplicação entre complexos em sua forma vetorial	51
3.1.2.4 Divisão entre complexos em sua forma vetorial	55
3.1.2.5 A potência de um número complexo em sua forma vetorial	56
3.1.3 Resolução de Exercícios	60
3.1.3.1 Exercício 1.....	60
3.1.3.2 Exercício 2.....	62
3.1.3.3 Exercício 3.....	64
CAPÍTULO 4.....	66
A REPRESENTAÇÃO VETORIAL DOS NÚMEROS COMPLEXOS NA ONDULATÓRIA	66
4.1 Alguns conceitos importantes sobre as Ondas e Tipos de Ondas	66
4.1.1 Ondas unidimensionais	68
4.1.2 Ondas bidimensionais	69
4.2 Relações entre as ondas e os objetos que estão a sua volta	70
4.2.1 Reflexão das ondas	70
4.2.2 Difração de ondas.....	72
4.2.3 Interferência de ondas	73
4.3 Utilizando o estudo da Ondulatória para compreender os números complexos como	
vetores.....	75
4.3.1 Passagem de um feixe de luz por duas fendas.....	75
4.3.2 A representação vetorial dos números complexos no experimento de Young	76
CONSIDERAÇÕES FINAIS	81
REFERÊNCIAS	82

INTRODUÇÃO

“A coordenação de muitos registros (hipótese 2 e figura 2) é, portanto, uma condição absolutamente necessária para que o esquema diádico de representação habitualmente admitido (hipótese 1 e figura 1) corresponda a um funcionamento cognitivo efetivo no sujeito e, para que, apenas superficialmente, o recurso a apenas um registro de representação parecesse suficiente.” (DUVAL, 2012, p. 284).

Temos que vários registros de representação são possibilidades para melhor compreensão de objetos matemáticos, desse modo, neste trabalho iremos propor a utilização da representação vetorial dos números complexos como um artifício para resolução de exercícios, análise das operações de números complexos e discutir a presença desses números e de sua representação vetorial na Física, especificamente, na Ondulatória. Utilizaremos exercícios resolvidos para evidenciar essa representação e, como aplicação, analisaremos a presença dos números complexos como vetores no experimento da passagem de luz por dupla fenda desenvolvido por Thomas Young (1773 – 1829).

Segundo D’Ambrósio (1999, p. 27), “um dos maiores erros é desvincular a Matemática das outras atividades humanas”, de modo que, conforme PCN (Parâmetros Curriculares Nacionais), mostrar a Matemática como uma ciência desenvolvida pela humanidade ao longo do tempo auxilia na desmistificação dessa ciência. Portanto, para que nosso trajeto seja eficiente e satisfatório, o primeiro capítulo deste trabalho traz um breve resumo da história dos números complexos e da história da Ondulatória. Evidenciando os principais responsáveis dos primeiros relatos dos números complexos e das ondas, trazendo conceitos como: o surgimento da fórmula Cardano-Tartaglia, os números complexos como pares numéricos e a Teoria Ondulatória da Luz.

No Capítulo 2, veremos alguns conceitos básicos dos números complexos e da Álgebra Linear que são pré-requisitos para a leitura dos capítulos subsequentes. Neste capítulo exploraremos as representações algébrica e trigonométrica dos números complexos, mostrando como são feitas as operações desses números utilizando ambas as representações e evidenciando as fórmulas de De Moivre.

No terceiro capítulo trabalharemos questões e operações visando apenas a representação vetorial dos números complexos, enfatizando a utilização da Geometria para a resolução de

operações desses números e trazendo uma relação interessante das potências do número complexo e polígonos regulares.

Por fim, no quarto capítulo abordaremos os principais conceitos da Ondulatória, ou seja, tipos de ondas e relações entre elas e será apresentada a forma como os números complexos representados vetorialmente contribui para o estudo da Interposição de ondas, tentando responder à questão: o que ocorre quando n ondas se encontram em determinada posição e qual o comportamento delas em relação a sua intensidade?

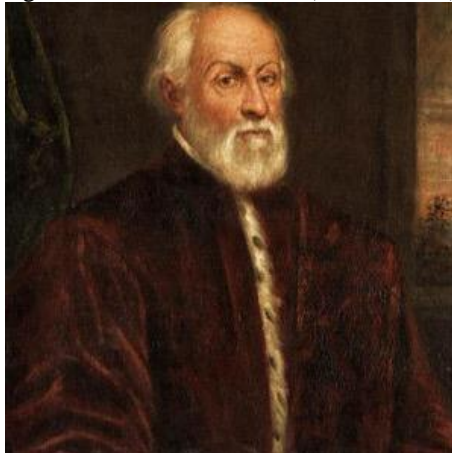
CAPÍTULO 1

UMA BREVE HISTÓRIA SOBRE OS NÚMEROS COMPLEXOS E A ONDULATÓRIA

1.1 História dos Números Complexos

É inadequado discutir sobre os números complexos e não mencionar a história de seu surgimento. De acordo com Rosa (1998, p.114), os números complexos foram analisados e utilizados por alguns estudiosos da área de Matemática e Física até ser descrito como o conhecemos hoje. Eles surgiram a partir da necessidade do italiano Rafael Bombelli (1526 – 1572) de resolver uma equação do 3º grau utilizando a fórmula de Cardano-Tartaglia. Essa necessidade resultou em uma raiz quadrada de um número negativo que, até então, era considerada impossível de solucionar. Para que a compreensão seja sucinta, veremos mais adiante a equação mencionada e a raiz quadrada de um número negativo.

Figura 1.1: Rafael Bombelli (1526 – 1572).



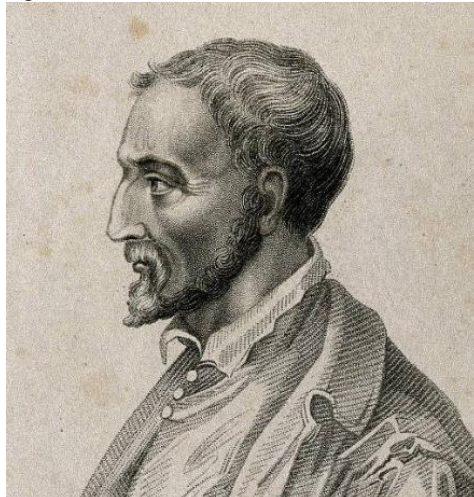
Fonte: <https://www.italyonthisday.com/2019/01/rafael-bombelli-mathematician.html>. Acesso em: 05/06/2022.

Todavia, muito antes que Bombelli iniciasse os seus estudos, por volta do século III, o matemático grego Diofanto já observava relatos sobre os pares numéricos, afirma Stillwell (2006, p.34). Posteriormente, veremos que existe relação entre os pontos reais no plano e os complexos e poderemos compreender, a partir de Diofanto, que uma parcela dessa relação já estava sendo construída antes mesmo que o conjunto dos números complexos existisse.

Segundo Garbi (2005, p.121), Girolamo Cardano (1501 – 1576) revelou a regra, que era capaz de resolver equações polinomiais de 3º grau da forma $x^3 + px + q = 0$, sendo $p, q \in \mathbb{R}$,

na Ars Magna, regra essa desenvolvida por Niccolò Fontana Tartaglia (1499 – 1557) em 1531. Cardano afirmou para todos que a regra foi de sua autoria, omitindo ter sido criada por Tartaglia.

Figura 1.2: Girolamo Cardano (1501 – 1576).



Fonte: http://clubes.obmep.org.br/blog/b_girolamo-cardano/. Acesso em: 05/06/2022.

Figura 1.3: Niccolò Fontana Tartaglia (1499 – 1557).



Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Niccol%C3%B2_Fontana_Tartaglia. Acesso em: 05/06/2022.

Pode-se provar que as raízes da equação $x^3 + px + q = 0$, são dadas por:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Após longos períodos de estudos, foi possível concluir que qualquer equação da forma $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, poderia ser manipulada para que resulte em $x^3 + px + q = 0$, podendo, assim, ser aplicada a fórmula que decorre em suas raízes.

A seguir, faremos alguns cálculos baseados na trajetória de Cardano e Tartaglia a fim de generalizar a fórmula Cardano-Tartaglia.

Utilizando a equação descrita acima e efetuando a sua divisão pelo coeficiente a , temos:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \Leftrightarrow x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0.$$

Substituindo $\frac{b}{a}$ por A , $\frac{c}{a}$ por B e $\frac{d}{a}$ por C , sendo $A, B, C \in \mathbb{R}$, segue que:

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0.$$

Substituindo x por $y - \frac{A}{3}$, temos:

$$\begin{aligned} \left(y - \frac{A}{3}\right)^3 + A\left(y - \frac{A}{3}\right)^2 + B\left(y - \frac{A}{3}\right) + C &= 0 \Leftrightarrow \\ \left(y^3 - Ay^2 + \frac{A^2}{3}y - \frac{A^3}{27}\right) + A\left(y^2 - 2\frac{A}{3}y + \frac{A^2}{9}\right) + B\left(y - \frac{A}{3}\right) + C &= 0 \Leftrightarrow \\ y^3 - Ay^2 + \frac{A^2}{3}y - \frac{A^3}{27} + Ay^2 - 2\frac{A^2}{3}y + \frac{A^3}{9} + By - \frac{AB}{3} + C &= 0 \Leftrightarrow \\ y^3 + \left(B - \frac{A^2}{3}\right)y + \frac{2A^3}{27} - \frac{AB}{3} + C &= 0. \end{aligned}$$

Chamando de p e q , as expressões $\left(B - \frac{A^2}{3}\right)$ e $\frac{2A^3}{27} - \frac{AB}{3} + C$, respectivamente, podemos concluir que a equação $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ pode ser reescrita da forma:

$$y^3 + py + q = 0.$$

Demonstramos, assim, que é possível aplicar a fórmula dada acima em qualquer equação da forma $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, $a \neq 0$, a fim de estabelecer suas raízes. Desse modo, de acordo com Rosa (1998, p.114), podemos dizer que a regra Cardano-Tartaglia foi usada posteriormente por Bombelli para resolver a equação $x^3 - 15x - 4 = 0$.

A seguir, resolveremos a equação discutida acima e tomaremos como base os cálculos de Bombelli.

Empregando a equação $x^3 - 15x - 4 = 0$ à fórmula, temos:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{-\frac{(-4)}{2} + \sqrt{\frac{(-4)^2}{4} + \frac{(-15)^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{(-4)}{2} - \sqrt{\frac{(-4)^2}{4} + \frac{(-15)^3}{27}}}. \\ x &= \sqrt[3]{2 + \sqrt{4 - 125}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{4 - 125}}. \\ x &= \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}. \end{aligned}$$

Ainda se baseando nos estudos de Rosa (1998, p.114), apesar de se deparar com a raiz $\sqrt{-121}$ e não saber quais eram as demais raízes da equação, Bombelli sabia que a solução da expressão acima era uma possibilidade.

Note que 4 é uma raiz, pois: $4^3 - 15 \cdot 4 - 4 = 64 - 60 - 4 = 64 - 64 = 0$.

Desse modo, aplicando o dispositivo de Briot-Ruffini, que recebeu esse nome devido aos matemáticos Charles Auguste Briot (1817 – 1882) e Paolo Ruffini (1765 – 1822), na equação, as demais raízes são: $-2 + \sqrt{3}$ e $-2 - \sqrt{3}$.

Bombelli determinou que a solução de cada raiz cúbica encontrada anteriormente seria um número real. Ele percebeu que ao buscar a solução de equações polinomiais distintas utilizando a regra de Cardano-Tartaglia, os resultados, frequentemente, apresentavam a raiz $\sqrt{-1}$ e, então, ele passa a efetuar cálculos com as raízes negativas como se não houvesse diferença entre a incógnita da equação e a raiz. Soares (2021, p. 37) afirma que “foi Bombelli quem estabeleceu regras para operar com esses números, contribuindo de forma determinante para o seu desenvolvimento”.

Leonhard Euler (1707 – 1783) também exerceu influência na descoberta dos números complexos, foi ele quem definiu o símbolo “i” como representante da raiz $\sqrt{-1}$, isso além de facilitar os cálculos que envolvem as equações do terceiro grau e graus superiores também desvinculou a Matemática da noção de quantidade, em que os números positivos eram vistos de melhor modo que os negativos. Todavia, Euler também colaborou de forma muito significativa para o estudo da Ondulatória que será abordado no próximo tópico. Veremos mais adiante como este matemático contribuiu para o desenvolvimento da série de funções que, posteriormente, um tipo delas veio a se chamar, Série de Fourier, utilizada para descrever as ondas.

Figura 1.4: Leonhard Euler (1707 – 1783).



Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler. Acesso em: 05/06/2022.

Em 1749, no livro Pesquisas sobre as Raízes Imaginárias de uma Equação, Euler declara:

“Como todos os números concebíveis são maiores ou menores do que zero ou iguais a zero, fica então claro que as raízes quadradas de números negativos não podem ser incluídas entre os números possíveis. E esta circunstância nos conduz ao conceito de tais números, os quais, por sua própria natureza, são impossíveis, e que são geralmente chamados de números imaginários, pois existem somente na imaginação.” (apud NEVES, 2014, p. 4)

Entretanto, ainda era necessária uma aplicação geométrica, visto que os números complexos eram distintos de qualquer outro conjunto antes visto e eles não satisfaziam a noção de quantidade. Então, essa necessidade foi suprida por três matemáticos que, juntos, foram os principais responsáveis por desenvolver a relação entre os números complexos e os pontos reais do plano.

Caspar Wessel (1745 – 1818) é o primeiro que evidenciaremos aqui, pois apesar de não ser tão reconhecido, ele publicou um artigo sobre a representação analítica de vetores e foi homenageado em 2001 pela Real Academia Dinamarquesa de Ciências e Letras, que publicou a obra: *Around Caspar Wessel and the Geometric Representation of Complex Numbers*. Nos dias atuais, o plano é denominado Argand-Gauss devido a diversos fatores que apontaram a não influência e desconhecimento dos estudos de Wessel, apesar de já ter sido provado que esses estudos existiram.

O segundo foi Jean-Robert Argand (1768 – 1822) que também publicou um artigo chamado Ensaio sobre a maneira de representar as quantidades imaginárias nas construções geométricas. O último foi Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855), que tornou público o artigo sobre os números complexos serem representados graficamente.

Figura 1.5: Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855).



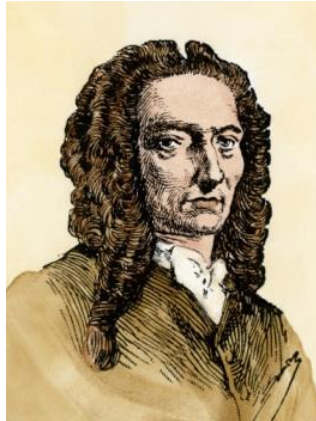
Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Carl_Friedrich_Gauss. Acesso em: 05/06/2022.

Gauss declarou, em 1831, no livro Teoria dos Resíduos Quadráticos:

“Fazia muito tempo que as quantidades imaginárias estavam baseadas na ficção, não sendo plenamente aceitas na matemática e vistas como uma coisa a ser tolerada; elas estavam longe de ter o mesmo status que as quantidades reais. Agora não há mais justificativa para tal discriminação, uma vez que a metafísica dos números imaginários está plenamente esclarecida, e que provou que eles têm um significado tão real quanto o dos números negativos.” (apud NEVES, 2014, pg. 5).

Além de explorar as representações geométricas que esses números possuem, também foi importante apresentar a relação que eles têm com a trigonometria. À vista disso, podemos citar, como um dos responsáveis de tais estudos, o matemático francês Abraham de Moivre (1667 – 1754), que contribuiu de forma significativa na história dos números complexos desenvolvendo fórmulas que possibilitaram essa relação. Estas fórmulas são chamadas de fórmulas de De Moivre e serão vistas mais adiante no decorrer deste trabalho.

Figura 1.6: Abraham de Moivre (1667 – 1754).



Fonte: <https://clube.spm.pt/news/abraham-de-moivre-1667-1754-nasceu-a-26-de-maio-de-1667>. Acesso em: 05/06/2022.

Através disso, podemos afirmar que os números complexos foram analisados e usados por um número considerável de estudiosos e, como consequência, as suas diversas representações foram sendo “descobertas”. De modo que, essas representações proporcionaram uma nova perspectiva desses números e, também, a conquista de soluções relevantes.

No próximo tópico abordaremos uma breve história da Ondulatória, mencionando cientistas importantes no estudo desse fenômeno físico e enfatizando os feitos de Leonhard Euler, de modo a relacionar o conceito de números complexos à Física.

1.2 História da Ondulatória

Como vimos anteriormente, Euler foi muito importante no desenvolvimento dos números complexos e muitos de seus estudos também o tornaram imprescindível para a Física, podemos citar como exemplo o livro *Mechanica*, o qual apresenta as Leis de Newton. Analisando a história da Matemática, podemos dizer que grande parte dos matemáticos da época, incluindo Euler, possuíam conhecimento não só de sua própria área, mas também das demais ciências: Física, Filosofia etc. Devido à necessidade de possuir algo palpável, validar teses segundo resultados empíricos, boa parte dos estudos da Matemática influenciaram os estudos da Física e vice-versa.

Euler iniciou muito jovem as suas pesquisas e aos quatorze anos de idade ingressou na universidade da Basileia e teve como tutor Jean Bernoulli (1667 - 1748) e após o falecimento deste, ele conheceu o filho de Jean, Daniel Bernoulli (1700 - 1782).

Euler e os Bernoulli estudaram juntos a equação da onda e desenvolveram aplicações e teorias sobre o estudo de ondas, sua propagação, velocidade etc.

Christiaan Huygens (1629 - 1695) também se fez muito presente na história da Ondulatória, esse físico e astrônomo holandês foi um dos principais sistematizadores da Teoria Ondulatória da Luz, segundo Silva (2007, p. 149). Ainda conforme Silva (2007, p. 149), ele contemplava a luz como uma perturbação mecânica que se propagava por meio de forças de contato entre corpúsculos. Huygens apresentou à Academia Real de Ciências da França em Paris, em 1678, o Tratado da Luz e o publicou em Leyden, em 1690.

Figura 1.7: Christiaan Huygens (1629 – 1695).

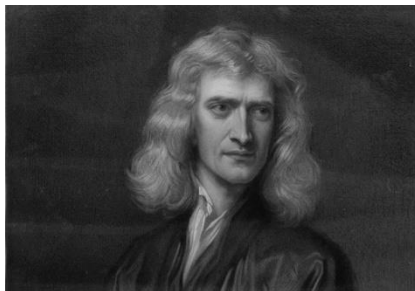


Fonte: <https://ecalculo.if.usp.br/historia/huygens.htm>. Acesso em: 05/06/2022.

Não podemos deixar de mencionar o próprio Isaac Newton (1642 – 1727), ele foi um dos físico-matemáticos, mais conhecidos de todos os tempos.

Enfatizaremos, aqui, os trabalhos de Newton referente ao surgimento da Ondulatória. Assis (1996, p. 18), no livro *Óptica: Isaac Newton*, afirma que “Newton sustentava que há infinitas cores, cada uma delas correspondendo a um grau diferente de refringência, e que cada uma dessas cores homogêneas não é modificada por refrações nem por reflexões”. Entre as primeiras descobertas de Newton, encontra-se a da decomposição da luz branca nas cores espectrais e entre as últimas está a polarização da luz, publicada em 1687.

Figura 1.8: Sir Isaac Newton (1642 – 1727).



Fonte: <https://impa.br/noticias/maior-de-todos-isaac-newton-nao-foi-um-grande-ser-humano/>. Acesso em: 05/06/2022.

Os próximos dois cientistas que mencionaremos aqui são de suma importância para descrever o estudo de ondulatória que veremos no último capítulo deste trabalho. O primeiro deles é Jean Baptiste Joseph Fourier (1768 – 1830), matemático e físico francês, além de deixar uma demonstração da posição das raízes de uma equação algébrica, denominada Teorema de Fourier, foi um dos responsáveis por iniciar as investigações das decomposições de funções em séries trigonométricas que, mais adiante, seriam denominadas séries de Fourier.

Figura 1.9: Jean Baptiste Joseph Fourier (1768 – 1830).



Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Jean_Baptiste_Joseph_Fourier#/media/Ficheiro:Joseph_Fourier.jpg. Acesso em: 05/06/2022.

“As séries de Fourier provaram ser da mais alta utilidade em campos de estudo como a acústica, a óptica, eletrodinâmica, a termodinâmica, e vários outros campos da Física e da Matemática, essas séries têm um papel fundamental na análise harmônica, problemas sobre vigas e pontes e na solução de equações diferenciais.” (NUNES, 2002, pg. 9)

O segundo é Thomas Young (1773 – 1829), conhecido pela experiência da dupla fenda, experiência essa que apontaremos como uma das aplicações possíveis para a representação dos números complexos como vetores e que tornou possível determinar o caráter ondulatório da luz.

As experiências de Young foram estudadas e implementadas ao longo de estudos importantes sobre a Ondulatória desenvolvidos por Augustin-Jean Fresnel (1788 – 1827), Heinrich Rudolf Hertz (1857 – 1894), entre outros.

“Em 1801, Thomas Young (1773-1829) demonstrou que duas ondas de luz que se superpõem podem interferir uma na outra. O experimento é muito conhecido. Ele fez com que a luz solar incidisse em um orifício em uma chapa opaca. A luz emergente dispersa-se por difração e incide em dois novos orifícios, ocorrendo nova difração. A superposição entre as ondas provenientes desses orifícios gera um padrão de interferência em um anteparo. A análise dos máximos e mínimos, além de estabelecer uma base material convincente para sustentar a teoria ondulatória, permitiu-lhe medir o comprimento de onda da luz solar, estimada em 570 nm (em unidades atuais), bem próximo do valor atual de 555 nm.” (SILVA, 2006, p. 155)

Figura 1.10: Thomas Young (1773 – 1829).



Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Thomas_Young. Acesso em: 05/06/2022.

Fresnel foi colega do físico francês Dominique-François-Jean Arago (1786-1853), na Escola Politécnica. Juntos, eles realizaram o célebre trabalho que evidenciou o caráter de transversalidade da onda luminosa, trabalho esse que foi proposto por Young e fundamental

para que Fresnel explicasse a experiência sobre a não-interferência dos raios ordinário e extraordinário oriundos de uma dupla-refração.

“Os primeiros resultados sobre a difração da luz obtidos por Fresnel foram, inicialmente, publicados na “Annales de Chimie et Physique”. Esse trabalho, um pouco mais elaborado, foi então apresentado por seu amigo Arago à Academia Francesa de Ciências, em reunião realizada no dia 15 de julho de 1816.” (BASSALO, 1998, p. 79)

Figura 1.11: Augustin-Jean Fresnel (1788 – 1827).



Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Augustin_Jean_Fresnel. Acesso em: 05/06/2022.

Figura 1.12: Dominique-François-Jean Arago (1786-1853).



Fonte: <https://www.cambridge.org/core/journals/microscopy-today/article/pioneers-in-optics-dominiquefrancoisjean-arago-and-augustinjean-fresnel/5DC5EA452A166CC4283FFCB1F67A4186>. Acesso em: 05/06/2022.

William Rowan Hamilton (1805 – 1865) contribuiu com trabalhos fundamentais responsáveis parcialmente pelo desenvolvimento da óptica, dinâmica e álgebra.

Na Física ele ficou muito conhecido devido ao seu trabalho em mecânica analítica, que veio a ser influente nas áreas da mecânica quântica e da teoria quântica de campos.

“Em 1828 Hamilton descobriu, uma analogia formal entre o movimento de um ponto de massa sob a ação de um potencial $V(\vec{r})$ e a propagação de raios luminosos num meio com Índice de refração $n(\vec{r})$ no limite da ótica geométrica. Aliás, foi esta analogia que inspirou Hamilton a desenvolver a sua versão da mecânica.” (KOBERLE, 1979, pg. 244).

Figura 1.13: William Rowan Hamilton (1805 – 1865).



Fonte: <http://www.iea.usp.br/noticias/conferencia-resgata-a-pesquisa-de-william-rowan-hamilton>. Acesso em: 05/06/2022.

Após entender um pouco a história dos números complexos e da ondulatória e observar as relações que possuem, no próximo capítulo serão abordados conceitos relevantes para darmos continuidade a este trabalho.

CAPÍTULO 2

ALGUNS CONCEITOS IMPORTANTES SOBRE OS NÚMEROS COMPLEXOS E OS VETORES

Neste segundo capítulo abordaremos conceitos específicos dos números complexos e de vetores. A compreensão deste capítulo será essencial para desencadear as ideias que aparecerão no decorrer deste trabalho. Acreditamos que os números complexos possuem aplicações geométricas a serem observadas, que podem ser analisadas de melhor forma utilizando o auxílio da Álgebra Linear e da Geometria.

“As aplicações geométricas das operações entre complexos (principalmente a multiplicação), tão belas como variadas, não são exploradas. Isto é imperdoável, pois todo matemático ou usuário da Matemática, ao pensar num número complexo, sempre o imagina como um ponto do plano coordenado e as operações são interpretadas como transformações geométricas.” (apud OLIVEIRA, 2010, p.21).

Isto posto, enunciaremos a seguir os principais conceitos dos números complexos, dos vetores, e as suas operações. As definições, teoremas e axiomas postulados nos próximos tópicos foram extraídos dos livros: Complex numbers from A to-Z de Titu Andreescu e Dorin Andrica, (1956, p.1, 2 e 8), #Contato matemática, 3º ano, de Joamir Roberto de Souza e Jacqueline da Silva Ribeiro Garcia, (2016, p.147), Fundamentos de Matemática Elementar 6: Complexos, polinômios e equações, de Gelson Iezzi e outros, (1977, p. 1 a 34) e Geometria Analítica: um tratamento vetorial, de Paulo Boulos e Ivan de Camargo, (2005, p.6).

2.1 Conjunto dos Números Complexos

Dado o conjunto $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a, b) | a, b \in \mathbb{R}\}$. Dois elementos (a_1, b_1) e (a_2, b_2) de \mathbb{R}^2 , as operações de adição, subtração e multiplicação são definidas, em \mathbb{R}^2 , por:

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2) \in \mathbb{R}^2.$$

É importante citar que para realizar a operação de subtração utilizando os elementos (a_1, b_1) e (a_2, b_2) de \mathbb{R}^2 basta somar o elemento (a_1, b_1) ao elemento $(-a_2, -b_2)$, pois \mathbb{R}^2 é anel e admite $(-a_2, -b_2)$ como elemento oposto de (a_2, b_2) , portanto:

$$(a_1, b_1) - (a_2, b_2) = (a_1, b_1) + (-a_2, -b_2) = (a_1 - a_2, b_1 - b_2) \in \mathbb{R}^2.$$

E a de multiplicação é definida por:

$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1) \in \mathbb{R}^2.$$

Considerando o par ordenado $(0,1)$ e elevando-o ao quadrado, vem que:

$$(0,1) \cdot (0,1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1) = (0 - 1, 0 + 0) = (-1,0).$$

Veremos mais adiante como o produto acima pode ser aplicado nos números complexos.

Igualdade de complexos

Dados dois elementos $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in \mathbb{R}^2$ temos que eles são iguais se, e somente se, $a_1 = a_2$ e $b_1 = b_2$.

Definição 1: O conjunto \mathbb{R}^2 munido das operações de adição e multiplicação, é chamado o conjunto de números complexos, denotado por \mathbb{C} . O elemento $z = (a, b) \in \mathbb{C}$ é chamado número complexo.

Desse modo, podemos salientar que tanto a definição apresentada acima quanto as propriedades são de suma importância para fundamentar os conceitos a serem abordados ao longo desse trabalho, elas nos possibilitam relacionar os números complexos à sua representação vetorial que será abordado no capítulo seguinte.

2.1.2 Representação algébrica de um número complexo

Definição 2: Um número complexo $z = (a, b) \in \mathbb{C}$ pode ser representado da seguinte maneira:

$$z = a + bi, \text{ com } a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}.$$

Sendo a denominada parte real, b parte imaginária e i unidade imaginária, tal que $i = (0,1)$.

Considerando, novamente, o par ordenado $(0,1)$ que, de acordo com a definição 2, representa o número complexo $z = (0,1) = 0 + 1i = i$.

Conforme feito na secção 2.1. temos que: $(0,1) \cdot (0,1) = (-1,0)$.

Logo, podemos concluir que:

$$z = i \Leftrightarrow z^2 = i^2 = -1.$$

O mesmo ocorre para $z = (0, -1) = 0 - 1i$, pois:

$$\begin{aligned} (0, -1) \cdot (0, -1) &= (0 \cdot 0 - [(-1) \cdot (-1)], 0 \cdot (-1) + 0 \cdot (-1)) = (0 - 1, 0 - 0) \\ &\Leftrightarrow (-1,0). \end{aligned}$$

Operações com números complexos em sua representação algébrica

Um número complexo pode ser representado de algumas formas sendo três delas essenciais para compreender o percurso que esse trabalho seguirá. Assim, representar um número complexo como um afixo, ou seja, um ponto no plano cartesiano (veremos mais adiante a forma como essa representação ocorre), representar um número complexo algebricamente, como vimos na Definição 2 e representar um número complexo em sua forma trigonométrica.

Neste momento, iremos explorar as operações básicas matemáticas com números complexos em sua forma em afixo e algébrica. É relevante mencionar que é possível realizar algumas operações matemáticas tanto utilizando somente a forma em afixo de um número complexo quanto utilizando a sua forma algébrica, veremos mais adiante como são feitas as operações com essas duas formas.

2.1.2.1 Adição

Sejam $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, complexos quaisquer, tais que $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

Temos, de acordo com a primeira definição apresentada, que:

$$z_1 + z_2 = (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d).$$

De acordo com a Definição 2, então:

$$z_1 + z_2 = (a + c, b + d) = (a + c) + (b + d)i.$$

Note que para somarmos dois números complexos em forma algébrica basta somar as suas respectivas partes reais e partes imaginárias.

2.1.2.2 Subtração

Conforme mencionado no tópico 2.1 e relacionando as propriedades à Definição 2, temos que a operação de subtração é realizada da seguinte forma:

$$z_1 - z_2 = (a, b) - (c, d) = (a - c, b - d).$$

E, também:

$$z_1 - z_2 = (a - c, b - d) = (a - c) + (b - d)i \Leftrightarrow z_1 - z_2 = a - c + (b - d)i.$$

2.1.2.3 Multiplicação

Sendo $z_1 = (a, b) = a + bi$ e $z_2 = (c, d) = c + di$, tais que $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, temos que:

$$z_1 \cdot z_2 = (a, b) \cdot (c, d).$$

Aplicando a propriedade vista no tópico 2.1, vem que:

$$z_1 \cdot z_2 = (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

$$\Leftrightarrow z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad - bc)i = ac - bd + (ad + bc)i.$$

Agora, note que é possível realizar o mesmo processo de multiplicação apenas aplicando a distributiva da multiplicação em relação à adição¹:

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bdi^2.$$

Como $i^2 = -1$, de acordo com o tópico 2.1.1. Então:

$$z_1 \cdot z_2 = ac + adi + bci + bd(-1) = ac + adi + bci - bd.$$

$$\Leftrightarrow z_1 \cdot z_2 = ac - bd + (ad + bc)i.$$

2.1.2.4 Divisão

Para realizar a operação de divisão entre números complexos em sua forma algébrica é necessário estar ciente do que é conjugado de um número complexo e como utilizá-lo na operação de divisão. A seguir, observe a definição de conjugado e a operação de divisão. É importante declarar que daqui em diante não faremos mais as operações utilizando a forma em afixo do número complexo.

Conjugado

Definição 3: Sendo o número complexo $z = a + bi$, o número $\bar{z} = a - bi$ é chamado de conjugado complexo ou o conjugado complexo de z .

Dados $z = a + bi$ e $\bar{z} = a - bi$, fazendo $z \cdot \bar{z}$, vem que:

¹ Neste momento utilizamos a propriedade da Distributiva da Multiplicação em relação à Adição e ela é válida pois, o Conjunto dos Números Complexos é um Corpo. Vide a apostila “Introdução à Teoria de Anéis”, de Cristina Maria Marques, (1999, p. 15). Disponível em: <https://www.yumpu.com/pt/document/view/14311949/introducao-a-teoria-de-aneis-departamento-de-matematica-ufmg>. Acesso em 20/08/2020.

$$z \cdot \bar{z} = (a + bi) \cdot (a - bi) = (a^2 - abi + abi - b^2i^2).$$

Sabendo que $i^2 = -1$, de acordo com o t3pico 2.1.2, temos que:

$$z \cdot \bar{z} = [a^2 - b^2(-1)] = a^2 + b^2.$$

Logo, como, por defini33o de n3mero complexo, $a, b \in \mathbb{R}$, podemos afirmar que $(a^2 + b^2) \in \mathbb{R}$. Ent3o, 3 verdade que o produto entre um n3mero complexo e o seu conjugado sempre ser3 um n3mero real.

Divis3o de n3meros complexos

Para realizar a opera3o de divis3o iremos multiplicar a express3o $\frac{z_1}{z_2}$ por $\frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2}$ pois, assim como as opera3es anteriores, queremos obter como resultado um n3mero da forma $a + bi$, sendo a e b reais quaisquer, e sabemos que o produto entre um n3mero complexo e seu conjugado 3 um n3mero real. Logo, fazendo a multiplica3o, obteremos denominador real e conseguiremos separar a parte real da parte imagin3ria do n3mero complexo obtido.

Portanto, sendo $\bar{z}_2 = c - di$ conjugado complexo de z_2 , temos que:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot 1 = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2} = \frac{(a + bi)}{(c + di)} \cdot \frac{(c - di)}{(c - di)}.$$

Como $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, aplicando a propriedade distributiva da multiplica3o em rela3o 3 adi3o:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{ac - adi + bci - bdi^2}{c^2 - cdi + cdi - d^2i^2}.$$

Sendo $i^2 = -1$, por defini3o, temos que:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{ac - adi + bci - bd(-1)}{c^2 - cdi + cdi - d^2(-1)}.$$

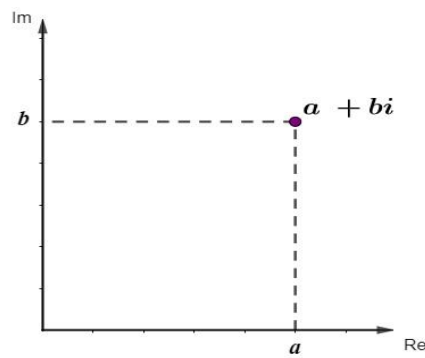
Ent3o, novamente utilizando a propriedade distributiva e a comutativa da adi3o:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{ac - adi + bci + bd}{c^2 - cdi + cdi + d^2} = \frac{ac + bd - adi + bci}{c^2 + d^2} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}.$$

2.1.3 Plano Complexo

Vimos no capítulo 1 deste mesmo trabalho que o plano Argand-Gauss foi um plano desenvolvido por Caspar Wessel, Jean-Robert Argand e Carl Friedrich Gauss, também vimos o porquê de Wessel não ter sido reconhecido como um dos autores do plano. Todavia, não compreendemos o que é esse plano e a sua importância para os números complexos. O plano Argand-Gauss (ou plano complexo) nada mais é que a representação dos números complexos em sua forma geométrica. O plano é composto pelos eixos real e imaginário que correspondem aos eixos x e y do plano cartesiano, respectivamente. E neste plano podemos representar os números complexos geometricamente como pontos chamados afixos. Observe a figura a seguir:

Gráfico 2.1: Representação do número complexo z no Plano Complexo.

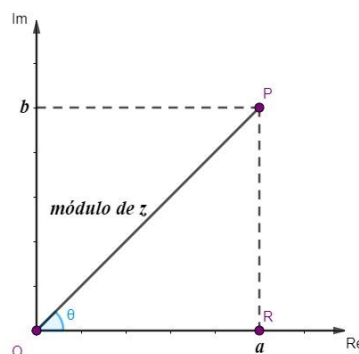


Fonte: Autoria própria.

2.1.3.1 Módulo de um número complexo

Traçando um segmento de reta da origem do plano complexo ao número complexo descrito, temos que o módulo de um número complexo é a distância do ponto de origem ao próprio afixo do número complexo. A partir dos pontos O e P , sendo O o ponto de origem e P o ponto do número complexo, podemos instituir o ponto R , como na figura:

Gráfico 2.2: Triângulo retângulo OPR .



Fonte: Autoria própria.

Pelo Teorema de Pitágoras, obtemos o módulo de z , dado por:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

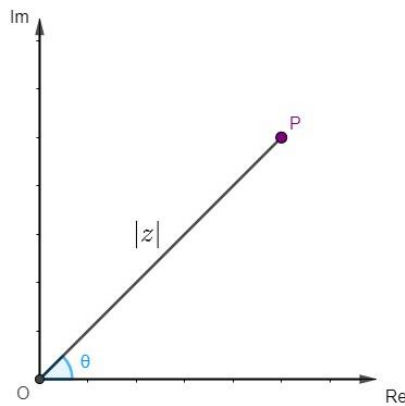
Note ainda que, $a = |z| \cos \theta$ e $b = |z| \sin \theta$, sendo θ o ângulo $\widehat{R\hat{O}P}$.

2.1.3.2 Argumento

Ao analisarmos o gráfico 2.2, podemos perceber que existe um ângulo formado entre o eixo real e o módulo do número complexo z , o ângulo $\widehat{R\hat{O}P}$ que tomamos como θ . Esse ângulo é denominado argumento de z .

O ângulo θ é chamado de argumento principal de z quando θ está compreendido no intervalo $0 \leq \theta < 2\pi$. Se θ é argumento de z , $\theta + 2k\pi$ também será argumento de z , sendo $k \in \mathbb{Z}$.

Gráfico 2.3: Argumento θ do número complexo z .



Fonte: Autoria própria.

2.1.4 Representação trigonométrica de um número complexo

Dado o número complexo $z = a + bi$, qualquer, e sabendo que:

$a = |z| \cos \theta$ e $b = |z| \sin \theta$, de acordo com o tópico 2.1.3.1, temos que:

$$z = |z| \cos \theta + i(|z| \sin \theta) = |z|(\cos \theta + i \sin \theta).$$

2.1.4.1 Multiplicação e divisão com números complexos em sua representação trigonométrica

Considere $z_1 = |z_1|(\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)$ e $z_2 = |z_2|(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2)$.

Fazendo $z_1 \cdot z_2$:

$$z_1 \cdot z_2 = [|z_1|(\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)] \cdot [|z_2|(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2)].$$

$$\Leftrightarrow z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2|(\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1) \cdot (\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2).$$

$$\Leftrightarrow z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|(\cos \theta_1 \cos \theta_2 + i \cos \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2 + i^2 \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2)$$

Como $i^2 = -1$, segundo o tópico 2.1.1:

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|(\cos \theta_1 \cos \theta_2 + i \cos \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2 - \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2).$$

$$\Leftrightarrow z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|[(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2) + i(\cos \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 + \operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2)].$$

Pelas fórmulas trigonométricas, cujas demonstrações podem ser encontradas no livro “Fundamentos de Matemática Elementar 3 Trigonometria” de Gelson Iezzi, (1978, p. 68-C), vem que:

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2.$$

$$\operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2) = \operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2.$$

Portanto:

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)].$$

2.1.4.2 Divisão

É relevante citar que para efetuar a operação de divisão entre números complexos em sua forma trigonométrica usaremos o conjugado de número complexo também representado trigonometricamente.

Conjugado representado na forma trigonométrica

Vimos que $\bar{z} = a - bi$ é conjugado de z , $a = |z| \cos \theta$ e $b = |z| \sin \theta$.

Logo, como $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$, substituindo a e b em \bar{z} :

$$\bar{z} = |\bar{z}| \cos \theta - |\bar{z}| \sin \theta i = |\bar{z}|(\cos \theta - i \sin \theta).$$

Divisão de números complexos em sua forma trigonométrica

Sejam $z_1 = |z_1|(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$ e $z_2 = |z_2|(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$, quaisquer, temos que:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)}{|z_2|(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)}.$$

Multiplicando a expressão $\frac{z_1}{z_2}$ por $\frac{\bar{z}_2}{z_2}$, pois $\frac{\bar{z}_2}{z_2} = 1$, 1 é elemento neutro multiplicativo de \mathbb{C} e $\bar{z}_2 = |\bar{z}_2| \cdot (\cos \theta_2 - i \sin \theta_2)$ é a forma trigonométrica do conjugado de z_2 .

Então:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)}{|z_2|(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)} \cdot \frac{|\bar{z}_2|(\cos \theta_2 - i \sin \theta_2)}{|\bar{z}_2|(\cos \theta_2 - i \sin \theta_2)}.$$

$$\Leftrightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|(\cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 - i \cos \theta_1 \cdot \sin \theta_2 + i \sin \theta_1 \cdot \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \cdot \sin \theta_2)}{|z_2|(\cos^2 \theta_2 + \sin^2 \theta_2)}.$$

$$\Leftrightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|[(\cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \cdot \sin \theta_2) + i(\sin \theta_1 \cdot \cos \theta_2 - \cos \theta_1 \cdot \sin \theta_2)]}{|z_2|(\cos^2 \theta_2 + \sin^2 \theta_2)}$$

Utilizando as fórmulas de subtração de arcos e a Relação Fundamental Trigonométrica, vem que:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)]}{|z_2|}.$$

$$\Leftrightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)].$$

2.1.5 Fórmulas de De Moivre

Vimos no primeiro capítulo deste trabalho um pouco sobre a história de De Moivre. Aprender sobre ele é fundamental para entender as fórmulas que ele desenvolveu e as suas aplicabilidades. A seguir veja as demonstrações da primeira e da segunda fórmulas de De Moivre:

2.1.5.1 A potência de um Número Complexo

A potência de um número complexo surgiu a partir da multiplicação entre dois (ou mais) números complexos iguais.

Neste tópico é importante lembrar a operação multiplicação feita em 2.1.4.1.1:

$$z \cdot z = |z| \cdot |z| [\cos(\theta + \theta) + i \operatorname{sen}(\theta + \theta)],$$
$$z^2 = |z|^2 [\cos(2\theta) + i \operatorname{sen}(2\theta)].$$

É possível verificar que o mesmo processo ocorre para n fatores. Sendo $n \in \mathbb{N}^*$, podemos provar por indução finita sobre n que:

$$z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n = |z_1| \cdot |z_2| \cdot \dots \cdot |z_n| [\cos(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n)].$$

Dado que está sendo feita a multiplicação entre o mesmo número complexo n vezes, vem que:

$$z_1 = z_2 = \dots = z_n = z.$$
$$|z_1| = |z_2| = \dots = |z_n| = |z|.$$
$$\theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_n = \theta.$$

Então, conclui-se que:

$$z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n = z^n.$$
$$|z_1| \cdot |z_2| \cdot \dots \cdot |z_n| = |z|^n.$$
$$\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n = n \cdot \theta.$$

Logo, substituindo os valores encontrados na equação:

$$z^n = |z|^n \cdot [\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)].$$

Dado que foi demonstrado para $n \in \mathbb{N}^*$, é imprescindível analisar se é válida também para $n \in \mathbb{Z}$. Portanto, observe para $(-n)$:

$$z^{-n} = \frac{1}{z^n} = \frac{\cos(0) + isen(0)}{|z|^n [\cos(n\theta) + isen(n\theta)]}$$

Obs: para concluir a equação abaixo é imprescindível recordar como é efetuada a operação divisão de números complexos em sua forma trigonométrica demonstrada em 2.1.4.1.2.2 desse mesmo trabalho.

Logo,

$$z^{-n} = |z|^{-n} [\cos(-n\theta) + isen(-n\theta)].$$

2.1.5.2 A raiz de um Número Complexo

Para obter a raiz de um número complexo qualquer é necessário recordar o que foi visto no tópico anterior de potência de um número complexo. Portanto, considere z_1 e z_2 em suas respectivas formas trigonométricas:

$$z_1 = |z_1| [\cos(\theta_1) + isen(\theta_1)] \text{ e } z_2 = |z_2| [\cos(\theta_2) + isen(\theta_2)].$$

Considerando z_2 uma raiz enésima de z_1 é possível escrever a seguinte relação:

$$(z_2)^n = z_1.$$

Através da potência de um número complexo, vista anteriormente, temos que:

$$\begin{aligned} |z_2|^n [\cos(n\theta_2) + isen(n\theta_2)] &= |z_1| [\cos(\theta_1) + isen(\theta_1)]. \\ |z_2|^n [\cos(n\theta_2)] + |z_2|^n [isen(n\theta_2)] &= |z_1| [\cos(\theta_1)] + |z_1| [isen(\theta_1)]. \end{aligned}$$

Agora, comparando ambos os termos das equações:

$$\begin{cases} |z_2|^n [\cos(n\theta_2)] = |z_1| [\cos(\theta_1)] \\ |z_2|^n [isen(n\theta_2)] = |z_1| [isen(\theta_1)] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |z_2|^n = |z_1| \Leftrightarrow |z_2| = \sqrt[n]{|z_1|} \\ \cos(n\theta_2) = \cos(\theta_1) \\ \text{sen}(n\theta_2) = \text{sen}(\theta_1) \end{cases}.$$

Resolvendo as equações trigonométricas acima, podemos concluir que:

$$\begin{aligned} n\theta_2 &= \theta_1 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ \theta_2 &= \frac{\theta_1 + 2k\pi}{n} \Leftrightarrow \theta_2 = \frac{\theta_1}{n} + \frac{2k\pi}{n}. \end{aligned}$$

Note que quando k for igual a n , temos que:

$$\theta_2 = \frac{\theta_1}{n} + 2\pi = \frac{\theta_1}{n}.$$

Portanto podemos afirmar que há exatamente n raízes enésimas distintas.

Logo, substituindo as relações encontradas acima em $z_2 = |z_2|[\cos(\theta_2) + i\text{sen}(\theta_2)]$:

$$\sqrt[n]{z_1} = \sqrt[n]{|z_1|} \left[\cos\left(\frac{\theta_1 + 2k\pi}{n}\right) + i\text{sen}\left(\frac{\theta_1 + 2k\pi}{n}\right) \right] \text{ sendo } k \in \{0, 1, 2, \dots, n - 1\}.$$

2.2 Vetores

Para entendermos o que é um vetor e suas respectivas operações é necessário, a priori, compreender a diferença entre grandeza escalar e grandeza vetorial.

2.2.1 Grandeza escalar

Muito utilizada na Física e na Matemática, de forma intuitiva, a grandeza escalar é caracterizada por um número acompanhado de unidade. Podemos dizer, então, que 4 m , $23,6\text{ cm}$, 1 L , são exemplos de grandezas escalares pois elas representam medidas.

2.2.2 Grandeza vetorial

Diferente da grandeza vista no tópico anterior, a grandeza vetorial não é representada somente por um número e uma unidade de medida, é necessário apresentar direção, comprimento (que nesse caso pode ser representado como um número e uma unidade de medida) e sentido.

A direção de uma grandeza vetorial se refere ao eixo que ela seguirá no espaço, ou seja, vertical, horizontal ou diagonal.

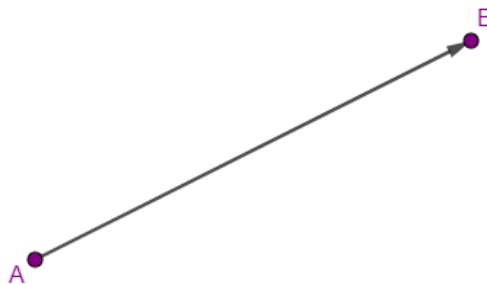
O comprimento é a distância entre o ponto de origem e a extremidade, enquanto o sentido determina qual é o ponto de origem e qual a extremidade do segmento, um exemplo disso seria se o vetor irá da direita para a esquerda ou da esquerda para a direita e vice-versa no caso de vetor horizontal.

O vetor (ou a grandeza vetorial) é representado graficamente por um segmento que possui ponto de origem e ponto extremo e possui uma determinada orientação que vai do ponto de origem até a sua extremidade, tal segmento é denominado segmento orientado.

Dados os pontos A e B , quaisquer, o segmento orientado que vai de A para B é representado por (A, B) e o mesmo ocorre caso o segmento orientado vá de B para A , ou seja, obteremos (B, A) .

Observe a seguir o segmento orientado (A, B) graficamente:

Gráfico 2.4: Segmento orientado (A, B) .



Fonte: Autoria própria.

Os segmentos orientados da forma (A, A) , sendo A um ponto qualquer do espaço, são ditos nulos.

É relevante mencionar que projetaremos os vetores em E^3 , sendo este o plano euclidiano tridimensional.

Definição 4: Os segmentos orientados (A, B) e (C, D) são equipolentes e indicados por $(A, B) \sim (C, D)$ se um dos dois casos apontados abaixo ocorrer:

- a) ambos são nulos.
- b) nenhum é nulo, entretanto, ambos possuem mesma direção, sentido e comprimento.

Podemos dizer que:

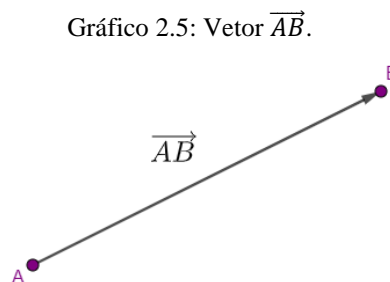
Definição 5: Um vetor é uma classe de equipolência de segmentos orientados de E^3 . Se (A, B) é um segmento orientado, o vetor correspondente (ou seja, o vetor representante é (A, B)) será indicado por \overrightarrow{AB} .

Chamaremos de vetor nulo o vetor cujo representante é um segmento orientado nulo. Indicamos o vetor nulo por $\vec{0}$.

Chamaremos de norma euclidiana o comprimento do vetor, ou seja, a distância entre o ponto de origem e a extremidade do segmento orientado que o representa. Caso o vetor possua norma 1, denominaremos esse vetor de vetor unitário. Indicamos por $\|\vec{u}\|$ a norma de um vetor, porém, como estamos trabalhando no plano complexo temos que $\|\vec{u}\| = |u|$, sendo u o afixo que representa o número complexo.

É imprescindível ressaltar que os vetores podem ser manipulados de forma que se instalem em qualquer local do espaço, ou seja, os seus pontos de origem e extremidade podem mudar e os vetores final e original permanecem iguais. O vetor final ainda possuirá a mesma direção, o mesmo sentido e comprimento do vetor original.

Dado o vetor \overrightarrow{AB} qualquer, observe a sua representação a seguir:



Fonte: Autoria própria.

2.2.2.1 Operações com vetores

Para compreender, de fato, como são realizadas operações entre vetores é de suma importância que saibamos o que é vetor oposto e como ele se aplica às operações.

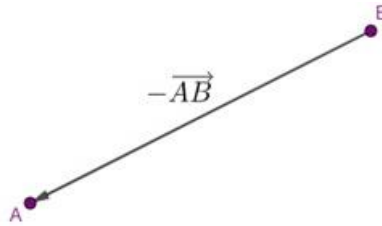
Vetor oposto

De forma intuitiva, vetor oposto é aquele que possui sentido contrário ao sentido do vetor “primário”. Ou seja, dado o segmento orientado (A, B) , qualquer, temos que, por definição de segmento orientado, o ponto A é a origem do segmento enquanto o ponto B é a extremidade. Logo, o segmento (B, A) representa o vetor oposto ao segmento (A, B) .

Dado o vetor \overrightarrow{AB} qualquer, podemos representar o seu vetor oposto das formas: \overrightarrow{BA} e $-\overrightarrow{AB}$.

Portanto, observe a seguir a representação do oposto do vetor \vec{AB} :

Gráfico 2.6: Representação de \vec{AB} e o seu vetor oposto $-\vec{AB}$.



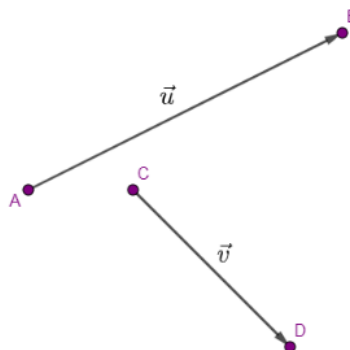
Fonte: Autoria própria.

Adição e subtração de vetores

Faremos as operações de adição e subtração entre vetores utilizando o método de completar triângulos, que é equivalente ao também conhecido método do paralelogramo.

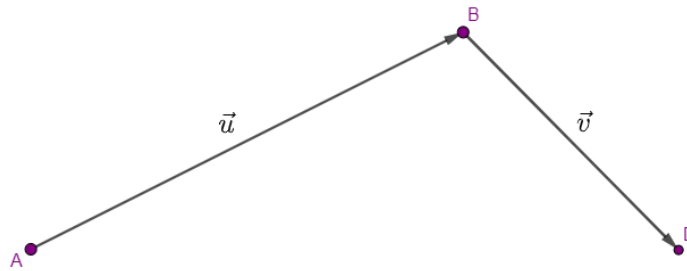
O método de completar triângulos, como o nome já diz, consiste em deslocar um determinado vetor até a origem ou extremidade do outro vetor a fim de que o terceiro vetor, responsável por “fechar” o triângulo, seja, também, o vetor resultado da adição ou subtração entre os outros dois. O método do paralelogramo também tem como objetivo conectar os vetores a fim de “fechar” o circuito de vetores, entretanto, consiste em projetar vetores paralelos aos vetores pré-determinados para efetuar a operação. Denominando de \vec{u} o vetor que tem origem no ponto A e extremidade no ponto B e de \vec{v} o que é representado pelo segmento orientado (C, D) , iremos projetar os pontos C e D no espaço de forma que $C = B$, o vetor \vec{v} permaneça com a mesma direção, sentido e comprimento. Para melhor compreensão, acompanhe os gráficos seguintes:

Gráfico 2.7: Representação dos vetores \vec{u} e \vec{v} no espaço.



Fonte: Autoria própria.

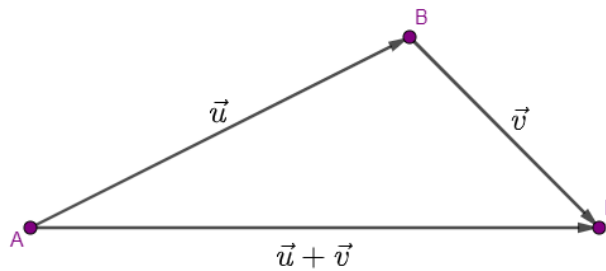
Gráfico 2.8: Manipulação dos pontos C e D .



Fonte: Autoria própria.

Fazendo isto, podemos dizer que o segmento orientado (A, D) representa o vetor da soma $\vec{u} + \vec{v}$.

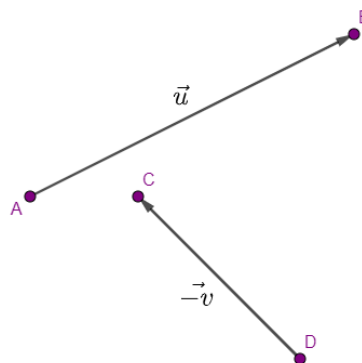
Gráfico 2.9: $\vec{u} + \vec{v}$ resulta em \overrightarrow{AD} .



Fonte: Autoria própria.

Já para realizar a subtração entre os vetores \vec{u} e \vec{v} utilizaremos o método do paralelogramo. Portanto, adicionando o vetor \vec{u} ao vetor oposto de \vec{v} , ou seja, $\vec{u} + (-\vec{v})$.

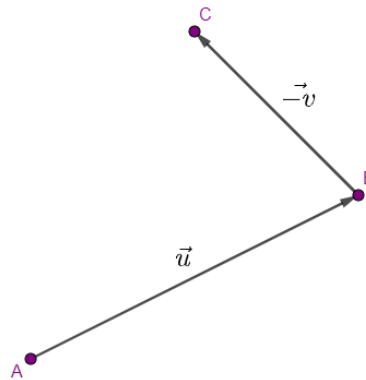
Gráfico 2.10: Representação dos vetores \vec{u} e $-\vec{v}$ no espaço.



Fonte: Autoria própria

Agora, projetando um vetor paralelo ao vetor $-\vec{v}$ no espaço de forma que o ponto B seja a origem desse vetor projetado.

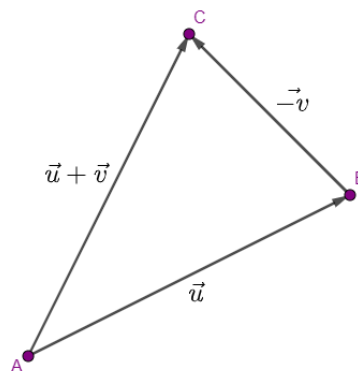
Gráfico 2.11: Manipulação dos pontos C e D (subtração).



Fonte: Autoria própria.

Isto posto, temos que $\overrightarrow{AC} = \vec{u} + (-\vec{v})$.

Gráfico 2.12: $\vec{u} + (-\vec{v})$ resulta em \overrightarrow{AC} .



Fonte: Autoria própria.

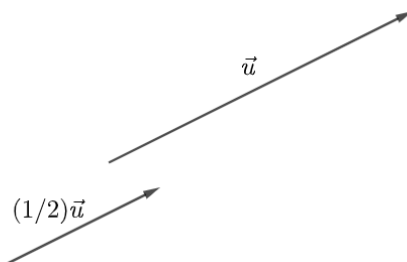
Multiplicação de um número real por um vetor

É comum confundir multiplicação de um número real por um vetor com produto escalar, pois quando falamos de escalar estamos nos referindo a um número real. Entretanto, devemos nos lembrar que a multiplicação de um vetor por um escalar resulta em um vetor enquanto o produto escalar resulta em um escalar. Logo, dados $\alpha \in \mathbb{R}$ qualquer e o vetor \vec{u} , vem que:

- I. Se $\alpha = 0$ ou \vec{u} é um vetor nulo, então $\alpha\vec{u} = \vec{0}$.
- II. Se $\alpha \neq 0$ e $\vec{u} \neq \vec{0}$, então $\alpha\vec{u}$ é caracterizado por:
 - a) O vetor $\alpha\vec{u}$ é paralelo a \vec{u} ;
 - b) $\alpha\vec{u}$ e \vec{u} tem o mesmo sentido se $\alpha > 0$ e sentido oposto se $\alpha < 0$;

c) $\|\alpha\vec{u}\| = |\alpha|\|\vec{u}\|$.

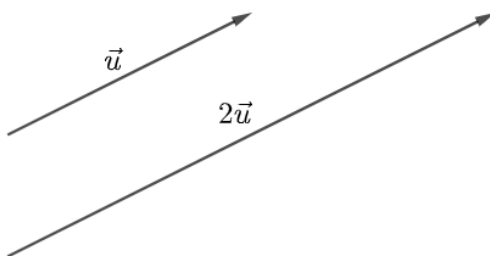
Gráfico 2.13: Multiplicação de $0 < \alpha < 1$ por $\vec{u} \neq \vec{0}$.



Fonte: Autoria própria.

Se $\alpha > 1$ e $\vec{u} \neq \vec{0}$, vem que:

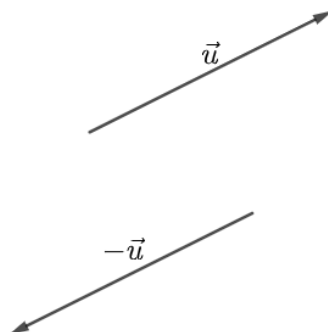
Gráfico 2.14: Multiplicação de $\alpha > 1$ por $\vec{u} \neq \vec{0}$.



Fonte: Autoria própria.

Se $\alpha < 0$ e $\vec{u} \neq \vec{0}$.

Gráfico 2.15: Multiplicação de $\alpha < 0$ por $\vec{u} \neq \vec{0}$.



Fonte: Autoria própria.

Logo, se $\alpha < 0$ ocorre a alteração do sentido do vetor resultante.

CAPÍTULO 3

A REPRESENTAÇÃO VETORIAL DOS NÚMEROS COMPLEXOS

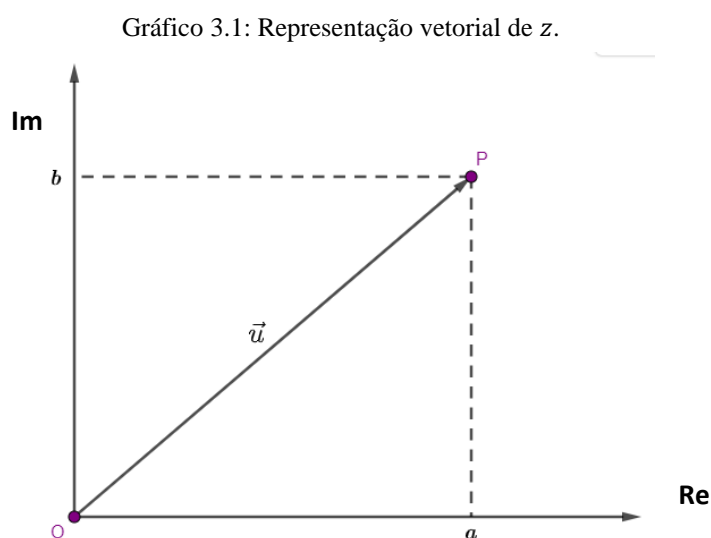
Vimos no capítulo anterior que todo número complexo pode ser representado como um ponto no plano complexo denominado afixo. Vimos, também, que, intuitivamente, um vetor é um segmento orientado que possui direção, comprimento e sentido e que “liga” dois pontos distintos. Logo, neste capítulo, veremos como os números complexos podem ser representados vetorialmente, de forma que todas as operações realizadas anteriormente entre números complexos sejam refeitas neste capítulo, mas utilizando apenas a representação em vetor e distinguindo das demais representações. Tomamos como base o livro *Complex numbers from A to-Z* de Titu Andreescu e Dorin Andrica, citado no capítulo anterior.

3.1 Representação Vetorial de um Número Complexo

Como dito antes, se $z = a + bi$, temos que $z = (a, b)$, sendo a e b valores relativos às coordenadas x e y do plano cartesiano. Logo, a partir do afixo, pode-se relacionar a forma geométrica dos complexos com a sua forma vetorial.

Sendo z representado como um afixo e considerando $P = (a, b)$ este afixo, é possível determinar um vetor $\vec{OP} = \vec{u}$, tal que O é a origem do plano.

Portanto, considere o gráfico abaixo:



Fonte: Autoria própria.

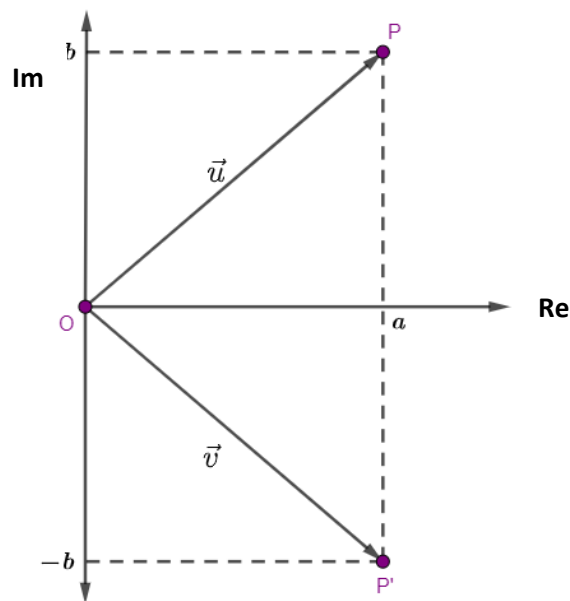
3.1.1 Conjugado de um número complexo representado em sua forma vetorial

Vimos no capítulo 2 deste trabalho que se $z = a + bi$, o conjugado de z será da forma $\bar{z} = a - bi$. Logo, se $P = (a, b)$ é o afixo que representa z graficamente, podemos dizer que $P' = (a, -b)$ representa \bar{z} no plano cartesiano.

Ou seja, analisando os pontos P e P' , podemos dizer que a representação geométrica de \bar{z} corresponde à reflexão em relação ao eixo x da representação de z .

Sendo $\overrightarrow{OP'} = \vec{v}$, observe abaixo o gráfico que contém a forma vetorial de z e de \bar{z} .

Gráfico 3.2: Representação vetorial de z e \bar{z} .



Fonte: Autoria própria.

3.1.2 Operações entre números complexos em sua forma vetorial

No capítulo 2 deste trabalho, vimos como são feitas as operações entre números complexos em suas formas algébrica, trigonométrica e em afixo. Além disso, vimos as operações entre vetores. Neste tópico, veremos como são realizadas as operações entre números complexos em sua forma vetorial, de forma que todos os conceitos aprendidos anteriormente estarão relacionados.

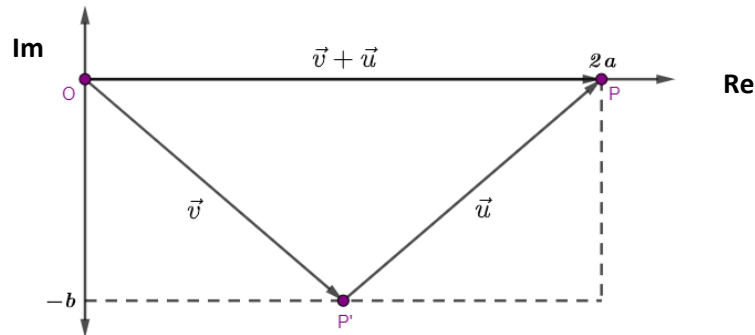
3.1.2.1 Adição entre complexos em sua forma vetorial

Considerando $P = (a, b)$ e $P' = (a, -b)$ os afixos de z e \bar{z} , respectivamente. Utilizando o tópico 2.1, podemos dizer que a soma entre os números z e \bar{z} , será:

$$z + \bar{z} = (a, b) + (a, -b) = (a + a, b + (-b)) = (2a, 0).$$

Assim sendo, o vetor formado pela soma $z + \bar{z}$ será $\vec{u} + \vec{v}$ que possui como ponto de origem o ponto $O = (0,0)$ e como extremidade $(2a, 0)$.

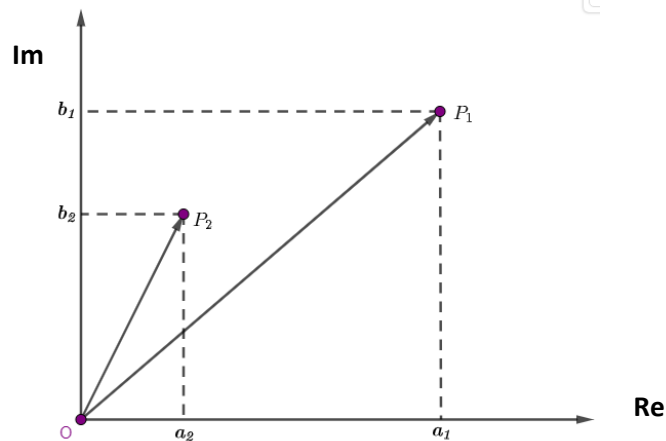
Gráfico 3.3: Representação vetorial da soma de z e \bar{z} .



Fonte: Autoria própria.

Agora, considerando $P_1 = (a_1, b_1)$ e $P_2 = (a_2, b_2)$, em que $z_1 = a_1 + b_1i$ e $z_2 = a_2 + b_2i$, sendo $\overrightarrow{OP_1} = \vec{u}_1$ e $\overrightarrow{OP_2} = \vec{u}_2$, observe o gráfico abaixo:

Gráfico 3.4: Representação vetorial de z_1 e z_2 .



Fonte: Autoria própria.

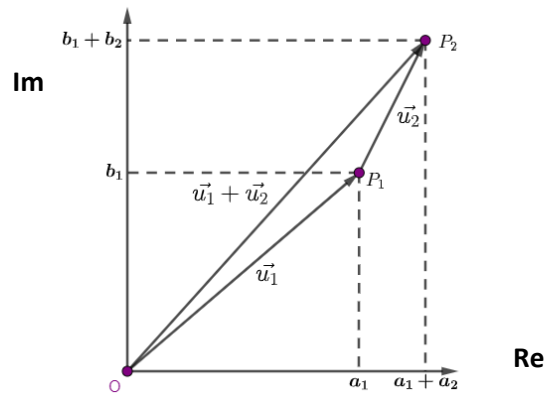
Logo, a soma entre esses números resulta em:

$$z_1 + z_2 = (a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2).$$

Utilizando, novamente, o método de completar triângulos, método esse que vimos no capítulo anterior deste mesmo trabalho.

Observe o gráfico abaixo:

Gráfico 3.5: Representação vetorial da soma de z_1 e z_2 .



Fonte: Autoria própria.

Vale ressaltar que realizar a operação de adição entre vetores distintos não é o mesmo que somar os seus respectivos módulos, pois, existe uma “inclinação” do vetor em relação ao eixo x que deve ser levada em conta. Logo, pela desigualdade triangular:

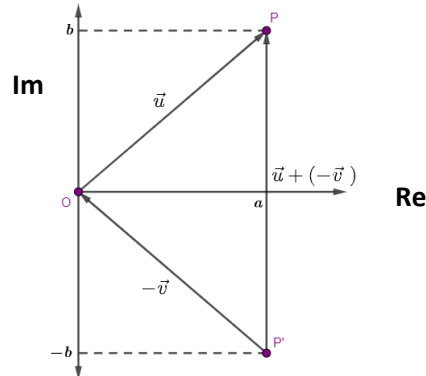
$$|\vec{u}_1 + \vec{u}_2| \leq |\vec{u}_1| + |\vec{u}_2|.$$

3.1.2.2 Subtração entre complexos em sua forma vetorial

A subtração entre complexos ocorre de forma semelhante à adição, entretanto, como vimos no capítulo anterior sobre a subtração de vetores, existe a necessidade de mudar o sentido de um dos vetores que estão sendo analisados. Logo:

$$z - \bar{z} = (a, b) - (a, -b) = (a - a, b - (-b)) = (0, 2b).$$

Gráfico 3.6: Representação gráfica de $\vec{u} + (-\vec{v})$.

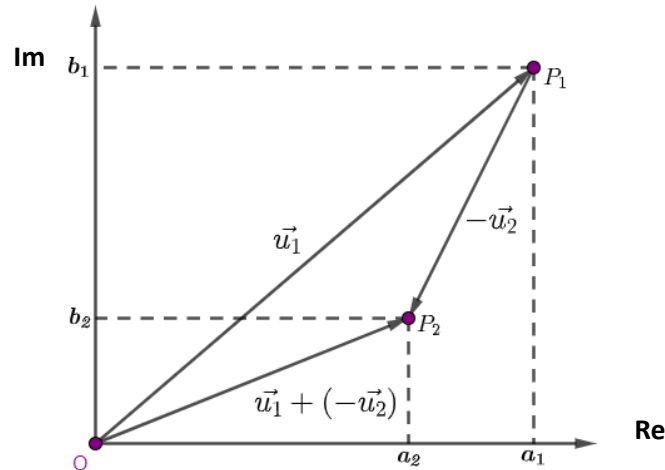


Fonte: Autoria própria.

Já, sendo $P_1 = (a_1, b_1)$ e $P_2 = (a_2, b_2)$, vem que:

$$z_1 - z_2 = (a_1, b_1) - (a_2, b_2) = (a_1 - a_2, b_1 - b_2).$$

Gráfico 3.7: Representação gráfica de $\vec{u}_1 + (-\vec{u}_2)$.



Fonte: Autoria própria.

Note que para determinar o módulo de um número complexo basta utilizar a relação

$$|z_1| = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \text{ e temos que } |z_1 - z_2| \text{ determina a distância entre } z_1 \text{ e } z_2.$$

Logo, podemos dizer que:

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2}.$$

O que nos remete à fórmula da distância entre dois pontos, que é dada por:

$$D = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Em que, dados z_1 e z_2 complexos quaisquer e A e B pontos quaisquer do plano cartesiano, $z_1 = (a_1, b_1)$, $z_2 = (a_2, b_2)$, $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$.

3.1.2.3 Multiplicação entre complexos em sua forma vetorial

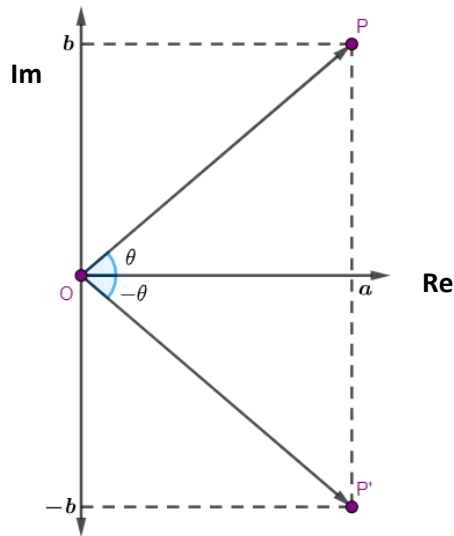
Sabemos que todo número complexo representado em sua forma vetorial apresenta um ângulo formado com o eixo x , denominado argumento. Também sabemos que dados dois números complexos quaisquer z_1 e z_2 , o produto desses números ocorre da seguinte forma:

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)], \text{ sendo } \theta_1 \text{ e } \theta_2 \text{ os argumentos de } z_1 \text{ e } z_2, \text{ respectivamente.}$$

Logo, considerando z e \bar{z} e seus respectivos argumentos θ e β , podemos dizer que $\beta = -\theta$. Pois, como vimos nos tópicos anteriores, \bar{z} é gerado a partir de uma reflexão de z em relação ao eixo x .

Observe a seguir a representação vetorial dos números z e \bar{z} , mas dessa vez acompanhados de seus argumentos:

Gráfico 3.8: Representação gráfica de z , \bar{z} , θ e β .



Fonte: Autoria própria.

Então:

$$z \cdot \bar{z} = |z||\bar{z}|\cos(\theta + \beta) + i \operatorname{sen}(\theta + \beta) = |z||\bar{z}|\cos(\theta - \theta) + i \operatorname{sen}(\theta - \theta).$$

$$\Leftrightarrow z \cdot \bar{z} = |z||\bar{z}|\cos(0) + i \operatorname{sen}(0) = |z||\bar{z}|.$$

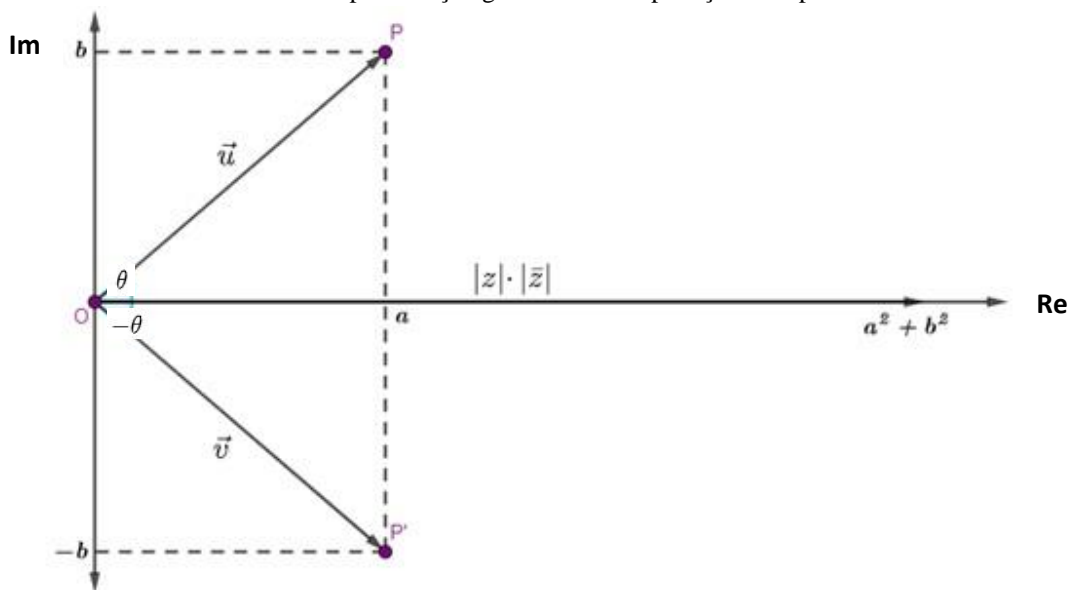
Portanto, o vetor resultante da multiplicação será obtido a partir do produto dos módulos de z e \bar{z} , sendo $|z| = |\bar{z}|$, $|z| \cdot |\bar{z}| = |z|^2$, e seu argumento é 0.

Agora fazendo:

$$z \cdot \bar{z} = (a, b) \cdot (a, -b) = (a^2 - (-b^2), -ab + ab).$$

$$\Leftrightarrow z \cdot \bar{z} = (a^2 + b^2, 0).$$

Gráfico 3.9: Representação gráfica da multiplicação de z por \bar{z} .



Fonte: Autoria própria.

Considerando $P_1 = (a_1, b_1)$ e $P_2 = (a_2, b_2)$, vem que:

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1).$$

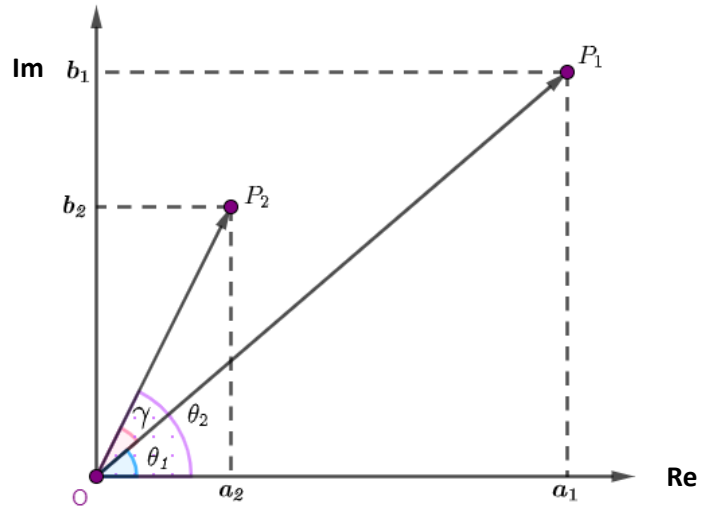
Também podemos dizer que:

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| |z_2| [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)].$$

É relevante mencionar que, para efetuar a operação de multiplicação entre números complexos em sua forma vetorial basta somar os argumentos correspondentes a cada número complexo e multiplicar os seus módulos. No caso acima também houve a soma dos argumentos, mas como estes se cancelaram, levamos em conta apenas a multiplicação dos módulos.

Então, observe a seguir a representação dos números z_1 e z_2 acompanhados de seus argumentos θ_1 e θ_2 , respectivamente: (para facilitar a visualização dos argumentos θ_1 e θ_2 , nós representamos o θ_2 como $\theta_2 = \theta_1 + \gamma$, sendo $\gamma = \widehat{P_1 O P_2}$).

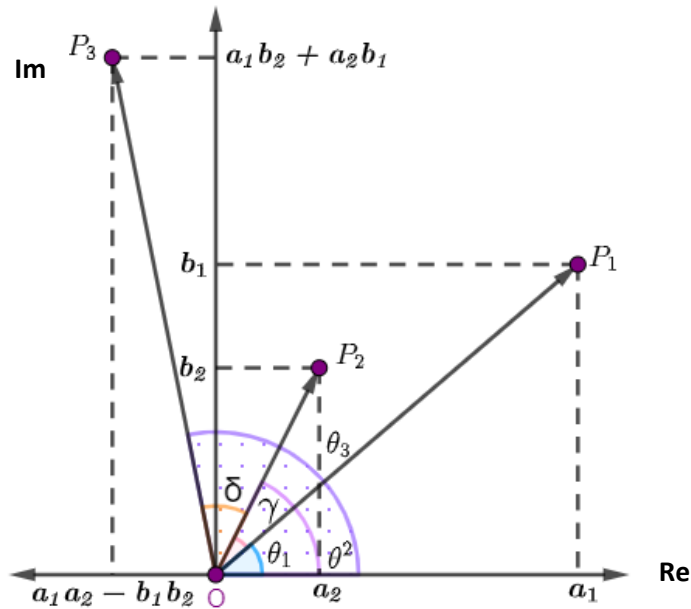
Gráfico 3.10: Representação gráfica de z_1 , z_2 , θ_1 e θ_2 .



Fonte: Autoria própria.

Agora, observe a representação vetorial de $z_1 \cdot z_2$: (aqui P_3 representa o produto entre z_1 e z_2 e $\theta_3 = \theta_2 + \delta$, sendo $\delta = \widehat{P_2OP_3}$).

Gráfico 3.11: Representação gráfica da multiplicação de z_1 por z_2 .



Fonte: Autoria própria.

3.1.2.4 Divisão entre complexos em sua forma vetorial

Assim como ocorre na multiplicação entre números complexos, a divisão entre esses mesmos números utilizará as suas formas trigonométricas, logo, é possível calcular o quociente entre os números complexos z e \bar{z} como:

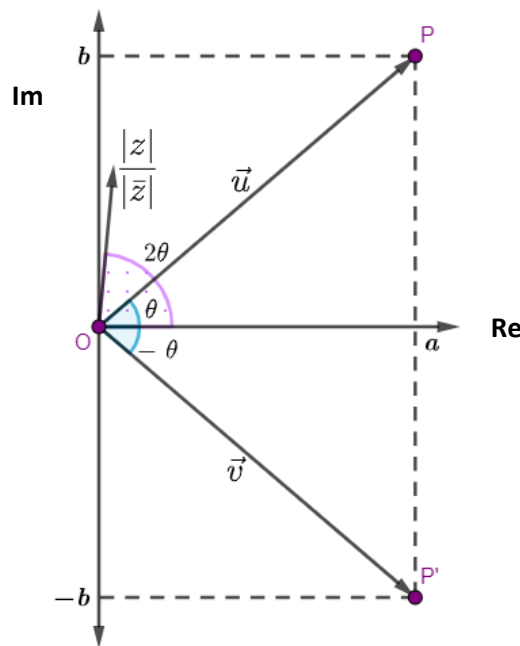
$$\frac{z}{\bar{z}} = \frac{|z|}{|\bar{z}|} \cdot [\cos(\theta - \beta) + i \operatorname{sen}(\theta - \beta)].$$

De acordo com o tópico anterior, $\beta = -\theta$. Logo:

$$\frac{z}{\bar{z}} = \frac{|z|}{|\bar{z}|} \cdot [\cos(\theta - (-\theta)) + i \operatorname{sen}(\theta - (-\theta))].$$

$$\Leftrightarrow \frac{z}{\bar{z}} = \frac{|z|}{|\bar{z}|} \cdot [\cos(2\theta) + i \operatorname{sen}(2\theta)].$$

Gráfico 3.12: Representação gráfica da divisão de z por \bar{z} .



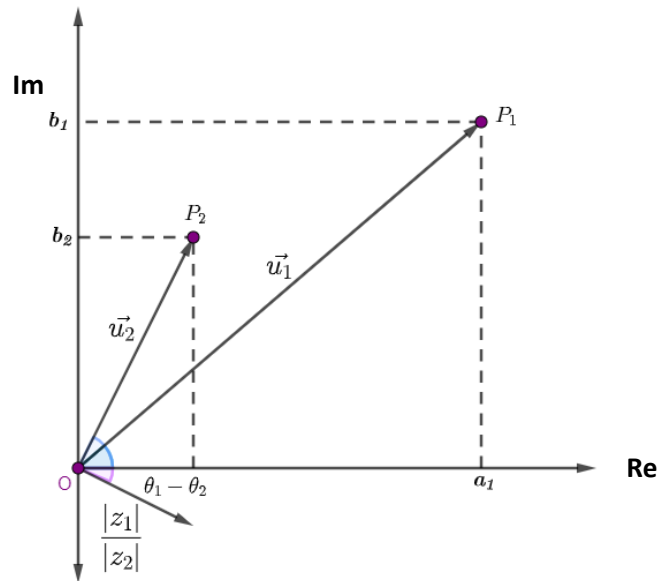
Fonte: Autoria própria.

Note que o módulo do vetor resultante da divisão é 1 pois, $|z| = |\bar{z}|$ e o seu argumento é 2θ .

Agora, fazendo a divisão dos números $z_1 = (a_1, b_1)$ e $z_2 = (a_2, b_2)$, podemos dizer que haverá, também, a divisão dos módulos desses números complexos e a subtração de seus argumentos.

Observe o gráfico a seguir:

Gráfico 3.13: Representação gráfica da divisão de z_1 por z_2 .



Fonte: Autoria própria.

3.1.2.5 A potência de um número complexo em sua forma vetorial

Aprendemos um pouco sobre a potência de um número complexo no capítulo 2 deste trabalho e isto será de suma importância para entendermos este tópico. No capítulo anterior, concluímos que:

$$z^n = |z|^n \cdot [\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)].$$

e

$$z^{-n} = |z|^{-n} [\cos(-n\theta) + i \operatorname{sen}(-n\theta)].$$

Sendo $n \in \mathbb{Z}$.

Logo, analisando as primeiras potências de z e considerando $|z| = 1$.

Exemplificando até $n = 8$, temos que:

$$z = [\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta)].$$

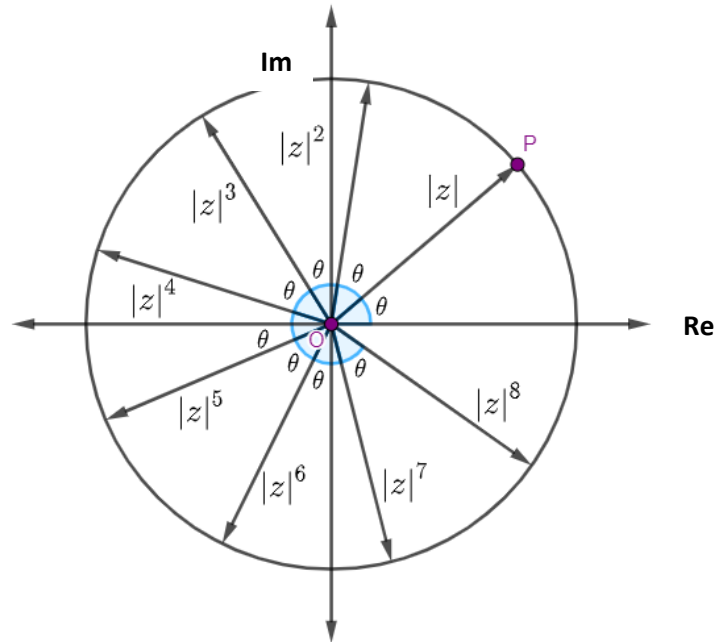
$$z^2 = [\cos(2\theta) + i \operatorname{sen}(2\theta)].$$

⋮

$$z^8 = [\cos(8\theta) + i \operatorname{sen}(8\theta)].$$

Observe a seguir a representação geométrica dessas potências:

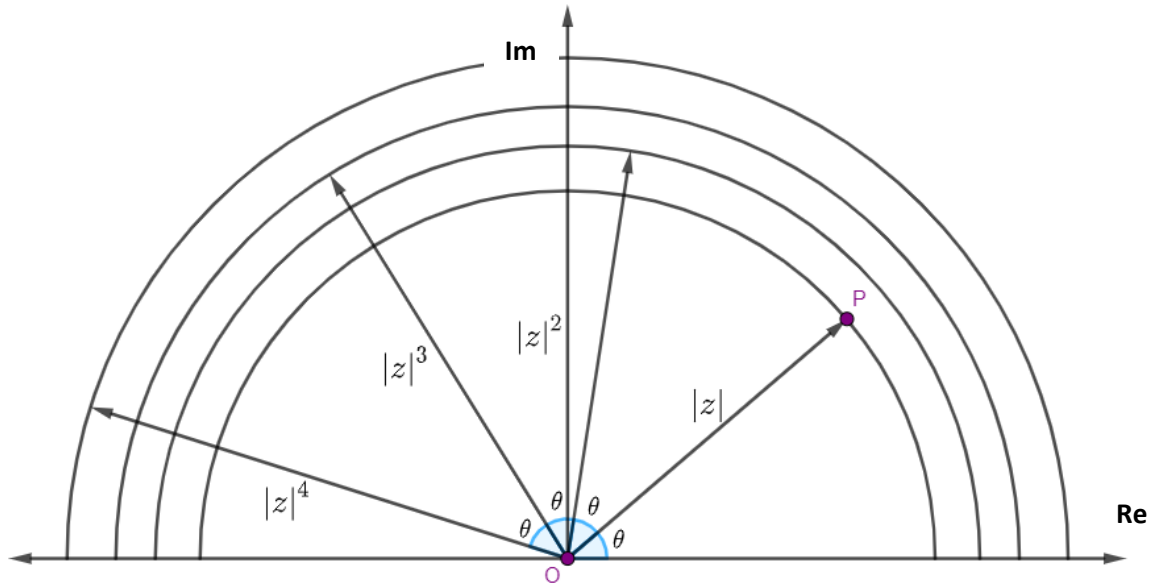
Gráfico 3.14: Representação gráfica das potências de z no ciclo trigonométrico.



Fonte: Autoria própria.

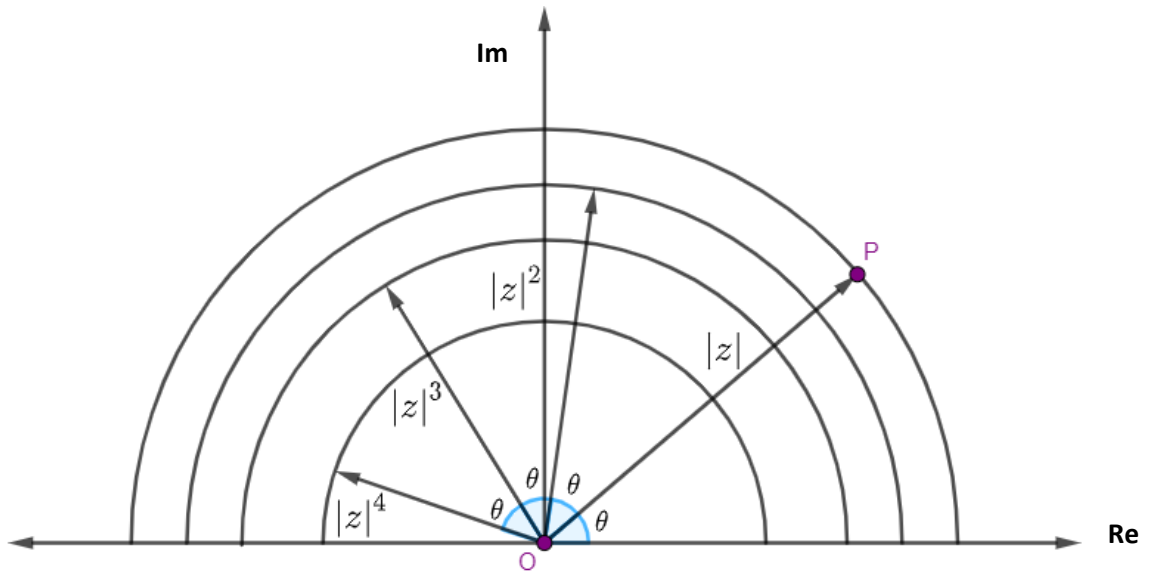
Agora, considere as representações abaixo para $|z| > 1$ e $|z| < 1$:

Gráfico 3.15: Representação gráfica das potências de z , sendo $|z| > 1$.



Fonte: Autoria própria.

Gráfico 3.16: Representação gráfica das potências de z quando $|z| < 1$.



Fonte: Autoria própria

Sendo $|z| = 1$, nota-se que o módulo permanece o mesmo para todas as potências de z , enquanto para $|z| \neq 1$, o módulo de cada potência varia de acordo com o módulo inicial.

Se reunirmos os argumentos das potências de z poderemos formar uma Progressão Aritmética (P.A), cuja razão é o próprio θ .

Analisando a Fórmula de Moivre:

$$z^n = |z|^n \cdot [\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)].$$

Se z é representado graficamente pelo afixo $P = (a, b)$ e possui argumento θ , será que se z efetuar n -ésimas voltas no ciclo trigonométrico, em algum momento, a potência de z possuirá o mesmo argumento de z ?

Para responder a essa pergunta teremos que avaliar a seguinte relação:

$$n\theta = \theta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$n = 1 + \frac{2k\pi}{\theta} \Leftrightarrow n = 1 + \frac{360^\circ k}{\theta}.$$

Desprezando agora o módulo de z , analisaremos somente o seu argumento, e avaliaremos a divisibilidade de θ por k e por 360° , separadamente. O objetivo é estipular n tal que uma das potências de z possua o mesmo argumento de z .

Se $\theta \in \mathbb{Z}$, temos os casos a seguir:

1º Caso: Se θ não for divisível por 360° .

Suponhamos $k = \theta$, assim, $n = 361$, ou seja, o argumento principal de z^{361} será igual ao argumento de z . Em outras palavras, se for efetuada a rotação de z 361 vezes no ciclo trigonométrico, z sempre retornará ao argumento de origem.

Exemplo: Se $\theta = 29^\circ$ e $|z| = 1$.

$$z = 1[\cos(29^\circ) + i\text{sen}(29^\circ)].$$

Temos:

$$z^{361} = 1^{361}[\cos(29^\circ \cdot 361) + i\text{sen}(29^\circ \cdot 361)].$$

$$z^{361} = 1^{361}[\cos(10469^\circ) + i\text{sen}(10469^\circ)].$$

Como $29^\circ \cdot 361 = 29^\circ \cdot 360 + 29^\circ$, segue que:

$$\cos(29^\circ \cdot 361) = \cos(29^\circ) \text{ e } \text{sen}(29^\circ \cdot 361) = \text{sen}(29^\circ).$$

Desse modo, podemos concluir que para qualquer $\theta, k \in \mathbb{Z}$, se θ não for divisível por 360° , então a potência z^{361} sempre possuirá o mesmo argumento de z .

2º Caso: Se θ for divisível por 360° .

Se θ for um divisor de 360° , de acordo com os critérios de divisibilidade, existem 25 valores possíveis que θ pode assumir.

São eles:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 24, 30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120, 180 e 360.

Observe que para $z^n = z$ se $n < 361$, basta que θ seja divisível por 360° . Por exemplo, para $\theta = 30^\circ$ e $|z| = 1$, temos que:

$$z = |z|[\cos(30^\circ) + i\text{sen}(30^\circ)].$$

Substituindo na relação:

$$n = 1 + \frac{360^\circ k}{30^\circ} \Rightarrow n = 1 + 12k.$$

Para $k = 1$ (uma única volta no ciclo trigonométrico), temos que $n = 13$.

Portanto:

$$z^{13} = |z|^{13}[\cos(13.30^\circ) + i\sin(13.30^\circ)].$$

$$z^{13} = |z|^{13}[\cos(390^\circ) + i\sin(390^\circ)].$$

Como $390^\circ = 360^\circ \cdot 1 + 30^\circ$, temos que:

$$z^{13} = |z|^{13}[\cos(30^\circ) + i\sin(30^\circ)].$$

Note ainda que poderíamos analisar do mesmo modo se $\theta \in \mathbb{Q}$, pois, se isso ocorre, então $\theta = \frac{a}{b}$, sendo $a, b \in \mathbb{Z}$ e $b \neq 0$. Logo, se substituirmos na relação:

$$n = 1 + \frac{360^\circ k}{a/b} \Leftrightarrow n = 1 + 360^\circ k \cdot \frac{b}{a} \Leftrightarrow n = 1 + \frac{360^\circ kb}{a}.$$

Se $\theta \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$ não podemos proceder com o mesmo raciocínio, pois:

Se considerarmos, por exemplo, $k = a$, e sabendo que $b \in \mathbb{Z}$, será possível obter $n \in \mathbb{Z}$, tal que a potência z^n possuirá o mesmo argumento de z .

Entretanto, se isolarmos o argumento θ na relação, teremos que:

$$n = 1 + \frac{360^\circ k}{\theta} \Leftrightarrow \theta = \frac{360^\circ k}{n - 1}.$$

Sendo $n \neq 1$, como $\frac{360^\circ k}{n-1} \in \mathbb{Q}$ e $\theta \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$, existe uma contradição.

3.1.3 Resolução de Exercícios

Neste tópico, iremos solucionar alguns exercícios retirados do livro Complex Numbers from A to...Z, de Titu Andreescu e Dorin Andrica, (1956), utilizando a representação vetorial dos números complexos. São de suma importância as resoluções a seguir, pois elas nos mostram a aplicabilidade dessa representação, a facilidade e eficiência que ela nos oferece.

3.1.3.1 Exercício 1

Considerando $z_1 = 1 + i$ e $z_2 = -1 - i$. Encontre $z_3 \in \mathbb{C}$, tal que o triângulo formado pelos afixos z_1, z_2, z_3 seja equilátero. (Problem 5, p. 27)

Resolução: Sejam $P_1 = (1,1)$ e $P_2 = (-1,-1)$ os afixos que representam z_1 e z_2 graficamente e sabendo que P_1, P_2 pertencem a reta de equação $y = x$.

Temos que:

$$|z_1| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} = |z_2|.$$

e

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(1 - (-1))^2 + (1 - (-1))^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

Portanto, considerando $P_3 = (a_3, b_3)$ afixo de z_3 e $\overline{P_1P_2}$ a base do triângulo equilátero, $\overline{OP_3}$ a sua altura e sabendo que o lado l do triângulo corresponde à distância de z_1 a z_2 , podemos dizer que:

$$|z_3| = |z_3 - 0| = \frac{l\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{2} = \sqrt{6}.$$

Temos que:

$$\cos \theta_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{4}.$$

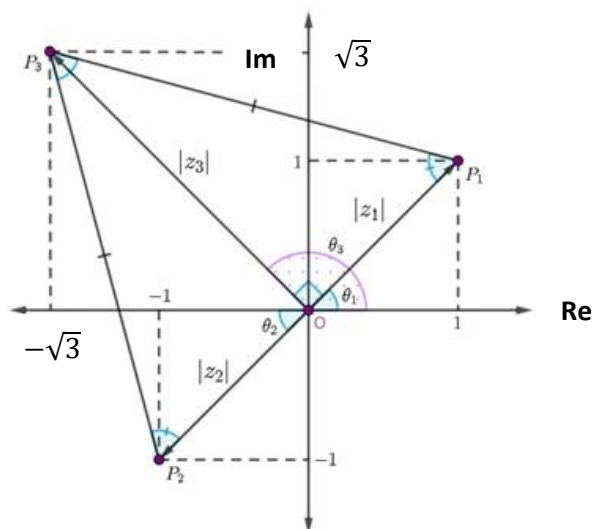
Então, sabendo que a reta suporte da altura sempre forma o ângulo de 90° com a base e $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$, é verdade que:

$$\theta_3 = \theta_1 + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}.$$

Logo:

$$z_3 = \sqrt{6} \left(\cos \left(\frac{3\pi}{4} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{3\pi}{4} \right) \right) = \sqrt{6} \left(\frac{-\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -\sqrt{3} + \sqrt{3}i.$$

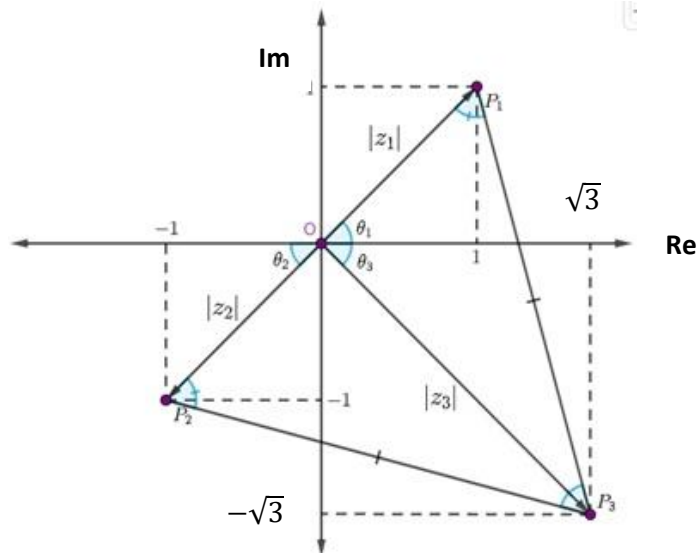
Gráfico 3.17: Representação do triângulo equilátero formado pelos afixos de z_1, z_2 e $z_3 = -\sqrt{3} + \sqrt{3}i$.



Fonte: Autoria própria.

Note que pode ocorrer uma reflexão de $\overrightarrow{OP_3}$ em relação a reta $y = x$. Portanto, temos uma outra solução no 4º quadrante dada por: $z_3' = \sqrt{3} - \sqrt{3}i$.

Gráfico 3.18: Representação do triângulo equilátero formado pelos afijos de z_1, z_2 e $z_3' = \sqrt{3} - \sqrt{3}i$.



Fonte: Autoria própria.

3.1.3.2 Exercício 2

Sejam $ABCD$ e $BNMK$ dois quadrados não sobrepostos e seja E o ponto médio de AN . Se o ponto F é o pé da perpendicular de B à reta CK , prove que os pontos E, F e B são colineares. (Problem 1, p. 62)

Resolução: Sejam os quadrados $ABCD$ e $BNMK$, temos que B pertence à $ABCD$ e $BNMK$ simultaneamente e, como F é o pé da perpendicular de B , traçando o segmento \overline{BF} , podemos dizer que B e F são colineares.

Conforme a proposição apresentada na página 61 desse mesmo livro, vem que:

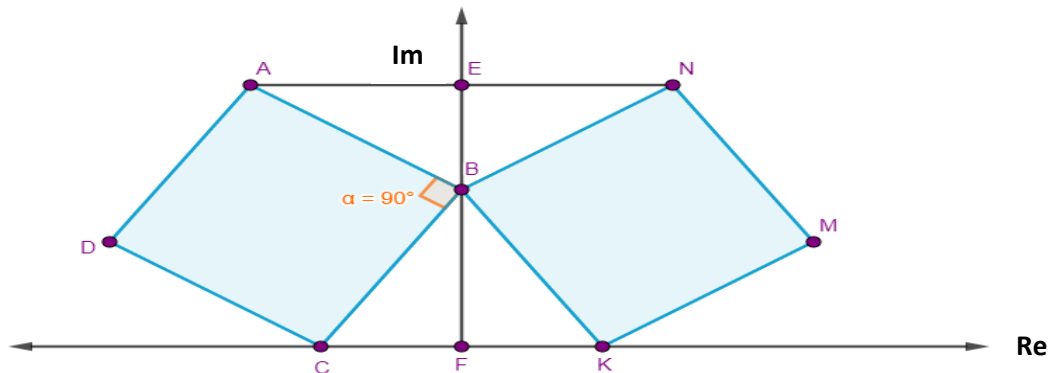
Proposição. Suponha que o ponto C é a rotação de B em relação a A pelo ângulo α . Se a, b e c são as coordenadas dos pontos A, B , e C , respectivamente, então $c = a + (b - a)\varepsilon$, onde $\varepsilon = \cos \alpha + i \sin \alpha$.

Prova. Dado o vetor \overrightarrow{OA} , a translação com o vetor \overrightarrow{AO} mapeia os pontos A, B e C nos pontos O, B' e C' , de forma que O é a origem do plano complexo e $0, b - a$ e $c - a$ são as coordenadas dos pontos O, B' e C' , respectivamente. Podemos dizer que C' é obtido a partir da reflexão de B' sob rotação do ângulo α em relação à origem.

Logo: $c = a + (b - a)\varepsilon$, sendo $\varepsilon = \cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha$.

Voltando a resolução do exercício, considere F a origem do plano complexo, \overline{CK} pertence ao eixo dos reais e \overline{FB} ao eixo imaginário. Sejam $c, k, b \in \mathbb{R}$ as coordenadas complexas dos pontos C, K, B , faremos a rotação do ponto C com centro em B através do ângulo $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ (pois a rotação ocorre no sentido horário) de C para A .

Gráfico 3.19: Representação dos quadrados $ABCD$ e $BNMK$.



Fonte: Autoria própria.

Portanto, utilizando a relação $c = a + (b - a)\varepsilon$, sendo a a coordenada complexa de A e $\alpha = -\frac{\pi}{2}$, temos que:

$$\varepsilon = \cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha = \cos \left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \operatorname{sen} \left(-\frac{\pi}{2}\right) = -i.$$

Então:

$$\begin{aligned} a &= bi + (c - bi)\varepsilon = bi + (c - bi)(-i) \\ \Leftrightarrow a &= bi - ci + bi^2 = bi - ci - b = -b + (b - c)i. \end{aligned}$$

Portanto, $A = (-b, b - c)$.

Fazendo o mesmo para K , onde K chega em N , com centro em B e $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (pois estamos rotacionando no sentido anti-horário), vem que:

$$\begin{aligned} n &= bi + (k - bi) \left(\cos \left(\frac{\pi}{2}\right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2}\right) \right). \\ \Leftrightarrow n &= bi + k \cos \left(\frac{\pi}{2}\right) + ki \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2}\right) - bi \cos \left(\frac{\pi}{2}\right) + b \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2}\right). \\ \Leftrightarrow n &= bi + ki + b = b + (b + k)i. \end{aligned}$$

Portanto, $N = (b, b + k)$.

Logo, calculando o ponto médio entre A e N , sendo E esse ponto médio:

$$x_E = \frac{-b + b}{2} = \frac{0}{2} = 0.$$

$$y_E = \frac{b - c + b + k}{2} = \frac{2b + k - c}{2}.$$

Então, $E = (0, \frac{2b+k-c}{2})$.

Como consideramos F a origem do plano complexo e F e B são colineares pois, $B = (0, b)$, podemos dizer que E é colinear com B e F pois, $E = (0, \frac{2b+k-c}{2})$.

3.1.3.3 Exercício 3

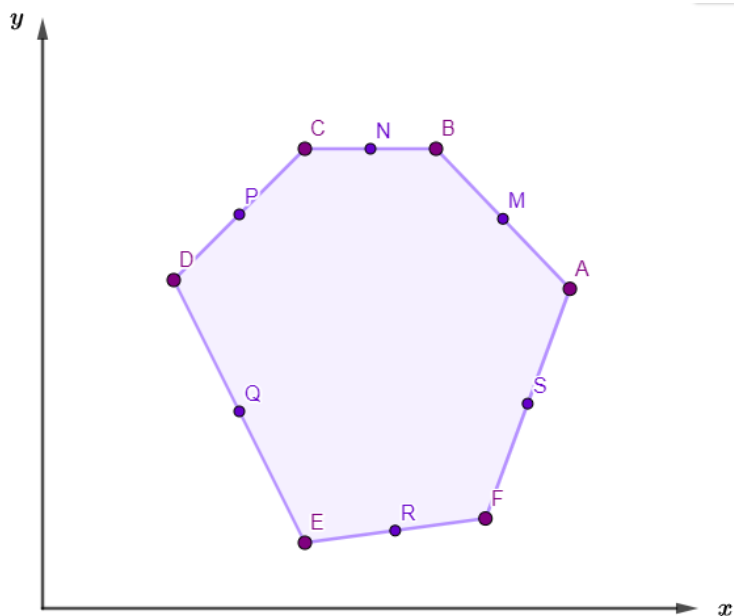
Sejam M, N, P, Q, R e S os pontos médios dos lados AB, BC, CD, DE, EF e FA de um hexágono. Prove que

$$RN^2 = MQ^2 + PS^2.$$

se, e somente se, $MQ \perp PS$. (Problem 2, p. 91)

Para maior compreensão, observe o gráfico abaixo:

Gráfico 3.20: Representação gráfica de um hexágono qualquer e seus pontos médios.



Fonte: Autoria Própria.

Resolução: Sejam a, b, c, d, e, f as coordenadas dos vértices do hexágono. Temos que M, N, P, Q, R e S tem coordenadas:

$$m = \frac{a+b}{2}, \quad n = \frac{b+c}{2}, \quad p = \frac{c+d}{2}.$$

$$q = \frac{d+e}{2}, \quad r = \frac{e+f}{2}, \quad s = \frac{f+a}{2}.$$

Supondo que $RN^2 = MQ^2 + PS^2$, vem que:

$$RN^2 - MQ^2 = PS^2.$$

$$\left[\frac{(b+c-e-f)}{2} \right]^2 - \left[\frac{(a+b-d-e)}{2} \right]^2 = \left[\frac{(c+d-f-a)}{2} \right]^2.$$

$$(b+c-e-f-a-b+d+e)(b+c-e-f+a+b-d-e) = (c+d-f-a)^2.$$

$$(c-f-a+d)(2b+c-2e-f+a-d) = (c+d-f-a)^2.$$

$$(c+d-f-a)(2b+c-2e-f+a-d) = (c+d-f-a)(c+d-f-a).$$

$$(2b+c-2e-f+a-d) = (c+d-f-a).$$

$$2b-2e+a-d = d-a.$$

$$2b-2e+2a-2d = 0.$$

$$b-e+a-d = 0.$$

$$b+a = e+d.$$

Fazendo produto escalar $\overline{MQ} \cdot \overline{PS}$, temos que:

$$\left(\frac{a+b-d-e}{2} \right) \left(\frac{c+d-f-a}{2} \right).$$

Como $b+a = e+d$, vem que:

$$\left(\frac{e+d-d-e}{2} \right) \left(\frac{b+a-f-a}{2} \right) = \frac{0}{2} \cdot \frac{(b-f)}{2} = \frac{0}{2} = 0.$$

Então, podemos dizer que \overline{MQ} e \overline{PS} são perpendiculares.

CAPÍTULO 4

A REPRESENTAÇÃO VETORIAL DOS NÚMEROS COMPLEXOS NA ONDULATÓRIA

Ao longo deste trabalho, vimos alguns conceitos sobre os Números Complexos e os Vetores, a forma como os números complexos são representados vetorialmente, as operações utilizando essa representação e a forma como ela se faz presente em exercícios de Geometria. Neste momento, faremos uma discussão sobre a representação vetorial dos números complexos na Ondulatória. Ou seja, como o olhar físico das ondas pode contribuir para o estudo da aplicabilidade dos números complexos em sua forma vetorial?

O nosso objetivo aqui é estudar sobre a aplicabilidade dos números complexos em sua forma vetorial em áreas das Ciências Exatas e Naturais, a fim de evidenciar possíveis relações com fenômenos naturais.

Para a redação deste capítulo tomamos como base os livros Física II: Termodinâmica e Ondas de Thomas Young e Roger Freedman, (2008) e Física IV: Ótica e Física Moderna, dos mesmos autores, (2009).

4.1 Alguns conceitos importantes sobre as Ondas e Tipos de Ondas

Afinal, o que é uma onda? Podemos dizer que onda é uma perturbação que se propaga através de um meio, transportando energia sem transportar o meio. Neste caso, é importante ressaltar que não estamos tratando das ondas quânticas.

É importante mencionar que na Física existem três tipos de ondas em relação à sua dimensão, unidimensional, bidimensional e tridimensional. Neste trabalho, dissertaremos apenas sobre as ondas unidimensionais e as bidimensionais, pois elas nos auxiliarão na análise da utilização dos números complexos em sua forma vetorial.

De todo modo, ambas possuem as seguintes características:

Crista e Vale: podemos dizer que a crista corresponde ao ponto máximo da onda, enquanto o vale é o oposto, ou seja, o ponto mínimo.

Amplitude: corresponde à máxima perturbação associada com a onda. Por exemplo, a amplitude da onda em uma corda é a distância entre o ponto onde a corda fica quando está em repouso até a crista quando esta está passando pelo ponto.

Comprimento de onda: representado pela letra grega lambda λ , é a distância entre dois vales ou duas cristas consecutivas.

Frequência: no Sistema Internacional de Medida, a frequência é medida em hertz (Hz) e é representada pela letra f . Podemos dizer que ela corresponde ao número de oscilações de um ponto do meio em uma unidade de tempo. A frequência de uma onda não depende do meio de propagação, apenas da fonte que a produziu.

Período: representado pela letra T , o intervalo de tempo necessário para que um ponto do meio percorra uma oscilação completa é denominado período, sendo medido em segundos (s).

Velocidade: A velocidade da onda corresponde à razão entre a distância que esta percorre (comprimento de onda) em relação ao tempo de um período de oscilação (período) e é representada pela letra v , ou seja:

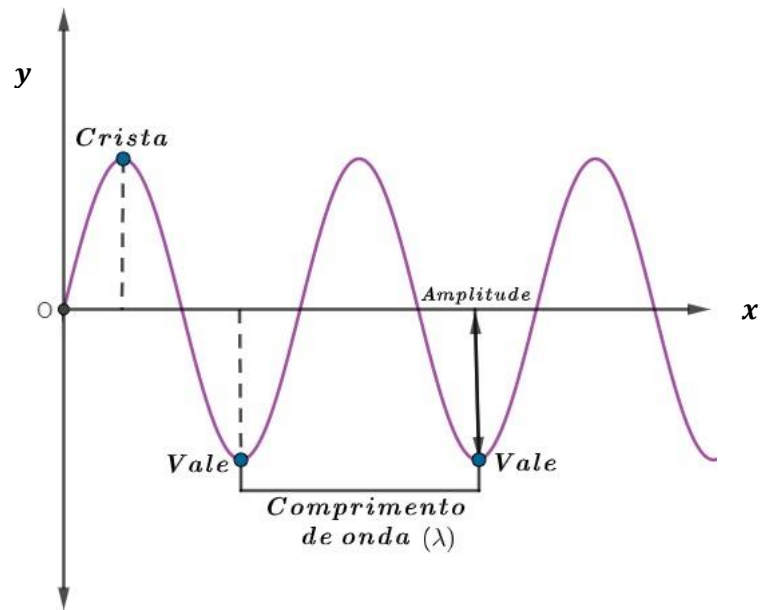
$$v = \frac{\lambda}{T}.$$

Podemos dizer que a velocidade de uma onda depende do meio em que ela está se propagando, isto é, dependendo do meio, a sua velocidade pode mudar.

Todas as grandezas citadas anteriormente são de suma importância para compreender os fenômenos que virão a posteriori. Em algumas regiões poderá ocorrer o encontro entre duas ou mais ondas distintas e a perturbação resultante no local consiste na adição das perturbações que ali estariam se cada onda estivesse se propagando sozinha naquela região. Esse fenômeno é denominado Interferência e a aditividade de perturbações é denominado Princípio da Superposição.

Para facilitar a compreensão, observe o gráfico que se encontra na página seguinte com as grandezas citadas anteriormente em que o ponto O se refere à fonte da onda que está sendo projetada:

Gráfico 4.1: Representação gráfica das cristas, vales, amplitude e comprimento de uma onda.



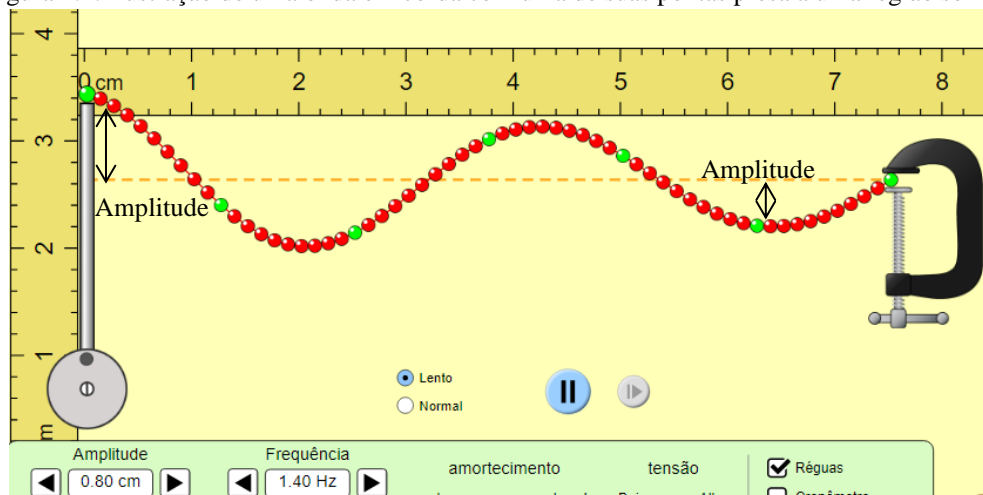
Fonte: Autoria própria.

4.1.1 Ondas unidimensionais

Ondas unidimensionais são aquelas que se propagam em meios de uma única dimensão, como por exemplo: ondas formadas em uma corda.

Observe a seguir a imagem de um simulador de ondas cuja onda que está sendo projetada é uma onda em corda com uma de suas pontas fixa e a outra móvel.

Figura 4.1: Ilustração de uma onda em corda com uma de suas pontas presa a uma região sólida.



Fonte: https://phet.colorado.edu/sims/html/wave-on-a-string/latest/wave-on-a-string_pt_BR.html.

Acesso: 05/06/2022.

Perceba que, ao longo do tempo, a onda muda o seu perfil, cujo comportamento se deve à perturbação que atua na corda e a influência que a extremidade fixa exerce.

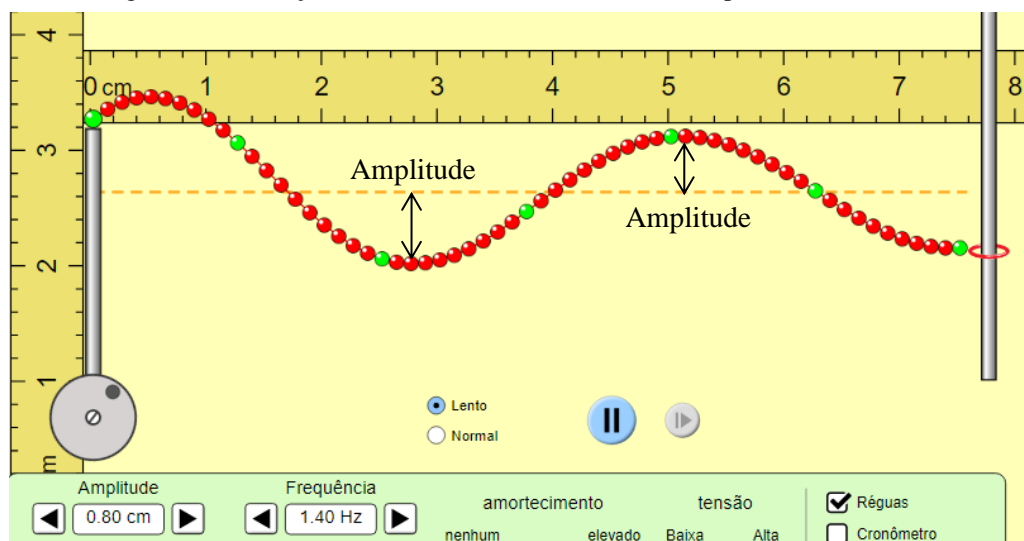
Então, podemos dizer que a onda inicia devido à uma perturbação e quando ela se choca com uma região sólida e fixa, ela retorna ao seu ponto inicial.

Logo, estamos tratando de duas ondas, uma que se propaga no sentido fonte-extremidade e outra que é a onda refletida na extremidade e retorna se propagando no sentido extremidade-fonte, aqui também temos o fenômeno da Interferência.

O mesmo ocorre quando, ao invés de uma extremidade fixa, tem-se uma extremidade livre, como representada pelo anel da Figura 4.2, que pode deslizar verticalmente. Nesse caso a onda também é refletida, porém as suas características são diferentes do exemplo com extremidade fixa.

Observe novamente a imagem, mas, dessa vez, contendo apenas pontas móveis.

Figura 4.2: Ilustração de uma onda em corda com as duas pontas relativamente soltas.



Fonte:

https://phet.colorado.edu/sims/html/wave-on-a-string/latest/wave-on-a-string_pt_BR.html. Acesso:

05/06/2022.

Perceba que esse simulador nos traz pontos verdes que mostram que a movimentação dos pontos do meio é apenas vertical pois, como visto anteriormente, as ondas não quânticas não transportam o meio.

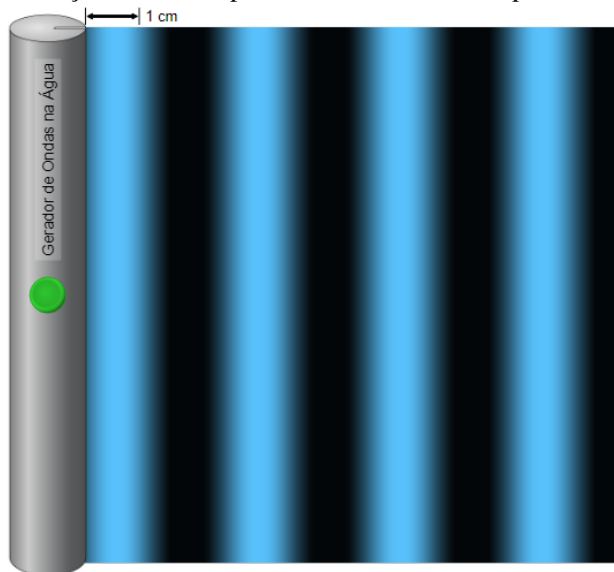
4.1.2 Ondas bidimensionais

As ondas bidimensionais são aquelas que se propagam em um meio que tem duas dimensões, como por exemplo: ondas formadas em uma superfície elástica.

Temos que as ondas bidimensionais são produzidas a partir de uma perturbação realizada numa superfície. Da mesma forma que as ondas unidimensionais, essa onda ao se chocar com um obstáculo ou com a extremidade da superfície a onda inicial retorna como onda refletida.

A fim de facilitar a compreensão, observe o gráfico a seguir cujo comprimento de onda vale 1 cm:

Figura 4.3: Ilustração da visão superior de uma onda sendo produzida em um lago.



Fonte: https://phet.colorado.edu/sims/html/wave-interference/latest/wave-interference_pt_BR.html. Acesso: 05/06/2022.

4.2 Relações entre as ondas e os objetos que estão a sua volta

Na Física existem fenômenos associados às ondas, entre os quais alguns já mencionamos brevemente nos exemplos, como reflexão e interferência. Abordaremos mais detalhadamente alguns deles e isso exigirá um formalismo matemático apropriado. É possível utilizar a representação vetorial dos números complexos, que é o que queremos abordar neste capítulo.

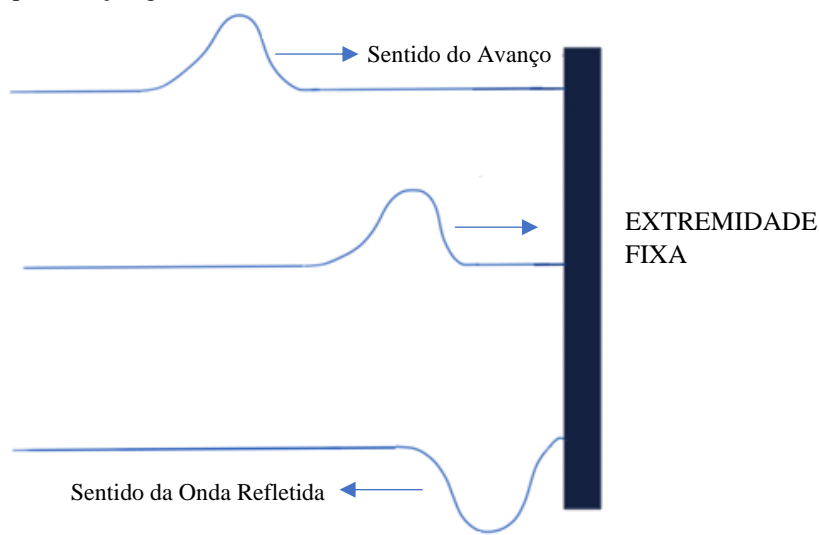
4.2.1 Reflexão das ondas

Podemos dizer que a reflexão de ondas é o fenômeno que ocorre quando uma onda incide em um outro meio e retorna para o meio de origem, como por exemplo, a extremidade fixa da corda.

Temos que à medida que a onda é projetada através de pulsos, esses pulsos se chocam com a ponta presa e retornam ao ponto inicial, todavia, a onda que é projetada pela resposta ao obstáculo não é a mesma que a projetada pela fonte, ocorre uma inversão.

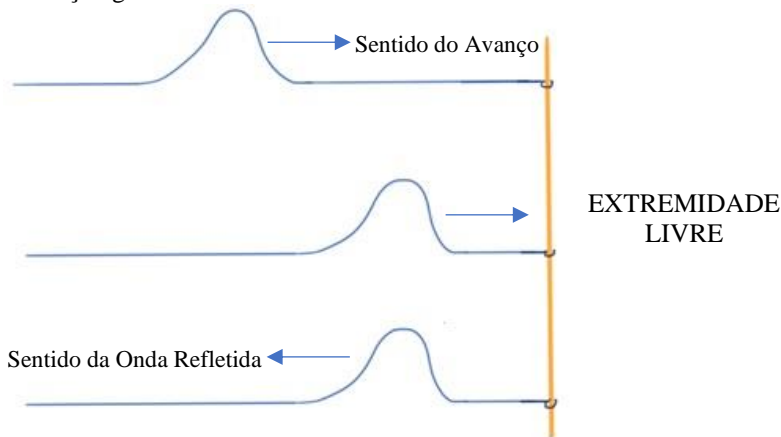
Observe a seguir gráficos representando a inversão citada:

Gráfico 4.2: Representação gráfica do fenômeno de reflexão da onda com extremidade fixa.



Fonte: Autoria própria.

Gráfico 4.3: Representação gráfica do fenômeno de reflexão da onda com extremidade livre.



Fonte: Autoria própria.

Perceba que ocorre uma inversão no gráfico 4.2, ou seja, a onda produzida pela fonte e a refletida pelo obstáculo possuem a mesma velocidade, amplitude, comprimento, período e frequência, todavia, possuem comportamento inverso, pois ao se chocar com o obstáculo, a onda refletida pelo obstáculo se inicia por uma crista e não por um vale.

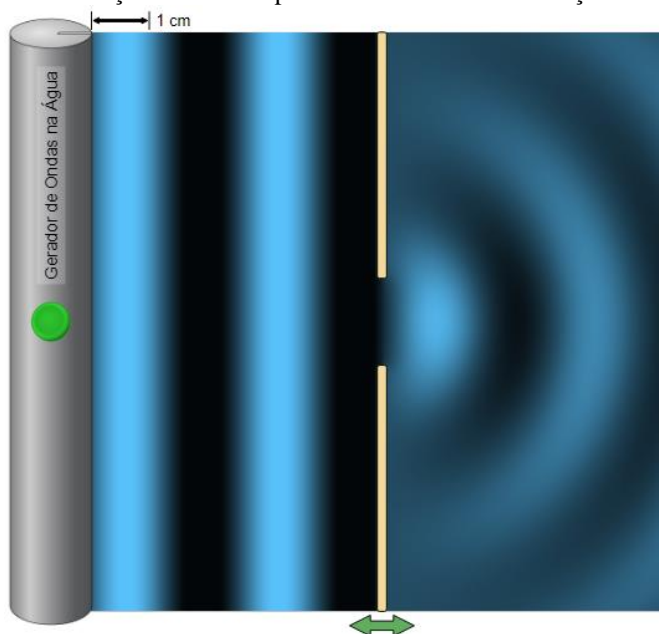
Já no gráfico 4.3, essa inversão não ocorre pois há a presença de uma extremidade livre e essa extremidade possibilita que a onda continue o movimento de forma equivalente mesmo após se chocar com o obstáculo.

4.2.2 Difração de ondas

Difração é a capacidade de uma onda contornar certos obstáculos. Ao se chocar com um obstáculo, parte da onda comete a reflexão enquanto as demais continuam o movimento, mas não de modo equivalente à onda inicial.

Observe o gráfico a seguir:

Figura 4.4: Ilustração da visão superior do fenômeno de difração de uma onda.



Fonte: https://phet.colorado.edu/sims/html/wave-interference/latest/wave-interference_pt_BR.html.

Acesso: 05/06/2022.

Nesse exemplo de difração as ondas partem da fonte seguindo pulsos retilíneos para a direita e ao se chocar com o obstáculo, passam a formar pulsos circulares. Esses tipos de pulsos circulares também se formam com o gotejamento de uma torneira sobre a superfície da água, por exemplo.

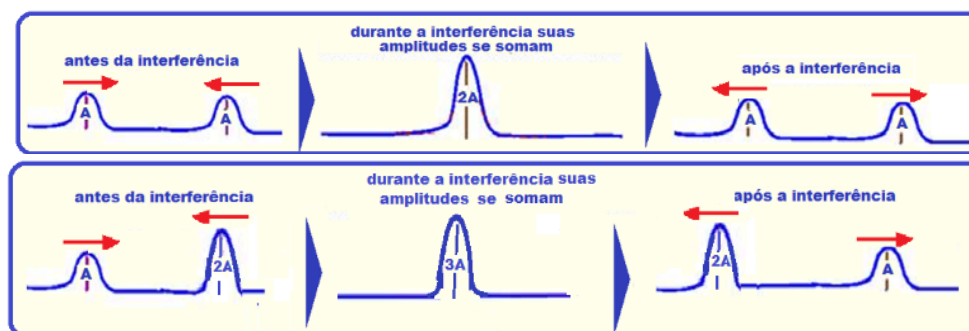
4.2.3 Interferência de ondas

Já comentamos que a interferência de ondas consiste no encontro entre duas ou mais ondas distintas e a perturbação resultante no local consiste na adição das perturbações que ali estariam se cada onda estivesse se propagando sozinha naquela região. Essa possibilidade de adição de perturbações ondulatórias resultando em uma perturbação ondulatória fisicamente possível é denominada *Princípio da Superposição de Ondas*. Matematicamente essa superposição consiste na adição das funções matemáticas que são usadas para descrever tais ondas, sendo elas apresentadas a seguir.

A interferência construtiva em um ponto apresenta como resultado uma perturbação maior que as que lhe deram origem, pois à medida que as ondas se superpõem, uma reforça a outra.

Para facilitar a compreensão, segue ilustração da interferência construtiva entre ondas unidimensionais de mesma amplitude e amplitude distintas.

Figura 4.5: Ilustração do fenômeno de interferência construtiva entre ondas unidimensionais.



Fonte: <https://fisicaevestibular.com.br/novo/ondulatória/ondas/interferencia-de-ondas/>. Acesso:

05/06/2022.

Por definição, temos que na interferência entre ondas de mesma fase (ou seja, construtiva) ocorre a soma das amplitudes das ondas, sejam essas amplitudes iguais ou distintas.

Duas ondas O_1 e O_2 geradas por duas fontes puntiformes B e C , que oscilam em fase, são descritas pelas funções f_1 e f_2 a seguir, com mesmo comprimento de onda e frequência:

$$f_1(x_1, t) = A_1 \cos(kx_1 - \omega t).$$

$$f_2(x_2, t) = A_2 \cos(kx_2 - \omega t).$$

Sendo A_1 e A_2 as amplitudes de O_1 e O_2 , k o número de onda, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, a frequência angular $\omega = \frac{2\pi}{T}$, x_1 e x_2 a distância de onde se está avaliando a função até as fontes no instante t . O número de onda pode ser definido como uma grandeza inversamente proporcional ao

comprimento de onda, ou seja, o número de comprimento de onda por unidade de distância. $\frac{1}{\lambda}$, cujo λ é o comprimento de onda. Já a frequência angular nada mais é que a rapidez que o ângulo de fase é percorrido, isto é, o ângulo de fase corresponde à posição do corpo em oscilação, ao final de cada oscilação, o corpo terá percorrido 2π radianos.

Temos que, a onda formada por f_1 e f_2 será definida pela função resultante f_r que é obtida pela soma das outras:

$$f_r = f_1 + f_2$$

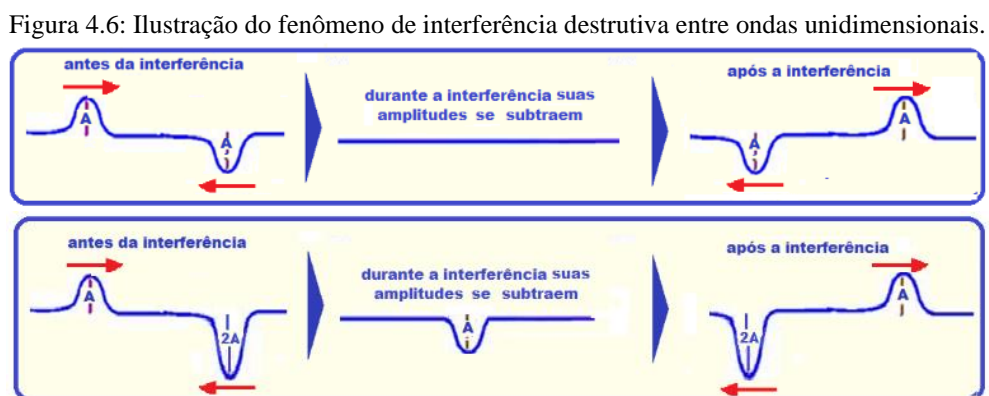
Veremos mais adiante como a soma das funções ocorre e como podemos utilizar tais informações a nosso favor, nesse momento iremos nos atentar apenas ao comportamento da onda em relação à sua amplitude. No ponto onde ocorre a interferência destrutiva a função resultante também é obtida pela soma das outras funções, todavia, uma das funções é negativa pelo fato de as ondas não possuírem a mesma fase, são ondas contrárias. Caso as amplitudes sejam as mesmas ocorre um anulamento, caso sejam diferentes ocorre uma subtração entre as amplitudes. Logo, supondo que A_1 e A_2 são as amplitudes de O_1 e O_2 , respectivamente.

Se $A_2 > A_1$ ou $A_1 > A_2$, então:

$$A_r = A_2 - A_1 \quad \text{ou} \quad A_r = A_1 - A_2.$$

Se $A_1 = A_2$, temos que: $A_r = A_1 - A_1 = 0$ ou $A_r = A_2 - A_2 = 0$.

Observe a figura abaixo da interferência destrutiva:



Fonte: <https://fisicaevestibular.com.br/novo/ondulatória/ondas/interferencia-de-ondas/>. Acesso:

05/06/2022.

4.3 Utilizando o estudo da Ondulatória para compreender os números complexos como vetores

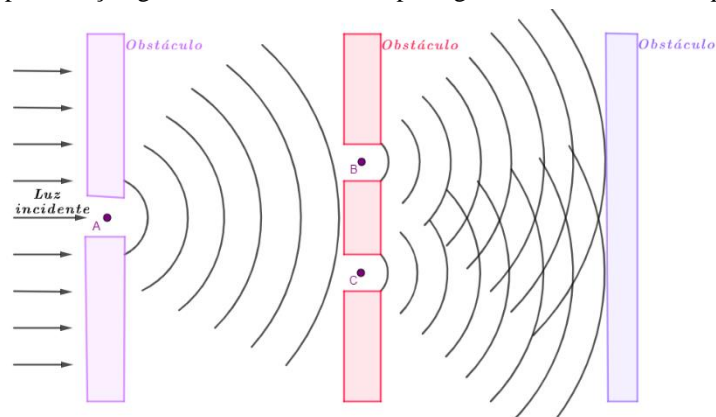
Até aqui, vimos ondas sendo produzidas em cordas e em lagos, todavia, não podemos nos esquecer que a luz se propagando pelo espaço também descreve uma onda, assim como as ondas sonoras. À vista disso, neste tópico escolhemos abordar o experimento da dupla fenda desenvolvido por Thomas Young, buscando analisar a função resultante da interferência de ondas e a sua intensidade em um determinado ponto P e utilizando os números complexos e a sua representação vetorial como facilitador para essa análise.

4.3.1 Passagem de um feixe de luz por duas fendas

Em um famoso experimento concebido por Thomas Young em 1802, foi realizada a passagem de luz por uma fenda em um obstáculo e, em seguida, a onda que emerge da fenda encontra um novo obstáculo formado por duas fendas. As ondas que emergem dessas duas fendas sofrem interferência, usaremos a seguir o princípio da superposição para descrever essa região de interferência. Esse experimento permitiu que Young compreendesse melhor os fenômenos de difração e interferência, interpretando a variação da intensidade da luz na região de superposição. A intensidade da luz consiste na potência da energia luminosa que atravessa uma unidade de área. Nas regiões mais escuras do local dizemos que a intensidade da luz é mais baixa, enquanto, nas mais claras dizemos que é mais alta. É um resultado das teorias do eletromagnetismo que o quadrado da amplitude da função da onda resultante, se ela for senoidal, como nos exemplos tratados aqui, é proporcional à intensidade dessa onda no local. Logo sendo I a intensidade de onda e A_r a amplitude da onda resultante, temos que: $I \propto A_r^2$.

Veja gráfico:

Gráfico 4.4: Representação gráfica do fenômeno da passagem de um feixe de luz por duas fendas.



Fonte: Autoria própria.

Os pontos A , B e C correspondem as fendas em obstáculos por onde passa a onda no experimento. A fenda A permite a passagem da onda de tal modo que as fendas B e C se comportam como duas fontes de ondas em fase que se sobrepõem na região onde se propagam.

No fenômeno representado acima não consideraremos as ondas de luz que retornam refletidas pelos obstáculos. Nos interessa somente a difração das ondas, que inicialmente se propagavam com raios paralelos e, ao entrarem em contato com o obstáculo, modificam seu curso após a passagem pelos orifícios.

4.3.2 A representação vetorial dos números complexos no experimento de Young

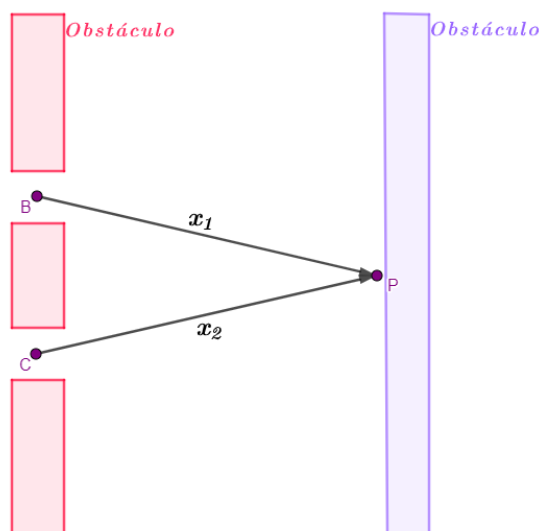
Nesse tópico iremos ressaltar o uso dos números complexos em sua forma vetorial para a descrição matemática da interferência no experimento de Young, especificamente apontar a intensidade da função resultante.

Ao passar o obstáculo que tem as duas fendas, ocorre o fenômeno de difração e interferência de ondas. Nesse instante faremos o estudo do comportamento das ondas f_1 e f_2 que se originam nos dois orifícios e percorrem determinada distância e superpõem-se em um ponto P .

Analisando a superposição dessas ondas em P , toma-se x_1 e x_2 como a distância de P até as fontes, a onda resultante f_r , formada pela superposição de f_1 e f_2 , será definida pela soma dessas funções em P :

$$f_r = f_1 + f_2.$$

Gráfico 4.5: Representação gráfica da interferência de ondas após a passagem por duas fendas.



Fonte: Autoria própria.

Sendo B e C as fontes correspondentes às fendas e P o ponto de encontro, que pode estar sobre um terceiro obstáculo podendo se comportar como uma tela para evidenciar o padrão de interferência nesse experimento.

Usando $f_r = f_1 + f_2$, supondo $A_1 = A_2 = A$, a soma fica:

$$f_r(x_1, x_2, t) = A \cos(kx_1 - \omega t) + A \cos(kx_2 - \omega t).$$

Se expandirmos por conveniência essas funções acrescentando apropriadamente uma parte imaginária e as denominando F_1 , F_2 e F_r , para que possamos trabalhar com a representação vetorial dos números complexos, poderemos simplesmente efetuar a soma vetorial desses números e a função resultante seria obtida muito mais fácil e diretamente que se realizássemos a soma de funções trigonométricas. O acréscimo dessas partes imaginárias não altera a determinação das intensidades da onda resultante que iremos analisar pois, a análise será voltada apenas para a parte real da função já que estamos observando um fenômeno físico. Então:

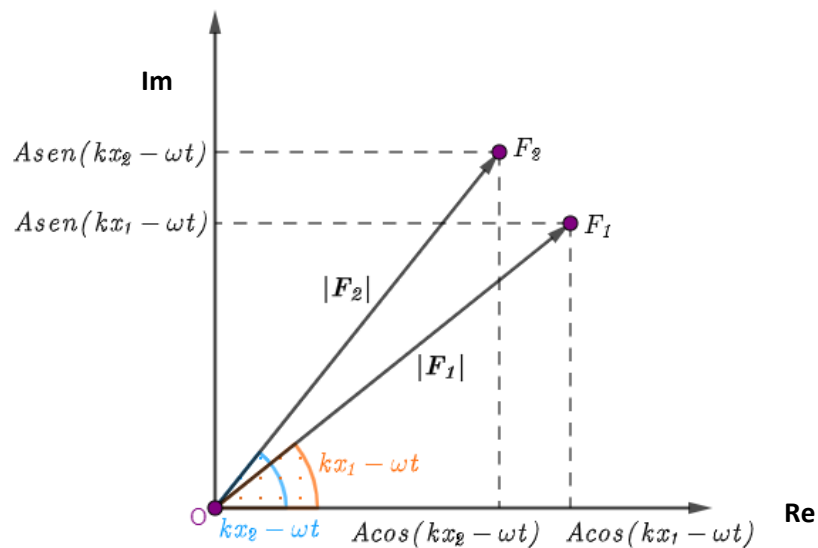
$$F_1(x_1, t) = A \cos(kx_1 - \omega t) + iA \sin(kx_1 - \omega t).$$

$$F_2(x_2, t) = A \cos(kx_2 - \omega t) + iA \sin(kx_2 - \omega t).$$

Desse modo, $(kx_1 - \omega t)$ e $(kx_2 - \omega t)$ são os argumentos, $A \cos(kx_1 - \omega t)$ e $A \cos(kx_2 - \omega t)$ são as partes reais e $A \sin(kx_1 - \omega t)$ e $A \sin(kx_2 - \omega t)$ as partes imaginárias de $F_1(x_1, t)$ e $F_2(x_2, t)$.

Observe a seguir a representação no plano complexo de F_1 e F_2 :

Gráfico 4.6: Representação gráfica das funções f_1 e f_2 como números complexos em sua forma vetorial.



Fonte: Autoria própria.

Assim sendo, realizando a adição dos números complexos em suas formas vetoriais, vem que:

$$F_r = F_1(x_1, t) + F_2(x_2, t)$$

$$F_r = A \cos(kx_1 - \omega t) + iA \sin(kx_1 - \omega t) + A \cos(kx_2 - \omega t) + iA \sin(kx_2 - \omega t).$$

É relevante mencionar que a expressão acima também pode ser descrita como:

$$F_r = Ae^{i(kx_1 - \omega t)} + Ae^{i(kx_2 - \omega t)},$$

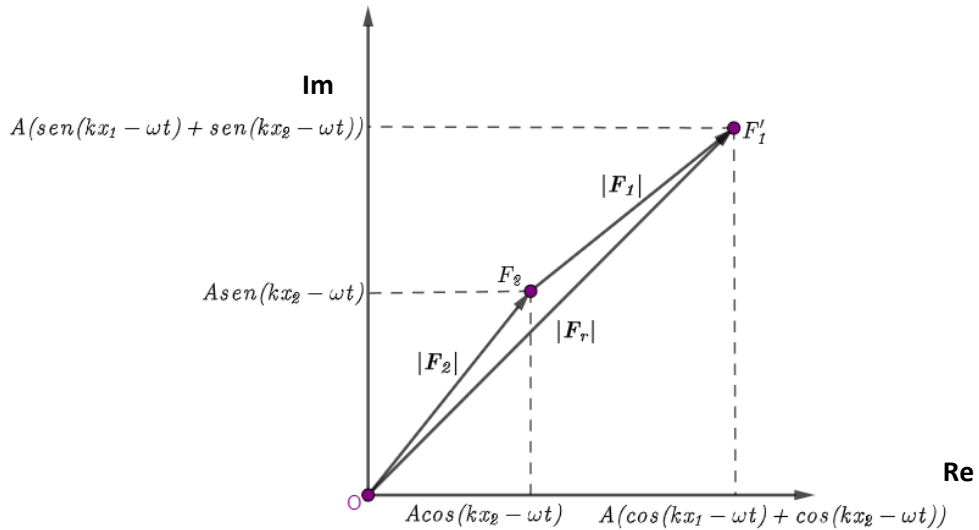
na qual foi utilizada a relação de Euler, que pode ser escrita como:

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta).$$

A definição acima foi retirada do livro Basic Complex Analysis de Jerrold E. Marsden e Michel J. Hoffman (1999, pg. 26).

Dessa forma a superposição das duas ondas, representadas como essas exponenciais, podem ser visualizados como a seguinte soma de vetores complexos, observe o gráfico:

Gráfico 4.7: Representação gráfica da adição dos números complexos F_1 e F_2 como vetores.

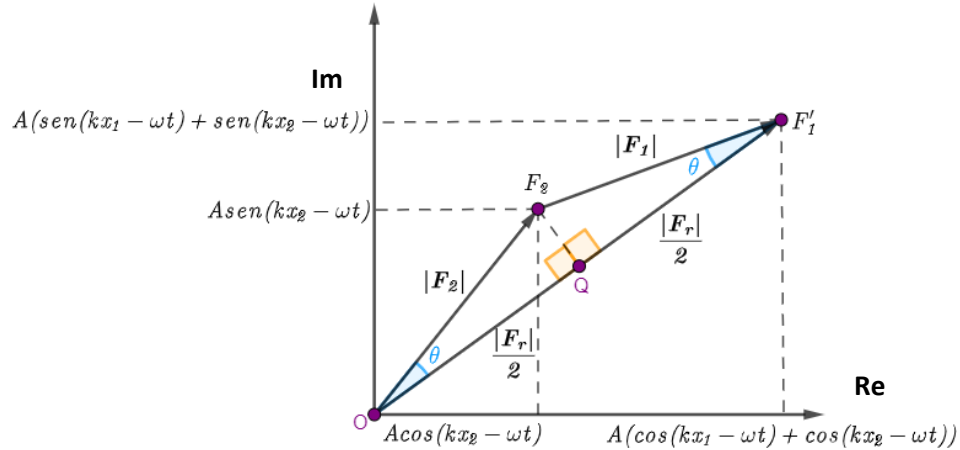


Fonte: Autoria própria.

Como $I \propto A_r^2$ e $A_r = |F_r|$, então, $I \propto |F_r|^2$.

Determinando $|F_r|$ através das relações trigonométricas:

Gráfico 4.8: Representação gráfica do cálculo de F_r .



Fonte: Autoria própria.

Utilizando as relações métricas do triângulo retângulo e sendo $A = |F_1| = |F_2|$:

$$\cos \theta = \frac{|F_r|}{2} \cdot \frac{1}{A} \Leftrightarrow \cos \theta = \frac{|F_r|}{2A}$$

$$\Leftrightarrow |F_r| = 2A \cos \theta$$

Analisando os gráficos 4.6 e 4.8, podemos concluir que:

$$2\theta = (kx_2 - \omega t) - (kx_1 - \omega t) = kx_2 - \omega t - kx_1 + \omega t$$

$$\therefore 2\theta = kx_2 - kx_1 = k(x_2 - x_1)$$

Dissemos que quanto maior a intensidade da luz maior a luminosidade naquele ponto e vice-versa, então I é máximo quando:

$$\theta = n\pi, \text{ sendo } n \in \mathbb{Z}^*, \text{ nesse caso } I \propto |F_r|^2 = 4A^2.$$

E é mínimo quando $\theta = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi, n \in \mathbb{Z}^*$:

$$\frac{k(x_2 - x_1)}{2} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$$

Como $k = \frac{2\pi}{\lambda}$:

$$\frac{2\pi}{\lambda}(x_2 - x_1) = n\pi \Leftrightarrow (x_2 - x_1) = n\lambda.$$

Analogamente, para a interferência destrutiva podemos verificar que

$$(x_2 - x_1) = \left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda.$$

Portanto, após essa análise na qual pudemos usar essa representação de duas ondas superpostas por meio de adição de vetores no plano complexo, podemos dizer que a interferência é construtiva ou destrutiva quando a diferença de caminho percorrido pelas duas ondas superpostas $(x_2 - x_1)$ for um múltiplo inteiro ou semi-inteiro do comprimento de onda, respectivamente.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho apresentamos a representação vetorial dos números complexos como uma alternativa às demais representações, de forma que a vetorial nos proporciona a utilização de conceitos geométricos, o que facilita a visualização e, talvez, a resolução de algumas questões como as abordadas nos capítulos 3 e 4.

Conforme Duval (2009), qualquer objeto matemático, que é abstrato, precisa ter uma representação semiótica, ou seja, pelo menos dois registros diferentes tornam a comunicação entre o sujeito e o objeto muito mais direta e clara, pois as distintas representações oferecem alternativas para o processo de aprendizado, tornando-o mais provável de se concretizar.

Além disso, tentamos mostrar que essa representação não está presente apenas na área Matemática, existem aplicações para tais números representados vetorialmente também na Ondulatória e nas demais ciências, talvez um pouco mais implícita que a abordada aqui.

O nosso objetivo neste trabalho foi de mostrar como as representações dos números complexos estão presentes em estudos da Matemática, nas operações, questões etc. E como a representação vetorial não é tão abordada, mas se faz presente em áreas não só da Matemática, mas também na Física e em outras que não mencionamos aqui.

Temos ciência que o estudo das diferentes representações dos números complexos não se esgota em apenas sessenta e quatro páginas, existe uma necessidade de explorar tal conteúdo em trabalhos posteriores a fim de sanar possíveis dúvidas e levantar descobertas e outras aplicações a respeito dos números complexos como vetores.

Futuramente pretendemos trabalhar, ainda, com os números complexos, observando as suas aplicações nas ciências da computação e discorrendo sobre os nuances do Conjunto dos Números Complexos quando observado em relação às suas características frente aos demais conjuntos.

REFERÊNCIAS

ANDREESCU, Titu. ANDRICA, Dorin. **Complex numbers from A to-Z**. Alba Iulia: Millenium S.R.L, 2001.

ANTON, Howard. RORRES, Chris. **Álgebra linear com aplicações**. 8. ed. Porto Alegre: Bookman, 2001.

BASSALO, José. Fresnel: O Formulador Matemático da Teoria Ondulatória da Luz. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, Florianópolis, v.05, n.2, p.79-83, 1988. Disponível em: <<https://periodicos.ufsc.br/index.php/fisica/article/view/9821/0>>. Acesso em: 26 de março de 2022.

BOULOS, Paulo. CAMARGO, Ivan de. **Geometria Analítica: um tratamento vetorial**. 3. ed. São Paulo: Prentice Hall, 2005.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental et al. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1997.

D'AMBROSIO, A. História da Matemática: questões historiográficas e políticas e reflexos na Educação Matemática. Em: NUNES, Amanda et al. A interdisciplinaridade nas aulas de Matemática através de histórias em quadrinhos: uma parceria com Português, História e Inglês. **Práticas de Iniciação à Docência na Região Sul**, São Leopoldo, 2017. Disponível em: <http://www.repositorio.jesuita.org.br/bitstream/handle/UNISINOS/7913/6560-9842-1-DR.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 29/05/2022.

DUVAL, Raymond. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. **Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 07, n. 2, p.266-297, 2012. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n2p266/23465>. Acesso em: 29/05/2022.

GEORGI, Howard. **The Physics of Waves**. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 2015.

IEZZI, Gelson. **Fundamentos de Matemática Elementar 3: Trigonometria**. São Paulo: Atual, 2013.

KOBERLE, Roland. Sobre a Gênese da Mecânica Ondulatória. **Revista Brasileira de Física**, São Carlos, v. 09, n. 1, p.243-273, 1979. Disponível em: <http://www.sbfisica.org.br/bjp/download/v09/v09a18.pdf>. Acesso em: 05/06/2022.

MARCONI, Marina de Andrade. LAKATOS, Eva Maria. **Fundamentos de Metodologia Científica**. 5. ed. São Paulo: Atlas, 2003.

MARQUES, Cristina Maria. **Introdução à Teoria de Anéis**. Belo Horizonte: UFMG, 2005.

MARSDEN, JERROLD E. **Basic complex analysis**. 3. ed. New York: W. H. Freeman and Company, 1999.

MATOS, Etinevaldo. **Números Complexos na Geometria e outras Aplicações**. O Orientador: André Luis Godinho Mandolesi. 2017. 73 f. Dissertação (Mestrado) – Mestrado em Matemática, PROFMAT, Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2017.

NEVES, Robson. **Aplicações de Números Complexos em Geometria**. Orientador: Eduardo Wagner. 2014. 88 f. Dissertação (Mestrado) – Mestrado em Matemática, IMPA, Ministério da Ciência, Tecnologia e Inovação, Rio de Janeiro, 2014.

NUNES, Jaques. **Noções sobre as Séries de Fourier**. Orientador: Roberto Corrêa. 2002. 100 f. TCC (Graduação) – Curso de Matemática, Departamento de Matemática, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2002. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/96939>. Acesso em: 29/05/2022.

OLIVEIRA, Carlos. **Números Complexos: Um estudo dos registros de representação e aspectos gráficos**. Orientadora: Maria José Ferreira da Silva. 190 f. Dissertação (Mestrado) – Mestrado em Educação Matemática, Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2010.

QUEIROZ, Carlos Antonio. **Tópicos Especiais em Ciências I: representação semiótica, tecnologias educacionais e atividades experimentais**. 1. ed. Florianópolis: IF – SC, 2011.

SALES, Antonio. O uso da história no Ensino de Matemática (uma reflexão). **Revista Ibero-Americana de Humanidades, Ciências e Educação – REASE**, São Paulo, 2021. Disponível em: <<https://www.periodicorease.pro.br/rease/article/view/952/434>>. Acesso em: 26 de março de 2022.

SILVA, Fabio. A evolução da teoria ondulatória da luz e os livros didáticos. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, Belo Horizonte, v. 29, n. 1, p.149-159, 2007. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/rbef/a/wXbCrhcZ79KtDZ5FZmtK8hM/?lang=pt&format=pdf>. Acesso em: 05/06/2022.

SOUZA, Joamir Roberto de. GARCIA, Jacqueline da Silva Ribeiro. **#Contato matemática, 3º ano**. 1. ed. São Paulo: FTD, 2016.

TEODOSIO, Elaine. **Números Complexos e suas Aplicações à Geometria no Ensino Médio**. Orientador: Jonatan Floriano da Silva. 103 f. Dissertação (Mestrado) – Mestrado em Matemática, Departamento de Matemática, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2016.

YOUNG, Hugh D. FREEDMAN, Roger A. **Sears e Zemansky física III: eletromagnetismo**. São Paulo: Person Education do Brasil, 2015.

YOUNG, Hugh D. FREEDMAN, Roger A. **Sears e Zemansky física IV: ótica e física moderna**. São Paulo: Person Education do Brasil, 2016.