

---

# O Método Axiomático

---

Curso de verão – UFSC, 01-05/02/2010

Jairo José da Silva

## Histórico

Período clássico:

a) Aristóteles: O *Primeiros Analíticos* (340 A.E.C.) constitui o primeiro estudo de lógica formal da história; a *silogística* aristotélica é um tratado sistemático, mas longe de exaustivo, de modos válidos de *inferência formal*, isto é, regras para se obter conclusões verdadeiras a partir de pressupostos verdadeiros, que não dependem, porém, do conteúdo material particular (o *quê* está sendo dito), mas apenas da forma lógica das asserções envolvidas (abstraídas de seu conteúdo material; i.e. independentemente da denotação de seus termos). *Deduções* válidas preservam a verdade, por oposição a *induições*, que preservam a falsidade – na dedução a verdade flui; na indução, reflui. Uma inferência é *logicamente ou formalmente válida* se a veracidade das premissas é condição *suficiente* (mas possivelmente não necessária) para a veracidade da conclusão, independentemente de se premissas e conclusão são ou não efetivamente verdadeiras. Por exemplo, a seguinte inferência é formalmente válida: se todos os homens são imortais, dado que Sócrates é homem, então Sócrates é imortal; apesar da premissa maior e a conclusão serem juízos falsos. Essa inferência envolve as regras de *especificação* e *modus ponens*. A premissa maior: para todo  $x$ , se  $x$  tem a propriedade  $Q$ , então  $x$  tem a propriedade  $P$ , nos dá, por especificação: se  $a$  tem a propriedade  $Q$ , então  $a$  tem a propriedade  $P$ . Como, pela premissa menor,  $a$  tem a propriedade  $Q$ , então, por *modus ponens*, tem-se a conclusão:  $a$  tem a propriedade  $P$  (na verdade, essas duas regras não são mencionadas por Aristóteles. Uma regra de inferência tipicamente aristotélica é o silogismo *Barbara*: se todo  $A$  é  $B$  e todo  $B$  é  $C$ , então todo  $A$  é  $C$ ). No *Segundos Analíticos* (330 A. E. C.) Aristóteles apresenta sua visão do conhecimento científico como um edifício construído sobre princípios necessários. Nesses dois livros estão os fundamentos do método axiomático em ciência.

b) Euclides (300 A.E.C.): Em *Os Elementos* há, como em Aristóteles, uma clara distinção entre princípios (postulados, verdades evidentes da ciência do espaço, e noções comuns,

verdades da razão) e teoremas (Euclides separa teoremas de problemas, que envolvem construções). Não há, porém, uma distinção entre termos primitivos, cujo sentido é óbvio, e termos derivados, cujo sentido é dado por definições (Euclides apresenta “definições” de todos os termos). Ao contrário de Aristóteles, as regras de inferência não são explicitadas; mas, como em Aristóteles, a linguagem não é formal. O sistema de Euclides é, ademais, uma axiomática material, i.e. que se refere a um contexto materialmente determinado – o espaço da percepção (veja as definições abaixo).

c) Aristarco de Samos (séc. III A.E.C.): *Sobre os tamanhos e distâncias do Sol e da Lua* é o primeiro tratado axiomático de Astronomia (Aristarco propôs um sistema heliocêntrico). Arquimedes (séc. II A.E.C.) aplica o método axiomático à Física (Estática e Hidrostática).

Idade Média: tradução e assimilação no Ocidente da tradição clássica, a partir do século XII E.C. a partir de traduções árabes e originais gregos (as traduções fluem da Espanha muçulmana – el Aldalus –, Toledo principalmente. A rapinagem promovida pelos cruzados em Constantinopla, em 1204, provavelmente aumenta o estoque de originais gregos na intelectualmente depauperada Europa latina).

a) Leonardo Fibonacci (Leonardo de Pisa): escreve o tratado axiomático de geometria *A prática da geometria*, 1220.

b) Jordano de Nemora (Jordanus Nemorarius): tratado axiomático de aritmética *Aritmética*, 1250.

c) Thomas Bradwardine: aplicação do método axiomático não apenas à matemática e à física, mas também à teologia. Em seu *Tratado sobre as proporções das velocidades e dos movimentos* (1328) o método é aplicado pela primeira vez à cinemática (exercendo influência em Galileu); em *Tratado sobre o contínuo* (1335) aplica o método ao estudo das grandezas contínuas em matemática e física; em *Sobre a causa de Deus* (1340) tentou dar forma axiomática às provas da existência e atributos de Deus (no que foi seguido por Descartes e Spinoza).

Idade Moderna:

a) axiomatização de teorias físicas: Nicolò Tartaglia (1537): *Ciência Nova* – mecânica; Guidobaldo del Monte (1577): *Livro das Mecânicas* – mecânica; Galileu (1638): terceira jornada dos *Discursos sobre duas novas ciências* (“Sobre o movimento local”) – fundamentos da cinemática.

b) axiomatização da metafísica: Descartes (1641): Respostas às segundas objeções às *Meditações Metafísicas* – apresentação axiomática da demonstração da existência de Deus; Benedictus (Baruch) Spinoza (1663): *Princípios da Filosofia de Descartes demonstrados de modo geométrico* – apresentação axiomática da filosofia de Descartes; *Ética, demonstrada de modo geométrico* (1677) – sistema axiomatizado de metafísica.

c) Blaise Pascal (1656): *Sobre o espírito geométrico* – elogio do método axiomático, introdução da idéia de *termos primitivos* e regras para definições (termos devem ser definidos a partir de termos mais simples), axiomas (devem ser evidentes) e demonstrações (proposições devem ser demonstradas a partir de proposições evidentes e outras já demonstradas). Arnold & Nicole: *Logique de Port Royal* (1662) – repete as regras de Pascal. Leibniz (circa 1670) – apresenta suas idéias seminais de *characteristica universalis*, uma linguagem simbólica, como a da aritmética, para a expressão dos juízos, de *calculus ratiocinatur*, um sistema de regras de cálculo, à maneira das regras do cálculo aritmético, para se raciocinar sem pensar, isto é, operando com símbolos segundo regras (d’après Raimond Lulio e Thomas Hobbes) e de *mathesis universalis*, uma ciência universal expressa na característica e desenvolvida segundo o cálculo regrado (lembre-se que o cálculo infinitesimal de Leibniz era justamente um cálculo regrado, e que ele foi um dos grandes criadores de notação matemática). Isaac Newton (1687): *Principia Mathematica* – axiomatização da ciência do movimento (ele apresenta seus três axiomas como “leis”: a primeira, o princípio de inércia de Galileu, é, na verdade, a definição de sistema inercial; a segunda é também uma definição, a definição mecânica de força; a terceira apenas é um axioma propriamente dito): os princípios que Newton elenca, no entanto, não são apresentados como proposições evidentes. *Optica* (1704) – tratamento axiomático da óptica; as demonstrações, porém, não tem caráter lógico, envolvendo observações e experimentos.

Idade Contemporânea: A axiomática, em sua vertente formal, alcança plena realização na segunda metade do século XIX; contribuíram para isso os desenvolvimentos que culminaram na criação da geometria não-Euclidiana (Lobachevski, 1829; Bolyai, 1832), lógica simbólica (Boole, Peirce, Schröder, Frege) e teoria de conjuntos (Cantor: teoria ingênua”; Zermelo: teoria axiomática).

a) geometria não-Euclidiana: Saccheri (1733): *Euclides livre de toda mácula* – tentativa de demonstrar o postulado das paralelas por redução ao absurdo. Gauss: trabalhos não-publicados de geometria não-euclidiana (hiperbólica). Geometria hiperbólica: Lobachevski,

1829; Bolyai, 1832. Beltrami: modelo euclidiano para partes da geometria hiperbólica; Klein (1871) e Poincaré (1881): modelos euclidianos para a geometria hiperbólica.

b) Grassmann (1844): *Teoria da extensão linear* – idéia de espaço vetorial n-dimensional. Riemann (1854): “Sobre as hipóteses que subjazem aos fundamentos da geometria” – geometria riemanniana de espaços abstratos n-dimensionais de curvatura variável. Helmholtz (1870): “Sobre a origem e o significado dos axiomas da geometria” – idéia de geometria como ciência puramente formal (não uma teoria do “espaço da intuição”), estabelecida sobre bases axiomáticas hipotéticas e passível de diferentes interpretações.

c) Pash (1882): *Lições de geometria moderna* – axiomatização da geometria projetiva. Hilbert (1899): *Fundamentos da geometria* – apresentação da geometria euclidiana (mas também não-euclidianas) como sistemas axiomáticos desprovidos de interpretação privilegiadas (demonstravelmente consistentes com relação à aritmética, dado que admitem interpretações aritméticas). Outras axiomatizações da geometria euclidiana: O. Veblen (1904), V. Huntington (1913).

d) Axiomatização da teoria dos grupos: Huntington e, independentemente, E. H. Moore (1902); geometria elíptica: G. Halsted (1904) e G. Hessenberg (1905); topologia de conjuntos de pontos: Hausdorff (1914); teoria das magnitudes contínuas: Huntington (1902). Por essa época a concepção formal do método axiomático estava plenamente estabelecida: sistemas de axiomas são, nas palavras de Hilbert, definições implícitas dos termos que neles ocorrem (ou, como prefiro, definições de estruturas ou famílias de estruturas formais). Segundo essa concepção, sistemas axiomáticos não expressam verdades materialmente determinadas, mas apenas relações formais, às vezes arbitrariamente estabelecidas, entre objetos não especificados.

d) Axiomatização da lógica: G. Boole (1847): *A análise matemática da lógica* – desenvolvendo a idéia leibniziana de uma característica (um sistema simbólico) e um calculus ratiocinator (um sistema de regras para manipulações de símbolos), Boole cria uma “aritmética para o pensamento” que permite realizar operações elementares de raciocínio como se fossem cálculos aritméticos. Boole entendia que esse cálculo, que hoje conhecemos como *álgebras de Boole*, poderia receber diferentes interpretações, sendo assim simplesmente a teoria de uma estrutura formal que subjaz a vários domínios materialmente distintos (ou, equivalentemente, a teoria desses domínios considerados exclusivamente em seus aspectos formais). G. Frege (1879): *A conceitografia: uma linguagem formal para o pensamento copiada da aritmética* – axiomatização da lógica; Frege apresenta um sistema axiomatizado de lógica de segunda ordem, contendo como subsistemas o cálculo proposicional clássico e a

lógica clássica de primeira ordem (ou cálculo elementar de predicados). O sistema de Frege é formalizado, mas tem interpretação determinada fixa (ou seja, é interpretado). Infelizmente, ele se revelou inconsistente, como demonstrou Russell (1902), com o famoso paradoxo que leva o seu nome.

e) Axiomatização da aritmética: G. Peano (1889 e, de modo aperfeiçoado, 1895) – axiomatização da aritmética elementar a partir dos trabalhos de R. Dedekind. Peano introduziu uma linguagem simbólica que se tornou bem mais popular que a de Frege.

f) Teoria de conjuntos: Cantor (1874-1897): teoria “ingênua” – paradoxos: Burali-Forti (maior ordinal), Cantor (maior cardinal ou conjunto universo), Russell (1902, inconsistência da noção lógica irrestrita de conjunto). Teorema da boa-ordem (todo conjunto pode ser bem-ordenado): na busca de uma demonstração desse resultado, Zermelo (“Investigações sobre os fundamentos da teoria de conjuntos”, 1908) encontra uma axiomatização (incompleta) da teoria de conjuntos. Essa axiomatização é completada por A. Fraenkel em 1922 (com o acréscimo do axioma da substituição): teoria ZF.

g) Axiomatização de teorias físicas: o sexto problema de Hilbert (1900). Axiomatização da mecânica: G. Hamel (1909): *Sobre os fundamentos da mecânica*. C. Carathéodory (1909): *Sobre os fundamentos da termodinâmica*.

h) Axiomatização da teoria das probabilidades: A. Kolmogorov (1933): *Conceitos fundamentais da teoria das probabilidades*.

Em 1931 K. Gödel demonstra seus célebres teoremas de incompletude: o primeiro mostra as limitações da formalização em matemática (a noção formal de demonstração não é *sempre* forte o suficiente para representar a noção matemática de verdade); o segundo mostra que a aritmética elementar (i.e. de primeira ordem) de Peano, teorias a ela equivalentes ou suas extensões não são capazes de demonstrar a sua própria consistência; ou melhor, não se pode representar nessas teorias uma demonstração de sua consistência (isso exige necessariamente teorias mais potentes).

### *Definições*

Def. 1: Uma *linguagem* é um conjunto de símbolos (o *alfabeto* da linguagem) com os quais são escritas as *expressões bem-formadas* da linguagem, isto é, seqüências *admissíveis* de símbolos do alfabeto. São expressões bem-formadas: 1) os *termos*, que denotam objetos do domínio (ou domínios) a que a linguagem se refere – termos podem ser constantes, quando denotam um objeto determinado do domínio de discurso, tais como “D. Pedro II”, “o

meu irmão”, “*seno*”, ou “ $1+1$ ”; ou variáveis, como, por exemplo, “ $2+x$ ” ou “ $y+1$ ”, quando envolvem variáveis individuais sobre o universo de objetos do domínio de discurso; termos variáveis denotam objetos determinados do domínio apenas quando as variáveis individuais que neles ocorrem recebem um valor determinado (uma *valoração*) – e 2) as *fórmulas*, expressões da linguagem que denotam asserções ou enunciados; fórmulas podem também funcionar como variáveis (*funções proposicionais*), quando envolvem variáveis individuais ou termos variáveis, como “ele é um crápula”, “ $x$  é maior que  $y$ ” ou “ $x+2 = 4$ ” (onde “ele”, “ $x$ ” e “ $y$ ” são variáveis individuais), e representam enunciados completos apenas quando as variáveis individuais que porventura nelas ocorram são valoradas; ou como constantes, em cujo caso chamam-se *sentenças*, sentenças são fórmulas em que não ocorrem variáveis de nenhuma espécie, e que, assim, admitem um valor de verdade (verdadeiro ou falso) determinado, por exemplo, “Pedro é um crápula”, “ $2$  é maior que  $3$ ”, ou “todo homem é mortal”. Ex.: as linguagens naturais (português, inglês, etc.) e as linguagens artificiais (linguagens matemáticas, linguagens de programação).

Linguagens podem ser *interpretadas* ou não. As linguagens naturais são sempre interpretadas, isto é, seqüências de símbolos do alfabeto da linguagem compõem unidades de significado. As menores dessas unidades são os morfemas; por exemplo, em Português: “árvore”, “-al”, “in-”, “eu”, “-ose” (“in-”, por exemplo, é um prefixo que denota negação). Unidades maiores de significado são composições de morfemas.

As linguagens matemáticas são também, em geral, interpretadas; quando fazemos geometria, por exemplo, os termos “reta”, “ponto”, “plano”, “círculo”, etc., têm significados precisos e determinados (eles denotam certos conceitos abstratos, instanciáveis por abstração e idealização). Porém, nós podemos abstrair qualquer linguagem matemática do seu conteúdo material, isto é, do significado determinado associado a seus símbolos e expressões, tornando-a numa linguagem *não-interpretada* a qual outros significados podem ser atribuídos. O mesmo pode ser feito com qualquer teoria matemática, esse processo é chamado de *abstração formal*. Por seu intermédio teorias matemáticas são depuradas de qualquer conteúdo material, tornando-se teorias não-interpretadas que, ao invés de descrever um domínio particular, descreve qualquer domínio que possa interpretá-la, mas apenas em seus aspectos formais, i.e. aqueles que todos os domínios que satisfazem, por interpretação, uma teoria compartilham.

Def. 2: Um conjunto é *decidível* se existe um algoritmo (uma regra, um procedimento mecânico, um programa de computador) para decidir se um objeto qualquer é ou não um elemento do conjunto. Ex.: o conjunto de números primos.

Def. 3: Uma linguagem é *formal* (ou *formalizada*) se o alfabeto e os conjuntos dos termos e das fórmulas, e, portanto, o conjunto das expressões bem-formadas da linguagem, são decidíveis (as linguagens naturais não são linguagens formais; não existe um procedimento de decisão que nos diga, por exemplo, se “cacumbu” é ou não uma expressão bem-formada do português). Uma linguagem formal, portanto, tem regras explícitas para a formação de suas expressões bem-formadas.

Def. 4: Uma *regra de dedução* (ou *derivação*) pode ser entendida como uma função entre asserções cujo valor para um *conjunto* de asserções (ditas as premissas da dedução) é *uma* outra asserção (dita a conclusão da dedução). Uma regra de dedução é *logicamente válida* se a conclusão tiver que necessariamente ser admitida como verdadeira sempre que as premissas forem assim admitidas (sejam as premissas ou a conclusão *de fato* verdadeiras ou não – como se vê, *a lógica tem caráter coercitivo no campo da razão*, nós podemos ser ilógicos, só não podemos ser ao mesmo tempo racionais). Exs. modus (ponendo) ponens: premissas A e  $A \rightarrow B$ , conclusão B; modus (tollendo) tollens: premissas  $\neg B$  e  $A \rightarrow B$ , conclusão  $\neg A$  (onde A e B denotam asserções quaisquer); generalização: premissa *x é tal e tal*, conclusão *para todo x que satisfaça a condição C, x é tal e tal*, desde que a justificação da premissa imponha à variável x a condição C.

Uma *dedução* (*derivação* ou *demonstração*) é uma sequência (suposta, em geral, finita) de asserções em que ocorrem apenas pressupostos e asserções obtidas de asserções anteriores na sequência por regras de dedução. Uma dedução é *logicamente válida* se utilizar apenas regras de derivação logicamente válidas (inferências indutivas não são logicamente válidas; induções na verdade preservam falsidade, não veracidade).

Note que a validade das regras de dedução lógica independe do significado das asserções envolvidas (nós não precisamos saber o significado das asserções A e B para assentir para a validade da regra de modus ponens; basta saber o significado do conectivo lógico  $\rightarrow$  que exprime a implicação material). Isto precisamente marca o caráter *formal* da lógica: a validade lógica depende apenas da *forma lógica*, não do conteúdo das asserções envolvidas (podemos “definir” a forma lógica de uma asserção como essa asserção abstraída de seu conteúdo material, i.e. o significado dos seus termos).

Def. 5: Uma *teoria* é simplesmente um conjunto de asserções de uma linguagem, nem necessariamente formal, nem necessariamente desprovida de interpretação, juntamente com um aparato dedutivo (nem sempre explicitado). Por exemplo, o conjunto de todas as sentenças de uma linguagem  $L$ , conveniente para descrever a estrutura do conjunto dos números reais, que são verdadeiras nesse conjunto (essa teoria é usualmente denotada por  $\text{Th}_L\mathbf{R}$  ou simplesmente  $\text{Th}\mathbf{R}$ , se a linguagem está subtendida). Denotamos por  $\text{Cn}A$ ,  $A \subseteq T$ , o conjunto das asserções deriváveis no sistema a partir de  $A$ , isto é, tomando as asserções de  $A$  como pressupostos. Se existe um conjunto *decidível*  $A_x \subseteq T$ , dito os *axiomas* de  $T$ , tal que  $\text{Cn}A_x = T$ ,  $T$  diz-se *axiomatizável* (se o conjunto  $A_x$  for *finito* dizemos que  $T$  é *finitamente axiomatizável*). Uma teoria que já vem provida de um conjunto decidível de axiomas é dita *axiomatizada* (*finitamente axiomatizada* se esse conjunto for finito).

O aparato dedutivo subjacente à uma teoria é constituído por um conjunto de axiomas lógicos e por regras de dedução (há várias lógicas possíveis, cada uma com seu conjunto de axiomas e suas regras de derivação). Regras e axiomas não são, em geral, completamente explicitados, mas são, em princípio, explicitáveis. Os axiomas lógicos são asserções *formalmente* (ou *logicamente*) *verdadeiras*; isto é, verdadeiras em todas as interpretações ou reinterpretações possíveis da linguagem em que são expressos. Asserções desse tipo são às vezes chamadas de *analíticas*, verdadeiras em todos os contextos possíveis – ou “mundos possíveis”, numa expressão atribuída a Leibniz, que ele, porém, nunca formulou –, ou ainda, verdadeiras em virtude da forma, não do conteúdo. Por exemplo, se  $A$  e  $B$  denotam asserções quaisquer, então  $A \rightarrow (B \rightarrow A)$  denota um axioma; note que essa asserção é verdadeira independentemente do significado de  $A$  ou  $B$ , ou seja, é formalmente verdadeira. Uma nota de cuidado, porém: a verdade incondicional desse axioma depende da interpretação que atribuímos ao conectivo denotado por “ $\rightarrow$ ”, que expressa o condicional “se...então”; se atribuirmos a esse conectivo um outro significado, é possível que essa asserção perca o seu caráter analítico. Isso ocorre em particular com a negação. A asserção  $\neg\neg A \rightarrow A$ , ou seja, negar duas vezes implica afirmar, só é analítica na interpretação “clássica” da negação; na interpretação intuicionista essa asserção nem sempre é verdadeira. Em suma, a veracidade, e, portanto, a analiticidade de asserções depende da interpretação dos símbolos lógicos da linguagem.

As deduções num sistema axiomático podem admitir como pressupostos tanto axiomas lógicos quanto axiomas do sistema. Um teorema do sistema é a última asserção de uma derivação (que é a demonstração desse teorema). Podemos também, em deduções, usar



teoremas já demonstrados; eles não têm, entretanto, caráter de pressupostos, uma vez que podem ser justificados nas demonstrações em que ocorrem (basta, nas demonstrações em que uma asserção já demonstrada aparece, colocar antes dela a sua demonstração, e ela ficará assim justificada).

Def. 6: Um sistema axiomático (ou teoria axiomática) é *formal* (ou *formalizado*) se suas asserções forem expressas numa linguagem formal e sua lógica subjacente for uma *lógica formal*, isto é, suas regras de inferência forem explicitamente dadas e formalmente válidas e, ademais, o seu conjunto de axiomas lógicos for recursivo. Isso implica que o conjunto das deduções no sistema é decidível; ou seja, há um algoritmo que decide se uma sequência qualquer dada de fórmulas da linguagem é uma dedução válida no sistema. Note que os teoremas de um sistema axiomático formal *não* constituem necessariamente um conjunto decidível (se isso fosse verdade, os matemáticos poderiam, em princípio, ser substituídos por computadores). O conjunto de teoremas de uma teoria axiomática formal, entretanto, é sempre *semi-decidível*, ou *recursivamente enumerável*, i.e. nós temos um algoritmo para enumerar os teoremas da teoria. Em outras palavras, existe um “oráculo” que responde “sim” à pergunta “A é um teorema do sistema?” se a sentença A, expressa na linguagem da teoria, for, de fato, um teorema do sistema, mas que não dá nenhuma resposta se A não for um teorema do sistema. Note que se um conjunto e seu complemento são semi-decidíveis, então o conjunto é decidível.

Eis como podemos efetivamente enumerar teoremas: escreva todas as sequências de símbolos do alfabeto que tenham comprimento igual a 1 (há apenas um conjunto finito delas, se o alfabeto for finito), percorra esse conjunto e selecione as expressões bem-formadas; repita o procedimento para sequências de comprimento igual a 2; e assim por diante. Isso nos dá uma enumeração efetiva das expressões bem-formadas da linguagem, seja  $\{F_n\}$  essa sequência. Agora, uma dedução é um subconjunto *finito* de elementos dessa sequência, e há um procedimento algorítmico que enumera subsequências finitas de uma sequência enumerável; resta apenas percorrer essa enumeração, selecionar as subsequências que são deduções e tomar a expressão bem-formada que comparece em último lugar em cada uma delas. Note que esse procedimento requer que os conjuntos das expressões bem-formadas e das deduções sejam decidíveis.

Def. 7: Um sistema axiomático é *não-interpretado* se suas asserções são expressas em linguagem não-interpretada. Um sistema pode ser não-interpretado sem ser formal (e.g. a geometria axiomatizada por Hilbert), e vice-versa, se ele é visto como teoria de um domínio particular (e.g. a aritmética axiomatizada por Frege). Nas aplicações contemporâneas do

método axiomático prefere-se, no entanto, axiomatizações simultaneamente formais e não-interpretadas.

*Exemplo de linguagens formais não-interpretadas: as linguagens de primeira ordem*

Uma linguagem não-interpretada é essencialmente um conjunto de símbolos, com os quais podemos denotar e descrever, mediante interpretações, não importa o que nos interessa denotar e descrever: objetos e suas propriedades, funções e relações entre objetos e fatos envolvendo isso tudo. Linguagens não-interpretadas admitem diferentes interpretações; isto é, podemos nos referir a diferentes domínios usando a mesma linguagem (nesse caso esses domínios dizem-se de *mesma assinatura*). Um exemplo de linguagens não-interpretadas formais são as chamadas *linguagens de primeira ordem*. Essas linguagens admitem os seguintes símbolos: *símbolos lógicos*, que são sempre interpretados do mesmo modo; entre eles destacam-se os *conectivos* (que conectam fórmulas originando novas fórmulas), tais como a disjunção *ou* (denotada por  $\vee$ , do latim *vel*), a conjunção *e* ( $\wedge$ , o  $\vee$  invertido), a implicação material *se ..., então ...* (geralmente denotada por  $\rightarrow$ ), a negação *não é o caso que* ( $\neg$ ) e a equivalência material *se, e somente se* ( $\leftrightarrow$ ). São também lógicos os símbolos chamados de *quantificadores*, que denotam generalidade, como o quantificador universal *para todo* ( $\forall$ , o “A” inicial do alemão “alles” invertido) e o quantificador existencial *existe* ( $\exists$ , o “E” inicial de “es gibt” invertido). Esses símbolos ocorrem tipicamente em asserções do tipo “todo elemento x tem a propriedade R” (em símbolos:  $\forall x (Rx)$ ) ou “existe um elemento x que tem a propriedade R” ( $\exists x (Rx)$ ). O “x” que aparece nessas asserções (ou fórmulas) denota um elemento arbitrário do domínio de discurso e é chamado de *símbolo de variável* (nesses exemplos o símbolo de variável “x” ocorre *ligado*, isto é, sob o escopo de quantificador; em caso contrário, como na fórmula  $Rx$  – “o elemento x tem a propriedade R” – o símbolo de variável ocorre *livre*. Note que se um símbolo de variável ocorre livre em uma fórmula, ela não tem um valor de verdade – verdadeira ou falsa – determinado em qualquer interpretação para a linguagem, independentemente de uma atribuição de referente para o símbolo de variável que ocorre livre).

Os símbolos de variáveis estão entre os *símbolos não-lógicos*, que admitem diferentes interpretações. Além dos símbolos de variáveis a linguagem pode conter, mas não necessariamente, outros símbolos não-lógicos, os *símbolos de constantes*, que denotam elementos determinados do domínio de discurso (que podem, no entanto, variar com o domínio), os *símbolos de funções* (que denotam funções determinadas do domínio) e os

*símbolos de relações* (que denotam relações definidas no domínio). Um símbolo lógico que ocorre com frequência é o *símbolo de identidade* = (usado apenas para denotar que duas expressões que se referem a objetos do domínio, os *termos da linguagem* – símbolos de variáveis ou de constantes, ou expressões mais complexas envolvendo esses símbolos e símbolos de funções, como “ $2 + x$ ” – e indica que esses termos denotam o *mesmo* objeto, por exemplo:  $2 + x = x + 2$ ). Podem ocorrer também *símbolos sem interpretação*, como os *parênteses*, usados apenas para facilitar a leitura da fórmula, mas eles não são essenciais (a chamada notação polonesa prescinde desses símbolos de pontuação).

As linguagens de primeira ordem são as mais comuns como meios de expressão da matemática formal. A característica dessas linguagens é que seus símbolos de variáveis só denotam objetos do domínio (mesmo que possa haver símbolos de relações e de funções, eles não funcionam como variáveis). Linguagens em que há símbolos de variáveis para funções, relações ou conjuntos de objetos do domínio são chamadas de linguagens de *segunda ordem* (há, em princípio, linguagens de qualquer ordem superior). Há também linguagens infinitárias, que admitem fórmulas de comprimento infinito, e linguagens com outros tipos de quantificadores (tais como, *existem infinitos x, para a maioria dos x*, etc.), além de linguagens modais, enriquecidas com operadores sentenciais, tais como os operadores “*é necessário que*” ou “*é possível que*”. Muitas teorias matemáticas, porém, podem ser formalizadas em primeira ordem (teoria de conjuntos, teorias algébricas – de grupos, corpos, etc. – teorias geométricas) ou segunda ordem (aritmética). Mas mesmo as teorias que exigem linguagens superiores, como a aritmética, admitem versões elementares, isto é, de primeira ordem.

#### *Interpretações de linguagens de primeira ordem*

Uma *interpretação* de uma linguagem de primeira ordem é uma atribuição de significado para os seus símbolos não-lógicos da linguagem. Em primeiro lugar, uma interpretação fixa um *universo* de discurso ou *domínio* de variação para os símbolos de variáveis. Nesse domínio, os símbolos não-lógicos que a linguagem porventura tiver são interpretados: elementos fixos do domínio interpretam os símbolos de constantes, funções e relações definidas no domínio interpretam, respectivamente, eventuais símbolos de funções e relações da linguagem, e assim por diante. Expressões da linguagem em que símbolos de variáveis só ocorrem ligados (i.e. sob o escopo de algum quantificador), as chamadas *sentenças*, têm um valor de verdade determinado numa dada interpretação. Por exemplo, a sentença  $\exists x (x < 0)$  é

verdadeira se o universo for, por exemplo, o conjunto dos números inteiros, o símbolo de constante 0 denotar o número 0 e o símbolo de relação  $<$  denotar a relação “estritamente menor que”, já que existe um número inteiro estritamente menor que 0. Por outro lado, se mudarmos o domínio pelo conjunto dos inteiros não-negativos, e mantivermos inalterada a interpretação dos símbolos não-lógicos, a sentença se torna falsa. Fórmulas que contém variáveis livres, como “ $x < 0$ ” não tem um valor de verdade determinado em uma dada interpretação, a menos que fixemos um valor para os símbolos de variáveis que ocorrem livres na fórmula. As funções do conjunto de símbolos de variáveis da linguagem no universo são chamadas de *valorações*. Por exemplo, se  $A(x)$  denota a fórmula  $(x < 0)$ ,  $\mathbf{I}$  a primeira interpretação acima e  $v$  a valoração em que  $x$  recebe o valor -1 (irrespective dos valores que os outros símbolos de variáveis recebem) então  $A$  é verdadeira em  $\mathbf{I}$  com a valoração  $v$ , em símbolos:  $\mathbf{I} \models A(x)(v)$  ou  $\mathbf{I}(A(x))(v) = \mathbf{T}$ , onde  $\mathbf{T}$  denota o verdadeiro. Sentenças expressam propriedades formais ou estruturais que os domínios estruturados que interpretam as linguagens em que são expressas podem ou não possuir. Se eles as possuem, as sentenças são verdadeiras nessas interpretações; se não, são falsas. Uma interpretação para  $L$ , a linguagem de uma teoria  $T$ , que torna todas as sentenças de  $T$  verdadeiras é um *modelo* de  $T$ .

*Axiomatizar* uma teoria, como vimos, é encontrar um conjunto decidível de axiomas suficientes para a derivação de todas as asserções da teoria. *Formalizar* uma teoria é axiomatizá-la num contexto formal definido, como uma teoria axiomática formal. Isso tem várias vantagens: 1) torná-la mais clara e precisa; 2) tornar explícitos os seus fundamentos ou pressupostos; 3) tornar possível a verificação mecânica – i.e. algorítmica – de pretensas demonstrações na teoria; 4) explicitar o seu arcabouço formal e a estrutura comum a todos os modelos da teoria – isso pode possibilitar a investigação de propriedades de um modelo por intermédio da investigação de outros. Por exemplo, como a teoria axiomática formal dos corpos algebricamente fechados de característica 0 tem a propriedade que de ser *completa*, i.e. se uma sentença da linguagem da teoria é verdadeira em um modelo é verdadeira em todos (sendo, portanto, logicamente derivável dos axiomas da teoria, uma vez que a lógica de primeira ordem é completa – i.e. a noção de validade e teorema são extensionalmente equivalentes), podemos demonstrar fatos sobre *qualquer* corpo algebricamente fechado de característica 0 demonstrando-os para o corpo dos números complexos. Podemos, para tanto, usar qualquer extensão da teoria que seja verdadeira nesse corpo, mesmo que esse recurso não esteja disponível em outros corpos algebricamente fechados de característica 0. 5)

possibilitar investigações de natureza metamatemática: a teoria é consistente, completa, categórica? Como são seus modelos, há algum especial? A forma lógica dos axiomas de uma teoria pode, em particular, nos dizer algo sobre seus modelos; por exemplo, que subestruturas ou extensões de modelos também são modelos, que uniões de cadeias de modelos também são modelos, etc.; 6) possibilitar o estudo de relações lógicas entre teorias (por exemplo, a teoria  $T$  é *extensão conservativa* da teoria  $T'$  – i.e. apesar da linguagem ou axiomas de  $T$  estenderem a linguagem ou os axiomas de  $T'$ , aquela não contém mais asserções da linguagem de  $T'$  que esta –,  $T$  é *equiconsistente* com  $T'$ , etc.); 7) possibilitar a demonstração metateórica de resultados de independência (podemos, por exemplo, mostrar que a hipótese do contínuo ou o axioma da escolha são independentes da teoria axiomática formalizada dos conjuntos ZF. Isso nos mostra, entre outras coisas, que nossa concepção de conjunto, que a teoria axiomática ZF explicita, é incompleta; o que coloca um problema de natureza filosófica: quais critérios devem nortear uma extensão da teoria, suficiente ao menos para decidir sobre asserções sabidamente independentes?)

#### *Propriedades de teorias axiomáticas formalizadas*

1) consistência:  $T$  é uma teoria *consistente* se não pudermos derivar a partir de  $T$ , na lógica subjacente a  $T$ , nenhum par de fórmulas contraditórias ( $A$  e  $\neg A$ ) da linguagem de  $T$ . Ou, equivalentemente, se existe pelo menos uma fórmula da linguagem de  $T$  que não pode ser derivada de  $T$ . De fato: se  $A$  e  $\neg A$  são deriváveis de  $T$ , como  $(A \rightarrow (\neg A \rightarrow B))$ ,  $B$  fórmula qualquer, é uma tautologia, i.e. uma fórmula verdadeira em toda interpretação da linguagem, para toda valoração, sendo por isso um axioma lógico, por duas aplicações de modus ponens derivamos  $B$ . A recíproca é evidente. Se uma teoria tem pelo menos um modelo, ela é obviamente consistente (pois, contrariamente, duas fórmulas contraditórias teriam que ser verdadeiras nesse modelo); a recíproca, porém, nem sempre vale: há teorias consistentes que não têm modelo (por exemplo, como  $P_2$  é uma teoria sintaticamente incompleta, existe uma sentença  $A$  tal que as teorias  $P_2 + \neg A$  e  $P_2 + A$  são ambas consistentes, mas como todos os modelos de  $P_2$  satisfazem exatamente as mesmas sentenças, pois  $P_2$  é uma teoria categórica, uma delas não pode ter modelo, vide abaixo). No entanto, se  $T$  é uma teoria consistente de *primeira ordem*, então  $T$  tem necessariamente um modelo (isso é uma consequência da completude da lógica de primeira ordem, segundo o qual toda fórmula válida de uma linguagem de primeira ordem – fórmula verdadeira em toda interpretação da linguagem, para

toda valoração de variáveis – pode ser demonstrada em lógica de primeira ordem. A lógica de segunda ordem, por outro lado, não é completa).

2) categoricidade:  $T$  é uma teoria *categorica* se todos os modelos de  $T$  são isomorfos. Por exemplo, a teoria cujo único axioma é  $\forall x \forall y (x=y)$  é categorica; seus modelos são os conjuntos unitários, todos isomorfos entre si (nesta linguagem desprovida de símbolos não-lógicos isomorfia significa simplesmente equinumerosidade, i.e. o mesmo número de elementos). Categoricidade é uma condição que a maior parte das teorias não satisfaz (o teorema de Lowenheim-Skolem, por exemplo, diz que teorias de primeira ordem que só admitem modelos infinitos tem modelos com *qualquer* cardinalidade infinita). Por isso, uma condição mais razoável é a de categoricidade em determinada potência: se  $\kappa$  é um número cardinal qualquer,  $T$  é  $\kappa$ -*categorica* se todos os modelos de cardinalidade  $\kappa$  são isomorfos. Por exemplo, a teoria de primeira ordem cujos modelos são as ordens lineares densas sem pontos extremos (essa teoria é finitamente axiomatizada) é  $\aleph_0$ -categorica (i.e. categorica em cardinalidade enumerável): todo os seus modelos enumeráveis são isomorfos ao conjunto ordenado dos números racionais; mas a teoria admite também modelos não enumeráveis, por exemplo, o conjunto ordenado dos números reais. A teoria cujos modelos são os corpos algebricamente fechados de característica 0 (demonstravelmente não-finitamente axiomatizável) é  $\aleph_1$ -categorica (i.e. categorica na cardinalidade do contínuo – na verdade a cardinalidade do contínuo é  $2^{\aleph_0}$ , mas admitamos a *hipótese do contínuo*, segundo a qual  $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ , sendo  $\aleph_1$  o menor cardinal maior que  $\aleph_0$  – essa hipótese é independente da teoria axiomática dos conjuntos ZFC; i.e. nem ela, nem a sua negação podem ser demonstradas nessa teoria). A teoria dos corpos algebricamente fechados de característica 0, no entanto, admite modelos enumeráveis (por exemplo, o fecho algébrico do corpo dos números racionais). Há um teorema (Morley) que afirma que se uma teoria de primeira ordem é categorica em um cardinal não-enumerável, ela é categorica em *todos* os cardinais não-enumeráveis.

3) completude: há várias noções de completude: a)  $T$  é *semanticamente completa* se não existe uma *sentença* da linguagem de  $T$  verdadeira em um modelo de  $T$  e falsa em outro; b)  $T$  é *sintaticamente completa* se para qualquer *sentença*  $\phi$  da linguagem de  $T$ ,  $\phi$  ou  $\neg\phi$  é demonstrável a partir de  $T$ ; c)  $T$  é completa com relação a um modelo  $A$  de  $T$  se toda sentença verdadeira *nesse* modelo (mas não necessariamente em todos os modelos) é derivável a partir de  $T$ . Relações entre essas noções depende de propriedades da lógica subjacente a  $T$ . Por exemplo, se essa lógica, como a lógica subjacente às teorias de primeira ordem, é completa,

isto é, se as asserções verdadeiras em *todos* os modelos de  $T$  são deriváveis a partir de  $T$ , então, se  $T$  é semanticamente completa, ela é também sintaticamente completa (a recíproca é incondicionalmente verdadeira). Há, no entanto, teorias semântica, mas não sintaticamente completas (por exemplo, a aritmética de Peano de segunda ordem, vide abaixo). Se a teoria  $T$  for sintaticamente completa, ela será completa com relação a qualquer modelo  $\mathbf{A}$  de  $T$ . De fato, dada uma sentença  $\phi$  da linguagem de  $T$  verdadeira em  $\mathbf{A}$ , como  $T$  é sintaticamente completa,  $T \vdash \phi$  ou  $T \vdash \neg\phi$ ; se  $T \vdash \neg\phi$  então  $\neg\phi$  deve ser verdadeira em todo modelo de  $T$ ,  $\mathbf{A}$  em particular; uma contradição, pois, nesse caso,  $\phi$  seria *falsa* em  $\mathbf{A}$ . Reciprocamente, se  $T$  for completa com relação a  $\mathbf{A}$ ,  $T$  será também sintaticamente completa. Realmente, seja uma sentença  $\phi$  qualquer, uma das duas,  $\phi$  ou  $\neg\phi$ , é verdadeira em  $\mathbf{A}$ ; como  $T$  é completa com relação a  $\mathbf{A}$ ,  $T \vdash \phi$  ou  $T \vdash \neg\phi$ ; isto é,  $T$  é sintaticamente completa. Em suma, as noções de completude sintática e completude com relação a um modelo são equivalentes, mas ambas são mais fortes que a noção de completude semântica. Note que se uma sentença da linguagem de uma teoria de primeira ordem  $T$  for verdadeira em todos os modelos de  $T$ , então, pela completude da lógica de primeira ordem, ela será um teorema de  $T$ ; mas podem existir sentenças verdadeiras em alguns modelos de  $T$  – não em todos – que não são teoremas, caso  $T$  não seja (sintaticamente, ou, pelo menos, semanticamente) completa. Por exemplo, a sentença  $\forall x \forall y (x \bullet y = y \bullet x)$ , onde  $\bullet$  é um símbolo de função binária, é verdadeira em alguns modelos da teoria dos grupos (os grupos abelianos) e falsa em outros; ou seja, a teoria dos grupos (axiomas: 1)  $\forall x \forall y \forall z ((x \bullet y) \bullet z = x \bullet (y \bullet z))$ ; 2)  $\forall x (x \bullet 0 = x \wedge 0 \bullet x = x)$  e 3)  $\forall x (x \bullet x^{-1} = 0 \wedge x^{-1} \bullet x = 0)$ , onde  $0$  é um símbolo de constante e  $^{-1}$  um símbolo de função unária) não é completa.

4) decidibilidade:  $T$  é uma teoria *decidível* se o conjunto das consequências, ou teoremas de  $T$  –  $\text{Cn}T$  – é um conjunto decidível. Isto é, existe um algoritmo que decide se uma qualquer sentença da linguagem de  $T$  é um teorema da teoria. Infeliz ou felizmente as teorias matemáticas mais importantes, como a aritmética de Peano, não são decidíveis. Em princípio teorias decidíveis, como a geometria euclidiana, podem ser desenvolvidas por computadores.

Alguns fatos importantes:

F<sub>1</sub>) Teste de Los-Vaught: Seja  $T$  uma teoria de primeira ordem expressa numa linguagem enumerável. Suponha que  $T$  não tem modelos finitos. Se  $T$  é  $\kappa$ -categórica para algum cardinal

infinito  $\kappa$  ( $\kappa \geq \aleph_0$ ), então  $T$  é completa (lembre-se que em primeira ordem completude sintática e semântica são conceitos equivalentes).

F<sub>2</sub>) Se  $T$  é axiomatizável e sintaticamente completa, então  $T$  é decidível.

### *Exemplos de teorias axiomáticas formalizadas*

I) Aritmética elementar: Considere a estrutura algébrica  $\mathbf{N} = (\mathbb{N}; 0, S, <, +, \bullet)$ , isto é, o conjunto dos números inteiros positivos (os números naturais), com a operação sucessor  $S$ , a soma  $+$ , o elemento neutro da soma  $0$ , a multiplicação  $\bullet$  e, finalmente, a relação de ordem estrita  $<$ . Seja a teoria dessa estrutura, que denotamos  $\text{Th}\mathbf{N}$ , isto é, o conjunto das sentenças da linguagem apropriada para descrevê-la que são verdadeiras em  $\mathbf{N}$ .  $\text{Th}\mathbf{N}$  é evidentemente uma teoria (interpretada). Queremos saber que propriedades ela tem. Mas, para começar, consideremos redutos de  $\mathbf{N}$ , isto é, o mesmo domínio  $\mathbb{N}$ , mas com menos estrutura:

Seja a teoria  $\text{Th}(\mathbb{N}; 0, S)$  e sejam as sentenças abaixo:

$$A_1) \forall x(\neg(Sx = 0))$$

$$A_2) \forall x\forall y(Sx = Sy \rightarrow x = y)$$

$$A_3) \forall x(\neg(x = 0) \rightarrow \exists y(x = Sy))$$

$$A_{4,1}) \forall x(\neg(Sx = x))$$

$$A_{4,2}) \forall x(\neg(SSx = x))$$

.

.

.

$$A_{4,n}) \forall x(\neg(S^n x = x)), \text{ onde } S^n \text{ é a } n\text{-ésima iteração de } S.$$

Note que nessas sentenças  $S$  e  $0$  são *símbolos*, não a função sucessor  $S$  e o número  $0$  (que são particulares interpretações desses símbolos). Nossa notação é ambígua.

Seja  $N_S$  o conjunto dessas sentenças. Evidentemente,  $\text{Cn}N_S \subseteq \text{Th}(\mathbb{N}; 0, S)$ . Mostraremos que vale a recíproca. Em primeiro lugar, note que todo modelo de  $N_S$  possui uma cópia de  $\mathbb{N}$ , isto é, um subconjunto estruturado exatamente como  $\mathbb{N}$ , que chamaremos de  $N$ -cadeia:  $0, S0, SS0, \dots$ . Ademais, se qualquer um desses modelos contém mais elementos, eles estarão dispostos em  $Z$ -cadeias, isto é, cópias do conjunto  $Z$  dos inteiros:  $\dots S^{-1}S^{-1}0, S^{-1}0, 0, S0, SS0, \dots$ . Não há limite no número de  $Z$ -cadeias que um modelo de  $N_S$  pode ter. No entanto, se dois desses modelos têm a mesma cardinalidade *não-enumerável*, então eles têm o mesmo número de  $Z$ -cadeias. Logo,  $N_S$  é  $\kappa$ -categórica para qualquer  $\kappa$  *não-enumerável* ( $N_S$  não é, evidentemente,  $\aleph_0$ -categórica). Pelo fato  $F_1$  acima,  $N_S$  é completa. Como  $\text{Cn}N_S \subseteq \text{Th}(\mathbb{N}; 0,$



S), toda sentença de  $\text{Th}(\mathbb{N}; 0, S)$  deve ser derivável de  $N_S$  (pois contrariamente, como  $N_S$  é sintaticamente completa, a negação dessa sentença seria uma consequência de  $N_S$ , o que faria  $\text{Th}(\mathbb{N}; 0, S)$  inconsistente, o que ela, evidentemente, não é). Logo,  $\text{Cn}N_S = \text{Th}(\mathbb{N}; 0, S)$ . Isto é, a teoria  $\text{Th}(\mathbb{N}; 0, S)$  é axiomatizável – as sentenças  $A_1, A_2, A_3, A_{4.1}, \dots, A_{4.n}, \dots$  formam um conjunto infinito de axiomas de  $\text{Th}(\mathbb{N}; 0, S)$  (que *não* é finitamente axiomatizável). Como  $\text{Th}(\mathbb{N}; 0, S)$  é completa, ela é também decidível (fato  $F_2$ ). Em suma, existe um algoritmo que permite decidir se uma qualquer asserção da linguagem adequada para descrever essa estrutura é ou não verdadeira em  $(\mathbb{N}; 0, S)$ .

Seja agora a teoria  $\text{Th}(\mathbb{N}; 0, S, <)$ . E sejam as sentenças abaixo:

$$B_1) \forall x(\neg(x = 0) \rightarrow \exists y(x = Sy))$$

$$B_2) \forall x \forall y(x < Sy \leftrightarrow (x < y \vee x = y))$$

$$B_3) \forall x(\neg(x < 0))$$

$$B_4) \forall x \forall y(x < y \vee x = y \vee y < x)$$

$$B_5) \forall x \forall y(x < y \rightarrow \neg(y < x))$$

$$B_6) \forall x \forall y \forall z(x < y \rightarrow y < z \rightarrow x < z)$$

Não é difícil mostrar que  $N_S \subseteq \text{Cn}N_{<}$ , onde  $N_{<}$  é o conjunto das sentenças acima. Portanto, todo modelo de  $N_{<}$  é também modelo de  $N_S$  (quando ignoramos a interpretação de  $<$ ). Logo, os modelos de  $N_{<}$  são sequências começando com uma  $N$ -cadeia, *seguida ordenadamente* por uma sequência arbitrária de  $Z$ -cadeias. Por um argumento algo mais complicado que o usado acima (eliminação de quantificadores) podemos mostrar que: 1)  $\text{Cn}N_{<} = \text{Th}(\mathbb{N}; 0, S, <)$  e, portanto,  $\text{Th}(\mathbb{N}; 0, S, <)$  é finitamente axiomatizável por  $N_{<}$ ; 2)  $\text{Cn}N_{<}$  é completa e 3)  $\text{Th}(\mathbb{N}; 0, S, <)$  é decidível.

Seja agora a teoria  $\text{Th}(\mathbb{N}; 0, S, <, +)$ . Os modelos dessa teoria são formados por uma  $N$ -cadeia seguida por um conjunto ordenado denso sem elementos extremos de  $Z$ -cadeias. Logo, a teoria é  $\aleph_0$ -categórica e, portanto, por  $F_1$ , completa. Por um argumento ainda mais complicado podemos mostrar que essa teoria também é decidível – Presburger, 1929 – (mas, como foi mostrado por Michael Fisher e Michael Rabin em 1974, não existe nenhum procedimento de decisão suficientemente rápido para ser praticamente útil).

Seja agora a teoria  $\text{Th}(\mathbb{N}; 0, S, <, +, \bullet)$ . Considere as sentenças:

$$N_1) \forall x(\neg(Sx = 0)) \quad (A_1)$$

$$N_2) \forall x \forall y(Sx = Sy \rightarrow x = y) \quad (A_2)$$

$$N_3) \forall x \forall y(x < Sy \leftrightarrow (x < y \vee x = y)) \quad (B_2)$$

$$N_4) \forall x(\neg(x < 0)) \text{ (B}_3\text{)}$$

$$N_5) \forall x \forall y(x < y \vee x = y \vee y < x) \text{ (B}_4\text{)}$$

$$N_6) \forall x(x + 0 = x)$$

$N_7) \forall x(x + Sy = S(x + y))$  –  $N_6$  e  $N_7$  são a definição recursiva de soma

$$N_8) \forall x(x \bullet 0 = 0)$$

$N_9) \forall x(x \bullet Sy = (x \bullet y) + x)$  –  $N_8$  e  $N_9$  são a definição recursiva de multiplicação

Evidentemente, se  $N$  é o conjunto dessas sentenças,  $CnN \subseteq Th(N; 0, S, <, +, \bullet)$ , mas a recíproca *não* é verdadeira. Há sentenças verdadeiras na estrutura  $(N; 0, S, <, +, \bullet)$  que *não* são teoremas de  $N$ . A teoria formal finitamente axiomatizada  $N$ , no entanto, desempenha um relevante papel em metamatemática. Ela marca, por assim dizer, os limites da formalização em matemática. Pois, vejamos; os seguintes metateoremas são demonstráveis:

1) Teorema de Church (1936): Se  $T$  é uma extensão consistente de  $N$  ( $T$  é uma *extensão* de  $N$  quando a linguagem de  $T$  estende a linguagem de  $N$  e todo teorema de  $N$  é teorema de  $T$ ), então  $T$  é indecidível; isto é, não existe um procedimento efetivo (algorítmico) para decidir se uma qualquer sentença da linguagem de  $T$  é um teorema de  $T$ . Equivalentemente, se  $T$  é uma teoria expressa na linguagem de  $N$ , ou numa linguagem que estende a linguagem de  $N$ , tal que  $T \cup N$  seja consistente, então  $T$  não é decidível (pois  $T \cup N$  é, nesse caso, uma extensão consistente de  $N$ . Como  $T \cup N$  não é decidível,  $T$  também não o pode ser). Em particular,  $Th(N; 0, S, <, +, \bullet)$  não é decidível (pois essa teoria é uma extensão consistente de  $N$ ); isto é, não existe um procedimento efetivo para decidirmos se uma sentença da linguagem adequada para descrever  $(N; 0, S, <, +, \bullet)$  é verdadeira em  $(N; 0, S, <, +, \bullet)$ . O que foi dito acima implica que *qualquer* teoria na linguagem de  $N$  que admita  $(N; 0, S, <, +, \bullet)$  como modelo é indecidível.

2) Primeiro teorema de incompletude de Gödel (1931): Seja  $A \subseteq Th(N; 0, S, <, +, \bullet)$ . Se  $A$  é um conjunto recursivo, então  $CnA$  (que é, segundo a hipótese, uma teoria axiomatizada) *não* é completa. (pois, caso  $CnA$  fosse completa, teríamos  $CnA = Th(N; 0, S, <, +, \bullet)$ . Mas, se fosse completa,  $CnA$  seria também decidível, pois ela é uma teoria axiomatizada; contra o fato que  $Th(N; 0, S, <, +, \bullet)$  não é decidível). Portanto,  $Th(N; 0, S, <, +, \bullet)$  não é axiomatizável, pois, caso o fosse, existiria  $A \subseteq Th(N; 0, S, <, +, \bullet)$ , decidível tal que  $CnA = Th(N; 0, S, <, +, \bullet)$ . Porém, pelo primeiro teorema de incompletude de Gödel,  $CnA$  não é completa; contradição, pois  $Th(N; 0, S, <, +, \bullet)$  é completa.

3) Teorema forte de incompletude (Gödel-Rosser): Se a teoria axiomatizada  $T$  é uma extensão consistente de  $N$ ,  $T$  não é sintaticamente completa. (Equivalentemente, se  $T$  é uma teoria expressa na linguagem de  $N$  ou numa linguagem que a estende, e  $T \cup N$  é consistente, então  $T$  é sintaticamente incompleta). De fato, pelo teorema de Church,  $T$  é indecidível; como  $T$  é axiomatizada, se ela fosse sintaticamente completa, seria também decidível. Contradição. Assim, toda teoria axiomatizada  $T$  (na linguagem de  $N$  ou numa linguagem que a estende) que tem um modelo onde as sentenças de  $N$  são verdadeiras (o que torna  $T \cup N$  consistente) é sintaticamente incompleta. É isso o que queríamos dizer quando afirmamos que  $N$  marca os limites da formalização em matemática.

II) aritmética de Peano de primeira ordem:  $N$  não é, evidentemente, uma teoria adequada para se fazer aritmética; falta-lhe, em particular, um princípio essencial para se demonstrar teoremas de aritmética, o princípio de indução finita, cuja formulação adequada, no entanto, exige variáveis para propriedades de números naturais ou subconjuntos desses números, isto é, linguagens de *segunda ordem*. Podemos remediar a situação, em primeira ordem, juntando a  $N$  um *esquema de axiomas* (que equivale a uma lista infinita de axiomas); a saber, o esquema de indução ( $\text{Ind}_1$ ): para qualquer fórmula  $\varphi(x)$  da linguagem de  $N$  em que apenas a variável  $x$  ocorre livre, a fórmula  $(\varphi(0) \wedge \forall x(\varphi(x) \rightarrow \varphi(Sx))) \rightarrow \forall x(\varphi(x))$  (onde  $\varphi(0)$  denota a fórmula  $\varphi(x)$  com  $x$  substituído por  $0$ ) é um axioma. A teoria resultante é chamada de aritmética de Peano (ou Dedekind-Peano) e é denotada por  $P$ .

$P$  não é categórica, seus modelos não são, em geral, isomorfos entre si. Porém, todo modelo de  $P$  tem uma subestrutura isomorfa aos números naturais “standard”.  $P$  é, evidentemente, uma extensão de  $N$ ; como  $P$  é consistente  $((N; 0, S, <, +, \bullet)$  é um modelo de  $P$ ),  $P$  é forçosamente indecidível. Como, ademais,  $P$  é axiomatizada,  $P$  certamente não é completa. Ou seja, há verdades aritméticas expressas na linguagem de  $N$  que são indemonstráveis em  $P$  (ou qualquer extensão axiomatizada de  $P$ ).

Isso, entretanto, não “demonstra” uma suposta limitação de nossa mente, mas apenas as limitações do modelo formal, ou “computacional”, de demonstração matemática. Gödel extraiu desse fato um argumento sobre a impossibilidade de se representar nossa mente, ou seja, nossas capacidades intelectuais – que incluem, obviamente, nossa capacidade de demonstrar teoremas de matemática – por um sistema formal axiomatizado, ou qualquer coisa equivalente a isso, como um programa de computador. Numa fórmula: nossa mente não opera segundo um conjunto de regras algorítmicas (um *calculus ratiocinatur* à la Leibniz).

Isso se opõe à visão computacional da mente, que conheceu enorme difusão quando apareceram computadores que pareciam emular funções intelectuais humanas. Hoje está mais ou menos estabelecido que um “cérebro mecânico” deve ser algo mais que um sistema formal de manipulação simbólica. O que não quer dizer que não possamos desenhar sistemas assim capazes de realizar inúmeras funções “inteligentes”, como as muitas realizações da Inteligência Artificial nos mostra claramente a toda hora.

Como dissemos acima, P é consistente. Mas, podemos demonstrar isso? Em particular, podemos demonstrar esse fato por métodos disponíveis na teoria P? O *segundo teorema de incompletude* de Gödel garante que não.

Por um método brilhante e completamente original, chamado de *aritmética da metamatemática*, inventado por Gödel, nós podemos traduzir asserções metamatemáticas sobre a aritmética em sentenças da aritmética, isto é, expressas na linguagem de N. Em particular, há uma sentença simples, denotada por ConP (que expressa que existe uma fórmula não demonstrável em P, isto é, que P é consistente) com a seguinte propriedade:  $\text{ConP} \in \text{Cn}P$  se, e somente se, P for inconsistente. Isto é, se P for consistente, a demonstração desse fato não pode ser formalizada em P, pois do contrário, teríamos que ConP seria um teorema de P; ou seja, P não pode demonstrar sua própria consistência.

Isso não quer dizer que outras teorias não o possam fazer. Gentzen, em particular, demonstrou a consistência de P por argumentos não-finitários (argumentos formalizados em P são, em geral, chamados de *finitários*). Mas, poderíamos perguntar, não *sabemos* que P tem um modelo, a saber,  $(\mathbb{N}; 0, S, <, +, \bullet)$ , sendo, assim, consistente? A questão é, claro, *como* sabemos disso? A resposta é que a teoria dos conjuntos nos garante isso. Nós podemos *mostrar* na teoria dos conjuntos, axiomatizada ou não, que essa estrutura *existe* e, portanto, que P é consistente. Isso, porém, nos diz *apenas* que P é consistente *com relação à* teoria de conjuntos; que a consistência daquela teoria depende da consistência desta. Mas, generalizando o segundo teorema de Gödel, nós podemos mostrar que a teoria de conjuntos *também* é impotente para mostrar a sua própria consistência. Sendo, porém, uma teoria muito mais potente que P, nossa confiança em sua consistência é mais débil que a que depositamos na consistência de P. Ou seja, a demonstração da consistência de P na teoria de conjuntos não aumenta a confiança que já tínhamos, por mero acúmulo de evidência, na consistência de P (afinal, estamos fazendo aritmética há séculos e, até agora, não derivamos nenhuma contradição).

Mas, afinal, e se um dia isso acontecesse? Nós certamente teríamos uma atitude pragmática: procuraríamos isolar a ação dessa contradição (quais teoremas a envolvem diretamente, quais não?), a sua origem (quais hipóteses levam à contradição?) e mudaríamos nossa noção de número natural de modo a eliminá-la. E seguiríamos adiante. Os cientistas naturais fazem isso quotidianamente em face de experimentos falsificadores de teorias. (Há inclusive uma vertente filosófica que prega que a matemática abandone a busca da certeza absoluta e adote critérios científicos de validação. A possibilidade de levar a cabo, por computadores, quantidades enormes de testes certamente aumenta nossa confiança em hipóteses não demonstradas – por exemplo, a hipótese de Goldbach: todo número par maior que 2 é a soma de dois números primos; sobejamente testada por cálculos mecânicos que a confirmam. Mas, que vantagens há em adotá-la em bases indutivas, quando o que nos interessa é, quase sempre, o *método* de demonstração mais que o fato demonstrado?)

III) aritmética de Peano (ou Dedekind-Peano) de segunda ordem  $P_2$ :  $P_2 = N + \text{Ind}$ , onde  $\text{Ind} = \forall P((P(0) \wedge \forall x(P(x) \rightarrow P(Sx))) \rightarrow \forall x(P(x)))$  ( $P$  é uma variável de segunda ordem sobre propriedades dos números; é precisamente a quantificação sobre propriedades que torna essa fórmula, que expressa o *princípio de indução finita*, uma fórmula de *segunda* ordem).

O aspecto mais relevante da aritmética de segunda ordem é sua categoricidade; ela tem, a menos de isomorfismo, um único modelo. Por isso, é a teoria que melhor expressa nossa compreensão do conceito de número cardinal finito. Essa teoria, no entanto, não é sintaticamente completa; há sentenças da linguagem de  $N$  que não são decidíveis na teoria, i.e. a teoria não demonstra nem essas sentenças nem as suas negações. Sendo categórica, a teoria é, no entanto, semanticamente completa; isto é, não existe nenhuma sentença verdadeira em um modelo da teoria e falsa em outro (afinal, todos os modelos são isomorfos).

IV) geometria espacial elementar (Tarski, 1959): linguagem de primeira ordem: símbolo de relação ternária  $E$  ( $E(xyz)$  expressará a relação “ $y$  está entre  $x$  e  $z$ ”), símbolo de relação quaternária  $D$  ( $Dxyuv$ ) expressará “ $x$  está à mesma distância de  $y$  que  $u$  de  $v$ ”). Os símbolos de variáveis denotam “pontos”.

Axiomas:

$$G_1) \forall x \forall y (E(xyx) \rightarrow x = y)$$

$$G_2) \forall x \forall y \forall z \forall u (E(xyu) \wedge E(yzu) \rightarrow E(xyz))$$

$$G_3) \forall x \forall y \forall z \forall u (E(xyz) \wedge E(xyu) \wedge \neg(x = y) \rightarrow E(xzu) \vee E(xuz))$$

$$G_4) \forall x \forall y (D(xyyx))$$

$$G_5) \forall x \forall y \forall z (D(xyzz) \rightarrow x = y)$$

$$G_6) \forall x \forall y \forall z \forall u \forall v \forall w (D(xyzu) \wedge D(xyvw) \rightarrow D(zuvw))$$

$$G_7) \forall t \forall x \forall y \forall z \forall u \exists v (E(xtu) \wedge E(yuz) \rightarrow E(xvy) \wedge E(ztv)) \text{ (axioma de Pasch)}$$

$$G_8) \forall t \forall x \forall y \forall z \forall u \exists v \exists w (E(xut) \wedge E(yuz) \wedge \neg(x = u) \rightarrow E(xzv) \wedge E(xyw) \wedge E(vtw))$$

(axioma de Euclides)

$$G_9) \forall x \forall x' \forall y \forall y' \forall z \forall z' \forall u \forall u' (D(xyx'y') \wedge D(yzy'z') \wedge D(xux'u') \wedge D(yuy'u') \wedge E(xyz) \wedge E(x'y'z') \wedge \neg(x = y) \rightarrow D(zuz'u'))$$

$$G_{10}) \forall x \forall y \forall u \forall v \exists z (E(xyz) \wedge D(yzuv))$$

$$G_{11}) \exists x \exists y \exists z (\neg E(xyz) \wedge \neg E(yzx) \wedge \neg E(zxy))$$

$$G_{12}) \forall x \forall y \forall z \forall u \forall v (D(xuxv) \wedge D(yuyv) \wedge D(zuzv) \wedge \neg(u = v) \rightarrow E(xyz) \vee E(yzx) \vee E(zxy))$$

$$G_{13}) \forall v \forall w \dots (\exists z \forall x \forall y (\varphi(x, v, w, \dots) \wedge \psi(y, v, w, \dots) \wedge E(zxy)) \rightarrow \exists u \forall x \forall y (\varphi(x, v, w, \dots) \wedge \psi(y, v, w, \dots) \rightarrow E(xuy))) \text{ (esquema de axiomas da continuidade)}$$

Tarski mostrou que sua axiomatização da geometria é consistente, completa e, conseqüentemente, decidível. Ela, no entanto, não é finitamente axiomatizável.

V) teoria elementar de conjuntos (ZF): linguagem de primeira ordem: símbolo de relação binária  $\in$  (indica pertinência).

Axiomas:

$$ZF_1) \forall x \forall y (\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y) \text{ (extensionalidade)}$$

$ZF_2) \forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow z \in x \wedge \varphi(z))$ , onde  $\varphi(x)$  é uma fórmula da linguagem de ZF onde apenas a variável  $x$  ocorre livre (axioma da separação:  $y = \{z \in x : \varphi(z)\}$ )

$$ZF_3) \forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow \exists w (w \in x \wedge z \in w)) \text{ (axioma de união: } y = \cup x)$$

$$ZF_4) \forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow \forall w (w \in z \rightarrow w \in x)) \text{ (axioma do conjunto das partes: } y = \{z : z \subseteq x\} = P_x)$$

$ZF_5) \exists x \forall y (\neg(y \in x))$  (axioma de existência de algum conjunto vazio. Por extensionalidade, só existe um conjunto vazio, denotado por  $\emptyset$ )

$ZF_6) \exists x (\emptyset \in x \wedge \forall y (y \in x \rightarrow \exists z (z \in x \wedge \forall w (w \in z \leftrightarrow w = y))))$  (axioma do infinito:  $\emptyset \in x$  e se  $y \in x$ , então  $\{y\} \in x$  – isso implica que  $x$  é infinito, pois, por extensionalidade,  $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \dots$  são conjuntos distintos dois a dois que pertencem a  $x$ )

Esses axiomas constituem o fundamento da teoria de conjuntos de Zermelo Z. A inclusão da axioma abaixo (devido a Fraenkel) nos dá a teoria ZF

ZF<sub>6</sub>)  $\forall u_1 \forall u_2 \dots \forall x ((\forall v_1 \forall v_2 \forall y (y \in x \wedge \varphi(u_1, u_2, \dots, y, v_1) \wedge \varphi(u_1, u_2, \dots, y, v_2))) \rightarrow v_1 = v_2) \rightarrow \exists w \forall y (y \in w \leftrightarrow \exists z (z \in x \wedge \varphi(u_1, u_2, \dots, z, y)))$ , onde  $\varphi(u_1, u_2, \dots, x, y)$  é uma fórmula da linguagem de ZF, onde apenas os símbolos de variáveis  $u_1, u_2, \dots, x, y$  ocorrem livres (axioma da substituição:  $w = \{y: \varphi(u_1, u_2, \dots, z, y) \text{ para algum } z \in x, \text{ se há } no \text{ máximo um } y \text{ para cada } z \in x - \text{ os } u_i\text{'s são parâmetros}\}$ )

Obs.: Certamente o fato mais interessante sobre a teoria dos conjuntos é que podemos formalizar nela grande parte da matemática, o que lhe dá um papel singular como teoria matemática fundante – não deixa de ser surpreendente que noções matemáticas básicas como par ordenado, relação, função, operação, estrutura, número, matriz, vetor, etc., etc., possam ser reduzidas a noções conjuntistas.

A teoria ZFC é a teoria ZF acrescida do axioma da escolha C:

Primeiro algumas definições:

a)  $x$  é um *conjunto não-vazio*  $\equiv_{df} \exists y (y \in x)$  (notação:  $x \neq \emptyset$ )

a)  $x$  é uma *família não-vazia de conjuntos disjuntos não-vazios*  $\equiv_{df} (x \neq \emptyset \wedge \forall y \forall z (y \in x \wedge z \in x \rightarrow y \neq \emptyset \wedge z \neq \emptyset \wedge \neg \exists w (w \in y \wedge w \in z)))$  (notação:  $Dj(x)$ )

C)  $\forall x (Dj(x) \rightarrow \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow \exists w (w \in x \wedge z \in w \wedge \forall u (u \in y \wedge u \in w) \rightarrow u = z)))$  (existe um conjunto que contém *exatamente um* elemento de cada um dos conjuntos de uma família não-vazia de conjuntos disjuntos não-vazios)

Gödel demonstrou que C é consistente com ZF, ou seja, existe um modelo de ZF onde C é verdadeiro (o universo dos conjuntos definíveis) e Cohen (1969) mostrou que C é independente de ZF (ou seja, o axioma da escolha não é um teorema de ZF); para tanto ele exibiu um modelo de ZF onde C é falso (o método de geração de modelos de ZF sujeitos a determinadas condições por ele inventado, o método de “forcing”, tornou-se standard em teoria de conjuntos para demonstrações de independência). O axioma da escolha, entretanto, é demonstravelmente equivalente a importantes resultados matemáticos, por exemplo: o produto de espaços topológicos compactos é compacto na topologia produto; lema de Zorn (se toda cadeia de um conjunto parcialmente ordenado tem um supremo no conjunto, então esse conjunto tem um elemento maximal); todo conjunto pode ser bem-ordenado (um conjunto é bem-ordenado quando é ordenado e todo subconjunto não-vazio desse conjunto tem um menor elemento); entre outros. Importantes resultados matemáticos dependem então do axioma da escolha, por exemplo: todo espaço vetorial tem uma base; todo filtro pode ser

estendido a um ultrafiltro; toda teoria consistente pode ser estendida a uma teoria maximalmente consistente (isto é, tal que o acréscimo de uma única sentença mais a torna inconsistente), etc. Assim, mesmo se alguns matemáticos não acatem a existência de “conjuntos escolha” como um fato básico de nossa concepção de conjunto, a aceitação do axioma da escolha parece inevitável se a teoria de conjuntos quer reter o papel fundamental que tem em matemática.

Outro “fato” independente de ZF (e, também de ZFC) é a *hipótese do contínuo*, que afirma que o contínuo (por exemplo, o conjunto dos reais) tem cardinalidade igual ao cardinal sucessor do menor cardinal infinito; em símbolos:  $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ ). (Há também uma hipótese generalizada do contínuo:  $2^{\aleph^\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$ , para qualquer ordinal  $\alpha$ .) Mas, como essa “hipótese” tem um papel marginal em matemática e, além disso, grande parte dos teóricos de conjuntos acha que ela é *falsa* (embora não haja uma demonstração disso), ela não é tomada como um axioma (um problema meio filosófico, meio matemático em teoria de conjuntos é estender ZFC de modo a decidir da validade ou não da hipótese do contínuo – há várias tentativas nessa direção; nenhuma completamente bem sucedida; por exemplo, como a hipótese é verdadeira no universo L dos conjuntos contrutíveis de Gödel, bastaria tomar a sentença da linguagem de ZF que expressa o fato que todo conjunto é construtível, denotada pela expressão metalinguística  $V = L$ , como um axioma. O problema é que ninguém, ou quase ninguém, acredita em  $V = L$ ).

Um fato curioso: uma das versões do teorema de Löwenheim-Skolem afirma que se uma teoria de primeira ordem expressa em um vocabulário enumerável (como ZFC, por exemplo) tem um modelo, então ela tem um modelo enumerável. Ora, um teorema fundamental de ZFC, o teorema de Cantor, afirma que o conjunto potência, ou das partes, de um conjunto qualquer  $x$ ,  $Px$ , tem cardinalidade *estritamente superior* à cardinalidade de  $x$  (mais rigorosamente:  $\text{card}(Px) = 2^{\text{card}(x)}$ ). Como um dos axiomas de ZFC assegura que existe um conjunto infinito no universo, então, pelo teorema de Cantor, deve existir um conjunto infinito *não-enumerável* no universo (claro, se ZFC for consistente, o que não sabemos). Mas, como isso é possível no universo *enumerável* que o teorema de Löwenheim-Skolem garante existir (todos os elementos de um conjunto *não-enumerável* deveriam existir num universo *enumerável*)? A conclusão óbvia parece ser que ZFC não pode ter modelo, ou seja, que ZFC é inconsistente. Esse é o chamado “paradoxo” de Skolem. Mas, cuidado, o teorema de Cantor apenas garante que não existe *no universo* uma enumeração de  $Px$ , se  $x$  for infinito; o que pode muito bem ser o caso ainda que  $Px$  seja, de uma perspectiva *externa ao universo*,



de mesma cardinalidade que  $x$ . O que nós sabemos, então, é que se ZFC for consistente, e portanto tiver um modelo enumerável, não existirá no universo desse modelo nenhuma função (i.e. nenhum conjunto que é função) que estabelece a equinumerosidade entre  $x$  e  $Px$ ; i.e. que estabelece uma correspondência biunívoca entre eles.

A teoria ZF (ou ZFC) não é decidível. De fato, nós podemos *definir* na linguagem de ZF as operações  $+$  e  $\bullet$ , a relação  $<$  e encontrar um “avatar” para  $0$  no universo dos conjuntos (o conjunto vazio é o mais usado), e assim *traduzir* sentenças expressas na linguagem de  $N$  em sentenças expressas na linguagem de ZF. Ademais, podemos *demonstrar* em ZF todas as respectivas traduções para a linguagem de ZF das sentenças de  $N$ . Ou seja, nós podemos fazer aritmética em ZF; assim como quase toda a matemática (é isso o que dá à teoria de conjuntos a sua posição privilegiada em matemática – Hilbert a chamou de “paraíso”). Logo, ZF é, nesse sentido, uma extensão de  $N$  e vale para ela o teorema de Church. Consequentemente, ZF (ZFC) também não é completa.

Como já dissemos, ZF (ou ZFC) também é incapaz de demonstrar a sua própria consistência, se ela for, de fato, consistente (a consistência de ZF é um “item de fé” com o qual nem todos os matemáticos comungam. “Grandes” como Poincaré, Borel, Baire, Lebesgue, entre tantos, acreditavam que a crença em conjuntos infinitos atualizados era fonte possível de contradições e os evitavam). Ou seja, não podemos demonstrar em ZF (ZFC) que existe um conjunto que funciona como o universo dos conjuntos. Nós sabemos que se existirem cardinais infinitos de certos tipos (por exemplo, fortemente inacessíveis), então ZF (ZFC) tem modelo. O que não podemos é demonstrar em ZF (ZFC) que eles existem. Como só existem os conjuntos que ZF quer que existam, ou esses cardinais enormes não existem mesmo, ou ZF não capta nossa noção de conjunto (ou, pelo, menos, a noção de conjunto que a matemática necessita). Qual das duas alternativas acatar? O problema posto pela extensão de ZF é, como vimos, um sério problema em fundamentos da matemática. Se adotarmos axiomáticamente a existência de cardinais de um determinado tipo apropriado, e estendermos assim ZF (ZFC) de modo a podermos demonstrar a consistência de ZF (e, portanto, ZFC) não estamos em melhor situação, pois essa teoria estendida não pode demonstrar a sua consistência (analogamente, é fácil estender  $P$  de modo a podermos demonstrar a consistência de  $P$ ; basta acrescentar-lhe a sentença  $ConP$ , pois podemos, obviamente, demonstrar  $ConP$  em  $P + ConP$ . O problema é que  $Con(P + ConP)$  não é demonstrável em  $P + ConP$ , uma vez que  $P + ConP$  é consistente).

### *As duas variantes do método axiomático*

Há, como vimos, duas concepções de método axiomático, que podemos chamar de *clássica* e *moderna*. A clássica foi criação dos gregos, Euclides mais notadamente, e sobreviveu hegemônica até o século XIX, quando surgiu a concepção moderna. Ambas tem um papel na articulação do conhecimento humano. Na concepção clássica, o método axiomático é visto como uma arquitetura do conhecimento ou, mais especificamente, um modo de articular nossa compreensão de um domínio matemático *previamente dado* (por exemplo, o conceito de número ou o espaço da percepção, dados numa intuição originária) num sistema lógico articulado em dois níveis hierarquizados e nitidamente separados; o primeiro nível contém a explicitação de nossa apreensão intuitiva do conceito ou domínio em questão expressa como um conjunto de verdades evidentes, os axiomas do sistema; o segundo, as consequências dedutíveis dos axiomas por meios exclusivamente lógicos, isto é, que preservam a verdade. Por oposição a sistemas *hipotético-dedutivos*, em que os axiomas não são necessariamente admitidos como *de fato* verdadeiros, mas apenas como *hipoteticamente* verdadeiros, os sistemas da axiomática clássica poderiam muito bem chamar-se *intuitivo-dedutivos*; nesses sistemas os axiomas expressam verdades intuitivas e os teoremas verdades logicamente derivadas deles. O ideal é que esses sistemas sejam sintaticamente completos, isto é, que toda asserção verdadeira sobre o objeto do conhecimento em causa seja um axioma ou um teorema. Se esse não for o caso, ou nossa compreensão do objeto é falha, ou nossa lógica é incapaz de revelar toda a verdade contida implicitamente nos axiomas.

Já na concepção moderna o sistema axiomático não tem por função explicitar significados previamente dados, mas articular um corpo de *conhecimento formal* sobre domínios *materialmente indeterminados* não necessariamente pré-existentes (esses domínios podem ser simplesmente pressupostos). Por exemplo, os axiomas da teoria de grupos, expressos como sentenças não-interpretadas (nenhum significado determinado é atribuído ao símbolo de operação binária ou ao símbolo de constante, nem é predeterminado o conjunto de objetos em que esses símbolos serão interpretados) não *explica* o que é um grupo; eles *definem* uma *estrutura formal* (ou uma família de estruturas, se entendermos que estruturas idênticas só podem ser instanciadas por domínios isomorfos) pelas suas propriedades formais (i.e. independentes de significados determinados), que valem em todos os grupos, não importa quais ou quantos objetos eles contenham *Enquanto sistemas axiomáticos clássicos explicam, esclarecem ou explicitam conceitos ou contextos matemáticos previamente dado, sistemas modernos definem ou caracterizam estruturas formais às vezes livremente concebidas. As*

caracterizações formais providas por sistemas axiomáticos modernos, no entanto, podem ser variações de teorias materialmente determinadas abstraídas de seus conteúdos materiais: foi a geometria euclidiana tradicional, imbuída dos seus significados, que, abstraída de seus conteúdos e reduzida à sua pura forma, forneceu o material a partir do qual foram criadas, por generalização, as geometrias não-euclidianas ou as abstratas geometrias Riemannianas  $n$ -dimensionais, onde nem a dimensão, nem a métrica euclidiana originais são preservadas, e que, ademais, não são sequer vistas como necessariamente teorias do espaço. Analogamente, a partir do estudo de permutações concretamente dadas, relevantes no estudo da resolução de equações algébricas, originou-se o conceito formal-abstrato de grupo, caracterizado axiomáticamente de modo usual.

Para entender melhor como se deu essa mudança da concepção clássica para a moderna convém refletir um pouco sobre a natureza da linguagem e da matemática. Como, afinal, podemos nos referir a uma realidade determinada, trazê-la a nossa presença e revelar verdades sobre ela? Consideremos, primeiramente, o problema da referência. Note que a linguagem, por si só, não é capaz de garantir a determinação do domínio ao qual ela se refere. Vejamos porquê. Sentenças de uma linguagem qualquer, verdadeiras em um domínio qualquer, são verdadeiras em *todo* domínio *isomorfo* a esse quando convenientemente reinterpretadas. Nenhuma teoria, matemática ou não, é verdadeira em apenas um contexto, mesmo as teorias mais restritivas, como as categóricas, que, como vimos, não podem caracterizar seus domínios senão a menos de isomorfismo.

A determinação, ou univocidade, da referência exige algo além da linguagem e das descrições e caracterizações que ela permite. A essa componente determinativa da consciência chamarei *intuição*. Esse é um termo técnico que denota qualquer experiência ou vivência que nos forneça algo *determinado* como *presente* à consciência (e não apenas representado por interpostas entidades, linguísticas ou não). São objetos passíveis de intuição, objetos (por exemplo, *esta* mesa), conceitos (como o conceito de mesa, i.e. a regra que nos permite reconhecer mesas em geral), domínios determinados de objetos (por exemplo, o universo das mesas), ou qualquer entidade determinada que possa se apresentar diretamente à consciência sem intermediários. Um exemplo corriqueiro de intuição é a percepção sensorial (note que nós não *percebemos* nossas sensações – que nós apenas *sentimos* –, mas o que as causa). Alguns filósofos com inclinações empiristas não admitem um análogo da percepção para objetos abstratos, como os objetos matemáticos; mas outros, de orientação mais idealista, não vêem problema com a intuição de objetos matemáticos, conceitos ou outras entidades abstratas (entre estes está Gödel). Não só a percepção sensorial, mas também a

imaginação, a fantasia, a abstração e a idealização são, ou assim eu admito, vivências intuitivas. Por meio dessas últimas nós intuimos, por exemplo, garrafas de Klein, pontos geométricos do espaço perceptual, números, etc.

Intuições podem ser de coisas ou de verdades; em jargão filosófico, intuições *de re* ou *de dicto*, respectivamente. Ou seja, nós podemos trazer à consciência quer objetos, quer verdades sobre eles. É natural pensar que intuições *de re* tem primazia e fundamentam intuições *de dicto*; para que eu possa *ver que* uma folha de papel é branca, eu preciso antes *ver essa* folha de papel. De modo análogo, eu posso *perceber* ou *intuir* que o princípio de indução finita é verdadeiro para a concepção de número que intuo pela *variação imaginária* de instâncias específicas de números (eu imagino um número e o vario em imaginação de modo a presentificar à minha consciência o conceito mesmo de número e suas propriedades características).

A intuição, *e apenas ela*, em *última análise*, garante a referência do discurso (e a sua veracidade). De fato, a referência a algo específico e determinado sempre envolve intuições, quer imediatamente, quando o objeto a que nos referimos está diante de nós, intuitivamente dado (por exemplo, quando dizemos “esta folha de papel é branca” apontando para uma particular folha de papel posta diante de nós e que *vemos* que é branca), ou mediatamente, quando usamos signos linguísticos cuja denotação foi um dia determinada frente a frente com as coisas denotadas (quando dizemos, por exemplo, “César destruiu a República Romana, abrindo caminho para o Império”, nós nos referimos a alguém bem determinado, não porque o conquistador da Gália esteja diante de nós no momento do discurso e estejamos apontando para ele, mas porque, um dia, à palavra “César” foi atribuído, como referência, esse homem – a esse ato de determinação de referência chamamos “batismo inicial”, que não precisa, evidentemente, ser um batismo em sentido próprio).

Às linguagens interpretadas, aquelas a cujos símbolos e termos foram atribuídas referências determinadas, cabe expressar verdades dos seus domínios de referência, tanto aquelas intuitivamente acessíveis quanto as suas consequências lógicas. Mas, como vimos, nós *sempre* podemos abstrair essas verdades de seus conteúdos intuitivos e reinterpretá-las em *outros domínios de referência* de modo a preservá-lhes a veracidade. Isso nos diz que, *mesmo quando sua referência é determinada*, a linguagem só é capaz de expressar verdades *formais*, isto é, aquelas que também são verdadeiras, mediante reinterpretações, em todos os domínios isomorfos àquele onde valem. Verdades *materiais*, que dizem respeito a domínios *específicos*, requerem mais que a linguagem para serem expressas, elas exigem também vivências intuitivas determinantes. Em suma, a linguagem, *por si só*, é capaz de expressar

apenas aspectos formais dos seus domínios de referência, cabendo à intuição a determinação *material* dos nossos discursos (teorias matemáticas e científicas, em particular).

Mas há uma diferença notável entre a percepção sensorial e a intuição matemática. Por exemplo, imaginemos um biólogo interessado em peixes e um matemático interessado em números cardinais finitos (os números naturais). Nem o biólogo nem o matemático tem a esperança de poder intuir individualmente todo e qualquer objeto de seus domínios respectivos de interesse de modo a poder fundar nessas intuições suas teorias de peixes e de números. O matemático, na verdade, parece em pior situação, uma vez que há infinitos números, enquanto apenas uma quantidade finita de peixes. Evidentemente o matemático pode intuir alguns poucos números individualmente, abstraindo a natureza e a ordem dos objetos de coleções que ele pode efetivamente abarcar com a consciência, mas a partir de uma certa quantidade ele perde a capacidade de representar números como algo efetivamente dado e só pode representá-los simbolicamente (a representação simbólica não conta como uma intuição, pois nela o objeto não é presentificado, mas representado *in absentia* por símbolos).

Mas o matemático tem uma vantagem que o biólogo não tem; ele pode, a partir da intuição de uns poucos números, intuir o próprio *conceito* de número (a variação imaginária à qual já nos referimos). Um biólogo não pode fazer isso com a mesma segurança, o conceito de peixe obtido por observação e indução enumerativa está sempre *sub judice* e sujeito à revisão (nada garante, por exemplo, que peixes de águas oceânicas muito profundas se pareçam muito com os peixes que conhecemos). O biólogo está sempre às voltas com a pergunta: o que é um peixe, afinal? Já o matemático *sabe* o que é um número *natural* (se bem que ele esteja sempre se colocando a questão mais geral: afinal, o que é um *número*? O conceito de número – que na matemática atual é mais ou menos o de objeto de um domínio operatório que estende de modo conveniente os tradicionais domínios numéricos – sofreu mais que uma reconceptualização ao longo da história; pense no aparecimento dos números negativos, dos imaginários, dos irracionais, dos quaternions, dos hipercomplexos ... e nada garante que já esgotamos nossa criatividade). A consequência disso é que o matemático pode abrir mão da intuição *individual* de números e basear sua teoria de números na descrição das propriedades intuitivamente apreendidas do *conceito* de número intuitivamente dado. Contrariamente às ciências empíricas em geral, a matemática é essencialmente uma ciência conceitual.

Podemos afirmar com confiança que a teoria de Peano de segunda ordem *interpretada* capta perfeitamente nossa intuição do que seja um número natural: número obtido a partir de

zero pela iteração *finita* da operação sucessor (onde é *intuitivamente* claro que objeto é um *número*, o que é o número *zero*, que operação é a operação *sucessor* e o que significa uma *iteração finita*). Dada essa compreensão, explicitada como um conjunto de verdades evidentes, podemos abandonar a intuição como fonte de verdade e desenvolver nossa teoria de números como o desdobramento *lógico* das verdades intuitivas fundamentais. Em outras palavras, nossa teoria está axiomatizada como uma *axiomática material* (se bem que a intuição esteja restrita à constituição inaugural das axiomáticas materiais, é comum que ela reapareça ao longo do seu desenvolvimento lógico, quanto este está assentado sobre bases insuficientes, como é o caso da axiomática Euclidiana. Isso é um problema e denota falta de clareza na intuição fundadora)

Já o biólogo não pode nunca abandonar o testemunho de suas intuições individuais (observações, experimentação). Seu trabalho é justamente constituir um conceito de peixe (o que é um peixe, que propriedades *características* têm os peixes?), inacessível a partir de umas poucas intuições individuais. O objeto matemático tem uma uniformidade que falta ao objeto natural; por isso o método axiomático é tão pouco acessível às ciências naturais (a Física é uma exceção; por ser capaz de representar de modo conveniente os objetos da intuição física por objetos matemáticos, a Física, antes que uma ciência da realidade física, é uma ciência das nossas *representações matemáticas* da realidade física. Por exemplo, massa, energia, ou posição no espaço e no tempo são representados, ao menos na física clássica, por números reais; velocidade, aceleração e força, por vetores; tensões, por tensores; relações de dependência causal ou simples correlações, por funções; e assim por diante. A experiência do mundo físico é invariavelmente depurada e idealizada como um domínio matemático, *frequentemente a despeito do testemunho da experiência*; nós *não* experimentamos o espaço, por exemplo, como um contínuo matemático homogêneo e uniforme – ou como tendo curvatura nula – mas desde Descartes é assim que o representamos).

Agora, uma vez abandonada a intuição como fonte de verdade, o elo que liga o discurso matemático a algo determinado e singular, a uma intuição particular, torna-se muito frágil. A tentação de *abstrair* o conteúdo material da teoria, isto é, abandonar qualquer referência a uma realidade determinada, se torna irresistível (a isso chamo *abstração formal* ou *formalizante* para distingui-la de outras formas de abstração). Por ação da abstração formal a matemática se transforma numa *ciência formal*, i.e. ciência não de conteúdos intuitivamente determinados, mas de formas abstratas (que só admite propriedades formais) capazes de receber diferentes determinações materiais.

A geometria, por exemplo, por quase toda a sua história, foi entendida como a ciência da nossa experiência do espaço, *desse espaço da experiência*, não outro. Mas se abstrairmos o significado dos termos geométricos, e lhes darmos outros que tornem os axiomas da geometria verdadeiros, a geometria se torna *ipso facto* a teoria desse novo sistema conceitual, mas apenas no que diz respeito a seus aspectos formais (conta-se que Hilbert, numa conversa numa estação, esperando pelo trem, teria dito que podemos substituir os termos “ponto”, “reta” e “plano” da geometria por “mesa”, “cadeira” e “caneca de chopp” que ainda assim teríamos a mesma ciência – pelo visto a conversa se deu no bar...) . Desse modo a geometria, como ciência materialmente determinada, transforma-se em geometria formal, apenas formalmente idêntica àquela.

A partir daí novos desenvolvimentos são possíveis. Se a teoria formalmente abstraída dos seus conteúdos materiais não tem contas a prestar à intuição, se toda a sua verdade é derivada logicamente da verdade de alguns poucos axiomas fundamentais, o que nos impede de alterar esses axiomas – respeitada a coerência lógica (a consistência), claro – de modo a constituir teorias formais arbitrárias, independentemente de serem capazes de “preenchimento” por algum conteúdo material intuitivo determinado ou não? Ou seja, somos naturalmente levados à idéia de uma teoria geral de teorias de *formas possíveis* em que conteúdos materiais *podem* se apresentar à intuição; uma *ontologia formal* nas palavras do filósofo Edmund Husserl. É isso precisamente que a matemática puramente formal é: uma ciência geral de formas possíveis. De verdades intuitivas imediatamente dadas, axiomas são agora entendidos como meras estipulações formais, “definições implícitas”, nas palavras de Hilbert.

Nosso biólogo está longe de sequer conceber algo similar; e mesmo que ele obtivesse um conceito adequado de peixe, que interesse haveria em derivar dele o conceito formal de quase-peixe, se quase-peixes não existem no nosso mundo e é *este* mundo que o biólogo quer conhecer? As ciências materiais, como a biologia, não têm muito interesse em abstrações formais (a extensão da aplicabilidade da matemática a uma ciência determinada depende da extensão em que formas interessam mais a essa ciência que conteúdos). O que não significa que a ascensão a níveis formais de compreensão não possa eventualmente ser metodologicamente interessantes em ciência materiais. Se um dia o biólogo tiver sucesso em fixar um conceito de peixe e tiver a sorte de descobrir um domínio de animais formalmente idênticos a peixes, isto é, tal que toda asserção verdadeira sobre peixes continuar verdadeira nesse domínio quando convenientemente reinterpretada, então ele pode descobrir verdades

desconhecidas sobre peixes investigado esse domínio de animais pisciformes. *É precisamente isso que o matemático faz quando resolve problemas de geometria por métodos analíticos.*

Há pouco mais de dois séculos, quando ainda não havia se dado conta de sua natureza eminentemente formal, a matemática nutria uma razoável desconfiança de “meros exercícios formais”. A tomada de consciência da matemática como uma ciência formal (i.e. de formas) se deu, em grande medida, com o desenvolvimento das geometrias não-euclidianas (mas houve ilustres antecessores, dos quais o mais importante foi a descoberta dos números imaginários no século XVI, na Itália). No começo da sua história (antes dos primeiros anos do século XIX) a geometria hiperbólica era apenas a busca do absurdo que deveria advir da negação do quinto postulado de Euclides mantidos os outros. Pouco a pouco, porém, tornou-se claro, talvez primeiro para Gauss, que nenhuma absurdo iria advir daí, que a geometria hiperbólica era consistente. Ora, então porque não desenvolvê-la, nem que apenas como uma curiosidade, um “exercício formal” (que era como muitos matemáticos de então efetivamente a viam; além de todos os filósofos influenciados por Kant)? A convicção que ela poderia ser de alguma utilidade, na matemática ou em suas aplicações, só se firmou com a evidência dos fatos. Que a teoria da relatividade geral admita que o espaço obedeça a uma geometria hiperbólica (a validade da geometria euclidiana exige certos pressupostos sobre a evolução do Universo) não foi uma constatação ausente de surpresa e estranhamento (mas que teria feito Gauss feliz, ele que expressou o desejo que o mundo fosse efetivamente hiperbólico!)

Como uma ciência formal, a matemática, pelo menos a partir do século XIX, buscou conscientemente desenvolver suas teorias como cálculos regrados, o que exigiu a explicitação dos contextos lógico-linguístico a elas subjacentes, os modos aceitáveis de argumentação, em particular. Um dos motivos para isso era a necessidade de prover as teorias formais da segurança que um suporte intuitivo ausente estava impedido de lhes dar. Em especial, a garantia de consistência. Hilbert, que se tornou o campeão do método axiomático, propondo-o inclusive para as teorias físicas (o sexto problema da lista que Hilbert apresentou em Paris em 1900), via o trabalho metateórico como essencial; para tanto ele criou a metamatemática, ou seja, o estudo matemático em contexto finitário (essencialmente a aritmética primitivamente recursiva, i.e. a teoria que descreve operações com símbolos concretos segundo regras algorítmicas) de teorias matemáticas formalmente abstratas (i.e. não-interpretadas) formais axiomatizadas, com o objetivo precípua de demonstrar-lhes a consistência, e assim *demonstrar* que elas eram efetivamente teorias de formas *possíveis*. Os teoremas de Gödel mostraram as limitações intrínsecas desse programa. Gödel nos mostrou que, ao menos segundo uma determinada concepção de sistema formal, certos sistemas



axiomáticos formais são incapaz de dar conta da noção de verdade matemática. Podemos dizer, numa expressão formular, que nossa apreensão da verdade matemática está além de nossa compreensão, se nossa concepção de compreensão for articulada nos moldes da noção efetiva de sistema axiomático formal; o que coloca um problema de ordem filosófica: como as noções de compreensão e conhecimento se relacionam com a de verdade no campo da matemática? Mas essa é uma outra história...

### *Os teoremas de Gödel (vistos mais de perto)*

Nós derivamos acima o primeiro teorema de incompletude de Gödel da teorema de Church, quando na verdade este veio depois daquele e lhe deve a idéia da demonstração. Por isso, vamos aqui derivar os teoremas de Gödel, o primeiro e o segundo, na sua forma original. Essas demonstrações requerem, além de uma idéia genial – a aritmetização da metalinguagem – e conceitos adequados para colocá-la em prática – basicamente, o de função primitivamente recursiva – uma trabalho técnico tedioso, mas não particularmente difícil. Iremos aqui tentar entender as idéias passando ao largo dos detalhes técnicos.

A ação, por assim dizer, se passa em três níveis: 1) no nível do domínio estruturado dos inteiros positivos  $\mathbf{N}$ , que suporemos existente sem indagar *o quê* garante essa existência. Nós não especificaremos a estrutura de  $\mathbf{N}$ , suporemos apenas que ela exige uma linguagem suficientemente rica para poder ser descrita, que denotaremos por  $L_{\mathbf{N}}$  (sabemos, por alguns dos resultados acima, que essa linguagem precisa ter pelo menos dois símbolos de funções binárias, para a soma e para o produto); 2) no nível da teoria  $T$ , expressa em  $L_{\mathbf{N}}$ , que descreve  $\mathbf{N}$ ; ou seja, tal que  $\mathbf{N}$  seja um modelo de  $T$  ( $T$  precisa conter, como axiomas, pelo menos as definições recursivas da soma e do produto e alguns fatos elementares sobre a função sucessor e a relação de ordem); e, finalmente, 3) no nível da metateoria, isto é, o discurso sobre  $T$ , expressa em linguagem cotidiana (português, no nosso caso, enriquecido com alguns símbolos que facilitam a expressão); asserções típicas da metateoria são “ $\varphi$  é um teorema de  $T$ ”, “ $T$  é consistente”, “a sequência  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  de fórmulas de  $L_{\mathbf{N}}$  é uma dedução em  $T$ ”, etc.

A idéia central de Gödel foi fazer  $T$  de alguma forma referir-se a si proprio, traduzindo primeiramente asserções metateóricas sobre  $T$  em asserções sobre  $\mathbf{N}$  e, depois, representando de algum modo essas asserções por sentenças de  $L_{\mathbf{N}}$  (o que requer que  $L_{\mathbf{N}}$  tenha suficiente poder expressivo). Gödel mostrou que uma parte substancial das sentenças sobre  $\mathbf{N}$  que traduzem asserções metateóricas, se verdadeiras em  $\mathbf{N}$ , são demonstráveis em  $T$ . Há

excessões notáveis, a sentença de  $L_N$  que traduz a expressão “T é consistente”, mesmo se verdadeira em  $N$ , não pode ser demonstrada em T (esse é o conteúdo do segundo teorema de incompletude de Gödel). Na demonstração do primeiro teorema de incompletude, Gödel, usando o fato que T pode, do modo acima esboçado, referir-se a si próprio, constrói uma sentença G de  $L_N$  que expressa “G não é teorema de T”; ou seja, uma sentença que afirma a sua própria indemonstrabilidade em T. Essa sentença é verdadeira em  $N$ , mas não pode ser um teorema de T, o que demonstra a incompletude sintática de T. Vamos aos detalhes:

1) a numeração de Gödel: o primeiro passo na aritmetização da metateoria é representar expressões de  $L_N$  por números naturais. O alfabeto de  $L_N$  é finito (ou, pelo menos, recursivo); portanto, podemos de modo efetivo associar a cada símbolo da linguagem um número natural; seja ‘s’ o número associado ao símbolo s. Agora, se  $\langle s_1, s_2, \dots, s_k \rangle$  é uma sequência de símbolos de  $L_N$ , por exemplo, uma fórmula dessa linguagem, associamos a ela o número (dito *o número de Gödel da sequência*)  $2^{s_1} \cdot 3^{s_2} \dots p_k^{s_k}$ , onde  $p_k$  é o k-ésimo número primo. Há uma certa ambiguidade nessa numeração, pois o símbolo s e a sequência  $\langle s \rangle$  recebem diferentes números. O teorema fundamental da aritmética garante que, dado um número natural qualquer, nós podemos decidir efetivamente se ele representa um símbolo ou sequência de símbolos de  $L_N$ , e que símbolo ou sequência são esses. Por método análogo nós podemos numerar sequências de fórmulas de  $L_N$  (por exemplo, deduções). Representemos por ‘A’ o *número de Gödel* da expressão A.

2) funções primitivamente recursivas: essa é uma noção introduzida por Gödel, que foi depois estendida, por outros autores, para a noção de função recursiva geral. A noção de recursividade se mostrou central na análise lógica da matemática, tornando-se com o tempo a noção fulcral da teoria da computação: funções recursivas são sempre computáveis, e é uma crença generalizada (a qual nos referimos frequentemente como “tese de Church”) que todas as funções computáveis são recursivas. Nossa crença na tese de Church deriva do fato que para *todas* as definições *matemáticas* de função computável, a tese é demonstrável.

Uma função definida em  $N$  é *primitivamente recursiva* se pertence ao *menor* conjunto de funções numéricas que contém a base formada pela função sucessor, as funções identidade  $I(n_1, \dots, n_i, \dots, n_k) = n_i$ , para qualquer  $n_i$ , as funções projeção  $\pi_i(n_1, \dots, n_i, \dots, n_k) = n_i$  e é fechado por *composição*  $f \bullet (g_1, \dots, g_k)(n_1, \dots, n_l) = f(g_1(n_1, \dots, n_l), \dots, g_k(n_1, \dots, n_l))$  e por *recursão primitiva*:  $f(n_1, \dots, n_l, 0) = g(n_1, \dots, n_l)$  e  $f(n_1, \dots, n_l, n + 1) = h(n_1, \dots, n_l, n, f(n_1, \dots, n_l, n))$  (neste caso, f é definida por recursão primitiva a partir de g e h). Exemplos clássicos de funções definidas por recursão primitiva são a soma, o produto, a exponencial, etc. Provavelmente

todas as funções numéricas que você conhece são primitivamente recursivas. Uma relação (ou predicado, que é uma relação unária) é primitivamente recursiva se sua função característica o for (se  $R$  é uma relação  $k$ -ária, a função característica de  $R$  é definida assim:  $\chi_R(n_1, \dots, n_k) = 1$  se a  $k$ -upla  $(n_1, \dots, n_k)$  estiver na relação  $R$ , e 0 caso contrário).

Se acrescentarmos definições por *minimização*, a saber, se  $R(x_1, \dots, x_n, y)$  é uma relação recursiva total (i.e. toda  $(n+1)$ -upla  $(x_1, \dots, x_n, y)$  ou bem está, ou bem não está na relação  $R$ ; não há situações em aberto), então a função  $f(x_1, \dots, x_n) = \mu y R(x_1, \dots, x_n, y) =$  o menor  $y$  tal que  $R(x_1, \dots, x_n, y)$  é recursiva (uma relação é recursiva se sua função característica o for) temos o conjunto das *funções recursivas (totais)* (poderíamos também admitir funções parciais, em cujo caso teríamos o conjunto das funções recursivas *parciais*).

3) Agora, asserções metateóricas como, por exemplo, “ $\phi$  é uma fórmula de  $L_N$  onde a variável  $x$  ocorre livre”, com o auxílio da numeração de Gödel, transforma-se na asserção *sobre  $N$* :  $\text{Var}(‘x’, ‘\phi’)$ ; onde  $\text{Var}$  é uma relação binária definida em  $N$  tal que  $\text{Var}(n, m)$  se, e somente se,  $n$  é o número de Gödel da uma variável  $x$  de  $L_N$ ,  $m$  é o número de Gödel de uma fórmula  $\phi$  de  $L_N$  e  $x$  ocorre livre em  $\phi$ . Grande parte do trabalho na demonstração dos teoremas de Gödel está em mostrar que relações como esta são primitivamente recursivas. É fácil nos convenceremos que elas são, realmente, computáveis. No exemplo acima, sabemos que há algoritmos que nos permitem revelar a variável e a fórmula que “se escondem” em  $m$  e  $n$ , se elas, de fato, estiverem lá, e nos dizer se, realmente,  $\text{Var}(n, m)$  é verdadeira (e, portanto,  $\chi_{\text{Var}(n, m)} = 1$ ), ou nos dizer que  $\text{Var}(n, m)$  é falsa (e, portanto,  $\chi_{\text{Var}(n, m)} = 0$ ). A demonstração desse fato, porém, envolve mostrar que a função característica de  $\text{Var}$  pode ser definida por composição ou recursão primitiva a partir da base. Mas, afinal, porque esse trabalho todo?

4) Este é o fato mais importante: funções e relações primitivamente recursivas são *representáveis* em  $T$  (é para isso que  $T$  deve conter suficiente aritmética). Ou seja, se  $R(k_1, \dots, k_n)$  é uma relação primitivamente recursiva, então existe uma fórmula  $\phi(x_1, \dots, x_n)$  de  $L_N$  tal que se  $(a_1, \dots, a_n)$  estiver na relação  $R$ , então  $\phi(\mathbf{ka}_1, \dots, \mathbf{ka}_n)$  é *demonstrável* em  $T$ , e se  $(a_1, \dots, a_n)$  não estiver na relação  $R$ , então  $\neg\phi(\mathbf{ka}_1, \dots, \mathbf{ka}_n)$  é demonstrável em  $T$ ; onde  $\mathbf{ka}_1, \dots, \mathbf{ka}_n$  são os *numerais* que representam os números  $a_1, \dots, a_n$  em  $L_N$ ; isto é,  $\mathbf{1} = S0$ ,  $\mathbf{2} = SS0$ , etc.

Analogamente para funções primitivamente recursivas: se  $f(a_1, \dots, a_n) = 1$ , então existe um termo (isto é, uma expressão da linguagem que representa, numa interpretação e numa valoração determinadas, um objeto do universo da interpretação)  $\mathbf{t}(x_1, x_2, x_3)$  da linguagem tal

que  $t(\mathbf{ka}_1, \dots, \mathbf{ka}_n) = \mathbf{k}_l$  é teorema de T; e se  $f(a_1, \dots, a_n) \neq l$ , então  $\neg(t(\mathbf{ka}_1, \dots, \mathbf{ka}_n) = \mathbf{k}_l)$  é teorema de T. A palco está montado para a cena final.

5) Estas são algumas funções e relações primitivamente recursivas: a)  $\text{sub}(b, n, a) = c$  se, e somente se,  $b = 'x'$ , onde  $x$  é um símbolo de variável de  $L_N$ ,  $a = '\varphi(x)'$ , onde  $\varphi(x)$  é uma fórmula de  $L_N$  onde a variável  $x$  ocorre livre, e  $c = '\varphi(\mathbf{k}_n)'$ , onde  $\varphi(\mathbf{k}_n)$  denota a fórmula  $\varphi$  com a variável  $x$  substituída, sempre que ocorre livre, pelo numeral  $\mathbf{k}_n$ . Existe, pelo teorema de representação, um termo  $\text{sub}(x_1, x_2, x_3)$  de  $L_N$  tal que, se  $\text{sub}(b, n, a) = c$ , então  $\text{sub}(\mathbf{k}_b, \mathbf{k}_n, \mathbf{k}_a) = \mathbf{k}_c$  é demonstrável em T, e se  $\text{sub}(b, n, a) \neq c$ , então  $\neg \text{sub}(\mathbf{k}_b, \mathbf{k}_n, \mathbf{k}_a) = \mathbf{k}_c$  é demonstrável em T. b)  $\text{ded}(a, b)$  se, e somente se,  $a$  é o número de Gödel de uma derivação em T de uma fórmula cujo número de Gödel é  $b$ ;  $\text{ded}(\mathbf{k}_a, \mathbf{k}_b)$  é a fórmula que representa  $\text{ded}(a, b)$ .

Considere agora a seguinte fórmula de  $L_N$ , que denotaremos por  $\text{Th}(x) = \exists y(\text{ded}(y, x))$ . Evidentemente se essa fórmula é satisfeita em  $\mathbf{N}$  para algum número  $a$ , então existe um número  $b$  tal que  $\text{ded}(b, a)$ . Isto é,  $b$  é o número de Gödel de uma derivação da fórmula  $\varphi$  cujo número de Gödel é  $a$ ; ou seja  $\varphi$  é um teorema de T. Nesse caso  $\text{ded}(\mathbf{k}_b, \mathbf{k}_a)$  é um teorema de T.

Seja  $\varphi(x) = \neg \text{Th}(\text{sub}(\mathbf{k}_x, x, x))$ , onde  $x$  é um símbolo de variável, ' $x$ ' é seu número de Gödel e  $\mathbf{k}_x$  é o numeral que representa esse número, e seja  $f$  o número de Gödel de  $\varphi(x)$ .

Defina agora  $G$  como a sentença  $\neg \text{Th}(\text{sub}(\mathbf{k}_x, \mathbf{k}_f, \mathbf{k}_f))$ . Note que se  $g$  é o número de Gödel de  $G$ , então  $\text{sub}('x', f, f) = g$ . Portanto, podemos demonstrar em T a sentença  $\text{sub}(\mathbf{k}_x, \mathbf{k}_f, \mathbf{k}_f) = \mathbf{k}_g$ , ou seja, a substituição da variável  $x$  em  $\varphi(x)$  por  $\mathbf{k}_f$  – isto é,  $\varphi(\mathbf{k}_f)$  – é a própria sentença  $G$ ! Portanto o significado de  $G$  é “a sentença  $G$  não é um teorema”;  $G$  refere-se a si própria e se declara indemonstrável. Isso nos lembra o famoso paradoxo do mentiroso: segundo Platão, o espartano Epimenedes, não sem ironia, dizia que todo espartano era mentiroso, e que isso era a mais pura verdade.

A questão agora é saber se  $G$  é demonstrável em T. Supondo que sim temos que  $\text{ded}(b, g)$  para algum número  $b$ ; ou seja,  $\text{ded}(\mathbf{k}_b, \mathbf{k}_g)$  é teorema de T; portanto,  $\exists y(\text{ded}(y, \mathbf{k}_g))$  também é teorema de T. Portanto,  $\text{Th}(\mathbf{k}_g)$  é teorema de T. Agora, como vimos acima,  $\text{sub}(\mathbf{k}_x, \mathbf{k}_f, \mathbf{k}_f) = \mathbf{k}_g$  também é teorema de T; assim, substituindo iguais por iguais, temos  $G = \neg \text{Th}(\mathbf{k}_g)$ , e como por hipótese  $G$  é teorema de T, então  $\neg \text{Th}(\mathbf{k}_g)$  também é teorema de T. Absurdo, pois T é consistente. Logo,  $G$  não é teorema de T.

A consistência de T é um pressuposto, pois admitimos de saída que T tem um modelo (a saber,  $\mathbf{N}$ ). Se não assumirmos esse pressuposto o que mostramos foi que se T é consistente, então a sentença  $G$  de Gödel não é demonstrável em T. Essa asserção metateórica também pode ser expressa na linguagem  $L_N$ . De fato, T é consistente se, e somente se, a fórmula  $0 =$

SO, ou  $0 = 1$ , não é demonstrável em T, isto é, se  $f = '0=1'$ , então para todo número  $b$ ,  $\text{ded}(b,f)$  é falsa. Sej então  $\text{ConT}$  a sentença  $\forall x(\neg\text{ded}(x,\mathbf{k}_f))$ , se T demonstra  $\text{ConT}$ , então T é consistente. O que o primeiro teorema de incompletude de Gödel nos diz, na verdade, é que  $\text{ConT} \rightarrow \neg\text{Th}(\mathbf{k}_g)$  é um metateorema, isto é, um teorema da metateoria. Se T tivesse recursos suficientes, poderíamos formalizar essa demonstração metateórica em T, e então teríamos que T demonstraria  $\text{ConT} \rightarrow \neg\text{Th}(\mathbf{k}_g)$ . Ora, se esse for o caso, T *não* poderia demonstrar  $\text{ConT}$ , pois caso contrário, T demonstraria  $\neg\text{Th}(\mathbf{k}_g)$ , isto é, G seria teorema de T, uma vez  $\neg\text{Th}(\mathbf{k}_g)$  nada mais é que G. Absurdo. Esse é o conteúdo do *segundo teorema de incompletude de Gödel*: se T é suficientemente forte para que possamos formalizar em T a demonstração do primeiro teorema de Gödel, então T não pode demonstrar a sua própria consistência (isto é,  $\text{ConT}$ ). Esse corolário do primeiro teorema de incompletude foi percebido por Von Neumann, que estava na platéia quando Gödel apresentou seu trabalho, sem causar muito interesse, num congresso em Viena em 1930; depois da apresentação de Gödel, Von Neumann apontou-lhe esse fato, do qual, no entanto, Gödel, evidentemente, já se tinha dado conta.

6) O fato de T não demonstrar G não seria nenhum escândalo se G fosse falsa em  $\mathbf{N}$ , a estrutura que T descreve. Ocorre que G é *verdadeira* em  $\mathbf{N}$ ; e, portanto, a descrição que T provê de  $\mathbf{N}$  é *incompleta*. Vejamos: como T não demonstra G, para qualquer número  $n$ ,  $\text{ded}(n,g)$  é falsa. Isto é, para todo número natural  $n$ ,  $\neg\text{ded}(\mathbf{k}_n,\mathbf{k}_g)$  é um teorema de T. Portanto, como  $\text{sub}(\mathbf{k}_x,\mathbf{k}_f,\mathbf{k}_f) = \mathbf{k}_g$  é teorema de T, temos que para todo  $n$ ,  $\neg\text{ded}(\mathbf{k}_n,\text{sub}(\mathbf{k}_x,\mathbf{k}_f,\mathbf{k}_f))$  também é teorema de T ((chamemos esse fato de 1). Suponhamos que  $\neg G$  seja teorema de T; logo,  $\text{Th}(\text{sub}(\mathbf{k}_x,\mathbf{k}_f,\mathbf{k}_f))$ , ou seja,  $\exists x(\text{ded}(x,\text{sub}(\mathbf{k}_x,\mathbf{k}_f,\mathbf{k}_f)))$  também é teorema de T (2).

Se T é tal que para todo número  $n$ ,  $\neg\varphi(\mathbf{k}_n)$  e  $\exists x\varphi(x)$  são teoremas, T diz-se  *$\omega$ -inconsistente*. Em caso contrário, T é  *$\omega$ -consistente*. É fácil de ver que  $\omega$ -consistência implica consistência (pois se T é inconsistente, T demonstra qualquer coisa), mas não reciprocamente (T poderia ser consistente e ter apenas modelos que estendem  $\mathbf{N}$ , isto é, com mais elementos que  $\mathbf{N}$ ). Ora, como T tem a estrutura  $\mathbf{N}$  como modelo, T é evidentemente  $\omega$ -consistente. Logo, (2) não ocorre, ou seja,  $\neg G$  não é teorema de T. Se não quisermos supor de saída que T é  $\omega$ -consistente, o que mostramos é que *se* T for  $\omega$ -consistente, *então*  $\neg G$  também não é teorema de T. Ou seja, *T é sintaticamente incompleta*.

Agora, G ou  $\neg G$ , uma das duas, tem que ser verdadeira em  $\mathbf{N}$ . Qual delas? Ora, como vimos acima, para todo  $n$ ,  $\neg\text{ded}(\mathbf{k}_n,\text{sub}(\mathbf{k}_x,\mathbf{k}_f,\mathbf{k}_f))$  é teorema de T. Portanto, para cada número  $n$ ,  $\neg\text{ded}(\mathbf{k}_n,\text{sub}(\mathbf{k}_x,\mathbf{k}_f,\mathbf{k}_f))$  é verdadeira em  $\mathbf{N}$  (que é um modelo de T); logo,  $\neg\exists x(\text{ded}(x,\text{sub}(\mathbf{k}_x,\mathbf{k}_f,\mathbf{k}_f))) = \neg\text{Th}(\text{sub}(\mathbf{k}_x,\mathbf{k}_f,\mathbf{k}_f)) = G$  é verdadeira em  $\mathbf{N}$ . Em resumo, G é

verdadeira em  $\mathbf{N}$ , mas não é demonstrável em  $T$ ; ou seja,  $T$  é *incompleta com relação a  $\mathbf{N}$* . A pergunta agora é: como *sabemos* que  $G$  é verdadeira em  $\mathbf{N}$ ? Evidentemente, porque sabemos que  $\mathbf{N}$  é modelo de  $T$ , o que é demonstrável na teoria dos conjuntos, uma teoria muito mais potente que  $T$ . No frigar dos ovos, é a teoria de conjuntos que demonstra que  $G$  deve ser verdadeira na estrutura  $\mathbf{N}$ . O fato de  $T$  não demonstrar  $G$  nos diz, entre outras coisas, que  $T$  é mais fraca que a teoria de conjuntos.

7) A importância do primeiro teorema de incompletude de Gödel não está em sua conclusão, que uma *determinada* teoria é incompleta, mas em seu método de demonstração, que nos ensina a produzir uma sentença indecidível (i.e. indemonstrável e irrefutável) em qualquer teoria que contenha pelo menos aquele mínimo de aritmética contido na teoria  $\mathbf{N}$  estudada acima (e que permite, portanto, a representação de qualquer função primitivamente recursiva). Não importa que axiomas adicionais juntemos à essa aritmética minimal, o resultado será inevitavelmente uma teoria incompleta. O que o teorema de Gödel mostra claramente é a incapacidade de toda uma classe de sistemas axiomáticos formalizados *de um certo tipo* de decidir sobre tudo o que lhes diz respeito, isto é, sobre toda sentença que possa ser expressa em suas linguagens.

Mas a situação pode alterar-se radicalmente se estendermos não os axiomas, mas os *recursos demonstrativos* da teoria. Em primeiro lugar notemos que a sentença indecidível  $G$  de Gödel é uma sentença do tipo  $\Pi_0^1$ , isto é,  $G = \forall x(Rx)$ , onde  $R$  é uma relação primitivamente recursiva. De fato,  $G = \neg \text{Th}(\text{sub}(\mathbf{k}_x, \mathbf{k}_f, \mathbf{k}_f)) = \forall x(\neg \text{ded}(x, \text{sub}(\mathbf{k}_x, \mathbf{k}_f, \mathbf{k}_f)))$ , mas  $Rx = \neg \text{ded}(x, \text{sub}(\mathbf{k}_x, \mathbf{k}_f, \mathbf{k}_f))$  é uma relação primitivamente recursiva. Por outro lado, para todo  $n$ ,  $\neg \text{ded}(n, \text{sub}(\mathbf{k}_x, \mathbf{k}_f, \mathbf{k}_f))$  é verdadeira em  $\mathbf{N}$ , pois caso contrário existiria um número  $n$  tal que  $\text{ded}(n, \text{sub}(\mathbf{k}_x, \mathbf{k}_f, \mathbf{k}_f))$  seria verdadeira e, portanto  $\text{ded}(\mathbf{k}_n, \text{sub}(\mathbf{k}_x, \mathbf{k}_f, \mathbf{k}_f))$  seria demonstrável. Porém, como  $\text{sub}(\mathbf{k}_x, \mathbf{k}_f, \mathbf{k}_f) = \mathbf{k}_g$  é um teorema, isso implicaria que  $\text{ded}(\mathbf{k}_n, \mathbf{k}_g)$  seria demonstrável; em suma, seria demonstrável, e portanto verdadeiro, que  $G$  é demonstrável, o que é uma contradição, pois  $G$  não é demonstrável! Assim, para todo número  $n$ ,  $\neg \text{ded}(\mathbf{k}_n, \text{sub}(\mathbf{k}_x, \mathbf{k}_f, \mathbf{k}_f)) = R\mathbf{k}_n$  é teorema, mas  $\forall x(Rx)$  não é.

Suponha agora que introduzamos na lógica subjacente a  $T$  uma regra *infinitária* de demonstração, a chamada *regra- $\omega$* : para qualquer fórmula  $\varphi(x)$ , das premissas  $\varphi(\mathbf{k}_n)$ , para todo número  $n$ , conclua  $\forall x(\varphi(x))$ . Ora, como  $R\mathbf{k}_n$  é demonstrável em  $T$ , para todo  $n$ , essa regra nos permitiria concluir que  $G$  é um teorema da teoria nessa lógica ampliada. Ou seja, a demonstração da incompletude da teoria por esse método estaria bloqueada.

Isso, claro, não quer dizer que a teoria  $T$  seja completa nessa lógica. Porém, nesse contexto, a completude da  $T$  pode ser facilmente demonstrada. Considere a seguinte extensão de  $T$ : primeiramente juntemos a  $L_N$  um símbolo de constante  $c$ ; seja agora  $T^* = T \cup \{-(c = \mathbf{k}_0), \neg(c = \mathbf{k}_1), \dots, \neg(c = \mathbf{k}_n), \dots\}$ . As novas sentenças acrescentadas a  $T$  dizem que  $c$  não poderá nunca ser interpretado como um número, isto é, como um dos objetos que interpretam os  $\mathbf{k}_n$ 's. Mas como as derivações em  $T^*$  podem lançar mão da regra- $\omega$ , as novas sentenças implicam (tomando  $\varphi(x) = \neg(c = x)$ ) que  $\forall x(\neg(c = x))$  é um teorema; logo verdadeira em todo modelo de  $T^*$ , o que implica que  $c$  não tem interpretação em nenhum modelo de  $T^*$ . Ou seja, admitida a regra- $\omega$ ,  $T^*$  não pode ter modelo. Mas se  $T$  tivesse um modelo que contivesse mais elementos que os números, isto é, os objetos que interpretam os  $\mathbf{k}_n$ 's, então poderíamos interpretar  $c$  como um deles e teríamos um modelo para  $T^*$ . Conclusão: admitida a regra- $\omega$ ,  $T$  só pode ter modelos cujo universos sejam as interpretações dos  $\mathbf{k}_n$ 's, isto é,  $\{0,1,2,\dots\}$ . Evidentemente, esses modelos são todos isomorfos; o isomorfismo entre os modelos  $\mathbf{I}$  e  $\mathbf{J}$  associa  $\mathbf{I}(\mathbf{k}_n)$ , a interpretação de  $\mathbf{k}_n$  em  $\mathbf{I}$ , com  $\mathbf{J}(\mathbf{k}_n)$ , a interpretação de  $\mathbf{k}_n$  em  $\mathbf{J}$ , para todo  $n$ . Em suma,  $T$  é  $\aleph_0$ -categórica e, portanto, completa. Portanto, nós poderíamos demonstrar *todas* as verdades aritméticas em  $T$  se admitíssemos uma regra infinitária de inferência; isso, porém, tira a efetividade do sistema dedutivo. Por exemplo, nós não poderíamos decidir em tempo finito (algoritmicamente, i.e. efetivamente) se uma dada sequência de fórmulas seria ou não uma demonstração, pois essa sequência poderia ter comprimento infinito (i.e. conter infinitos passos; pense numa demonstração que contenha *todas* as sentenças  $\varphi(\mathbf{k}_n)$ , para todo os números  $n$ , como premissas).

8) Como vimos acima, se  $T$  é suficientemente forte para que possamos formalizar em  $T$  a demonstração do teorema de incompletude, então  $\text{Con}T$  não é demonstrável em  $T$ . isto é,  $T$  não pode demonstrar a sua própria consistência. Suponhamos que  $T$  tenha, de fato, tais recursos expressivos e dedutivos (a aritmética de Peano de primeira ordem, ou a aritmética primitivamente recursiva são desse tipo – a aritmética primitivamente recursiva permite, por meio de seus axiomas, definições de funções por composição e recursão primitiva). Então  $T$  não demonstra  $\text{Con}T$ . Mostraremos agora que se  $T$  é  $\omega$ -consistente,  $T$  também não demonstra  $\neg\text{Con}T$  e, conseqüentemente,  $\text{Con}T$  é verdadeira na estrutura  $\mathbf{N}$ .

Para todo  $n$ ,  $\neg\text{ded}(n,f)$ , onde  $f = '0 = 1'$ , é verdadeira em  $\mathbf{N}$ ; logo, para todo  $n$ ,  $\neg\text{ded}(\mathbf{k}_n, \mathbf{k}_f)$  é demonstrável em  $T$ . Logo, por  $\omega$ -consistência,  $\exists x(\text{ded}(x, \mathbf{k}_f)) = \neg\forall x(\neg \text{ded}(x, \mathbf{k}_f)) = \neg\text{Con}T$  não é teorema de  $T$ . Se  $\neg\text{Con}T$  fosse verdadeira em  $\mathbf{N}$ , então existiria um número  $n$  tal que

$\text{ded}(n, f)$ , contrariando a afirmação que abre esse parágrafo. Logo,  $\text{ConT}$  é verdadeira em  $\mathbf{N}$  (mas não é demonstrável em  $\mathbf{T}$ , o que mais uma vez mostra a incompletude de  $\mathbf{T}$ ).

Hilbert patrocinou a introdução da regra- $\omega$  como um recurso para evitar a conclusão do teorema de Gödel (no mesmo ano de 1931 em que Gödel publicou seus resultados).

9) Rosser logrou demonstrar que a hipótese de  $\omega$ -consistência nos teoremas acima pode ser enfraquecida para a simples consistência. Para tanto, basta introduzir uma relação de ordem entre *termos* da linguagem e mudar um pouco a definição da sentença indecidível  $G$ .

10) O lógico polaco-americano Alfred Tarski, cujo trabalho o coloca, junto com Gödel, Frege e Aristóteles, no panteão da glória da Lógica, demonstrou o seguinte teorema: se  $A$  é uma sentença de  $L_N$ , então *não existe* nenhuma fórmula  $\varphi(x)$  de  $L_N$ , onde apenas a variável  $x$  ocorre livre, tal que  $\varphi(\mathbf{k}_A) \leftrightarrow A$  é um teorema de  $\mathbf{T}$ . Isto é, não existe uma “definição de verdade” em  $\mathbf{T}$ ; ou seja, uma fórmula que é satisfeita (i.e. verdadeira) num modelo qualquer de  $\mathbf{T}$  para o objeto que interpreta nesse modelo o numeral associado ao número de Gödel de uma sentença se, e só se, essa sentença é verdadeira nesse modelo (como Tarski foi quem definiu o conceito de verdade para linguagens formais, costuma-se brincar dizendo que ele foi quem, simultaneamente, definiu o conceito de verdade e demonstrou que a verdade é indefinível). Como exercício tente demonstrar esse teorema copiando a demonstração do primeiro teorema de Gödel, mas trocando, na definição de  $G$ ,  $\text{Th}$  por  $\varphi$ , supondo, por absurdo, que essa fórmula exista.

11) Algumas considerações finais sobre o significado dos teoremas de Gödel: em primeiro lugar, os teoremas de Gödel não impõem, como muito já se disse, um limite intransponível a nossas capacidades cognitivas. O primeiro teorema não afirma que há coisas que nós não podemos saber (afinal, nós *sabemos* que a sentença de Gödel é *verdadeira*), mas apenas que não as podemos *demonstrar* em um *determinado* sistema axiomático *de um certo tipo* (entretanto, nós podemos demonstrar  $G$  trivialmente na extensão obtida de  $\mathbf{T}$  pela adjunção de  $G$  como um novo axioma; essa extensão, porém, terá a sua própria sentença indecidível; ou então, estendendo a lógica subjacente a  $\mathbf{T}$  pela adjunção da regra- $\omega$ ). Nada no teorema impede que demonstremos o que quer que seja, desde que abramos mão de querermos demonstrar *tudo* num *único* sistema axiomático, ou insistamos na efetividade como condição *sine qua non* de demonstrações. Por fim, ele não implica que apenas teorias axiomáticas formais triviais sejam completas. Importantes teorias matemáticas são completas: a geometria euclidiana, a teoria dos corpos reais fechados (ou análise real elementar; ou seja, a teoria dos corpos ordenados onde cada elemento positivo tem raiz quadrada e todo



polinômio de grau ímpar tem raiz; essa teoria, chamemo-la RCF, axiomatiza  $\text{Th}\mathbf{R}$ , onde  $\mathbf{R}$  é o corpo ordenado dos números reais, isto é,  $\text{Cn}(\text{RCF}) = \text{Th}\mathbf{R}$ , a teoria dos corpos algebricamente fechados de característica zero, a teoria das ordens lineares densas sem pontos limites, etc., etc.

O segundo teorema não implica, por sua vez, a impossibilidade de se demonstrar a consistência de nenhum sistema axiomático formal, desde que o façamos em contextos adequados. O que o teorema impede é a possibilidade de se demonstrar a consistência de teorias onde se pode desenvolver um mínimo de aritmética por meios que se possam representar nesse *mesmo* sistema ou subsistemas dele.

O célebre programa de Hilbert tinha por objetivo axiomatizar formalmente teorias matemáticas de modo que elas pudessem demonstrar todo enunciado verdadeiro nos seus domínios (os domínios descritos por elas) e, ademais, fossem demonstravelmente consistentes por meios metamatemáticos muito limitados (essencialmente a aritmética primitivamente recursiva). Os teoremas de Gödel foram o fim dessas aspirações; o que não quer dizer que o programa de Hilbert não tenha tido um relativo sucesso, e esteja vivo e bem ainda hoje, nas inúmeras demonstrações de consistência relativa obtidas (demonstração da consistência de uma teoria supondo a consistência de outra, ou outras).

12) A sentença de Gödel, apesar de ser uma legítima sentença aritmética verdadeira, mas formalmente indemonstrável na teoria original, é obviamente uma sentença bastante artificial. Há alguma sentença aritmética simples que expresse alguma verdade formalmente indemonstrável? Goodstein, em 1944, demonstrou o seguinte teorema: tome um número qualquer, por exemplo, 13; escreva-o em base 2:  $13 = 2^3 + 2^2 + 2^0$ ; escreva todos os expoentes em base 2:  $13 = 2^{2+1} + 2^2 + 2^0$ . Agora substitua todos os 2 por 3 e subtraia 1 do resultado final; prossiga, substitua 3 por 4 e subtraia 1 do resultado final, e assim sucessivamente. Não importa qual seja o número de partida, depois de um longo caminho chegamos invariavelmente a zero! Kirby e Paris (1982) demonstraram que essa é uma *verdade aritmética demonstravelmente indemonstrável* na aritmética de Peano elementar. Paris e Harrington demonstraram também que um certo teorema da análise combinatória é indemonstrável em P.

13) Que limitações os teoremas de Gödel impõem à prática matemática? Na verdade, nenhuma. O primeiro teorema nos diz que não devemos esperar demonstrar toda verdade da aritmética, ou teorias que de algum modo contenham um mínimo de aritmética, naquelas teorias elementares com as quais buscamos explicitar nossas intuições numéricas. Ou seja, podemos levantar questões num contexto onde não podemos resolvê-las. Mas isso está longe

de ser uma novidade na prática matemática. Tome o exemplo dos problemas clássicos de construção da geometria grega (a quadratura do círculo, a triseção do ângulo, a duplicação do cubo). Eles só se mostraram tratáveis e demonstravelmente insolúveis quando *saímos* do contexto geométrico e encontramos um modo de representá-los algebricamente. O grande (ou último) teorema de Fermat é facilmente expresso em aritmética elementar, mas precisamos introduzir muita estrutura no domínio dos números naturais e estender consideravelmente a teoria elementar dos números se quisermos demonstrá-lo (ninguém em sã consciência espera um dia poder demonstrá-lo por indução finita!) Com frequência o contexto de enunciação de um problema matemático não é o contexto de solução desse problema.

Já o segundo teorema não permite que a demonstração de consistência de uma teoria que contenha alguma aritmética seja formalizada nessa mesma teoria. E daí? Nós não temos muitas demonstrações de consistência para começo de conversa, e raramente, se é que alguma vez isso aconteceu, a consistência de alguma teoria matemática relevante foi posta em dúvida. Na verdade, os matemáticos sequer abrem mão de teorias evidentemente eivadas de absurdos, como era o Cálculo de Leibniz e Newton, se elas são úteis. Como dizia D'Alembert: vá em frente que a fé lhe virá.

### *Bibliografia*

Cassini, Alejandro. *El juego de los principios. Uma introducción al método axiomático*. Buenos Aires: A-Z editora, 2006

Cassou-Noguès, Pierre. *Les démons de Gödel. Logique et folie*. Paris: Seuil, 2007

Enderton, Herbert B. *A Mathematical Introduction to Logic* (2<sup>nd</sup> ed.). New York: Elsevier, 2002

Jech, Thomas J. *The Axiom of Choice*. Mineola, NY: Dover, 1973

Penrose, Roger. *The Large, the Small and the Human Mind*. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.

Robbin, Joel W. *Mathematical Logic. A First Course*. Mineola, NY: Dover, 1997

Shoenfield, Joseph R. *Mathematical Logic*. Reading: Addison-Wesley, 1967