EQUAÇÃO DE SEGUNDO GRAU

INTRODUÇÃO

Equação é uma igualdade onde há algum elemento desconhecido. Como exemplo, podemos escrever "$4x + 7 = 31$". Esta igualdade é uma equação já conhecida por você, pois é de primeiro grau na variável x, você sabe resolvê-la e, com facilidade, encontrar o valor 6 para a incógnita.

Resolver uma equação significa obter o valor da incógnita que a verifica. O conjunto dos valores que a incógnita, ou variável, pode assumir é chamado Conjunto Universo, que será representado por U, e o conjunto dos valores que verificam ou satisfazem a equação é seu Conjunto Verdade cujo símbolo é V. Portanto, resolver uma equação em um conjunto U é o mesmo que construir o seu conjunto V. Os elementos de V são chamados raízes ou zeros da equação.

Porém, assim como os polinômios, as equações podem ser de 1º, 2º, 3º graus, etc., e há aquelas que nem grau possuem. Só que isso é uma outra história, pois agora iremos nos dedicar apenas às de 2º grau em alguma variável.

DEFINIÇÃO

Uma equação é de segundo grau na variável se puder ser escrita na forma $ax^2 + bx + c = 0$, onde a, b e c são números reais conhecidos e chamados coeficientes, onde $a \neq 0$ e x é um número real desconhecido ou incógnita (também pode ser denominado variável).

As equações de 2º grau são também denominadas Equações Quadráticas.

Como exemplos, podemos escrever as equações na variável x:

1) $3x^2 - 7x + 2 = 0$ é uma equação de 2º grau na variável x, onde $a = 3$, $b = -7$, $c = 2$.
2) $-4y^2 + y - 5 = 0$ é equação de 2º grau em y, com $a = -4$, $b = 1$ e $c = -5$.
3) $x^2 + 11x = 0$ é equação de 2º grau em x, e $a = 1$, $b = 11$ e $c = 0$.
4) $4t^2 - 10 = 0$ é equação quadrática em t e $a = 4$, $b = -10$, e $c = 0$.
5) $-13x^2 = 0$ é equação de 2º grau em x, e $a = -13$, $b = 0$ e $c = 0$.

As equações que apresentem algum coeficiente nulo são chamadas incompletas, e este é o caso dos exemplos 3, e 5. No exemplo 3, a equação é incompleta em c, no 4 ela é incompleta em b, e no último exemplo, a equação de 2º grau é incompleta em b e em c.

Perceba que a equação de 2º grau não pode ser incompleta em "a", pois, se isto ocorrer, ela deixará de ser de 2º grau.

RESOLUÇÃO

Para resolvermos uma destas equações, recorremos à famosa fórmula de Báscara, já conhecida por você, e que se resume ao seguinte:

$ax^2 + bx + c = 0$, com a, b e c reais e $a \neq 0$, então: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Não faremos a demonstração da fórmula de Báscara, mas seria um bom exercício de Álgebra para você. Procure-a em algum livro de Matemática de 8ª série ou 9º ano do Ensino Fundamental.

EXEMPLOS

Resolva as equações em $\mathbb{R}$:

1) $3x^2 - 4x + 1 = 0$

Temos uma equação completa onde a =3, b = -4 e c = 1. Se utilizarmos a fórmula famosa, teremos:

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1}}{2 \cdot 3} = \frac{+4 \pm \sqrt{16-12}}{6} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{6} = \begin{cases} x' = \frac{6}{6} = 1 \\ x'' = \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \end{cases}.$$

Portanto, o conjunto Verdade procurado é: $V = \left\{\frac{1}{3}, 1\right\}$.

2) $u^2 + 5u - 14 = 0$

Esta também é uma equação completa na variável u cujos coeficientes são $a = 1$, $b = 5$ e $c = -14$, logo:

$$u = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-14)}}{2 \cdot 1} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 56}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{81}}{2} = \frac{-5 \pm 9}{2} = \begin{cases} u_1 = \frac{4}{2} = 2 \\ u_2 = -\frac{14}{2} = -7 \end{cases}$$

Portanto, $V = \{-7,2\}$

3) $4x^2 - 4x - 120 = 0$

Temos agora uma outra equação completa em x, cujos coeficientes são múltiplos de 4. Para simplificarmos nossos cálculos, podemos multiplicar 1º e 2º membros da equação por ¼, e teremos:

$\frac{1}{4} \cdot (4x^2 - 4x - 120) = \frac{1}{4} \cdot 0 \rightarrow x^2 - x - 30 = 0$, onde $a = 1$, $b = -1$ e $c = -30$.

Logo,

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-30)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 120}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{121}}{2} = \frac{1 \pm 11}{2} = \begin{cases} x' = \frac{12}{2} = 6 \\ x'' = -\frac{10}{2} = -5 \end{cases}$$

Conclusão: $V = \{-5,6\}$

OBSERVAÇÃO: A multiplicação dos dois lados da equação por um número real não nulo, como foi feito neste último exemplo, não é obrigatória. Sua finalidade é a de trabalharmos com uma nova equação com coeficientes menores, e isto diminui o nosso esforço para resolvê-la.

Veja também que o fato de a variável ser x ou y ou t ou qualquer outra letra, não altera a equação.

Para comprovar a primeira observação vamos resolver a equação do último exemplo sem multiplicar seus coeficientes, e você verá que, de fato, o conjunto Verdade permanece o mesmo:

A equação $4x^2 - 4x - 120 = 0$, como vimos, tem coeficientes $a = 4$, $b = -4$ e $c = -120$.

Então, $x = \frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot4\cdot(-120)}}{2\cdot4} = \frac{4\pm\sqrt{16+1920}}{8} = \frac{4\pm\sqrt{1936}}{8} = \frac{4\pm\sqrt{2^4\cdot11^2}}{8} = \frac{4\pm2^2\cdot11}{8} =$

$\frac{4\pm44}{8}\begin{cases} x' = \frac{48}{8} = 6 \\ x'' = -\frac{40}{8} = -5 \end{cases}$

Logo, $V = \{-5,6\}$

Portanto, dividir ou não os 2 membros da equação por um número diferente de zero para resolvê-la é uma decisão de quem vai efetuar o trabalho.

4) Resolver em $\mathbb{R}$: $-2y^2 + 3y + 2 = 0$

Esta equação apresenta $a = -2$, $b = 3$ e $c = 2$. Além disso, a variável é y.

Note que o coeficiente "a" desta equação é negativo. Também para simplificarmos os cálculos podemos, se quisermos, multiplicar seus dois membros por (-1), e obteremos :

$$(-1)\cdot(-2y^2 + 3y + 2) = (-1)\cdot 0 \rightarrow 2y^2 - 3y - 2 = 0$$

Logo, $y = \frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot2\cdot(-2)}}{2\cdot2} = \frac{3\pm\sqrt{9+16}}{4} = \frac{3\pm\sqrt{25}}{4} = \frac{3\pm5}{4} = \begin{cases} y' = 2 \\ y'' = -\frac{1}{2} \end{cases}$

Então: $V = \left\{-\frac{1}{2}, 2\right\}$

OBSERVAÇÃO: Multiplicar ou não por (-1) os membros da equação fica também a critério do aluno.

5) $(5 - 2m)x - 10m = 0$

Temos agora os coeficientes $a = 1$, $b = -(5 - 2m)$ e $c = -10m$, onde b e c têm valores que dependem de uma outra letra que será denominada parâmetro e que não será calculada. Assim:

$$x = \frac{-[-(5-2m)] \pm \sqrt{\{-[-(5-2m)]\}^2 - 4\cdot1\cdot(-10m)}}{2\cdot1} = \frac{+(5-2m) \pm \sqrt{(5-2m)^2 + 40m}}{2}$$

Veja que $(5 - 2m)^2$ é um produto notável que já anteriormente estudado:

$$x = \frac{5 - 2m \pm \sqrt{(25 - 20m + 4m^2) + 40m}}{2} = \frac{5 - 2m \pm \sqrt{25 + 20m + 40m^2}}{2} = \frac{5 - 2m \pm \sqrt{(5 + 2m)^2}}{2}$$

Você deve ter notado que o trinômio quadrado perfeito $25 + 20m + m^2$ e que foi fatorado.

$x = \frac{5-2m\pm(5+2m)}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{5-2m+5+2m}{2} = \frac{10}{2} = 5 \\ x_2 = \frac{5-2m-5-2m}{2} = -\frac{4m}{2} = -2m \end{cases}$, ou seja $V = \{-2m, 5\}$

6) $x^2 - 10\sqrt{3}x + 63 = 0$

Coeficientes: $a = 1$, $b = -10\sqrt{3}$, $c = 63$. Se aplicarmos a fórmula resolutiva, teremos:

$$x = \frac{-(-10\sqrt{3}) \pm \sqrt{\left(-10\sqrt{3}\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 63}}{2} = \frac{10\sqrt{3} \pm \sqrt{300 - 252}}{2} = \frac{10\sqrt{3} \pm \sqrt{48}}{2}$$

$x = \frac{10\sqrt{3}\pm\sqrt{2^4\cdot 3}}{2} = \frac{10\sqrt{3}\pm 2^2\sqrt{3}}{2} = \frac{10\sqrt{3}\pm 4\sqrt{3}}{2} = \begin{cases} x' = \frac{14\sqrt{3}}{2} = 7\sqrt{3} \\ x'' = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \end{cases}$, portanto $V = \left\{3\sqrt{3}, 7\sqrt{3}\right\}$

7) $2x^2 - 5x + 6 = 0$

Coeficientes: $a = 2$, $b = -5$ e $c = 6$.

$x = \frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot 2\cdot 6}}{2\cdot 2} = \frac{5\pm\sqrt{25-48}}{4} = \frac{5\pm\sqrt{-23}}{4}$. Você deve ter verificado que, ao resolvermos esta equação chegamos ao cálculo de uma raiz quadrada de (-23). Isto é um problema em $\mathbb{R}$, pois não existe número real que, elevado ao quadrado, nos forneça um resultado negativo, então dizemos que esta equação não possui raízes reais, e seu conjunto Verdade é o vazio. Então, neste caso, $V = \emptyset$.

8) $4x^2 + 6x = 0$

Vemos que esta equação é incompleta em c, pois a = 4, b = 6 e c = 0. Podemos inclusive multiplicar seus dois membros por $\frac{1}{2}$, e teremos a equação $2x^2 + 3x = 0$, onde $a = 2$, $b = 3$ e $c = 0$.

Então, $x = \frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot 2\cdot 0}}{2\cdot 2} = \frac{-3\pm\sqrt{9-0}}{4} = \frac{-3\pm\sqrt{9-0}}{4} = \frac{-3\pm 3}{4} = \begin{cases} x' = \frac{0}{4} = 0 \\ x'' = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2} \end{cases}$

Portanto, $V = \left\{-\frac{3}{2}, 0\right\}$

9) $9x^2 - 25 = 0$

Nova equação incompleta, porém agora em b, uma vez que $a = 9$, $b = 0$ e $c = -25$.

Assim, $x = \frac{0\pm\sqrt{0^2-4\cdot 9\cdot(-25)}}{2\cdot 9} = \frac{0\pm\sqrt{0+900}}{18} = \frac{0\pm\sqrt{900}}{18} = \frac{0\pm 30}{18} = \begin{cases} x_1 = \frac{30}{18} = \frac{5}{3} \\ x_2 = -\frac{30}{18} = -\frac{5}{3} \end{cases}$

Conclusão: $V = \left\{-\frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right\}$

10) $4x^2 = 0$

Finalmente, esta equação incompleta em b e em c, pois $a = 4$, e $b = c = 0$.

Podemos multiplicar seus dois membros por $\frac{1}{4}$ e teremos a equação $x^2 = 0$, e assim:

$$x=\frac{0\pm\sqrt{0^2-4\cdot1\cdot0}}{2\cdot1}=\frac{0\pm\sqrt{0}}{2}=\frac{0\pm0}{2}\rightarrow V=\{0\}$$

As equações incompletas podem também ser resolvidas se utilizarmos métodos particulares a cada uma, dependendo do seu tipo. Vejamos:

11) $16x^2-9=0\ (a=16, b=0\ e\ c=-9)$

Se isolarmos a variável, como se fosse uma equação de 1º grau, teremos:

$$16x^2=9\rightarrow x^2=\frac{9}{16}\rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{9}{16}}\rightarrow\begin{cases}x'=\frac{3}{4}\\x''=-\frac{3}{4}\end{cases}\rightarrow V=\left\{-\frac{3}{4},\frac{3}{4}\right\}$$

12) $16x^2-9x=0\ (a=16, b=-9\ e\ c=0)$

Podemos fatorar o primeiro membro se pusermos x em evidência:

$$16x^2-9x=0\rightarrow x\cdot(16x-9)=0\rightarrow\begin{cases}x=0\rightarrow x'=0\\16x-9=0\rightarrow 16x=9\rightarrow x=\frac{9}{16}\rightarrow x''=\frac{9}{16}\end{cases}$$

Logo, $V=\left\{0,\frac{9}{16}\right\}$

OBSERVAÇÃO:

A partir de agora, as equações de 2º grau incompletas poderão ser resolvidas por você pelo método que você preferir.

EXERCÍCIOS:

Resolva as seguintes equações no conjunto R dos números reais:

1) $x^2-7x+10=0$
2) $-3x^2+7x-2=0$
3) $4x^2-1=0$
4) $x^2+11x-12=0$
5) $-5x^2+10x=0$
6) $-5x^2+10=0$
7) $x^2-12x+36=0$
8) $-10x^2=0$
9) $x^2+\left(a-\sqrt{2}\right)x-a\sqrt{2}=0$
10) $2x^2-3\sqrt{3}x+3=0$
11) $x^2-7m\sqrt{5}x+30m^2=0$
12) $x^2-\left(2\sqrt{3}+3\sqrt{6}\right)x+18\sqrt{2}=0$
13) $\sqrt{5}x^2-7x+2\sqrt{5}=0$
14) $4\sqrt{7}x^2+8x=0$
15) $x^2-20\sqrt{5}x+500=0$
16) $-3x^2-27=0$
17) $11x^2=0$
18) $4x^2+3x+1=0$

RESPOSTAS:

1) $V=\{2,5\}$
2) $V=\left(\frac{1}{3},2\right)$
3) $V=\left\{\pm\frac{1}{2}\right\}$

4) $V = \{-12,1\}$

5) $V = \{0,2\}$

6) $V = \{\pm\sqrt{2}\}$

7) $V = \{6\}$

8) $V = \{0\}$

9) $V = \{-a, \sqrt{2}\}$

10) $V = \left\{\frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3}\right\}$

11) $V = \{\sqrt{5}m, 6\sqrt{5}m\}$

12) $V = \{2\sqrt{3}, 3\sqrt{6}\}$

13) $V = \left\{\frac{2\sqrt{5}}{5}, \sqrt{5}\right\}$

14) $V = \left\{0, \frac{2\sqrt{7}}{7}\right\}$

15) $V = \{10\sqrt{5}\}$

16) $V = \emptyset$

17) $V = \{0\}$

18) $V = \emptyset$

PROPRIEDADE:

A fórmula de Báscara, que utilizamos para a obtenção das raízes de equações de 2º grau, possui um radicando a que damos a denominação de Discriminante e usamos para ele o símbolo Δ.

Assim, poderíamos escrever que $x = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$, onde $\Delta = b^2 - 4ac$.

Por outro lado, você deve ter percebido que há equações de 2º grau que possuem duas raízes diferentes, há as que apresentam duas raízes iguais, e ainda aquelas cujas raízes não pertencem aos números reais, e estas condições em que elas se apresentam são decorrentes dos valores que o discriminante apresenta, conforme o seguinte quadro:

Existência das raízes de uma equação de 2º grau

$\Delta > 0 \Leftrightarrow \exists x_1 \neq x_2 \in R$ (Existem raízes reais diferentes)

$\Delta = 0 \Leftrightarrow \exists x_1 = x_2 \in R$ (Existem raízes reais iguais)

$\Delta < 0 \Leftrightarrow x_1 e..x_2 \notin R$ (As raízes não são números reais)

EXEMPLOS:

1) Verificar a existência das raízes reais das seguintes equações:

a) $3x^2 + 2x - 6 = 0$

Não estamos preocupados em calcular as raízes, mas apenas verificar a sua existência no conjunto $\mathbb{R}$. Então devemos apenas calcular o Discriminante e tomar conhecimento do seu sinal:

$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-6) = 4 + 72 = 76 > 0 \Leftrightarrow \exists x_1 \neq x_2 \in \mathbb{R}$. Em outras palavras, esta equação apresenta raízes reais diferentes.

b) $-4x^2 - 6 = 0$

Do mesmo modo, calculemos o Discriminante:

$\Delta = b^2 - 4ac = 0^2 - 4 \cdot (-4) \cdot (-6) = 0 - 96 = -96 < 0 \Leftrightarrow$ As raízes não são reais.

Você pode observar que, se multiplicarmos por (-1) ou por $(-\frac{1}{2})$ os dois membros desta equação, embora o valor do discriminante se altere, o seu sinal permanece o mesmo, e a conclusão a respeito da existência das raízes não se altera.

2) Obtenha o parâmetro m da equação $2x^2 - 6x + (1 - 2m) = 0$ para que suas raízes sejam reais e iguais.

De acordo com o quadro apresentado, se há raízes reais e iguais, então $\Delta = 0$ e, em consequência, $b^2 - 4ac = 0$, então $(-6)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (1 - 2m) = 0 \Rightarrow 36 - 8 + 16m = 0 \Rightarrow 16m = -28 \Rightarrow m = -\frac{7}{4}$.

EXERCÍCIOS

1) Verifique a existência das raízes das seguintes equações de 2º grau:

a) $3x^2 - 4x - 1 = 0$ b) $x^2 + 4 = 0$ c) $x^2 + 4x = 0$

d) $-x^2 + 10x - 25 = 0$ e) $5x^2 = 0$ f) $\frac{x^2}{5} - \frac{3x}{10} + 1 = 0$

g) $6x^2 + 10x - 18 = 0$ h) $\frac{4\sqrt{3}x^2}{3} - 5\sqrt{6}x + \frac{9\sqrt{3}}{8} = 0$

2) Obtenha o parâmetro para que a equação obedeça a condição especificada:

a) $3x^2 - 4x + p - 3 = 0$ tenha raízes reais e iguais;

b) $x^2 - 5x + 1 + 2m = 0$ tenha raízes reais e diferentes;

c) $(m + 2)x^2 + 6x + 3 = 0$ não admita raízes reais;

d) $2x^2 - (4p + 2)x + 2p^2 = 0$ tenha raízes reais.

RESPOSTAS

1) a) Há raízes reais diferentes ; b) Não possui raízes reais ; c) As raízes são reais e diferentes; d) As raízes são reais e iguais ; e) Raízes reais e iguais : f) Não tem raízes reais ; g) Raízes reais diferentes ; h) Raízes reais diferentes. 2) a) p = $\frac{13}{3}$; b) m < $\frac{21}{8}$; c) m > 1 ; d) p$\geq -\frac{1}{4}$.

PROPRIEDADES

As propriedades que estudaremos em seguida são as chamadas Relações entre os coeficientes e as raízes de uma equação quadrática que obteremos a seguir.

1ª Propriedade: Soma S das raízes

Dadas as raízes x_1 e x_2 da equação de 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, temos que:

$$S = x_1 + x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
$$= \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

2ª Propriedade : Média M das raízes

Como nas equações de 2º grau há duas raízes, a Média Aritmética entre elas é a metade de sua Soma, e teremos: $M = \frac{S}{2} = \frac{-\frac{b}{a}}{2} - \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{b}{2a}$.

3ª Propriedade: Produto P das raízes

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \cdot \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{\left(-b+\sqrt{b^2-4ac}\right) \cdot \left(-b-\sqrt{b^2-4ac}\right)}{2a \cdot 2a}$$

Note que o numerador é o produto notável $(a+b) \cdot (a-b)$ que, como você sabe, é igual a $a^2 - b^2$, então, teremos: $P = \frac{(-b)^2 - \left(\sqrt{b^2-4ac}\right)^2}{4a^2} = \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} = \frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$.

Em resumo, dada a equação quadrática $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$, são verdadeiras as seguintes relações entre seus coeficientes:

Soma das raízes: $S = -\frac{b}{a}$

Média das raízes: $M = -\frac{b}{2a}$

Produto das raízes: $P = \frac{c}{a}$

EXEMPLOS:

Obtenha Soma, Média e Produto das raízes das equações, sem calcular as raízes:

1) $3x^2 - 10x - 15 = 0$

$S = -\frac{b}{a} = -\frac{-10}{3} = \frac{10}{3}$; $M = -\frac{b}{2a} = -\frac{-10}{2 \cdot 3} = \frac{5}{3}$; $P = \frac{c}{a} = \frac{-15}{3} = -5$.

2) $-5x^2 - 3x + 10 = 0$

$S = -\frac{b}{a} = -\frac{-3}{-5} = -\frac{3}{5}$; $M = -\frac{b}{2a} = -\frac{-3}{2 \cdot (-5)} = -\frac{3}{10}$; $P = \frac{c}{a} = \frac{10}{-5} = -2$

3) Ache o parâmetro da equação $2x^2 + (3m-4)x + 1 = 0$ para que:

a) Uma das raízes seja -3.

Isto significa que $x = -3$, e este valor de x deverá ser substituído na equação . Ou seja: $2 \cdot (-3)^2 + (3m-4) \cdot (-3) + 1 - 4m = 0$ que passou a ser uma equação de 1º grau na variável m, e então: $2 \cdot 9 - 9m + 12 - 4m = 0 \rightarrow -13m + 18 + 12 = 0 \rightarrow -13m = -30 \rightarrow m = \frac{30}{13}$.

b) A Soma das raízes seja igual ao dobro de seu produto

$$S = 2P \rightarrow -\frac{b}{a} = 2 \cdot \frac{c}{a} \rightarrow -b = 2 \cdot c \rightarrow -(3m - 4) = 2 \cdot (1 - 4m) \rightarrow -3m + 4 = 2 - 8m$$

$$\rightarrow 5m = -2 \rightarrow m = -\frac{2}{5}$$

c) As raízes sejam opostas.

Se as raízes são opostas, então $x_1 = -x_2 \rightarrow x_1 + x_2 = 0 \rightarrow S = 0$.

Logo, $S = -\frac{b}{a} = 0 \rightarrow b = 0 \rightarrow 3m - 4 = 0 \rightarrow m = \frac{4}{3}$

d) As raízes sejam inversas

Neste caso, como $x_1 = \frac{1}{x_2}$, teremos $x_1 \cdot x_2 = 1 \rightarrow P = \frac{c}{a} = 1 \rightarrow \frac{1-4m}{2} = 1 \rightarrow 1 - 4m = 2$.

Então, $m = -\frac{1}{4}$.

e) O dobro do produto das raízes seja o triplo de sua soma

$$2 \cdot P = 3 \cdot S \rightarrow 2 \cdot \frac{c}{a} = 3.\left(-\frac{b}{a}\right) \rightarrow 2 \cdot c = -3 \cdot b \rightarrow 2 \cdot (1 - 4m) = -3 \cdot (3m - 4) \rightarrow 2 - 8m$$

$$= -9m + 12 \rightarrow -8m + 9m = -2 + 12 \rightarrow m = 10$$

EXERCÍCIOS

Seja a equação de 2º grau $4x^2 + (3p - 5)x - 1 + 2p = 0$. Obtenha o valor de p para que:

a) Suas raízes sejam inversas;

b) Uma das raízes seja $-\frac{2}{3}$;

c) As raízes sejam reais e iguais;

d) O produto das raízes seja -6;

e) A soma das raízes seja 12;

f) O dobro da Soma seja o triplo do P.

RESPOSTAS:

a) $p = 1$; b) impossível; c) $p = \frac{31 \pm 4\sqrt{37}}{9}$; d) $p = -\frac{23}{2}$; e) $p = -\frac{43}{3}$; f) $p = \frac{13}{12}$

PROPRIEDADE

Considere a equação $ax^2 + bx + c = 0$, quadrática e na variável x. Você já sabe que podemos multiplicar seus dois membros por um número diferente de zero que ela não se altera. Utilizemos tal propriedade e multipliquemos os dois membros da equação considerada por $\frac{1}{a}$, que é diferente de zero: $\frac{1}{a}(ax^2+bx+c)=\frac{1}{a}\cdot 0 \rightarrow \frac{ax^2}{a}+\frac{bx}{a}+\frac{c}{a}=\frac{0}{a} \rightarrow x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$.

Como $S=x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ e $P=x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$, a última forma da equação poderá ser assim escrita: $x^2-Sx+P=0$.

EXEMPLOS

1) Montar a equação de 2º grau cujas raízes são -2 e 9

Facilmente calculamos: $S=-2+9=7$, e $P=(-2)\cdot 9=-18$. Como vimos, a equação de 2º grau pode ser escrita na forma $x^2-Sx+P=0$, então aquela que procuramos é: $x^2-7x-18=0$.

2) Montar a equação quadrática de raízes $-\frac{3}{2}$ e $\frac{1}{4}$, e coeficientes inteiros.

$S=-\frac{3}{2}+\frac{1}{4}=-\frac{5}{4}$ e $P=\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\frac{1}{4}=-\frac{3}{8}$. Logo a equação é $x^2+\frac{5}{4}x-\frac{3}{8}=0$, porém ela não tem coeficientes inteiros. Para que isto ocorra, devemos multiplicar os dois membros por 8, mmc dos denominadores, é que não é igual a zero: $8\cdot\left(x^2+\frac{5}{4}x-\frac{3}{8}\right)=8\cdot 0 \rightarrow 8x^2+10x-3=0$, que é a solução do problema apresentado.

EXERCÍCIOS

Montar as equações de segundo grau de coeficientes inteiros e cujas raízes são iguais a :

a) 3 e 8
b) -7 e 2
c) -2 e 7
d) -3 e 3
e) 6
f) -5 e 0
g) $-2\sqrt{3}$ e $6\sqrt{3}$
h) $\frac{2}{5}$ e $\frac{5}{3}$
i) 4 e $\frac{1}{8}$
j) $-\frac{5}{6}$ e $\frac{3}{4}$

RESPOSTAS

a) $x^2-11x+24=0$
b) $x^2+5x-14=0$
c) $x^2-5x-14=0$
d) $x^2-9=0$
e) $x^2-12x+36=0$
f) $x^2+5x=0$
g) $x^2-4\sqrt{3}x-36=0$
h) $15x^2-31x+10=0$
i) $8x^2-33x+4=0$
j) $24x^2+2x-15=0$