Axiomas da Geometria Euclidiana

Sadao Massago

Abril de 2010

Sumário

1 Introdução

Este texto apresenta os axiomas da geometria euclidiana, acompanhado de comentários importantes. No entanto, ainda não é um texto completo, pois foi elaborado com o objetivo de ser usado como um complemento de algum texto mais completo. Portanto, a explicação em torno dos axiomas e alguns pontos importantes na geometria são enfatizados, mas existem várias informações que maioria dos textos costumam apresentar. Também não há preocupação de apresentar definições, resultados, exemplos e exercícios de forma completa. Como o texto ainda está na fase inicial de elaboração, pode conter erros.

O *plano* é um conjunto na qual seus elementos são denominados de *pontos* e uma *reta* é um subconjunto especial do plano. Neste texto, não vamos filosofar sobre planos, retas e pontos.

O plano, retas e pontos são objetos matemáticos caracterizado pelos conjuntos de axiomas ("regras") que serão apresentados aos poucos.

2 Axioma da Incidência

Axioma 1 (incidência)**.** *Dados dois pontos distintos, existe uma única reta que os contém.*

Axioma acima é da determinação das retas. Na forma informal, seria "dois pontos distintos determina uma única reta".

Axioma 2 (distinção da reta e do ponto)**.** *Toda reta possui pelo menos dois pontos distintos.*

Axioma acima garante que a reta não pode ser conjunto unitário com apenas um único ponto (com o abuso da linguagem: "ponto é distinguido da reta"), nem o conjunto vazio.

Axioma 3 (distinção da reta e do plano)**.** *Existem pelo menos três pontos não colineares.*

Axioma acima garante que "plano é mais do que uma reta". Também pode ser enunciado como "dado uma reta, existe pelo menos um ponto não pertencente a reta").

Exercício 1. Explique o significado de cada um dos axiomas acima.

Exercício 2. Defina o que é pontos serem colineares.

Exercício 3. Mostre que, se três pontos forem não colineares, então são distintos.

Exercício 4. Mostre que dois últimos axiomas pode ser substituido por

1. (Existência da reta) Existe pelo menos uma reta.
2. (distinção da reta) Dada uma reta, existe pelo menos dois ponto pertencentes a reta e um ponto não pertencente a reta.

Exercício 5. Justifique que no exercício anterior, 1. pode ser substituido por "existe pelo menos dois pontos".

Exercício 6. O conjunto que satisfaz os axiomas de incidência é denominado de plano de incidência. Mostre que o plano de incidência tem pelo menos três pontos e três retas. Dê exemplo do plano de incidência com exatamente três pontos e três retas.

Exercício 7. Faça o desenho ilustrativo para cada um dos axiomas.

3 Axiomas de ordem (na reta) e separação do plano

Os axiomas de incidência não garante que tem infinitos pontos na reta. No entanto, colocar axioma para garantir somente a existência de infinitos pontos não força a ser reta, pois pode haver "saltos" entre os pontos da reta como no conjunto $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. Para evitar que tenha saltos, precisaria garantir que tenha pontos entre dois pontos quaisquer. Alem disso, uma reta tem que continuar para ambos lados, o que requer que tenha pontos fora do segmento. Os axiomas de ordem serve para este propósito.

O ponto B está entre os pontos A e C que será denotado por $A * B * C$, satisfazem os seguintes axiomas.

Axioma 4. *$A * B * C$ então A, B e C são colineares, distintos e $C * B * A$.*

Axioma acima é uma propriedade similar a reflexitiva (simetria). O próximo axioma garante que está bem definida (não há ambiguidade).

Axioma 5. *Dados três pontos colineares e distintos, um e apenas um está entre outros dois.*

Axioma 6. *Dados dois pontos A e C, existem pontos B e D tais que $A * B * C$ e $A * C * D$.*

Axioma acima é necesário para garantir que não há saltos, assim como distinguir segmento de uma reta (com auxílio de outros axiomas).

Os axiomas de ordem ainda não garante que os pontos "fora do segmento" não pode estar no segmento. Somente garantir que "ponto fora do segmento não pode estar no segmento" ainda permite objetos indesejáveis como um segmento aberto ser considerado uma reta. Assim, precisaria garantir que "retas continuam indefinidamente", dividindo o plano.

Axioma 7 (separação do plano)**.** *Toda reta determina exatamente dois semi-planos (convexos), cuja intersecção é a própria reta.*

Aparentemente, o axioma de separação do plano obriga que a reta seja contínua por causa da reta não pode atravessar a outra. No entanto, a reta ainda pode estar cheio de "furos invisíveis" por onde pode atravessar as "curvas contínuas".

Teorema 8. *Se $A * B * C$ e $A * C * D$ então $B * C * D$ e $A * B * D$.*

O teorema acima garante que, dado dois pontos, os pontos que está "entre" e os pontos que "está fora" são distintos. Para provar o teorema, é necessario ter separação do plano. Geometria da reta (que não tem axioma da separação do plano) requer separação da reta (um ponto da reta separa a reta em duas semi retas) ou que o teorema seja adotada como axioma.

Pela separação do plano, também podemos provar o Teorema de Pasch: A reta que corta um dos lados (fora do vértice) do triangulo corta algum lado que não seja ele próprio.

Exercício 8. Defina formalmente o que é conjunto convexo e discuta o motivo pelo qual o semi-plano ser considerado convexo.

Exercício 9. Defina formalmente o que é "estar no mesmo lado". Faça um desenho ilustrativo e mostre que, se A e B estão no memo lado (relativamente a uma reta dada) e B e C também estão no mesmo lado, então A e C estão no mesmo lado.

Exercício 10. Os axiomas de ordem é chamado assim por permitir definir uma ordem na reta. Através de dois pontos distintos dados na reta, defina uma ordem dos pontos na reta (verificando que definiu uma ordem).

Exercício 11. Defina formalmente o que é um segmento e uma semi-reta.

Mostre que reta não é um segmento, nem é uma semi-reta.

Exercício 12. Faça o desenho ilustrativo para cada um dos axiomas.

4 Axioma da distância

O estudo axiomático da geometria euclidiana consiste em estabelecer as regras necessárias e suficientes para que o plano, retas e pontos forme exatamente o plano euclidiano como nos conhecemos. No entanto, caracterizar rigorosamente o plano euclidiano é trabalho, sobrando pouco tempo para estudar propriedades das figuras geométricas. Por esta razão, muitos cursos da geometria euclidiana estuda rigorosamente o sistema axiomático no início, mas a partir de algum momento, troca um conjunto de axiomas por um teorema (adotando como axioma), assim como aceitar alguns teoremas intuitivos (como "continuidade circular") sem demonstrar.

No estudo das medidas de distâncias e ângulos, precisará um pouco de trabalho e maturidade para construir medidas a partir de axiomas.

Para simplificar e acelerar o estudo, usaremos o axioma da existência das medidas na parte de distâncias e ângulos. No entanto, esta tática ainda não é suficiente para simplificar a demonstração dos teoremas sofisticadas como a continuidade circular. Quem está interessado no sistema axiomático da geometria euclidiana completa, veja o [3], principalmente na parte de distâncias e ângulos. Apesar do estudo da Geometria Euclidiana não costuma usar medidas de distâncias e ângulos como apresentados aqui, o enfoque apresentado ajuda a entender as propriedades essenciais das medidas como um todo.

Inicialmente, vamos supor que existe o conjnto dos números reais, que pode ser construido sem usar a reta (como feito na análise). A existência da distância é garantido pelo conjunto de axiomas a seguir.

Axioma 9 (existência da medida)**.** *Todo par de pontos é associado a um único número real não negativo denominado de* distância*.*

Definição 10. A *medida do segmento* é a distâsncia entre seus extremos.

Uma medida é associação do conjunto com os números reais não negativos. Pense na medida de segmento em vez da distância, para ter uma interpretação correta como medidas.

A medida do segmento AB é denotado como $\overline{AB}$.

Axioma 11 (coerência)**.** *Se $A * B * C$ então $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$.*

Axioma acima estabelece que a ordem na reta (induzida pelo axioma de ordem) deve ser compatível com dos números reais. Como axiomas de ordem foi adotado antes da bijeção com a reta, precisará assegurar esta compatibilidade.

Uma das propriedades importantes na medida é "quando divide o conjunto em dois, a medida total é a soma das medidas das partes". Para ver isto no axioma acima, pense como medida do segmento.

Os dois axiomas acima assegura que distância é uma medida. No entanto, é necessário ter alguma regra que permite medir (saber o valor), para trabalhar com a medida. No caso de distância, o seguinte axioma é apropriado.

Axioma 12 (axioma da régua ou continuidade)**.** *Existe uma correspondência biunívoca entre os pontos da reta e os números reais de forma que o valor absorto da diferença entre os números associados é a distância entre os pontos correspondêentes.*

Apesar dos axiomas de ordem e da separação dos planos ter garantido algum nível de continuidade, ainda não garante a continuidade completa. Por exemplo, o plano racional $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ satisfaz os axiomas de incidência, ordem e separação do plano, mas um arco de círculo pode "atravessar a reta" sem ter intersecção. A garantia para que nenhuma curva contínua atravesse a reta (continuidade total) é devido ao axioma de Dedekind que não foi apresentado aqui. O axioma da régua (além de permitir calcular a distância) transfere a propriedade de Dedekind do conjunto dos números reais para a reta, garantindo a continuidade. No entanto, quando trabalha com as propriedades de Dedekind, é natural construir distância em vez de adotar. Nós não vamos trabalhar com as propriedades de Dedekind para evitar complexidades.

Proposição 13 (distância nula)**.** *A ditância entre dois pontos é nula se, e somente se, dois pontos são coincidentes.*

No estudo das medidas, é importante estudar o conjunto que tem a medida nula. Se pensar como segmento, estará determinando os segmentos de medida nula.

Exercício 13. Demonstre a Proposição 13.

Exercício 14. Defina o "estar entre" dois pontos da reta usando o "estar entre" dois números reais (escreva formalmente a definição) e demonstre que os axiomas 5, 6 e 11 pode ser considerado como conseqüência desta definição.

Apesar da demonstração não ser simples e precisar dos conceitos de ângulos, seguintes teoremas são importantes para o estudo da existência de certos objetos geométricos.

Teorema 14 (princípio da continuidade circular)**.** *Um arco circular que liga os pontos dentro e ponto fora de um círculo intercepta o círculo em um único ponto.*

Teorema 15 (princípio da continuidade elementar)**.** *Um segmento que liga os pontos dentro e ponto fora do círculo intercepta o círculo em um único ponto.*

Apesar de precisar de ângulos e congruências para demonstrar, seguinte teorema é importante.

Teorema 16 (desigualdade triangular)**.** $\overline{AC} \leq \overline{AB} + \overline{BC}$.

Exercício 15. Prove o Teorema 15 no caso do segmento passar no centro do círculo.

Exercício 16. Defina formalmente o círculo e mostre que todo círculo tem infinitos pontos.

Exercício 17. Faça o desenho ilustrativo para cada um dos axiomas.

5 Axioma dos ângulos

Da mesma forma como foi feito na distância, vamos adotar o axioma do transferidor para assegurar a existência da medida do ângulo. No caso de ângulos, não precisará de axiomas equivalentes a do Dedekind, o que deixaria razoavelmente simples de trabalhar sem os "axiomas do transferidor", que podem ser substituidos pelos axiomas do ângulo reto (esquadro) e congruências. No entanto, vamos adotar o transferidor para fazer "paralelo" com a da régua, assim como familiaizar melhor com as medidas. Preste atenção na semelhança dos axiomas em relaçao aos axiomas das retas, para entender as duas propriedades de maior destaque das medidas que são existência e somabilidade.

Axioma 17 (existência do ângulos)**.** *Todo ângulo é associado a um único número real não negativo denominado de medidas do ângulo.*

Uma semi-reta divide o semi-pano quando ele tem a origem na reta que determina o semi-plano e está contido no semi-plano.

Sendo $\angle AOC$ (também pode ser denotado como $\widehat{AOC}$ ou $A\hat{O}B$), o ângulo entre as semi retas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OC}$ e denotando a medida do ângulo $\angle AOC$ que é o número real assoacido a ele por $\measuredangle AOC$ (também pode ser denotado como $m\angle AOC$), temos

Axioma 18 (coerência)**.** *Se $\overrightarrow{OB}$ divide o ângulo $\measuredangle AOC$, temos $m\measuredangle AOC = m\measuredangle AOB + m\measuredangle BOC$.*

Uma semi-reta divide o ângulo quando intercepta qualquer segmento que tem os extremos contidos em cada uma das semi-retas que determinam o ângulo.

Não confundir entre $\angle AOC$ e $\measuredangle AOC$. Também ficar atento ao fato de $\angle$ (ângulo) não é $<$ (menor), nem é $\langle$ (delimitador). Quando não há ambiguidade, podemos usar a notação de ângulos também para suas medidas.

Axioma 19 (axioma do transferidor)**.** *Dado um semi-palno, existe uma correspondência biunívoca entre o conjunto das semi-retas de mesma origem que dividem o semi-plano e o conjunto dos números reais em $[0, 180]$ de forma que o valor absoluto da diferença entre os números seja a medida do ângulo entre as semi-retas correspondentes.*

Proposição 20 (medida nula)**.** *Médida de um ângulo é nulo se, e somente se, as semi-retas que determinam forem coincidentes.*

Exercício 18. Prove a Proposição 20.

Exercício 19 (ângulo raso)**.** Prove, se $A * O * B$ então S_{OA} é associado a 0 e S_{OB} é associado a 180 ou vice-versa. Conclua então que $m\angle AOB = 180°$.

Exercício 20. Mostre que, o ângulo oposto ao vértice, formado pelas duas retas concorrentes tem a mesma medida.

Exercício 21. Defina o ângulo reto a partir do ângulo suplementar e mostre que todo ângulo reto é de 90° para o nosso transferidor (de 0 a 180, estabelecido pelo axioma do transferidor).

Exercício 22. Prove que, para cada ponto da reta dada, existe uma única reta ortogonal passando por este ponto.

Exercício 23. Prove a existência da reta bissetriz do ângulo.

Em geral, os ângulos importantes que aparecem na geometria euclidiana são frações ou multiplos do ângulo reto (ou multiplos ou frações dos ângulos já existentes). Por esta razão, o ângulo reto costuma ser usado como unidade na geometria euclidiana, sendo denotado por $\angle R$.

Exercício 24. Faça o desenho ilustrativo para cada um dos axiomas.

6 Congruências

Objetos matemáticos não podem ser transportados. Então comparamos com uma cópia que tem a mesma medida (intuitivamente, objetos matemáticos "movido" é uma cópia). Precisamos estar atentos com a diferença entre coincidentes (igual) e congruentes (mesma medida).

Coincidentes: Quando representação é diferente, mas é o mesmo objeto. Por exemplo, $x + y = 0$ e $2x + 2y = 0$ representa a mesma reta na geometria analítica, sendo coincidentes como retas.

Congruentes: Quando todas as características selecionadas (consideradas importantes) são iguais.

No caso da geometria euclidiana, a medida do segmento e medidas do ângulo serão considerados essenciais.

Equivalêntes: Quando algumas características em consideração no contexto (nem todas existentes) são iguais. Por exemplo, as figuras geométricas com mesma área costumam ser chamados de equivalêntes no estudo das áreas.

Definição 21. Dois segmentos são ditos *congruentes* quando tem a mesma medida e dois ângulos são ditos *congruentes* quanto tem a mesma medida.

Com o abuso da linguagem, quando não há ambiguidade, as vezes dizemos que segmentos ou ângulos são iguais para designar os segmentos ou ângulos congruentes.

O triângulo tem seis medidas e queremos garantir a igualdade somente com a comparação de três medidas.

Definição 22. Dois triângulos são congruentes quando seus ângulos e lados (segmentos) são congruentes na ordem estabelecida.

Axioma 23 (LAL). *Dado os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$, $\overline{AB} = \overline{DE}$, $\angle ABC \cong \angle DEF$ e $\overline{BC} = \overline{EF}$ implica que dois triângulos são congruentes.*

> Mesmo sem o critério de congruências, ainda é possível efetuar cálculos de comprimentos e das áreas através da integração. Tal geometria constitui a Geometria Diferencial. Para ter o critério de congruência usual, a geometria deverá apresentar medidas uniformes, o que permite calcular distâncias entre dois pontos a partir de segmentos poligonais alternativos, ou calcular a área a partir do seu contorno poligonal. Tal geometria apresentará curvaturas constantes (o que não explicaremos aqui), o que torna euclidiana, hiperbolica ou eliptica.
> Dado um ponto fora da reta, pergunta se existe uma reta paralela passando por ele. No caso de elíptica, não existe paralelos. No caso da euclidiana, existe uma única reta paralela. No caso da hiperbólica, existe mais de uma (usando isto, prova-se que tem infinitas) reta paralela.
> No caso da geometria eliptica, reta é "um círculo", o que distingue da reta real, além da propriedade dos paralelos.

Exercício 25. Defina o triângulo isóceles e estude suas propriedades.

Exercício 26. Explique a diferença entre iguais, congruentes e equivalentes, dando exemplos.

Exercício 27. Dado dois ângulos com a mesma medida, mostre que, quando for sobrepostos de forma que um lado coincida e outro lado esteja no mesmo lado (relativamente ao lado sobreposto), então outro lado também será sobreposto. Note que "sobrepor " na geometria significa criar uma cópia idêntica sobre outro. Não esquecer do desenho.

Exercício 28. Prove o caso da congruência de triângulos por ALA.

Exercício 29. Prove o caso da congruência de triângulos por LLL.

Exercício 30. Faça o desenho ilustrativo para cada um dos axiomas.

7 Retas paralelas

A geometria euclidiana difere da hiperbólica (e também da eliptica) exatamente na questão dos paralelos. Duas retas no plano são ditas paralelas quando eles não tem pontos em comum.

Axioma 24 (existência e unicidade dos paralelos). *Dado uma reta e um ponto fora dela, existe uma única reta paralela a a reta dada, passando pelo ponto dado*

O axioma acima é forma mais usada entre os axiomas equivalênte ao quinto postulado de Euclides (ou dodécimo axioma de Euclides).

Agora temos todos axiomas necessários para assegurar que o plano, retas e pontos formam o plano euclidiano. Assim, podemos estudar as propriedades das figuras geometricas sem ter restrições.

Um dos resultados imediatos sobre retas paralelas é a igualdade dos ângulos alternos internos de uma reta que cruza as duas paralelas, e a soma dos ângulos internos de um triangulo.

A definição formal dos ângulos correspondêntes, internos e alternos internos são deixados como exercício. Também serão deixados como exercício, as demonstrações dos reesultados a seguir.

Teorema 25 (ângulos alternos internos). *Quando uma reta intercepta outras duas retas (distintas), então são equivalentes*

1. *As duas retas são paralelas*
2. *Ângulos correspondêntes são iguais*
3. *Ângulos alternos internos são iguais*
4. *Ângulos colaterais internos são suplementares.*

Teorema 26 (ângulo externo). *Ângulo externo de um triângulo é igual a soma de dois ângulos não adjacentes.*

Corolário 27 (soma do ângulo interno). *Soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é $2\angle R$.*

No caso da geometria hiperbólica ou elíptica, a soma dos ângulos internos variam e serve para obter a área do triângulo. Isto implica em caso de congruência AAA. Na geometria euclidiana, os triângulos com três ângulos congruentes não é necessariamente congruentes, denominados de semelhantes.

Exercício 31. Faça o desenho ilustrativo para o axioma.

Exercício 32. Prove que "quando uma reta intercepta uma de duas retas paralelas, entao intercepta a outra".

Exercício 33 (paralelogramo)**.** Mostre que no caso de um quadrilátelo, são equivalentes:

1. É um paralelogramo
2. Lados opostos são congruentes
3. Ângulos opostos são congruentes
4. Ângulos adjacentes são suplementares.
5. Os diagonais cruzam no ponto médio.

Exercício 34 (losango)**.** Mostre que um paralelogramo é losango se, e somente se, diagonais cruzam ortogonalmente, mas que nem todo quadrilátelo na qual o diagonal cruza ortogonalmente é losango.

Exercício 35 (retângulo)**.** Mostre que um paralelogramo é retângulo se, e somente se diagonais são congruentes, mas que nem todo quadrilátelo com diagonais congruentes é um retângulo.

Exercício 36. Dado duas retas paralelas, prove que a distância dos pontos de uma reta a outra sempre é constante.

Exercício 37. Prove que o axioma de paralelos é equivalente ao Quinto Postulado de Euclides (ou Dodécimo Axioma de Euclides): "se uma reta intercepta outras duas retas (distintas) formando dois ângulos colaterais internos cuja soma é inferior a $2\angle R$, então estas duas retas interceptam (não são paralelas).

Referências

[1] Barbosa, João. L. Marques, "Geometria Euclidiana plana", SBM, 2005.

[2] Rezende, Eliane Q. F. e Queiroz, Maria L. B de, Geometria Euclidiana plana e construções geométricas.

[3] Greenberg, Martin J., "Euclidean and non-euclidean geometries", W. H. Freeman and company, 1993.