CONSEQUÊNCIAS DO ESTUDO DAS EQUAÇÕES DE 2º GRAU

INTRODUÇÃO

No texto anterior abordamos o tema "Equação de 2º grau". Lá ela foi definida, resolvida, e teve demonstradas suas propriedades. A partir de agora, esse conhecimento será utilizado para tratar de outras questões.

CONCEITO

SISTEMAS DE 2º GRAU

Dizemos que um sistema de equações é de 2º grau se pelo menos uma de suas equações for de 2º grau em alguma variável, ou se houver alguma equação que possua o produto de duas incógnitas, ambas de 1º grau. Normalmente para resolvermos estes sistemas, utilizamos o método da substituição ou o da adição.

EXEMPLOS

Resolva os sistemas de equações no conjunto $\mathbb{R}\,X\,\mathbb{R}$:

1) $\begin{cases} y + 2x = 0 \\ x^2 - 3y = 16 \end{cases}$. Utilizaremos neste sistema o método da substituição:

Da 1ª equação, podemos escrever que y = -2x.

Se substituirmos tal valor de y na 2ª equação, teremos:

$x^2 - 3 \cdot (-2x) = 16 \rightarrow x^2 + 6x - 16 = 0$, que é uma equação de 2º grau na variável x. Se a resolvermos por Báscara, teremos: $x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-16)}}{2 \cdot 1} = \frac{-6 \pm \sqrt{36+64}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{100}}{2}$.

Portanto: $x = \frac{-6 \pm 10}{2} = \begin{cases} x' = 2 \rightarrow y' = -2 \cdot 2 = -4 \\ x'' = -8 \rightarrow y'' = -2 \cdot (-8) = 16 \end{cases} \rightarrow V = \{(2,-4),(-8,16)\}$

2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 - y^2 = 7 \end{cases}$. Agora, usaremos o método da adição:

Se adicionarmos membro a membro as duas equações que formam o sistema, obteremos a equação $2x^2 = 18$, que é uma equação de 2º grau incompleta em b, que resolveremos pelo método particular: $x^2 = \frac{18}{2} \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = \pm\sqrt{9} \rightarrow x = \pm 3$. Se usarmos, por exemplo, a 2ª equação do sistema, poderemos calcular os valores de y:

Com x' = 3, a 2ª equação ficará: $3^2 - y^2 = 7 \rightarrow -y^2 = 7 - 9 \rightarrow y^2 = 2 \rightarrow y = \pm\sqrt{2}$.

Com $x'' = -3$, a 2ª equação ficará: $(-3)^2 - y^2 = 7 \rightarrow -y^2 = 7 - 9 \rightarrow y^2 = 2 \rightarrow y = \pm\sqrt{2}$.

Logo, teremos o seguinte Conjunto Verdade: $V = \{(3, \sqrt{2}), (3, -\sqrt{2}), (-3, -\sqrt{2}), (-3, \sqrt{2})\}$

EXERCÍCIOS

Resolver os sistemas de equações em $\mathbb{R}\ X\ \mathbb{R}$:

1) $\begin{cases} x + 2y = 12 \\ x^2 + 2y = 42 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} xy - x = 3 \\ x - 2y = -1 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x \cdot y = -6 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x = 1 + y \\ \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{5}{2} \end{cases}$

Respostas:

1) $V = \left\{\left(-5, -\frac{17}{2}\right)\right\}$ 2) $V = \left\{(3,2), \left(-2, -\frac{1}{2}\right)\right\}$

3) $V = \{(2, -3), (-2,3)\}$ 4) $V = \{(-1, -2), (2,1)\}$

CONCEITO

EQUAÇÃO BIQUADRADA

Dizemos que uma equação é biquadrada na variável x se puder ser escrita na forma: $ax^4 + bx^2 + c = 0$, com a, b e c reais, e a não nulo.

Para resolvermos uma equação deste tipo, devemos mudar a sua variável, de modo a obter uma outra equação cuja resolução já sabemos obter, e que nos servirá de ferramenta auxiliar para chegarmos à solução da equação dada.

EXEMPLOS

Resolva as equações em $\mathbb{R}$:

1) $x^4 - 17x^2 + 72 = 0$

Façamos a seguinte mudança de variável: $y = x^2$, logo $x = \pm\sqrt{y}$. Teremos então uma nova equação na variável y: $y^2 - 17y + 72 = 0$. Se resolvermos esta equação, obteremos para y os seguintes valores: $\begin{cases} y' = 8 \\ y'' = 9 \end{cases}$. Porém, não são os valores de y que procuramos, mas os de x, variável da equação inicial. Como vimos, $x = \pm\sqrt{y}$, logo, teremos os seguintes valores para x:

Se $y = 8 \rightarrow \begin{cases} x_1 = +\sqrt{8} = +2\sqrt{2} \\ x_2 = -\sqrt{8} = -2\sqrt{2} \end{cases}$

Se $y = 9 \rightarrow \begin{cases} x_3 = +\sqrt{9} = +3 \\ x_4 = -\sqrt{9} = -3 \end{cases}$

$V = \{-3. -2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 3\}$

2) $2x^4 - 7x^2 - 4 = 0$

$x^2 = t$ será a mudança de variável. Logo, $x = \pm\sqrt{t}$, e nossa equação passará a ser:

$2t^2 - 7t = 0 \rightarrow t = \frac{7\pm\sqrt{49-4\cdot2\cdot(-4)}}{2\cdot2} = \frac{7\pm\sqrt{49+32}}{4} = \frac{7\pm\sqrt{81}}{4} = \frac{7\pm9}{4}$. Logo, temos:

Se $t' = 4 \rightarrow \begin{cases} x_1 = +\sqrt{4} = +2 \\ x_2 = -\sqrt{4} = -2 \end{cases}$

Se $t" = -\frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x_3 = +\sqrt{-\frac{1}{2}} \ que\ não\ é\ real \\ x_4 = -\sqrt{-\frac{1}{2}} \ que\ não\ é\ real \end{cases} \rightarrow V = \{-2, 2\}$

EXERCÍCIOS

Resolva em $\mathbb{R}$ as seguintes equações:

1) $x^4 - 31x^2 + 108 = 0$
2) $x^4 = 120x^2 = 0$
3) $-x^4 - 10x^2 - 9 = 0$
4) $4x^4 - 13x^2 + 9 = 0$

Respostas:

1) $V = \{-3\sqrt{3}, -2, 2, 3\sqrt{3}\}$
2) $V = \{-2\sqrt{30}; 0; 2\sqrt{30}\}$
3) $V = \{\ \ \}$
4) $V = \left\{-\frac{3}{2}, -1, 1, \frac{3}{2}\right\}$

CONCEITO

EQUAÇÃO IRRACIONAL

Dizemos que uma equação é Irracional, se ela apresentar variável em algum radicando.

A resolução de uma equação deste tipo é alcançada se utilizarmos o artifício de elevar seus dois membros a uma potência de expoente conveniente de modo a obtermos uma outra equação cujas raízes já sabemos calcular. Por fim, tais raízes da equação obtida devem ser substituídas na equação inicial para que verifiquemos sua validade, uma vez que nem sempre as equações da equação auxiliar servem na irracional.

EXEMPLOS

Resolva as equações em $\mathbb{R}$:

1) $2 \cdot \sqrt{x^2 - 3x} + 3 = x$

Podemos perceber que a equação apresentada é irracional, pois possui variável em radicando. Para iniciarmos a sua resolução, iremos isolar o radical:

$$2 \cdot \sqrt{x^2 - 3x} = x - 3$$

Em seguida, elevaremos os dois membros ao quadrado, e isto fará com que o radical desapareça:

$\left(2 \cdot \sqrt{x^2 - 3x}\right)^2 = (x-3)^2 \rightarrow 4 \cdot (x^2 - 3x) = x^2 - 6x + 9 \rightarrow 4x^2 - 12x = x^2 - 6x + 9$

$\rightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0 \rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \rightarrow x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} \rightarrow$

$x = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} \rightarrow \begin{cases} x' = 3 \\ x'' = -1 \end{cases}$. Devemos finalmente verificar se os valores obtidos são ou não raízes da equação inicial. A este processo damos o nome de Verificação.

Verificação:

Partindo da equação inicial, $2 \cdot \sqrt{x^2 - 3x} + 3 = x$, teremos:

a) Se $x = 3 \rightarrow 2 \cdot \sqrt{3^2 - 3 \cdot 3} + 3 = 3 \rightarrow 2 \cdot \sqrt{9 - 9} + 3 = 3 \rightarrow 2 \cdot 0 + 3 = 3 \rightarrow 0 + 3 = 3$ (V)

b) Se $x = 1 \rightarrow 2 \cdot \sqrt{(-1)^2 - 3 \cdot (-1)} + 3 = -1 \rightarrow 2\sqrt{1 + 3} + 3 = -1 \rightarrow 2 \cdot 2 + 3 = -1 \rightarrow 7 = -1$ (F)

Vemos que se $x = 3$, a equação inicial é satisfeita. Porém, se $x = -1$, chegamos a uma igualdade falsa. Isto significa que -1 não faz parte do Conjunto Verdade da equação dada. Portanto, $V = \{ 3 \}$

2) $\sqrt{x + 1} + \sqrt{3x + 1} =$ x

Para resolvermos esta equação, também irracional como podemos ver, será conveniente isolarmos os radicais, escrevendo um em cada membro seu: $\sqrt{x + 1} = \sqrt{3x + 1} -$ x. Este isolamento poderia ter sido realizado de outro modo, naturalmente. Elevemos agora os dois membros ao quadrado: $\left(\sqrt{3x + 1}\right)^2 = \left(x - \sqrt{x + 1}\right)^2$. Percebemos então que o segundo membro se transformou em um quadrado de uma soma, que é um produto notável estudado anteriormente. Então teremos: $3x1 = x^2 - 2x\sqrt{x + 1} + \left(\sqrt{x + 1}\right)^2 \rightarrow 3x + 1 = x^2 - 2x\sqrt{x + 1} + x + 1$. Isolemos agora o radical no primeiro membro: $2x \cdot \sqrt{x + 1} =$

$x^2 - 2x$. Elevemos novamente os dois membros ao quadrado: $\left(2x \cdot \sqrt{x+1}\right)^2 = (x^2 - 2x)^2$. O 2º membro novamente se transformou em um produto notável, o quadrado de uma diferença. Assim, a igualdade passa a ser escrita do seguinte modo: $4x^2 \cdot (x+1) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 \to 4x^3 + 4x^2 = x^4 - 4x^3 + 4x^2 \to x^4 - 8x^3 = 0$. Caímos agora em uma equação de 4º grau incompleta que, para ser resolvida, devemos colocar em evidência o fator x^3 (x elevado ao seu menor expoente), e passaremos a ter $x^3 \cdot (x-8) = 0$. Ora, como vimos anteriormente, se uma expressão fatorada é igual a zero, pelo menos um de seus fatores é igual a zero. Então podemos escrever: $x^3 = 0 \to x' = 0$ ou $x - 8 = 0 \to x'' = 8$.

Resta-nos então efetuar a Verificação na equação inicial $\sqrt{x+1} + \sqrt{3x+1} = x$

Se $x = 0$, teremos: $\sqrt{0+1} + \sqrt{3 \cdot 0 + 1} = 0 \to \sqrt{1} + \sqrt{1} = 0 \to 1 + 1 = 0$ (F)

Se $x = 8$, teremos: $\sqrt{8+1} + \sqrt{3 \cdot 8 + 1} = 8 \to \sqrt{9} + \sqrt{25} = 8 \to 3 + 5 = 8$ (V)

Conclusão: $V = \{8\}$.

3) $2 - \sqrt[3]{3x-4} = 0$

Isolemos o radical: $2 = \sqrt[3]{3x-4}$. Elevemos agora os dois membros ao cubo, pois o radical existente na equação possui índice 3: $2^3 = \left(\sqrt[3]{3x-4}\right)^3 \to 8 = 3x - 4 \to 3x = 12 \to x = 4$.

Verificação: Se x = 4, a equação inicial passa a ser: $2 - \sqrt[3]{3 \cdot 4 - 4} = 0 \to 2 - \sqrt[3]{8} = 0 \to 2 - 2 = 0$ (V) . Conclusão: $V = \{4\}$

OBSERVAÇÃO

Você verá nos exercícios a seguir que há algumas equações irracionais cujo Conjunto Verdade é Vazio, pois as raízes obtidas não passam no teste da Verificação, e há ainda aquelas em que as raízes todas são aprovadas nesse teste.

EXERCÍCIOS

Resolva as equações no conjunto dos números reais:

1) $\sqrt{x+7} = 3$
2) $\sqrt[3]{x+2} = 2$
3) $\sqrt{x} - 2 = x$
4) $\sqrt{25 - x^2} + x = 7$
5) $\sqrt{6-x} + x = 0$
6) $\sqrt{x-9} + 3 = 0$
7) $\sqrt[3]{\sqrt{2x-3}} - 1 = 0$
8) $\sqrt{\sqrt[4]{2x+11}} = 0$
9) $\sqrt{6-x} = \sqrt{x-4}$
10) $\sqrt{x+2} = \sqrt{3x-5} - 1$

Respostas

1) $V = \{2\}$ 2) $V = \{6\}$ 3) $V = \{\quad\}$ 4) $V = \{3{,}4\}$

5) $V = \{-3\}$ 6) $V = \{\quad\}$ 7) $V = \{2\}$ 8) $V = \left\{-\frac{11}{2}\right\}$

9) $V = \{5\}$ 10) $V = \{7\}$

CONCEITO

PROBLEMAS DE 2º GRAU

Neste item, abordaremos problemas cuja solução nos remete às equações de 2º grau. Não podemos nos esquecer de verificar se as soluções algébricas encontradas realmente satisfazem as exigências do problema.

EXEMPLOS

1) Obtenha os lados do retângulo que tem 60 cm^2 de área e 32 cm de perímetro.

Resolução: O retângulo é um paralelogramo, e, como tal, possui 4 lados 2 a 2 paralelos e iguais. Se representarmos os lados pelas letras x e y, a área será igual a x.y e o perímetro será $2x + 2y$. Então, teremos o seguinte sistema: $\begin{cases} x \cdot y = 60 \\ 2x + 2y = 32 \end{cases}$

Se multiplicarmos a 2ª equação por ½, obteremos o sistema a seguir: $\begin{cases} x \cdot y = 60 \\ x + y = 16 \end{cases}$

Se isolarmos y na 2ª equação, teremos: $y = 16 - x$, que substituiremos na 1ª, e assim teremos: $x.(16 - x) = 60 \rightarrow -x^2 + 16x = 60 \rightarrow -x^2 + 16x - 60 = 0 \rightarrow x^2 - 16x + 60 = 0 \rightarrow x = \frac{16 \pm \sqrt{(-16)^2 - 4 \cdot 1.60}}{2 \cdot 1} = \frac{16 \pm \sqrt{256-240}}{2} = \frac{16 \pm \sqrt{16}}{2} \rightarrow x = \frac{16 \pm 4}{2}$

$$\begin{cases} x' = 10 \rightarrow y = 16 - x = 16 - 10 \rightarrow y' = 6 \\ x = 6 \rightarrow y = 16 - x = 16 - 6 \rightarrow y = 10 \end{cases}$$

Vemos que as duas resoluções do sistema, em última análise, apresentam a mesma solução para o problema, e que se resumem ao retângulo cujos lados medem $6cm$ e $10cm$.

2) Encontre dois números positivos cuja soma dos quadrados seja 25, se a diferença entre eles é igual a 1.

Resolução: A leitura atenta do enunciado nos permite escrever duas sentenças que formarão o sistema a seguir: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ x - y = 1 \end{cases}$

Isolemos x na 2ª equação: $x = 1 + y$, e efetuemos a substituição de x encontrado na 1ª :

$(1+y)^2y^2 = 25 \rightarrow 1 + 2y + y^2y^2 = 25 \rightarrow 2y^2 + 2y - 24 = 0$. Se resolvermos esta equação, obteremos os seguintes valores para y:

$$\begin{cases} y' = -6\ (Não\ é\ positivo, logo\ não\ é\ solução\ do\ probelma) \\ y{=}4 \rightarrow \mathrm{x} = 1 + 4 \rightarrow x'' = 5 \end{cases}$$

Resposta: Os números positivos procurados são 4 e 5.

3) Ache dois números tais que o quadrado de um deles, se adicionado ao dobro do quadrado do outro, nos dá 11. Porém, o primeiro deles, quando adicionado ao triplo do quadrado do segundo é igual a 6.

Resolução: As equações que podemos escrever conforme o enunciado são: $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 11 \\ x + 3y^2 = 6 \end{cases}$

Se isolarmos x na 2ª equação, teremos: $x = 6 - 3y^2$, e se substituirmos tal valor na 1ª, ficaremos com a seguinte equação: (6-3y^2)^2 $+ 2y^2 = 11$, de onde poderemos escrever, após desenvolvermos o produto notável existente: $36 - 36y^2 + 9y^4 + 2y^2 = 11$, e assim teremos a equação biquadrada seguinte: $9y^4 - 34y^2 + 25 = 0$.

Para resolvermos esta equação faremos a seguinte mudança de variável: $y^2 = t$, e resolveremos a seguinte equação de 2º grau na variável t: $9t^2 - 34t + 25 = 0$.

Então, $t = \frac{34 \pm \sqrt{1156 - 900}}{2 \cdot 9} = \frac{34 \pm \sqrt{256}}{18} = \frac{34 \pm 16}{18} = \begin{cases} t' = \frac{25}{9} \\ t'' = 1 \end{cases}$

$$t' = \frac{25}{9} \rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{25}{9}} \rightarrow \begin{cases} y_1 = \frac{5}{3} \rightarrow x_1 = 6 - 3 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^2 = 6 - 3 \cdot \frac{25}{9} = 6 - \frac{25}{3} = \frac{18-25}{3} = -\frac{7}{3} \\ y_2 = -\frac{5}{3} \rightarrow x_2 = 6 - 3 \cdot \left(-\frac{5}{3}\right)^2 = 6 - 3 \cdot \frac{25}{9} = 6 - \frac{25}{3} = \frac{18-25}{3} = -\frac{7}{3} \end{cases}$$

$$t'' = 1 \rightarrow y = \pm\sqrt{1} \rightarrow \begin{cases} y_3 = 1 \rightarrow x_3 = 6 - 3 \cdot 1^2 = 6 - 3 = 3 \\ y_4 = -1 \rightarrow x_4 = 6 - 3 \cdot (-1)^2 = 6 - 3 = 3 \end{cases}$$

Resposta: Os números são 3 e 1, ou 3 e -1, ou $-\frac{7}{3}$ e $\frac{5}{3}$ ou ainda $-\frac{7}{3}$ e $-\frac{5}{3}$.

EXERCÍCIOS

1) O quadrado de um número é igual ao seu quíntuplo adicionado a 126. Qual é número?

2) Ache o número cujo quadrado é igual a ele mesmo adicionado a 30.

3) O triplo do quadrado de um número positivo é quinze vezes o número. Qual é ele?

4) O quadrado da minha idade menos a minha idade há 20 anos é 2000. Quantos anos tenho hoje?

5) Se adicionarmos a soma dos quadrados das raízes das equações $x^2 - 10\text{x} + 21 = 0$ e $x^2 + 2x - 80 = 0$, quanto obteremos?

6) Ache dois números inteiros e consecutivos cuja soma dos inversos é $\frac{13}{42}$.

7) Obtenha os lados de um retângulo cuja área é $18m^2$, se um lado é o dobro do outro.

8) O produto de dois números naturais e múltiplos consecutivos de 7 é 588. Ache-os.

9) A área de um jardim retangular é $40m^2$ e um de seus lados mede 3m a mais que o outro. Obtenha a área de uma calçada cimentada em volta do jardim e que tenha 2m de largura.

10) A soma entre o quadrado de um número e o quadrado do inverso deste número $\frac{82}{9}$. Qual é o número?

Respostas: 1) O número é -9 ou 14; 2) O número é -5 ou 6; 3) O número é 5;
4) Tenho 45 anos; 5) 222; 6) Os números são 6 e 7; 7) Os lados 3m e 6m; 8) Os números são 21 e 28; 9) A área da calçada é 52 m^2; 10) O número é $\frac{1}{9}$ ou 9.