

1. Os Elementos - a Geometria de Euclides

O contacto com a estrutura da obra monumental *Os Elementos* de Euclides é fundamental para constatar a sua importância no desenvolvimento e na história da Matemática.

Após a sua primeira versão impressa em Veneza em 1482, calcula-se em pelo menos mil o número de edições que foram tiradas. Talvez nenhum livro além da Bíblia tenha tido tantas edições. Além disso, nenhuma obra matemática teve relevância comparável a *Os Elementos*.

A insistência em colocar a sua máxima importância no campo da matemática, está no facto de que durante toda a Idade Média e particularmente no período em estudo – séculos XII e XIII – a utilização da Geometria Euclidiana no campo da prática construtiva é bastante diminuta, restringindo-se a algumas Proposições do Livro I, das quais não se conheciam as demonstrações.

A invocação de Euclides deve ser entendida neste campo como um emblema e uma aspiração, mais do que o testemunho de uma aplicação real. Muitos citavam ou lembravam Euclides como forma de garantir um aval científico e veracidade a procedimentos práticos de seu trabalho, que não tinham provas geométricas (Rabasa-Diaz, op.cit.,2000).

As conseqüências advindas desta situação serão abordadas adiante. Apesar disso, *Os Elementos* de Euclides é a mais antiga obra matemática grega a chegar até nós: o trabalho de organização e sistematização foi tão memorável, que todas as obras matemáticas anteriores foram descartadas.

O pouco que sabemos sobre a pessoa de Euclides é através de Proclus (411 - 485): “Este homem viveu no tempo de Ptolomeu I (que reinou no Egito de 306 AC até sua morte em 283 AC). Arquimedes que veio imediatamente após Ptolomeu I, faz menção a Euclides e conta que certa vez Ptolomeu I perguntou a Euclides se havia um caminho mais curto para a geometria do que *Os Elementos*, ao que Euclides refutou dizendo que “ não havia um caminho real para a geometria”.

A mesma história contada por Stobaeus, um escritor grego do século V AC sobre Alexandre, o grande e Menaechmus, aluno de Eudoxus e que provavelmente foi tutor do rei. Diz que Alexandre pede a Menaechmus um ensino conciso da geometria, mas ele replica: “Ó rei, através do país existem estradas reais e estradas para os cidadãos comuns, mas na geometria há somente uma estrada para todos”.

“Euclides é mais jovem que os alunos de Platão, mas mais velho que Erastosthenes e Arquimedes que eram contemporâneos”.

Este texto mostra que Proclus não tinha conhecimento correto do local de nascimento de Euclides, nem das datas de nascimento e morte. Podemos inferir através de Proclus que Euclides foi intermediário entre os primeiros alunos de Platão e Arquimedes. Platão morreu em 347 AC, Arquimedes viveu de 287 AC – 212 AC e Erastosthenes c.284 AC – 204 AC. Então, Euclides deve ter vivido em torno de 300 AC, o que é compatível com o reinado de Ptolomeu I (306 AC – 283 AC).

Atualmente, as datas mais concordes para o nascimento e morte de Euclides são 325 AC e 265 AC.

É muito provável que Euclides tenha recebido seu treinamento em matemática em Atenas, dos alunos da Academia de Platão e onde a maioria dos geômetras que poderiam ensiná-lo estava. Era também em Atenas onde os velhos escritores de elementos de geometria e outros matemáticos, cujos trabalhos alimentavam *Os Elementos* de Euclides, viviam e ensinavam.

Euclides não foi um Platônico. Proclus diz que ele foi da escola de Platão e estava muito perto de sua filosofia; na verdade isto era apenas uma tentativa dos Neo-Platônicos em conectar Euclides à sua filosofia, o que fica claro com a frase: “por alguma razão própria, a finalização dos *Elementos* é a construção das chamadas figuras Platônicas”.

É evidente com esta idéia o desejo de Proclus em inferir que Euclides foi um Platônico, porque seu *Elementos* finaliza (Livro XIII) com a investigação sobre os cinco sólidos regulares, embora a última passagem

denote seu esforço em mostrar que a construção dos cinco sólidos regulares era o fim e o objetivo com que a obra pretendia suprir a base para o estudo da geometria em geral .

Euclides ensinou e fundou uma escola em Alexandria. Uma estória contada por Stobaeus, acentua o espírito eminentemente teórico e investigativo de Euclides em oposição ao sentido prático. Assim que terminou de ensinar seu primeiro teorema para um aluno iniciante em geometria, este lhe perguntou: *mas o que eu vou ganhar aprendendo estas coisas?* Euclides chama seu escravo e lhe diz *dê-lhe três moedas, pois ele precisa ganhar alguma coisa com o que aprende.*

Alexandria apesar de localizada onde hoje é o Egito, foi uma cidade grega, como seu nome completo revelava: Alexandria perto do Egito. A cidade tornou-se a mais importante do mundo oriental após a morte de Alexandre (Museu e Biblioteca de Alexandria, dos quais Euclides foi membro) e assim permaneceu até o domínio da corte de Cleópatra pelos romanos.

Enquanto Roma crescia, Alexandria mantinha-se como o centro intelectual do Império, espalhando sua influência desde os tempos de Euclides (300 AC) até a sua tomada pelos árabes em 641.

Durante a Idade Média muitos tradutores e editores chamavam Euclides de *Euclides de Megara*. Este engano nasceu da confusão entre Euclides e o filósofo Euclides de Megara que viveu por volta de 400 AC. A primeira referência a Euclides como Euclides de Megara ocorre no século XIV com Theodorus Metochita (c. 1332) que chamou “Euclides de Megara, filósofo socrático, contemporâneo de Platão” como autor de tratados de geometria. O

equivoco permanece após a tradução e a edição impressa de Campanus feita em Veneza em 1482 (Figura 1), a de Bartolomeo Zamberto em Paris, 1516 (Figura 2), a de Tartaglia em Veneza, 1565, a de Candalla em Paris, 1566 e a de Billingsley em Londres, 1570 (Figura 3).

A mais importante tradução de *Os Elementos* para o latim é de Commandinus de Urbino (1509 – 1575) a quem pertence o crédito de colocar a matéria do primeiro tradutor sob suspeita e corrigir o erro a que as pessoas foram induzidas a acreditar que Euclides era o mesmo que o filósofo Euclides de Megara.

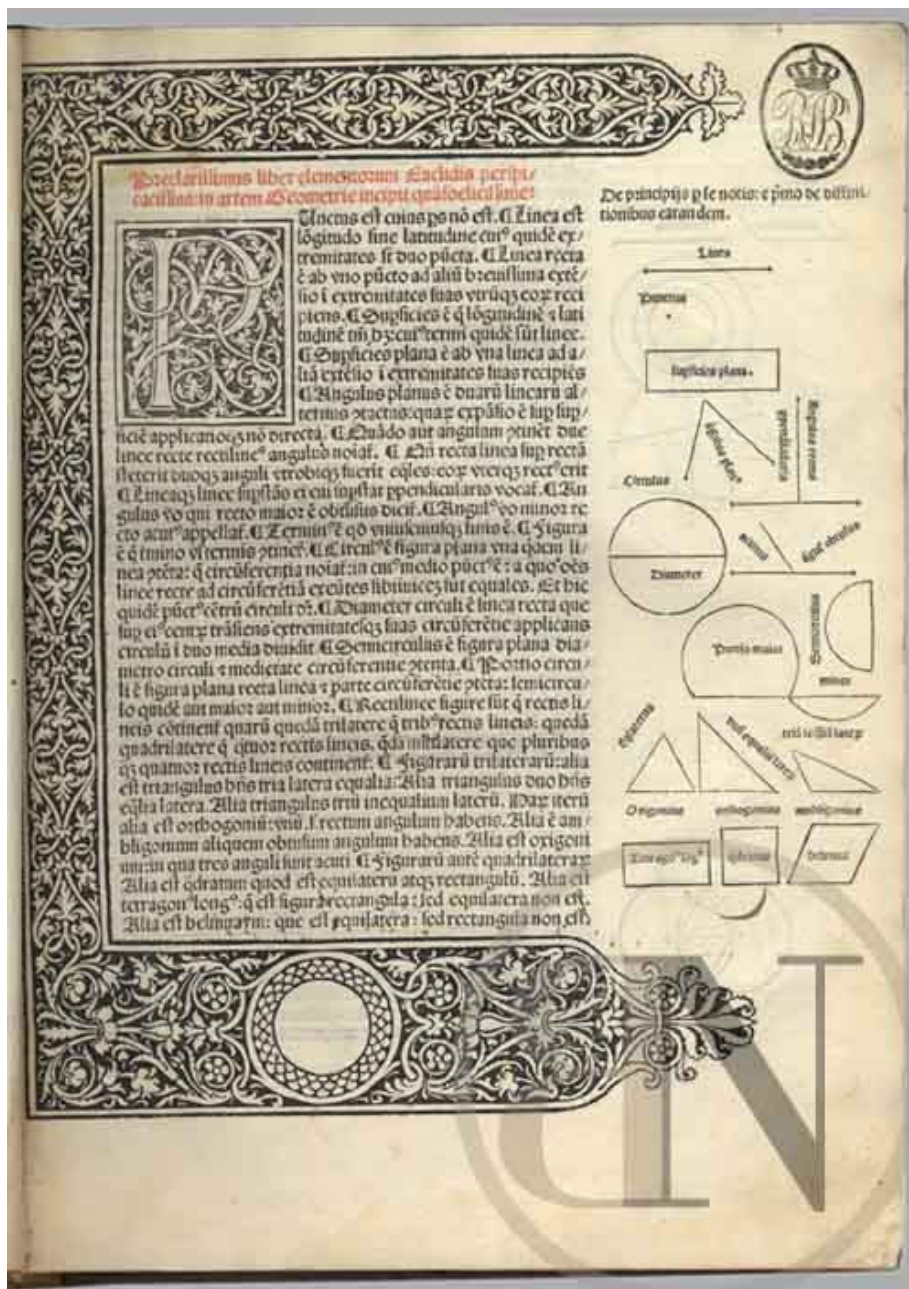


Figura 1 – Preclarissimus liber elementorum Euclidis perspicacissimi: in artem Geometrie incipit qua foelicissime / [coment.] Johannes Campanus. – Venetijs: Erhardus Ratdolt, 25 de maio de 1482. – [138] f. : il.;2º. (30cm) . Tradução latina Adelard of Bath – ilustrado com tarjas, figuras geométricas e capitais ornamentadas.

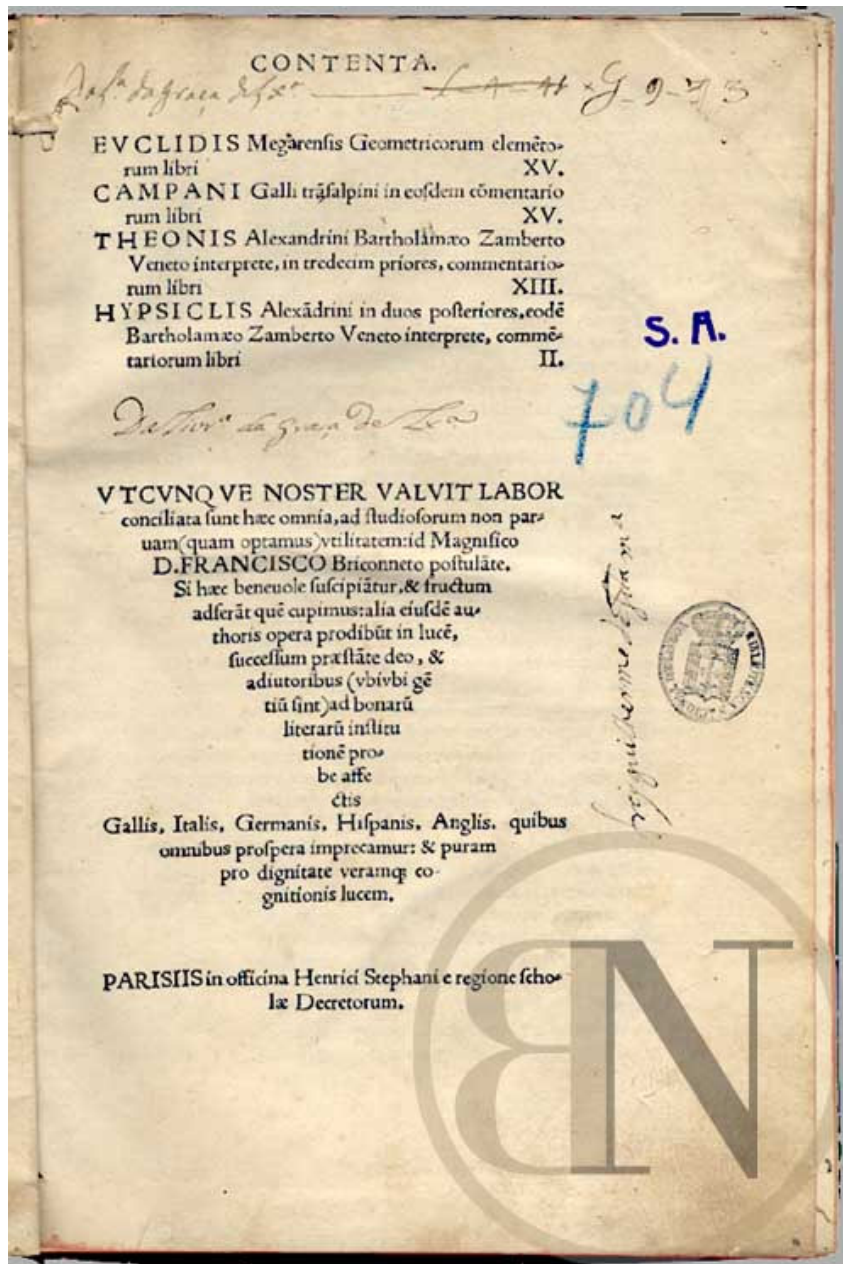


Figura 2 – CONTENTA. EVCLIDIS Megarensis Geometricorum elemetorum libri XV. CAMPANI Galli trāsalpini in eosdem cōmentariorum libri XV. theonis Alexandrini Bartholomæo Zamberto Veneto interprete, in tredecim priores, commetatorum libri XIII. Hypsiclis Alexādrini in duos posteriores, eode Bartholomæo Zamberto Veneto interprete, commetatorum libri II. PARISIIS: in officina Henrici Stephani, [ca.1516].-261f. : 2^o.(30 cm)



Figura 3 – Frontispício da primeira edição inglesa de Os Elementos de Euclides.

Londres, 1570. Nota-se ainda o equívoco com o nome de Euclides.

1.1 – Os Elementos de Euclides na Arábia

Para conhecermos um pouco mais a complexidade da obra de Euclides, vamos examinar alguns aspectos de sua trajetória pela Arábia, local de onde vieram os originais para as famosas traduções da Escola de Tradutores de Toledo na Península Ibérica. A primeira tradução da obra para o latim, feita por Adelard de Bath originou-se de fonte árabe.

O califa Al-Mansur (754-775) obteve do imperador bizantino uma cópia de Euclides entre os livros gregos e manuscritos guardados por Constantinopla. Seguindo o interesse pelas obras gregas da Antiguidade, outro califa, Al-Mamun (813-833) também conseguiu mais livros gregos. Esta coleta de material bibliográfico resultaria na existência da Casa da Sabedoria em Bagdá, cuja principal finalidade era traduzir obras do grego para o arábico. Foi uma antecessora da Escola de Tradutores de Toledo.

A versão dos *Elementos* de Al-Hajjaj é talvez o primeiro livro traduzido do grego para o arábico. O autor fez duas traduções: a primeira era conhecida como “Haruni” (para Harun) e a segunda, mais fiel, levou o nome de “Ma’muni” (para Al-Mamun). Seis livros desta segunda versão sobreviveram na Biblioteca de Leiden.

O prefácio da obra relata que no início do reinado de Harun (780-809), Al-Hajjaj recebeu a incumbência de traduzir os *Elementos* para o arábico. Depois, quando Al-Mamun tornou-se califa e interessou-se pelo estudo, Al-Hajjaj sentiu que poderia aumentar ainda mais este interesse, “se ele ilustrasse, explicasse e reduzisse o livro a dimensões menores”. Retirou coisas

que considerava supérfluas, consertou lapsos, corrigiu e removeu erros até reduzir o livro, porém sem alterar a substância para o uso de homens com habilidades e devotados ao ensino.

A obra foi traduzida depois por Ishaq Hunain (morto em 910), diretamente do grego, devido ao seu exímio domínio da língua grega. Uma revisão foi feita em comum acordo entre Ishaq e Thabit, morto em 901 (9 anos antes de Ishaq). Sabe-se que Thabit consultou também os originais gregos em sua revisão.

Isto fica expresso nas notas marginais na versão para o hebreu de *Os Elementos*, feita a partir do trabalho de Ishaq e atribuída a Moses Tibbon (c. 1244-1274) e Jakob Machir (morto depois de 1306).

Os inúmeros acréscimos e elisões na obra são demonstrados na observação de Thabit de que a proposição citada no Livro IX como de número 31, não foi por ele encontrada antes nos gregos, mas somente no arábico. Com isso, duas conclusões são possíveis: os árabes tinham interesse pela autenticidade do texto grego e que Thabit não alterou o número de proposições da tradução de Ishaq.

A forma arábica atualmente mais acessível de Euclides é a versão de At-Tusi (1201-1274). Esta edição apareceu em duas formas, uma maior e outra menor. Da maior encontra-se em Florença apenas seis livros; foi publicada em Roma em 1594 em arábico e por isso poucos puderam lê-lo.

A forma menor que está em 15 livros encontra-se em Berlim, Munique, Oxford, Museu Britânico, Paris e Istambul (antiga Constantinopla). Foi impressa em Constantinopla em 1801.

O trabalho de At-Tusi não é apenas uma tradução do texto de Euclides, mas um esforço de reescrever Euclides baseado em antigas traduções árabicas. Deste modo, parece ser como a versão latina dos *Elementos* de Campanus que foi publicada primeiro por Erhard Ratdolt em Veneza em 1482 – a primeira versão impressa de Euclides.

Campanus (século XIII) foi um matemático que usou da mesma liberdade de At-Tusi para editar Euclides. A relação entre a versão de Campanus e a de Adelard de Bath (c. 1120) foi que ambos usaram a mesma versão latina dos séculos X-XI. É certo que ambas as versões provêm de fontes árabicas, pela ocorrência de palavras árabes no texto.

A versão de Campanus não serve ao propósito de atestar a autenticidade das tradições grega e árabe, mas preserva alguns traços da fonte original como quando omite a adição feita por Theon ao Livro VI. É curioso que enquanto a versão de Campanus concorda com a de At-Tusi no número de proposições (teoremas) em todos os livros de Euclides, exceto no V e no IX, ele concorda com Abelard de Bath com as 34 proposições (teoremas) do Livro V (contra 25 em outras versões).

Isto confirma que Campanus e Adelard não são independentes e também levanta uma dúvida: ou as adições ao Livro V são do próprio Adelard ou ele usou uma versão árabe de Euclides desconhecida até hoje.

O Quadro 2 apresentado a seguir, de autoria do matemático Thomas L. Heath (1925) com as principais traduções feitas a partir de fontes árabes (Euclides árabe) e fontes gregas (Euclides grego) indica os acréscimos ou subtrações de proposições (teoremas) em cada um dos Livros de Euclides

(inclusive nos Livros XIV e XV que não são de sua autoria). Permite ainda um panorama sobre a complexidade e as dificuldades na transmissão do conhecimento clássico, nem sempre fiel aos originais.

Os autores que trabalharam sobre fontes gregas são: Gregory of St. Vincent que publicou em 1647 *Opus Geometricum Quadraturae circuli et sectionum conii*; August, E.F. que publicou em Berlim (1826-9) a última edição sobre o texto grego antes de Heiberg – Livros I ao XIII e Heiberg, J.L que publicou em Leipzig (1883-1916) os 9 volumes de *Euclid Opera Omnia*.

Euclides árabe				Euclides grego			
Número de Proposições (Teoremas) em cada Livro							
Livro	Ishaq	At-Tusi	Campanus	Livro	Gregory	August	Heiberg
I	48	48	48	I	48	48	48
II	14	14	14	II	14	14	14
III	36	36	36	III	37	37	37
IV	16	16	16	IV	16	16	16
V	25	25	34	V	25	25	25
VI	33	32	32	VI	33	33	33
VII	39	39	39	VII	41	41	39
VIII	27	25	25	VIII	27	27	27
IX	38	36	39	IX	36	36	36
X	109	107	107	X	117	116	115
XI	41	41	41	XI	40	40	39
XII	15	15	15	XII	18	18	18
XIII	21	18	18	XIII	18	18	18
XIV	10	10	18	XIV	7		
XV	6	6	13	XV	10		

Quadro 2 – Principais traduções feitas a partir de fontes árabes e gregas. Autoria de Thomas L. Heath (op.cit.,s.d.)

1.2 – A organização da Obra

Os livros que compõem *Os Elementos* são os mais antigos tratados gregos que chegaram até nós. Ao escrevê-los Euclides pretendia reunir num texto três grandes descobertas de seu passado recente: a teoria das proporções de Eudoxo, a teoria dos irracionais de Teeteto e a teoria dos cinco sólidos regulares (poliedros) de Platão.

A obra está dividida em treze livros (os Livros XIV e XV não são de autoria de Euclides), que ao contrário do senso comum, não tratam apenas de Geometria, mas têm seus assuntos assim distribuídos:

Livros I a IV – tratam de geometria plana elementar. São os Livros que mais nos interessam, pois são os únicos que comparecem com alguns ensinamentos nos desenhos e croquis dos séculos XII e XIII, especialmente nos cadernos de Villard de Honnecourt (c. 1225-1235). Parte de propriedades elementares de retas e ângulos que vão conduzir à congruência de triângulos, à igualdade de áreas, ao Teorema de Pitágoras (Livro I – proposição 47), à construção de um quadrado com área igual à de um retângulo dado, à secção áurea, ao círculo e aos polígonos regulares.

Livro V – apresenta a Teoria das Proporções de Eudoxo (408 – 355 AC) em sua forma puramente geométrica.

Livro VI – dedica-se aos problemas de semelhança de figuras planas. Retorna à secção áurea e ao Teorema de Pitágoras (proposições 30 e 31) como teoremas referentes a razões entre grandezas. A proposição 27 deste Livro contém o primeiro problema de máxima que chegou até nós, ou

seja, provou que o quadrado é de todos os retângulos de um dado perímetro, o que tem área máxima.

Livros VII a IX - são dedicados à Teoria dos Números: divisibilidade de inteiros, adição de séries geométricas, algumas propriedades dos números primos e a prova da irracionalidade do número pi (Teeteto 417-369 AC).

Livro X – é considerado o mais difícil entre todos os Livros. Contém a classificação geométrica de irracionais quadráticos e suas raízes.

Livros XI a XIII – tratam da geometria sólida e conduzem através dos ângulos sólidos aos volumes dos paralelepípedos, do prisma e da pirâmide, à esfera e ao que parece ter sido considerado o ponto mais alto da obra, à discussão dos cinco poliedros regulares (chamados platônicos) juntamente com a prova de que somente existem estes cinco poliedros regulares. Esta discussão é a causa de Proclus ter afirmado que Euclides era também platônico, pois a teoria dos cinco sólidos regulares ocupava um lugar importante na cosmologia de Platão.

Em algumas versões dos *Elementos*, aparecem os Livros XIV e XV, que não são de Euclides. O Livro XIV pode ter sido escrito por Hypsicles (viveu na segunda metade do século II AC) com base num tratado de Apolonius sobre cônicas e o Livro XV talvez tenha sido escrito por Isidoro de Mileto (que viveu por volta de 532), arquiteto da catedral de Santa Sofia em Constantinopla

Os Elementos de Euclides têm por isso uma importância ímpar na história da Matemática, pois não apresenta a Geometria como um

agrupamento de dados desconexos, mas como um sistema lógico. As definições, os axiomas ou postulados (que fixam a existência de entes fundamentais como o ponto, a reta e o plano) e as proposições (teoremas) não aparecem agrupados ao acaso, mas numa ordem perfeita. Cada proposição resulta das definições, axiomas e das próprias proposições anteriormente provadas, de acordo com uma demonstração rigorosa.

Euclides foi o primeiro a utilizar este método, chamado *axiomático*. Deste modo, seus *Elementos* constituem o primeiro e maior exemplo de um sistema lógico que se tornaria modelo almejado até hoje por outras ciências.

1.3 – O conteúdo do Livro I

É muito esclarecedor conhecer o conteúdo deste primeiro Livro, que trata da Geometria Plana. Parte de seu conteúdo irá fazer parte dos cadernos e compilações na forma de “segredos” (sem provas matemáticas) dos Mestres Construtores, ciosamente guardados pelas Corporações de Ofício.

Dada a complexidade de *Os Elementos*, obra que se revela mais inclinada à ciência matemática e, portanto de viéz teórico, percebemos que a utilização prática procurada pelos mestres construtores é bastante difícil e improvável dada a exigência de conhecimento matemático de nível não usual.

Os procedimentos práticos virão mais diretamente do fazer cotidiano dos agrimensores romanos (Balbus com *De Mensuris – Gromatic Veteres*) como abordaremos adiante.

Como a maioria dos treze livros, o Livro I começa com uma lista de Definições, sem qualquer comentário. A definição é como uma abreviação. O principal na arte de criar matemática é a formulação das definições apropriadas. Sócrates dizia que “o começo da sabedoria é a definição dos termos”.

Em seguida às Definições (em número de 23) aparecem os Postulados e as Noções Comuns ou Axiomas. Os Postulados (em número de 5) são proposições geométricas específicas. São leis que não receberão demonstrações, mas que figurarão como premissas básicas. Postular significa “pedir para aceitar”.

As Noções Comuns ou Axiomas (em número de 5) tratam de questões de caráter geral e não específicas da geometria. Os problemas procuram novas entidades geométricas a partir de um dado conjunto. A solução de um problema é chamada de construção.

As Proposições ou Teoremas (em número de 48) são novas leis que se procura demonstrar com o auxílio dos Postulados. Um Teorema também pode ser provado com Teoremas previamente provados, sendo a prova um argumento convincente.

Livro I

Definições

1. um ponto é aquilo que não tem partes.
2. uma linha é um comprimento sem largura.
3. os extremos de uma linha são pontos.

4. uma linha reta é uma linha traçada uniformemente com os pontos sobre si.
5. uma superfície é aquilo que só tem comprimento e largura.
6. os lados de uma superfície são linhas.
7. uma superfície plana é uma superfície traçada uniformemente com suas retas sobre si.
8. um ângulo plano é a inclinação, em relação uma com a outra, de duas retas de um plano que se cruzam entre si e não estão na mesma reta.
9. quando as linhas que contém o ângulo são retas, o ângulo é chamado retilíneo.
10. quando uma reta é colocada sobre outra reta de maneira que os ângulos adjacentes sejam iguais, cada um dos ângulos é chamado reto e a reta superposta diz-se perpendicular à primeira.
11. um ângulo obtuso é um ângulo maior que um ângulo reto.
12. um ângulo agudo é um ângulo menor que um ângulo reto.
13. uma fronteira é aquilo que é a extremidade de alguma coisa.
14. uma figura é tudo aquilo que fica delimitado por qualquer fronteira ou fronteiras.
15. um círculo é uma figura plana fechada por uma linha tal que todos os segmentos que sobre ela estejam e que passem por um ponto determinado do interior da figura sejam iguais entre si.
16. e o ponto é chamado centro do círculo.

17. o diâmetro do círculo é uma linha reta desenhada passando pelo centro e terminando em ambas as direções na circunferência do círculo e como uma linha reta, também bissecta o círculo.

18. o semicírculo é a figura contida pelo diâmetro e a circunferência é cortada por ele. O centro do semicírculo é o mesmo do círculo.

19. figuras retilíneas são aquelas delimitadas por linhas retas, figuras triláteras são contidas por três, quadriláteras são contidas por quatro e multiláteras são contidas por mais de quatro linhas retas.

20. nas figuras triláteras, o triângulo eqüilátero é aquele que tem os três lados iguais, um triângulo isósceles é aquele que tem dois de seus lados iguais e um triângulo escaleno é aquele que tem os três lados diferentes.

21. ainda nas figuras triláteras, um triângulo retângulo é aquele que tem um ângulo reto, um triângulo obtusângulo é aquele que tem um ângulo obtuso e um triângulo acutângulo é aquele que tem três ângulos agudos.

22. das figuras quadriláteras, o quadrado é aquele que tem os lados iguais e os ângulos retos; um oblongo (retângulo) é aquele que tem ângulos retos mas os lados não são iguais; o rombo (losango) é aquele que tem os lados iguais e os ângulos não retos e o rombóide (paralelogramo) é aquele que tem seus lados opostos e ângulos iguais a outro, mas não tem os lados iguais nem os ângulos retos. Chamemos outros quadriláteros que não tenham estas condicionantes de trapézio.

23. retas paralelas são linhas retas que estando no mesmo plano, prolongadas indefinidamente nos dois sentidos, não se cruzam.

Postulados

1. dados dois pontos, há um segmento de reta que os une.
2. um segmento de reta pode ser prolongado indefinidamente para construir uma reta.
3. dados um ponto qualquer e uma distancia qualquer, pode-se construir um círculo de centro naquele ponto e com raio igual à distancia dada.
4. todos os ângulos retos são iguais entre si.
5. se uma reta cortar duas outras retas de modo que a soma dos dois ângulos internos de um mesmo lado seja menor que dois ângulos retos, então as duas outras retas se cruzam, quando suficientemente prolongadas, do lado da primeira reta em que se acham os dois ângulos.

Noções Comuns ou Axiomas

1. duas coisas iguais a uma terceira são iguais entre si.
2. se parcelas iguais forem adicionadas a quantias iguais, os resultados continuarão sendo iguais.
3. se quantias iguais forem subtraídas das mesmas quantias, os restos serão iguais.
4. coisas que coincidem uma com a outra são iguais.
5. o todo é maior do que as partes.

Proposições (Teoremas)

A Proposição 1 é uma das mais conhecidas e divulgadas nos compêndios para uso prático. Nos cadernos de Villard de Honnecourt esta Proposição é ilustrada pelo desenho “mneumônico” dos flamingos (Figura 4).

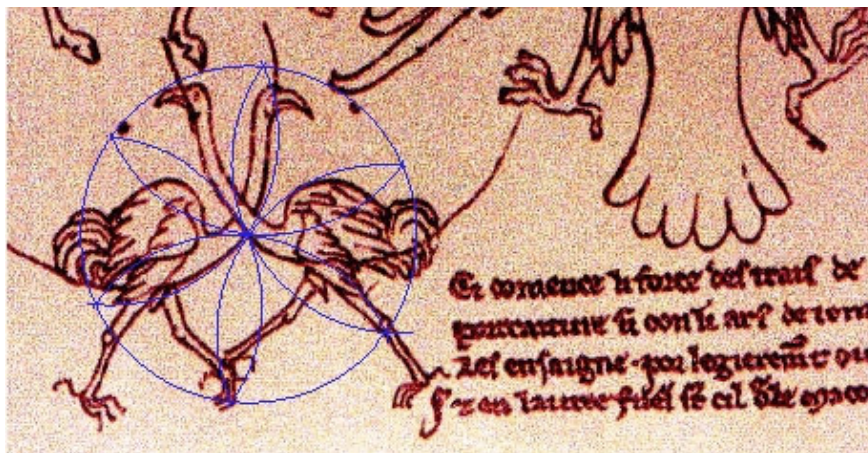


Figura 4 – Os Flamingos – Folha F 18v . Os pescoços lembram a obtenção de perpendiculares a uma linha. Roland Bechmann chama este desenho de *figura de memória*.

Extraído de Zenner, (op.cit.,2002).

1. sobre um segmento de reta construir um triângulo equilátero
2. sobre um ponto dado (usado como extremidade) desenhar uma linha reta igual à linha reta dada.
3. dadas duas linhas retas diferentes, determinar sobre a linha maior, um comprimento igual à menor.
4. se dois triângulos tem dois lados iguais respectivamente e tem os ângulos contidos por linhas retas iguais, eles terão também as bases iguais; os dois triângulos serão congruentes e os ângulos restantes serão iguais entre si.

5. num triângulo isósceles os ângulos da base são iguais e se linhas retas iguais forem traçadas, os ângulos resultantes também serão iguais.

6. se num triângulo dois ângulos são iguais ao de outro triângulo, os lados compreendidos entre os ângulos iguais são também iguais entre si

7. dadas duas linhas retas construídas sobre as extremidades de outra linha reta e que se encontram em um ponto, não se pode construir sobre a mesma linha reta (em suas extremidades) e do mesmo lado, duas outras linhas retas iguais às anteriores e que se encontrem em outro ponto.

8. se dois triângulos tem dois lados e bases respectivamente iguais, os ângulos contidos entre os lados iguais também serão iguais.

9. bissecar um ângulo retilíneo dado.

10. determinar o ponto médio de um segmento de reta dado.

11. desenhar uma perpendicular sobre uma reta passando por um ponto dado sobre ela.

12. por um ponto dado fora de uma reta dada, construir a perpendicular à reta passando pelo ponto.

13. se uma linha reta encontrar outra linha reta, ela poderá determinar ou dois ângulos retos ou ângulos cuja soma é igual a dois retos.

14. se numa linha reta e um ponto dado sobre ela traçarmos duas linhas do mesmo lado e por este ponto, elas formarão ângulos adjacentes cuja soma é igual a dois retos.

15. se duas linhas retas se cortam, elas produzem ângulos verticais iguais .

16. em qualquer triângulo, se um dos lados produzir um ângulo externo, ele é maior que o ângulo interno e igual à soma dos ângulos internos não adjacentes.

17. em qualquer triângulo a soma de dois ângulos é menor que dois ângulos retos

18. em qualquer triângulo o maior lado é oposto ao maior ângulo.

19. em qualquer triângulo o maior ângulo é oposto ao maior lado.

20. em qualquer triângulo a soma de dois lados é maior que o terceiro.

21. se sobre um dos lados de um triângulo, a partir de suas extremidades construirmos duas linhas retas que se encontram dentro do triângulo, as linhas retas construídas serão menores que os outros dois lados remanescentes, mas conterão um ângulo maior que o oposto ao lado escolhido.

22. para construir um triângulo com três segmentos de reta dados é necessário que o comprimento da soma de dois deles seja maior que o remanescente.

23. sobre uma linha reta e um ponto dado sobre ela construir o ângulo retilíneo igual a outro ângulo retilíneo dado.

24. se dois triângulos tem dois lados respectivamente iguais, mas tem um dos ângulos contidos pelas linhas retas iguais maior que o outro, a base deste será maior que o outro.

25. se dois triângulos tem lados respectivamente iguais, mas uma das bases maior que a outra, ele terá também o ângulo contido pelos lados iguais, maior.

26. se dois triângulos tem respectivamente dois ângulos iguais e um lado entre eles igual a outro lado, o ângulo e os lados remanescentes são iguais.

27. se uma linha reta cortar duas linhas retas formando ângulos alternadamente iguais, as linhas retas são paralelas.

28. se uma linha reta cortar duas linhas retas formando um ângulo externo igual ao interno no mesmo lado ou os ângulos interiores do mesmo lado iguais a dois ângulos retos, as linhas retas são paralelas.

29. uma linha reta corta linhas paralelas ela forma ângulos externos iguais, o ângulo externo igual ao interno e oposto pelo vértice e os ângulos internos do mesmo lado iguais a dois ângulos retos.

30. duas linhas retas paralelas entre si são paralelas a uma outra.

31. através de um ponto dado, desenhar uma linha reta paralela a uma linha reta dada.

32. em qualquer triângulo, se um dos lados produz um ângulo externo, ele é igual à soma dos ângulos que não lhe são adjacentes e a soma dos três ângulos internos do triângulo é igual a dois retos.

33. a junção de linhas paralelas e iguais (pelas suas extremidades) através de linhas retas, produz também linhas iguais e paralelas.

34. num paralelogramo, os lados opostos e os ângulos são iguais e o diâmetro bisseca as áreas.

35. paralelogramos iguais tem a mesma base sobre as mesmas paralelas.

36. paralelogramos que tem as mesmas bases sobre as mesmas paralelas são iguais.

37. triângulos iguais tem a mesma base e o terceiro vértice sobre a mesma paralela.

38. triângulos com bases iguais e o terceiro vértice na mesma paralela são iguais.

39. triângulos iguais com a mesma base e do mesmo lado tem o terceiro vértice na mesma paralela.

40. triângulos com bases iguais, do mesmo lado e com o terceiro vértice na mesma paralela, são iguais.

41. se o paralelogramo tem a mesma base que o triângulo e estão sobre as mesmas paralelas, o paralelogramo é o dobro do triângulo.

42. construir com um ângulo retilíneo dado, um paralelogramo igual ao triângulo dado.

43. em qualquer paralelogramo a diagonal divide-o em duas partes iguais.

44. sobre uma dada linha reta, construir com um ângulo dado um paralelogramo igual a um triângulo dado.

45. construir com um ângulo retilíneo dado, um paralelogramo igual a uma figura retilínea dada.

46. sobre uma linha reta, desenhar um quadrado.

47. num triângulo retângulo o quadrado do lado oposto ao ângulo reto é igual ao quadrado dos lados que formam o ângulo reto (Teorema de Pitágoras).

48. se num triângulo o quadrado de um dos lados é igual aos quadrados dos lados remanescentes, o ângulo contido pelos lados remanescentes é reto.

Com esta Proposição, encerra-se o Livro I. A Geometria Plana seguirá sendo exposta até o Livro IV, nesta mesma estrutura de Definições e Proposições.

A simples leitura destas Proposições revela-nos a essência de um raciocínio lógico-cumulativo, com algumas demonstrações (provas) que requerem um conhecimento matemático não encontrado facilmente no período medieval em estudo (séculos XII e XIII) e que por isso necessita de um tipo de transmissão oral para seu entendimento e aplicação prática pelos trabalhadores do canteiro.